Približné metódy riešenia bezčasovej SchR

1. Uvažujme dvojhladinový systém, pre ktorý je základná hladina 100 eV dvakrát degenerovaná a excitovaná hladina 200 eV nie je degenerovaná. Na systém pôsobí slabá porucha, ktorá nezávisí na čase a sníma opísanú degeneráciu. Vysvetlite, ako treba postupovať pri výpočte energetických hladín systému s poruchou do druhého rádu poruchovej teórie.
   Predveďte výpočet pre poruchu, ktorej elementy sú po riadkoch 1, 2, 3, potom 2, 3, 4 a nakoniec 3, 4, 5 v elektrónvoltoch.

2. Vysvetlite, ako môžme na začiatku, ešte bez počítania, určiť, či bude stacionárna poruchová teória konvergovať. Alebo inak: za akých podmienok konverguje a prečo je to tak?

3. Vysvetlite bez počítania, ako sa pri Zeemanovom jave štiepi prvá excitovaná hladina elektrónu v atóme vodíka porovnávajúc situáciu pred a po zapnutí magnetického poľa.

4. Vysvetlite, čo je princípom variačnej metódy a čo je jej cieľom.

Rozptyl

5. Čo to znamená riešiť rozptylovú úlohu?
   Čo je typicky zadané?
   Akú fyzikálnu veličinu chceme predpovedať, keďže ju dostávame ako výstup z experimentu?
   Aká komplexná veličina obsahuje úplnú informáciu o výsledku rozptylu?

V čom - ak vôbec - sa odpovede pre trojrozmerný priestor líšia od odpovedí v jednorozmernom prípade?

6. Napíšte, akú rovnicu riešime, keď stojíme pred úlohou vyriešiť rozptylovú úlohu. Aká je jej okrajová podmienka? V čom - ak vôbec - sa odpovede pre trojrozmerný priestor líšia od odpovedí v jednorozmernom prípade?

7. Napíšte, akú rovnicu riešime, keď stojíme pred úlohou vyriešiť rozptylovú úlohu. Vieme ju vyriešiť presne? Ak nie, aké priblíženie použijeme v najnižšom ráde presnosti? Čo je vtedy jej riešením?
   V čom - ak vôbec - sa odpovede pre trojrozmerný priestor líšia od odpovedí v jednorozmernom prípade?

8. Napíšte, akú rovnicu riešime, keď stojíme pred úlohou vyriešiť rozptylovú úlohu. Aké je jej riešenie pomocou Greenovej funkcie? Ako splníme okrajovú podmienku a ako z riešenia zistíme amplitúdu rozptylu?
   V čom - ak vôbec - sa odpovede pre trojrozmerný priestor líšia od odpovedí v jednorozmernom prípade?

9. Prečo výsledkom riešenia rozptylovej úlohy nie sú vypočítané energetické hladiny?

10. Aké sú povolené energie v rozptylovej úlohe, pre ktorú je potenciál rôzny od nuly iba v konečnej oblasti? Odpoveď vysvetlite.

11. Uvažujme rozptyl v 1 rozmere, pre ktorý máme riešenie. Čo sú komplexné veličiny r a t a ako súvisia s meraním?
    Ako súvisia so zachovaním pravdepodobnosti pre výskyt rozptylovanej častice?

12. Uvažujme rozptyl v 1 rozmere. Aká je typická okrajová podmienka tejto úlohy? Aký je jej dôsledok pre riešenie?

13. Prečo nie je definovaný diferenciálny účinný prierez pre rozptyl v jednom rozmere?

14. Tok hustoty pravdepodobnosti sme definovali ako $\vec{j}(\vec{r}) = C(\Psi(\vec{r})^* \vec{\nabla}\Psi(\vec{r}) - (\vec{\nabla}\Psi(\vec{r}))^*\Psi(\vec{r}))$, kde $C = \hbar/(2im)$. Odvoďte, čomu je rovný tok hustoty pravdepodobnosti v kvantovej teórii pre jednu časticu s vlnovou funkciou v tvare rovinnej vlny postupujúcej v smere osi z s ostrou hybnosťou $\hbar q$. Okomentujte, ako súvisí váš výsledok s klasickým výsledkom pre zväzok častíc s hustotou ρ a rýchlosťou $\vec{v}$.

15. Uvažujte stacionárny stav pre rozptyl v 1 rozmere popísaný vlnovou funkciou Ψ. Tok hustoty pravdepodobnosti sme definovali v 3 rozmeroch ako $\vec{j}(\vec{r}) = C(\Psi(\vec{r})^* \vec{\nabla}\Psi(\vec{r}) - (\vec{\nabla}\Psi(\vec{r}))^*\Psi(\vec{r}))$, kde $C = \hbar/(2im)$. Odvoďte, čomu je rovný tok hustoty pravdepodobnosti v oblasti za rozptylovým centrom v uvažovanom jednorozmernom prípade.
Vysvetlite, či môže byť väčší ako pred rozptylovým centrom.

16. Navrhnite tvar funkcií Ψ_{in} a Ψ_{out} pri opise rozptylu v jednom rozmere, ak poznáme riešenie pre celkovú vlnovú funkciu stacionárneho stavu v oblasti pred silovým centrom aj v oblasti za silovým centrom.

17. Aké okrajové zošívacie podmienky treba uvažovať na kraji oblasti s nenulovým potenciálom, pričom skok v potenciáli je konečný?
Čo sa zmení, ak je skok v potenciáli nekonečný (napr. pre potenciál častice viazanej "na úsečke")?

18. Uvažujme rozptyl v troch rozmeroch v kvantovej teórii. Vysvetlite, čo je to amplitúda rozptylu.

19. Uvažujme rozptyl v troch rozmeroch. Vysvetlite, čo je to diferenciálny účinný prierez.

20. Uvažujme rozptyl v troch rozmeroch v kvantovej teórii. Vysvetlite, v čom sa líši definícia diferenciálneho účinného prierezu od definície tejto veličiny v klasickej teórii.

21. Uvažujme rozptyl v troch rozmeroch v kvantovej teórii. Vysvetlite, do ktorého smeru sa rozptýli najviac častíc (ak je taký smer), v prípade, že sa na silovom centre rozptyľuje iba s-vlna.
    Odpoveď by mala dokumentovať, že rozumiete súvisu medzi pojmami "diferenciálny účinný prierez ämplitúda rozptylu- "rozptyl iba v s vlne".

22. Uvažujme rozptyl v troch rozmeroch v kvantovej teórii. Vysvetlite, do ktorého smeru sa rozptýli najviac častíc (ak je taký smer), v prípade, že sa na silovom centre rozptyľuje iba p-vlna.
    Odpoveď by mala dokumentovať, že rozumiete súvisu medzi pojmami "diferenciálny účinný prierez ämplitúda rozptylu- "rozptyl iba v p vlne".

23. Uvažujme rozptyl v troch rozmeroch v kvantovej teórii. Navrhnite amplitúdu rozptylu, ktorá dá najviac rozptýlených častíc v smere naspäť ku zdroju (čiže najpravdepodobnejšie nastáva v rozptyle odraz).

24. Uvažujme rozptyl v troch rozmeroch v kvantovej teórii. Vysvetlite slovne výsledok Rutherfordovho experimentu: kam sa

rozptylovala väčšina častíc? A kam sa ich rozptylovalo najmenej?
Prečo tento rozptylový experiment dokázal existenciu jadra v atómoch zlata?

25. Uvažujme, že v Rutherfordovom experimente umiestnime detektor "napravoöd zlatého terčíka z pohľadu zdroja alfa častíc a to raz kolmo na smer, v ktorom zväzok dopadá, a raz šikmo pod 45-stupňovým uhlom voči smeru "dopredu"pre dopadajúce častice. Určte pomer rozptýlených častíc zachytených detektorom v opísaných dvoch prípadoch. *Amplitúda rozptylu je úmerná* $1/(\sin\vartheta/2)^2$.

26. Vysvetlite, prečo vo všeobecnosti nevyjde rovnaký výsledok v Bornovej aproximácii ako pri rozklade do parciálnych vĺn. Akú projekciu treba odvodiť z výsledku v Bornovej aproximácii a akú úpravu výsledku z parciálnych vĺn, aby sa tieto dva výsledky rovnali?

27. Vysvetlite, v čom je výsledok podľa Bornovej aproximácie iba aproximáciou?

28. Uvažujme Rutherfordov experiment pre tienený a pre netienený potenciál toho istého jadra, resp. v prvom prípade pre silno tienený (napr.blízkymi miónmi v krátkožijúcom mezoatóme) potenciál a v druhom prípade pre veľmi slabo tienený (napr. iba elektrónmi vo vyšších excitovaných stavoch). Čo môžeme povedať o porovnaní účinných prierezov pre rozptyl alfa častíc na týchto dvoch potenciáloch? Odpoveď vysvetlite.

29. Čo je to formfaktor a prečo sme ho zaviedli?
Ktorá sústava má väčší formfaktor pri Rutherfordovom rozp-

tyle: Ak je elektrický náboj jadra Q celý rozložený len na povrchu jadra s polomerom R, alebo ak je ten istý náboj homogénne rozložený v guli o polomere R?

30. Uvažujme rozptyl, ktorý nastáva iba v s a p vlne, vo vyšších vlnách už nenastáva. Čo to znamená pre fázové posuny týchto vyšších vĺn?
    Nech navyše vieme, že pri danej energii je fázový posun v s a p vlne rovnaký. V akom smere sa bude rozptylovať najviac častíc?
    Hlavným výsledkom parciálnych vĺn bol vzťah
    $f(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\, e^{i\delta_\ell}\, \sin\delta_\ell\, P_\ell(cos\vartheta)$.

31. Čo by ste vyzdvihli, že je hlavná myšlienka opisu rozptylu pomocou parciálnych vĺn.
    V akom prípade je vhodnou metódou pre riešenie rozptylovej úlohy?

32. Optická teoréma je vzťah $\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\, Im f(\vartheta, \varphi)|_{\vartheta=0}$. Overte, že naozaj platí pre rozptyl, ktorý nastáva iba v s vlne.

33. Aproximujme amplitúdu rozptylu alfa častice na alfa častici v ťažiskovej sústave zrážky komplexnou konštantou C, teda bez závislosti na uhloch. Čomu by sa v tejto aproximácii rovnal celkový účinný prierez uvažovaného rozptylu?
    Pomôcka: v odpovedi nezabudnite zohľadniť, že ide o rozptyl identických častíc
    Dostávame rozdiel voči odpovedi, ktorá by neuvažovala, že ide o identické častice? Ak áno, je podľa správnej odpovede rozptyl viac alebo menej pravdepodobný?

34. Aproximujme amplitúdu rozptylu nepolarizovaného zväzku elektrónov na druhom takom istom nepolarizovanom zväzku

elektrónov v ťažiskovej sústave zrážky komplexnou konštantou C, teda bez závislosti na uhloch. Čomu by sa v tejto aproximácii rovnal celkový účinný prierez uvažovaného rozptylu elektrónu na elektróne?
Pomôcka: v odpovedi nezabudnite zohľadniť, že ide o rozptyl identických častíc, pričom s pravdepodobnosťou $3/4$ *je spinový stav rozptylovaných elektrónov symetrický triplet a s pravdepodobnosťou* $1/4$ *je ním antisymetrický singlet.*
Dostávame rozdiel voči odpovedi, ktorá by neuvažovala, že ide o identické častice? Ak áno, je podľa správnej odpovede rozptyl viac alebo menej pravdepodobný?

Časová poruchová metóda

35. Vysvetlite, ako je možné, že počítajúc pravdepodobnosť prechodu podľa časovej poruchovej metódy môže vyjsť výsledok väčší ako jedna.

36. Uvažujme výsledky časovej poruchovej metódy pre nabitý JHO v základnom stave (na začiatku) v homogénnom elektrickom poli. Pole je najskôr vypnuté a neskôr zapnuté, detaily jeho časového priebehu tu nie sú dôležité. Nech sú parametre zadania také, že pravdepodobnosť prechodu JHO na prvý excitovaný stav po odznení danej poruchy je rádovo 0.1, teda jedna desatina. Vysvetlite, čomu bude rádovo rovná pravdepodobnosť excitácie JHO na druhý excitovaný stav po odznení poruchy.

37. V čom je výnimočná harmonická porucha voči poruchám s iným časovým priebehom?

38. Čo by ste povedali (*stručne*), v čom je výnimočnosť Einsteinových vzťahov pre koeficienty emisie a absorpcie?

39. Čo hovorí Fermiho zlaté pravidlo?
Nevadí, ak si nebudete pamätať konštanty.

40. Slovne vysvetlite, ako z Fermiho zlatého pravidla vypočítame pravdepodobnosť ionizácie atómu vodíka za jednotku času pod vplyvom dopadajúcej el-mag vlny.

41. Slovne vysvetlite, ako z Fermiho zlatého pravidla vypočítame pravdepodobnosť ionizácie ("vykopnutia elektrónu") z konečnej potenciálovej jamy za jednotku času pod vplyvom dopadajúcej el-mag vlny.

Matematický formalizmus

42. V čom sa líši Hilbertov priestor od vektorového priestoru?

43. Je množina všetkých reálnych čísel Hilbertovým priestorom, ak je vektorový súčet štandardným súčtom reálnych čísel a skalárny súčin ich štandardným súčinom?

44. V čom sa líši Hilbertov priestor od vektorového priestoru?
Zadajte potrebné detaily, ak je to vôbec možné, aby boli kvadraticky integrovateľné funkcie na reálnej osi Hilbertovým priestorom.

45. Uvažujme operátor $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ s definičným oborom rovným *(i)* kvadraticky integrovateľným funkciám, ktoré sú *(ii)* definované na intervale $<0, 1>$, a *(iii)* rovné nule v krajných bodoch intervalu, a navyše sú *(iv)* diferencovateľné na danom intervale.
Ukážte, že tento operátor nie je hermitovský.

46. Uvažujme operátor $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$ s definičným oborom rovným kvadraticky integrovateľným dvakrát diferencovateľným funkciám na intervale $< 0, 1 >$, ktoré sú rovné nule v krajných bodoch intervalu.
Overte, či je tento operátor hermitovský a či teda má častica na úsečke poctivý hermitovský hamiltonián, takže časová SchR má zmysel a vieme predpovedať jej časový vývoj.

47. Kvantový systém je v stave $|\Psi\rangle$. Vysvetlite, čomu sa rovná a ako sa nazýva $\langle x|\Psi\rangle$.
Vysvetlite, čomu sa rovná a ako sa nazýva $\langle p|\Psi\rangle$.
Ako sa pomocou bra a ket vektorov zapíše Fourierova transformácia vlnovej funkcie $\Psi(x)$?

48. Uvažujme stav $|\Psi\rangle = A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}|n\rangle$ ako stav JHO, kde $|n\rangle$ je n-tý stacionárny stav JHO a A je normovacia konštanta. Je tento stav z Hilbertovho priestoru?
Aká je (by bola) stredná energia JHO v tomto stave? Patrí tento stav do definičného oboru hamiltoniánu?
Je možné vo všeobecnosti definovať neohraničené operátory na celom Hilbertovom priestore?

49. Uvažujme zdroj elektrónov emitujúci zväzok nepolarizovaných elektrónov. Aká matica hustoty popisuje spinový stav elektrónu vo zväzku? Odpoveď vysvetlite.

50. Uvažujme zdroj elektrónov emitujúci zväzok úplne polarizovaných elektrónov, každý so spinom v smere "dolu" voči osi z. Aká matica hustoty popisuje spinový stav elektrónu vo zväzku? Odpoveď vysvetlite.

51. Uvažujme zdroj elektrónov emitujúci zväzok čiastočne polarizovaných elektrónov, každý tretí so spinom v smere "dolu"

voči osi z zatiaľ čo prvé dva sú so spinom "hore" voči osi z. Aká matica hustoty popisuje spinový stav elektrónu vo zväzku? Odpoveď vysvetlite.

52. Uvažujme zväzok elektrónov, ktoré pochádzajú z rozpadov bezspinových častíc na elektrón a pozitrón. Pripomeňme, že po rozpade je sústava v stave $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[\,|\uparrow\rangle\,|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle\,|\uparrow\rangle\,]$, kde prvý spinový stav je elektrónový a druhý pozitrónový. Pozitróny nedetegujeme. Aká matica hustoty popisuje spinový stav elektrónu vo zväzku? Odpoveď vysvetlite.

53. Uvažujme zväzok elektrónov, ktoré pochádzajú z rozpadov častíc so spinom 1 (presnejšie so spinom $\hbar$) a priemetom spinu na os z rovným $+1$ $(+\hbar)$. na elektrón a pozitrón. V akom spinovom stave je $e^-\,e^+$ sústava v stave po rozpade? Aká matica hustoty popisuje spinový stav elektrónu vo zväzku? Odpoveď vysvetlite.
Aká je predpoveď pre strednú hodnotu merania S_z týchto elektrónov z navrhnutej matice hustoty. Dáva vaša odpoveď zmysel?

54. Napíšte, čomu je rovná stredná hodnota fyzikálnej veličiny A, ktorá je reprezentovaná maticou A, ak túto veličinu meriame na kvantovom systéme popísanom maticou hustoty.
Ilustrujte odpoveď na príklade spinu nepolarizovaných elektrónov, ktoré prechádzajú cez Sternov-Gerlachov prístroj SG_x, kde $A = S_x$.

Rotácie

55. Na prednáške (nahrávke) sme ukázali, že výsledok skladania dvoch spinov 1/2 možno prezentovať ako unitárnu 4x4 ma-

ticu, ktorej elementy sú Clebsch-Gordanove koeficienty. Neskôr sme na prednáške (nahrávke) predviedli skladanie dvoch vektorov, teda spinov 1. Zvoľte vhodnú bázu a napíšte, aká unitárna matica odpovedá tomuto skladaniu.

56. Predveďte skladanie spinu 1/2 a spinu 1 (teda nájdite CG koeficienty), pričom overíte vzťahy potrebné pri opise Zeemanovho javu pre elektrón v prvom excitovanom stave atómu vodíka.

57. Vychádzajúc z $\hat{J}_- \, |j\, m\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\, |j\, m-1\rangle$ určte matice J_-, J_+, J_x, J_y pre spin $j=1$.
Určte aj maticu J_z a vypočítajte maticu $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$.
Overte aspoň pre jeden prípad, že $[\, J_i\, ,\, J_j\,] = i\, \varepsilon_{ijk}\, J_k$.
Naozaj matica J^2 komutuje s maticami J_x, J_y a J_z?

58. Určte rotačnú maticu odpovedajúcu rotácii spinu 1/2 okolo osi y o uhol $\pi/2$. Výsledok použite na rotáciu spinora $\binom{1}{0}$ a okomentujte zhodu s očakávaním, čo má výjsť.