

Jednoduché otázky z predmetu kvantová teória 2

Približné metódy riešenia bezčasovej SchR

1. Uvažujme dvojhladinový systém, pre ktorý je základná hladina 100 eV dvakrát degenerovaná a excitovaná hladina 200 eV nie je degenerovaná. Na systém pôsobí slabá porucha, ktorá nezávisí na čase a sníma opísanú degeneráciu. Vysvetlite, ako treba postupovať pri výpočte energetických hladín systému s poruchou do druhého rádu poruchovej teórie. Predveďte výpočet pre poruchu, ktorej elementy sú po riadkoch 1, 2, 3, potom 2, 3, 4 a nakoniec 3, 4, 5 v elektrónvoltoch.
2. Vysvetlite, ako môžeme na začiatku, ešte bez počítania, určiť, či bude stacionárna poruchová teória konvergovať. Alebo inak: za akých podmienok konverguje a prečo je to tak?
3. Vysvetlite bez počítania, čo sa udeje so základnou hladinou elektrónu v atóme vodíka po zapnutí vonkajšieho (*i*) elektrického a (*ii*) magnetického poľa.
4. Vysvetlite bez počítania, ako sa pri Starkovom jave štiepi prvá excitovaná hladina elektrónu v atóme vodíka porovnávajúc situáciu pred a po zapnutí elektrického poľa.
5. Vysvetlite bez počítania, ako sa pri Zeemanovom jave štiepi prvá excitovaná hladina elektrónu v atóme vodíka porovnávajúc situáciu pred a po zapnutí magnetického poľa.
6. Vysvetlite, čo je princípom variačnej metódy a čo je jej cieľom.

Rozptyl

7. Čo to znamená riešiť rozptylovú úlohu?
Čo je typicky zadané?
Akú fyzikálnu veličinu chceme predpovedať, keďže ju dostávame ako výstup z experimentu?
Aká komplexná veličina obsahuje úplnú informáciu o výsledku rozptylu?
V čom - ak vôbec - sa odpovede pre trojrozmerný priestor líšia od odpovedí v jednorozmernom prípade?
8. Napíšte, akú rovnicu riešime, keď stojíme pred úlohou vyriešiť rozptylovú úlohu. Aká je jej okrajová podmienka? V čom - ak vôbec - sa odpovede pre trojrozmerný priestor líšia od odpovedí v jednorozmernom prípade?
9. Napíšte, akú rovnicu riešime, keď stojíme pred úlohou vyriešiť rozptylovú úlohu. Vieme ju vyriešiť presne? Ak nie, aké priblíženie použijeme v najnižšom ráde presnosti? Čo je vtedy jej riešením?
V čom - ak vôbec - sa odpovede pre trojrozmerný priestor líšia od odpovedí v jednorozmernom prípade?
10. Napíšte, akú rovnicu riešime, keď stojíme pred úlohou vyriešiť rozptylovú úlohu. Aké je jej riešenie pomocou Greenovej funkcie? Ako splníme okrajovú podmienku a ako z riešenia zistíme amplitúdu rozptylu?
V čom - ak vôbec - sa odpovede pre trojrozmerný priestor líšia od odpovedí v jednorozmernom prípade?
11. Prečo výsledkom riešenia rozptylovej úlohy nie sú vypočítané energetické hladiny?
12. Aké sú povolené energie v rozptylovej úlohe, pre ktorú je potenciál rôzny od nuly iba v konečnej oblasti? Odpoveď

vysvetlite.

13. Uvažujme rozptyl v 1 rozmere, pre ktorý máme riešenie. Čo sú komplexné veličiny r a t a ako súvisia s meraním? Ako súvisia so zachovaním pravdepodobnosti pre výskyt rozptylovej častice?
14. Uvažujme rozptyl v 1 rozmere. Aká je typická okrajová podmienka tejto úlohy? Aký je jej dôsledok pre riešenie?
15. Prečo nie je definovaný diferenciálny účinný prierez pre rozptyl v jednom rozmere?
16. Tok hustoty pravdepodobnosti sme definovali ako $\vec{j}(\vec{r}) = C(\Psi(\vec{r})^* \vec{\nabla} \Psi(\vec{r}) - (\vec{\nabla} \Psi(\vec{r}))^* \Psi(\vec{r}))$, kde $C = \hbar/(2im)$. Odvodte, čomu je rovný tok hustoty pravdepodobnosti v kvantovej teórii pre jednu časticu s vlnovou funkciou v tvare rovinatej vlny postupujúcej v smere osi z s ostrou hybnosťou $\hbar q$. Okomentujte, ako súvisí váš výsledok s klasickým výsledkom pre zväzok častíc s hustotou ρ a rýchlosťou $\vec{v}$.
17. Uvažujte stacionárny stav pre rozptyl v 1 rozmere popísaný vlnovou funkciou Ψ . Tok hustoty pravdepodobnosti sme definovali v 3 rozmeroch ako $\vec{j}(\vec{r}) = C(\Psi(\vec{r})^* \vec{\nabla} \Psi(\vec{r}) - (\vec{\nabla} \Psi(\vec{r}))^* \Psi(\vec{r}))$, kde $C = \hbar/(2im)$. Odvodte, čomu je rovný tok hustoty pravdepodobnosti v oblasti za rozptylovým centrom v uvažovanom jednorozmernom prípade. Vysvetlite, či môže byť väčší ako pred rozptylovým centrom.
18. Navrhňte tvar funkcií Ψ_{in} a Ψ_{out} pri opise rozptylu v jednom rozmere, ak poznáme riešenie pre celkovú vlnovú funkciu stacionárneho stavu v oblasti pred silovým centrom aj v oblasti za silovým centrom.

19. Aké okrajové zošívacie podmienky treba uvažovať na kraji oblasti s nenulovým potenciálom, pričom skok v potenciáli je konečný?
Čo sa zmení, ak je skok v potenciáli nekonečný (napr. pre potenciál častice viazanej "na úsečke")?
20. Uvažujme rozptyl v troch rozmeroch v kvantovej teórii. Vysvetlite, čo je to amplitúda rozptylu.
21. Uvažujme rozptyl v troch rozmeroch. Vysvetlite, čo je to diferenciálny účinný prierez.
22. Uvažujme rozptyl v troch rozmeroch v kvantovej teórii. Vysvetlite, v čom sa líši definícia diferenciálneho účinného prierezu od definície tejto veličiny v klasickej teórii.
23. Uvažujme rozptyl v troch rozmeroch v kvantovej teórii. Vysvetlite, do ktorého smeru sa rozptýli najviac častíc (ak je taký smer), v prípade, že sa na silovom centre rozptyľuje iba s-vlna.
Odpoveď by mala dokumentovať, že rozumiete súvisu medzi pojmami "diferenciálny účinný prierez" a "amplitúda rozptylu" a "rozptyl iba v s vlne".
24. Uvažujme rozptyl v troch rozmeroch v kvantovej teórii. Vysvetlite, do ktorého smeru sa rozptýli najviac častíc (ak je taký smer), v prípade, že sa na silovom centre rozptyľuje iba p-vlna.
Odpoveď by mala dokumentovať, že rozumiete súvisu medzi pojmami "diferenciálny účinný prierez" a "amplitúda rozptylu" a "rozptyl iba v p vlne".
25. Uvažujme rozptyl v troch rozmeroch v kvantovej teórii. Navrhnete amplitúdu rozptylu, ktorá dá najviac rozptýlených

častíc v smere naspäť ku zdroju (čiže najpravdepodobnejšie nastáva v rozptyle odraz).

26. Uvažujme rozptyl v troch rozmeroch v kvantovej teórii. Vysvetlite slovne výsledok Rutherfordovho experimentu: kam sa rozptylovala väčšina častíc? A kam sa ich rozptylovalo najmenej?

Prečo tento rozptylový experiment dokázal existenciu jadra v atónoch zlata?

27. Uvažujme, že v Rutherfordovom experimente umiestnime detektor "napravo od zlatého terčika z pohľadu zdroja alfa častíc a to raz kolmo na smer, v ktorom zväzok dopadá, a raz šikmo pod 45-stupňovým uhlom voči smeru "dopredu" pre dopadajúce častice. Určte pomer rozptýlených častíc zachytených detektorom v opísaných dvoch prípadoch. *Amplitúda rozptylu je úmerná $1/(\sin \vartheta/2)^2$.*

28. Vysvetlite, prečo vo všeobecnosti nevyjde rovnaký výsledok v Bornovej aproximácii ako pri rozklade do parciálnych vln. Akú projekciu treba odvodiť z výsledku v Bornovej aproximácii a akú úpravu výsledku z parciálnych vln, aby sa tieto dva výsledky rovnali?

29. Vysvetlite, v čom je výsledok podľa Bornovej aproximácie iba aproximáciou?

30. Uvažujme Rutherfordov experiment pre tienенý a pre netienенý potenciál toho istého jadra, resp. v prvom prípade pre silno tienенý (napr. blízkymi miónnymi v krátkožijúcom mezo-atóme) potenciál a v druhom prípade pre veľmi slabo tienенý (napr. iba elektrónmi vo vyšších excitovaných stavoch). Čo môžeme povedať o porovnaní účinných prierezov pre rozptyl

alfa častíc na týchto dvoch potenciáloch? Odpoveď vysvetlite.

31. Čo je to formfaktor a prečo sme ho zaviedli?

Ktorá sústava má väčší formfaktor pri Rutherfordovom rozptyle: Ak je elektrický náboj jadra Q celý rozložený len na povrchu jadra s polomerom R , alebo ak je ten istý náboj homogénne rozložený v guli o polomere R ?

32. Uvažujme rozptyl, ktorý nastáva iba v s a p vlne, vo vyšších vlnách už nenastáva. Čo to znamená pre fázové posuny týchto vyšších vln?

Nech navyše vieme, že pri danej energii je fázový posun v s a p vlne rovnaký. V akom smere sa bude rozptylovať najviac častíc?

Hlavným výsledkom parciálnych vln bol vzťah

$$f(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) e^{i\delta_{\ell}} \sin \delta_{\ell} P_{\ell}(\cos \vartheta).$$

33. Čo by ste vyzdvihli, že je hlavná myšlienka opisu rozptylu pomocou parciálnych vln.

V akom prípade je vhodnou metódou pre riešenie rozptylovej úlohy?

34. Optická teoréma je vzťah $\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \text{Im} f(\vartheta, \varphi)|_{\vartheta=0}$. Overte, že naozaj platí pre rozptyl, ktorý nastáva iba v s vlne.

35. Aproximujme amplitúdu rozptylu alfa častice na alfa častici v ťažiskovej sústave zrážky komplexnou konštantou C , teda bez závislosti na uhloch. Čomu by sa v tejto aproximácii rovnal celkový účinný prierez uvažovaného rozptylu?

Pomôcka: v odpovedi nezabudnite zohľadniť, že ide o rozptyl identických častíc

Dostávame rozdiel voči odpovedi, ktorá by neuvažovala, že

ide o identické častice? Ak áno, je podľa správnej odpovede rozptyl viac alebo menej pravdepodobný?

36. Aproximujme amplitúdu rozptylu nepolarizovaného zväzku elektrónov na druhom takom istom nepolarizovanom zväzku elektrónov v ťažiskovej sústave zrážky komplexnou konštantou C , teda bez závislosti na uhloch. Čomu by sa v tejto aproximácii rovnal celkový účinný prierez uvažovaného rozptylu elektrónu na elektróne?

Pomôcka: v odpovedi nezabudnite zohľadniť, že ide o rozptyl identických častíc, pričom s pravdepodobnosťou $3/4$ je spinový stav rozptyľovaných elektrónov symetrický triplet a s pravdepodobnosťou $1/4$ je ním antisymetrický singlet.

Dostávame rozdiel voči odpovedi, ktorá by neuvažovala, že ide o identické častice? Ak áno, je podľa správnej odpovede rozptyl viac alebo menej pravdepodobný?

Časová poruchová metóda

37. Vysvetlite, ako je možné, že počítajúc pravdepodobnosť prechodu podľa časovej poruchovej metódy môže vyjsť výsledok väčší ako jedna.
38. Uvažujme výsledky časovej poruchovej metódy pre nabitý JHO v základnom stave (na začiatku) v homogénnom elektrickom poli. Pole je najskôr vypnuté a neskôr zapnuté, detaily jeho časového priebehu tu nie sú dôležité. Nech sú parametre zadania také, že pravdepodobnosť prechodu JHO na prvý excitovaný stav po odznení danej poruchy je rádovo 0.001, teda jedna tisícina. Čomu bude rádovo rovná pravdepodobnosť excitácie JHO na druhý excitovaný stav po odznení poruchy? Odpoveď vysvetlite.

39. V čom je výnimočná harmonická porucha voči poruchám s iným časovým priebehom?
40. Čo by ste povedali (*stručne*), v čom je výnimočnosť Einsteinových vzťahov pre koeficienty emisie a absorpcie?
41. Čo hovorí Fermiho zlaté pravidlo?
Nevadí, ak si nebudete pamätať konštanty.
42. Slovné vysvetlite, ako z Fermiho zlatého pravidla vypočítame pravdepodobnosť ionizácie atómu vodíka za jednotku času pod vplyvom dopadajúcej el-mag vlny.
43. Slovné vysvetlite, ako z Fermiho zlatého pravidla vypočítame pravdepodobnosť ionizácie ("vykopnutia elektrónu") z konečnej potenciálovej jamy za jednotku času pod vplyvom dopadajúcej el-mag vlny.

Matematický formalizmus

44. V čom sa líši Hilbertov priestor od vektorového priestoru?
45. Je množina všetkých reálnych čísel Hilbertovým priestorom, ak je vektorový súčet štandardným súčtom reálnych čísel a skalárny súčin ich štandardným súčinom?
46. V čom sa líši Hilbertov priestor od vektorového priestoru?
Zadajte potrebné detaily, ak je to vôbec možné, aby boli kvadraticky integrovateľné funkcie na reálnej osi Hilbertovým priestorom.
47. Vysvetlite, prečo *nie je* Hilbertovým priestorom priestor kvadraticky integrovateľných funkcií na úsečke $< 0, L >$ s nulovými hodnotami na krajoch a so štandardným skalárnym súčinom zavedeným pre časticu na úsečke.

48. Uvažujme operátor $\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$ s definičným oborom rovným (i) kvadraticky integrovateľným funkciám, ktoré sú (ii) definované na intervale $< 0, 1 >$, a (iii) rovné nule v krajných bodoch intervalu, a navyše sú (iv) diferencovateľné na danom intervale.

Ukážte, že tento operátor nie je hermitovský, čiže nerovná sa operátoru, ktorý je k nemu hermitovsky združený.

49. Uvažujme operátor $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$ s definičným oborom rovným kvadraticky integrovateľným dvakrát diferencovateľným funkciám na intervale $< 0, 1 >$, ktoré sú rovné nule v krajných bodoch intervalu.

Overte, či je tento operátor hermitovský a či teda má častica na úsečke poctivý hermitovský hamiltonián, takže časová SchR má zmysel a vieme predpovedať jej časový vývoj.

50. Kvantový systém je v stave $|\Psi\rangle$. Vysvetlite, čomu sa rovná a ako sa nazýva $\langle x|\Psi\rangle$.

Vysvetlite, čomu sa rovná a ako sa nazýva $\langle p|\Psi\rangle$.

Ako sa pomocou bra a ket vektorov zapíše Fourierova transformácia vlnovej funkcie $\Psi(x)$?

51. Uvažujme stav $|\Psi\rangle = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} |n\rangle$ ako stav JHO, kde $|n\rangle$ je n-tý stacionárny stav JHO a A je normovacia konštanta.

Je tento stav z Hilbertovho priestoru? Odpoveď vysvetlite.

Aká je (by bola) stredná energia JHO v tomto stave? Patrí tento stav do definičného oboru hamiltoniánu?

Je možné vo všeobecnosti definovať neohraničené operátory na celom Hilbertovom priestore?

52. Uvažujme zdroj elektrónov emitujúci zväzok nepolarizovaných elektrónov. Aká matica hustoty popisuje spinový stav

elektrónu vo zväzku? Odpoveď vysvetlite.

53. Uvažujme zdroj elektrónov emitujúci zväzok úplne polarizovaných elektrónov, každý so spinom v smere "dolu" voči osi z . Aká matica hustoty popisuje spinový stav elektrónu vo zväzku? Odpoveď vysvetlite.

Čomu sa má vo všeobecnosti rovnať ρ^2 pre čistý stav? Je táto podmienka splnená?

54. Uvažujme zdroj elektrónov emitujúci zväzok čiastočne polarizovaných elektrónov, každý tretí so spinom v smere "dolu" voči osi z zatiaľ čo prvé dva sú so spinom "hore" voči osi z . Aká matica hustoty ρ popisuje spinový stav elektrónu vo zväzku? Odpoveď vysvetlite.

55. Uvažujme zväzok elektrónov, ktoré pochádzajú z rozpadov bezspinových častíc na elektrón a pozitron. Pripomeňme, že po rozpade je sústava v stave $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow\rangle |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle |\uparrow\rangle]$, kde prvý spinový stav je elektrónový a druhý pozitronový. Pozitrony nedetekujeme. Aká matica hustoty popisuje spinový stav elektrónu vo zväzku? Odpoveď vysvetlite.

56. Uvažujme zväzok elektrónov, ktoré pochádzajú z rozpadov častíc so spinom 1 (presnejšie so spinom $\hbar$) a priemetom spinu na os z rovným $+1$ ($+\hbar$) na elektrón a pozitron. V akom spinovom stave je $e^- e^+$ sústava v stave po rozpade? Aká matica hustoty popisuje spinový stav elektrónu vo zväzku? Odpoveď vysvetlite.

Aká je predpoveď pre strednú hodnotu merania S_z týchto elektrónov z navrhutej matice hustoty. Dáva vaša odpoveď zmysel?

57. Napíšte, čomu je rovná stredná hodnota fyzikálnej veličiny A ,

ktorá je reprezentovaná maticou A , ak túto veličinu meriame na kvantovom systéme popísanom maticou hustoty.

Ilustrujte odpoveď na príklade spinu nepolarizovaných elektrónov, ktoré prechádzajú cez Sternov-Gerlachov prístroj SG_x , a teda $A = S_x$.

58. Ukážte, že pri unitárnej transformácii stavov ostáva zachovaný skalárny súčin, a teda amplitúdy pravdepodobnosti, tým pádom aj pravdepodobnosť.

Ukážte, že okrem pravdepodobností sa zachovávajú aj stredné hodnoty skalárnych veličín - pre špecifický transformačný zákon im odpovedajúcich operátorov. Aký transformačný zákon to je pre unitárnu transformáciu stavov?

Rotácie

59. Na prednáške (nahrávke) sme ukázali, že výsledok skladania dvoch spinov $1/2$ možno prezentovať ako unitárnu 4×4 maticu, ktorej elementy sú Clebsch-Gordanove koeficienty. Táto matica predstavuje unitárnu transformáciu z reducibilnej bázy na ireducibilnú. Neskôr sme na prednáške (nahrávke) predviedli skladanie dvoch vektorov, teda spinov 1 . Zvoľte vhodnú bázu a napíšte, aká unitárna matica odpovedá tomuto skladaniu.
60. Predveďte skladanie spinu $1/2$ a spinu 1 (teda nájdite CG koeficienty), pričom overíte vzťahy potrebné pri opise Zeemanovho javu pre elektrón v prvom excitovanom stave atómu vodíka.
61. Vychádzajúc z $\hat{J}_- |j m\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)} |j m-1\rangle$ určte matice J_- , J_+ , J_x , J_y pre spin $j = 1$.

Určte aj maticu J_z a vypočítajte maticu $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$.
 Overte aspoň pre jeden prípad, že $[J_i, J_j] = i \varepsilon_{ijk} J_k$.
 Naozaj matica J^2 komutuje s maticami J_x , J_y a J_z ?

62. Určte rotačnú maticu odpovedajúcu rotácii spinu $1/2$ okolo osi y o uhol $\pi/2$. Výsledok použite na rotáciu spinora $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a okomentujte zhodu s očakávaním, čo má výjsť.
63. Aké ireducibilné reprezentácie rotačnej grupy $SO(3)$ (resp. $SU(2)$) dostaneme zo skladania momentov hybnosti 3 a 2? Overte, že súhlasí dimenzionalita prirodzenej reducibilnej reprezentácie so súčtom rozmerov (dimenzionalít) ireducibilných reprezentácií.
 Je možné v uvedenom skladaní nájsť skalár? Odpoveď vysvetlite. Netreba tu počítat C-G koeficienty.
64. Aký operátor predstavuje rotáciu o uhol α okolo osi $\vec{n}$ vo všeobecnom Hilbertovom priestore ket stavov?
 Určte tento operátor, ak ide o rotáciu o uhol α okolo osi z a predved'te, ako pôsobí na ket stav $|j m\rangle$. Vysvetlite, prečo odpoveď dáva zmysel.
65. Aký operátor predstavuje rotáciu o uhol α okolo osi $\vec{n}$ vo všeobecnom Hilbertovom priestore ket stavov?
 Čím je tento operátor reprezentovaný, ak ide o rotáciu vlnovej funkcie v 3 rozmeroch o uhol $\pi/2$ okolo osi z ?
 Čo je výsledkom pôsobenia tohto operátora na vlnovú funkciu vo sférických súradniciach $\Psi(r, \theta, \varphi)$?
 Čo je výsledkom pôsobenia tohto operátora na vlnovú funkciu elektrónu v atóme vodíka v základnom stave?
66. Vysvetlite, prečo operácia rotácie na kvantových stavoch zachováva skalárny súčin stavov Hilbertovho priestoru.