

Otázky k predmetu Kvantová teória 1
Zimný semester 2023/2024

Dr. Tomáš Blažek
KTF FMFI Univerzita Komenského, Bratislava

VLNOVÁ FUNKCIA

1. Vlnová funkcia (podľa kodanskej interpretácie, ktorú sme prevzali v našom kurze) predstavuje maximálnu informáciu o stave izolovaného systému. Môžeme ju v konkrétnom čase určiť meraním? Odpoveď vysvetlite. Ak áno, akým prístrojom či meraním? Ak nie, akú jej časť ako zistíme meraním a akú časť nie? Ak nie, uďte tiež príklad dvoch rôznych vlnových funkcií, ktoré nevieme meraním odlíšiť.
2. Stav častice popisuje vlnová funkcia $\Psi(\vec{r}, t)$. Aké všeobecné vlastnosti má $\Psi(\vec{r}, t)$? Vymenujte aspoň tri a vysvetlite ich pôvod, prípadne prečo ich požadujeme.
3. Stav častice v čase $t = 0$ popisuje vlnová funkcia $\Psi(\vec{r})$. Čo by ste odpovedali na otázku, kde sa nachádza častica? Čo by ste odpovedali na otázku, akú má častica hybnosť?
4. Stav častice popisuje vlnová funkcia $\Psi(\vec{r}, t)$. Bude stav tejto istej častice vo všeobecnosti rovnako dobre popísaný aj vlnovou funkciou (i) $\Phi_1(\vec{r}, t) = -\Psi(\vec{r}, t)$, (ii) $\Phi_2(\vec{r}, t) = i\Psi(\vec{r}, t)$, (iii) $\Phi_3(\vec{r}, t) = \Psi(-\vec{r}, t)$, (iv) $\Phi_4(\vec{r}, t) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\Psi(\vec{r}, t)$, (v) $\Phi_5(\vec{r}, t) = 2\Psi(\vec{r}, t)$?
5. Nech je známe akurát to, že v konkrétnom časovom okamihu odpovedajúcim času $t_1 > 0$ je vlnová funkcia častice $\Psi(\vec{r}, t_1)$. Inak už o tejto častici a silách na ňu pôsobiacich nie je známe nič. Vysvetlite, ako dáme predpoveď, čomu je rovná vlnová funkcia častice v čase $t_2 > t_1$. Chýba k tomu ešte nejaký údaj (alebo údaje) v zadaní? Ak áno, vymenujte ho/ich a predpokladajte, že boli dodatočne zistené. Nakoniec vymenujte kroky, ako určiť $\Psi(\vec{r}, t_2)$.
6. Je známe, že v konkrétnom časovom okamihu odpovedajúcim času $t = 0$ je vlnová funkcia častice $\Psi(x)$, kde $x \in \mathbb{R}$. Za akých okolností bude v čase $t > 0$ vlnová funkcia častice rovná $\Psi(x) e^{-iEt/\hbar}$?

7. Je známe, že v čase $t = 0$ je vlnová funkcia častice $\Psi(x) = Ae^{-kx^2}$, kde A a $k > 0$ sú konštanty a $x \in \mathbb{R}$. Za akých okolností bude v čase $t > 0$ vlnová funkcia častice rovná $\Psi(x, t) = Ae^{-kx^2} e^{-iEt/\hbar}$? Čomu je v tomto prípade rovné E ?
Čo sa ešte dá povedať o tejto sústave? Aká je to sústava?
8. Je známe, že v čase $t = 0$ je vlnová funkcia častice $\Psi(x) = Ae^{-kx^2}$, kde A a $k > 0$ sú konštanty a $x \in \mathbb{R}$. Za akých okolností nebude v čase $t > 0$ vlnová funkcia častice rovná $\Psi(x, t) = Ae^{-kx^2} e^{-iEt/\hbar}$?
9. Vysvetlite, čo pre vlnovú funkciu popisujúcu stav častice znamená podmienka, že má platiť princíp superpozície. Prečo je superpozícia dôležitá pre matematický popis dvojštrbinového experimentu? Stačí na tento matematický popis uvažovať hustotu pravdepodobnosti výskytu častice?
10. Nech $\Psi(\vec{r})$ je vlnová funkcia častice v čase $t = 0$ a $\Phi(\vec{r})$ je vlastná funkcia operátora $\hat{A}$ (odpovedajúceho fyzikálnej veličine A) s vlastnou hodnotou α .
Napíšte, čo sa dozvieme vypočítaním integrálu $\int \Phi^*(\vec{r})\Psi(\vec{r}) d^3r$. Čo je nesprávne na odpovedi, že integrál súvisí s pravdepodobnosťou nájsť v stave Ψ stav Φ ? *Žiaľ túto nesprávnu odpoveď som v minulosti dostával až príliš často.*
Porozumenie toho, čo ste napísali, preukážte na 1-rozmernom príklade častice na úsečke dĺžky L a pre funkcie $\Psi(x) = \sqrt{30/L^5} x(L-x)$, $\Phi(x) = \sqrt{2/L} \sin \frac{\pi x}{L}$ a $A = \text{energia}$.
Integrál nemusíte počítať. Načrtnite funkcie a preukážte porozumenie výsledku integrovania. Zhrňte, čo výsledok fyzikálne znamená v tomto konkrétnom prípade.
11. Nech $\Psi(\vec{r})$ je vlnová funkcia častice v čase $t = 0$ a $\Phi(\vec{r})$ je vlastná funkcia operátora $\hat{A}$ (odpovedajúceho fyzikálnej veličine A) s vlastnou hodnotou α .
Napíšte, čo sa dozvieme vypočítaním integrálu $\int \Phi^*(\vec{r})\Psi(\vec{r}) d^3r$. Čo je nesprávne na odpovedi, že integrál súvisí s pravdepodobnosťou nájsť v stave Ψ stav Φ ? *Žiaľ túto nesprávnu odpoveď som v minulosti dostával až príliš často.*
Porozumenie toho, čo ste napísali, preukážte na 1-rozmernom príklade častice na úsečke dĺžky L a pre funkcie

$\Psi(x) = \sqrt{30/L^5} x(L-x)$, $\Phi(x) = \sqrt{2/L} \sin \frac{2\pi x}{L}$ a $A = \text{energia}$.
Integrál nemusíte počítať. Načrtnite funkcie a preukážte porozumenie výsledku integrovania. Zhrňte, čo výsledok fyzikálne znamená v tomto konkrétnom prípade.

12. Nech $\Psi(\vec{r})$ je vlnová funkcia častice v čase $t = 0$ a $\Phi(\vec{r})$ je vlastná funkcia operátora $\hat{A}$ (odpovedajúceho fyzikálnej veličine A) s vlastnou hodnotou α .

Napište, čo sa dozvieme vypočítaním integrálu $\int \Phi^*(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) d^3r$. Čo je nesprávne na odpovedi, že integrál súvisí s pravdepodobnosťou nájsť v stave Ψ stav Φ ? Žiaľ túto nesprávnu odpoveď som v minulosti dostával až príliš často.

Porozumenie toho, čo ste napísali, preukážte na 1-rozmernom príklade častice na úsečke dĺžky L a pre funkcie

$\Psi(x) = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{\sqrt{2-i}}{2} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{2\pi x}{L}$, $\Phi(x) = \sqrt{2/L} \sin \frac{\pi x}{L}$ a $A = \text{energia}$.
Integrál vypočítajte a zhrňte, čo konkrétne fyzikálne znamená.

13. Nech $\Psi(\vec{r})$ je vlnová funkcia častice v čase $t = 0$ a $\Phi(\vec{r})$ je vlastná funkcia operátora $\hat{A}$ (odpovedajúceho fyzikálnej veličine A) s vlastnou hodnotou α .

Napište, čo sa dozvieme vypočítaním integrálu $\int \Phi^*(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) d^3r$. Čo je nesprávne na odpovedi, že integrál súvisí s pravdepodobnosťou nájsť v stave Ψ stav Φ ? Žiaľ túto nesprávnu odpoveď som v minulosti dostával až príliš často.

Porozumenie toho, čo ste napísali, preukážte na príklade častice v poli sféricky symetrického potenciálu a pre funkcie $\Psi(\vec{r}) = R(r) \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \cos^2 \varphi$, $\Phi(\vec{r}) = R(r) \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, $A = \text{celkový moment hybnosti}$. Integrál vypočítajte.

R je normovaná na 1: $\int_0^\infty |R(r)|^2 r^2 dr = 1$. Zhrňte, čo váš výsledok konkrétne fyzikálne znamená.

14. Uvažujme elektrón v atóme vodíka. Elektrón je popísaný správne normovanou vlnovou funkciou $\Psi(\vec{r}) = -i \sqrt{\frac{8}{\pi a^3}} e^{-2r/a}$, kde a je Bohrov polomer. Vlnová funkcia základného stavu elektrónu v atóme vodíka je $\Phi_{100}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{1}{\pi a^3}} e^{-r/a}$. S akou pravdepodobnosťou odmeriame pri meraní energie uvažovaného elektrónu energiu základného stavu?

Pomocný integrál: $\int_0^\infty t^N e^{-t} dt = N!$ pre $N \in \mathbb{N}$.

Vyšlo vám číslo z intervalu $<0, 1>$, ako sa na pravdepodobnosť patrí?

15. Uvažujme elektrón v atóme vodíka. Elektrón je popísaný vlnovou funkciou s uhlovou časťou $\frac{1}{2} + \cos \varphi$. S akou pravdepodobnosťou odmeriame pri meraní momentu hybnosti uvažovaného elektrónu hodnotu $L^2 = 0$?
- Je vaša odpoveď z intervalu $<0, 1>$, ako sa na pravdepodobnosť patrí?*
16. (a) Napíšte, aký je fyzikálny význam komplexnej vlnovej funkcie $\Psi(\vec{r})$.
 (b) Uvažujme viazaný stav častice (pre jednoduchosť) v jednom rozmere. V nadväznosti na (a) vysvetlite, či môže byť vlnová funkcia tejto častice rovná nule na celej reálnej osi.
17. (a) Napíšte, aký je fyzikálny význam komplexnej vlnovej funkcie $\Psi(\vec{r})$.
 (b) Uvažujme viazaný stav častice (pre jednoduchosť) v jednom rozmere. V nadväznosti na (a) vysvetlite, či môže vlnová funkcia častice na nejakom intervale spĺňať podmienku $|\Psi(x)| > 1$.
18. (a) Napíšte, aký je fyzikálny význam komplexnej vlnovej funkcie $\Psi(\vec{r})$.
 (b) Uvažujme viazaný stav častice v jednom rozmere na intervale $(-\infty, +\infty)$. Načrtnite funkciu $\Psi(x) = A e^{-x/a}$ (A a a sú reálne kladné konštanty) a v nadväznosti na (a) vysvetlite, prečo táto funkcia nemôže byť v nejakom časovom okamihu vlnovou funkciou častice.
 Prečo potom pre elektrón v základnom stave v atóme vodíka je jeho vlnová funkcia $\Psi(r) = A e^{-r/a}$?
19. (a) Napíšte, aký je fyzikálny význam komplexnej vlnovej funkcie $\Psi(\vec{r})$.
 (b) Uvažujme viazaný stav častice v jednom rozmere na intervale $(-\infty, +\infty)$. Načrtnite funkciu $\Psi(x) = A/x^2$ (A je reálna kladná konštanta) a v nadväznosti na (a) vysvetlite, prečo táto funkcia nemôže byť v nejakom časovom okamihu vlnovou funkciou častice.
20. (a) Napíšte, aký je fyzikálny význam komplexnej vlnovej funkcie $\Psi(\vec{r})$.
 (b) Uvažujme viazaný stav častice v jednom rozmere na intervale $(-\infty, +\infty)$. Načrtnite funkciu $\Psi(x) = A/(x^2 + a^2)$ (A a a sú reálne kladné konštanty) a v nadväznosti na (a) vyšetrite, či táto funkcia môže byť v nejakom časovom okamihu vlnovou funkciou častice.
21. (a) Napíšte, aký je fyzikálny význam komplexnej vlnovej funkcie $\Psi(\vec{r})$.
 (b) Uvažujme viazané stavy častice v jednom rozmere na intervale $(-\infty, +\infty)$ popísané reálnymi vlnovými funkciami $\Psi_1(x) = A e^{-x^2/a^2}$ a $\Psi_2(x) = \tilde{A} e^{-x^2/2a^2}$. A a $\tilde{A}$ sú normovacie konštanty a a je typický

rozmer systému.

Načrtnite tieto funkcie do jedného obrázku a v nadväznosti na (a) vysvetlite, v čom sa budú líšiť výsledky meraní polohy častice v stavoch Ψ_1 a Ψ_2 .

22. (a) Napíšte, aký je fyzikálny význam komplexnej vlnovej funkcie $\Psi(\vec{r})$.
(b) Uvažujme časticu viazanú na úsečku dĺžky L . V nadväznosti na (a) vysvetlite, prečo nemôže byť jej vlnová funkcia $\Psi(x, t)$ rovná reálnej funkcii $A \sin(n\pi x/L) \cos(E_n t/\hbar)$, kde A je normovacia konštanta a E_n je parameter s rozmerom energie.
23. (a) Napíšte, aký je fyzikálny význam komplexnej vlnovej funkcie $\Psi(\vec{r})$.
(b) Uvažujme časticu viazanú na úsečku dĺžky L . Častica je v stacionárnom stave popísanom reálnou vlnovou funkciou $A \sin(2\pi x/L)$, kde A je normovacia konštanta. Načrtnite túto vlnovú funkciu a určte najmenej pravdepodobnú polohu častice vo vnútri úsečky. V nadväznosti na (a) čo by ste povedali na otázku, ako môže častica prechádzať cez toto minimum medzi oblasťami s veľkou pravdepodobnosťou výskytu naľavo a napravo od tohto bodu?
24. V dvojštrbinovom experimente strieľame jednotlivé elektróny po jednom cez dve úzke štrbiny na vzdialené tienidlo. Po dopade elektrónu na tienidlo bod dopadu stmavne. Na elektróny na ich ceste nepôsobíme žiadnym meracím prístrojom. Načrtnite, ako tento experiment zhruba vyzerá.
Aký obrazec vznikne na tienidle po prechode mnohých elektrónov?
Čo by ste povedali na otázku, ako často prešiel elektrón hornou štrbinou a ako často prešiel dolnou štrbinou?
Čo plyní z výsledkov experimentu?
25. Ako ovplyvní meranie vlnovú funkciu častice, ku ktorej sme priložili merací prístroj na meranie nejakej fyzikálnej veličiny. Aká je vlnová funkcia častice po meraní? Uveďte príklad.

OPERÁTORY

26. Čomu je rovný operátor $\hat{x}$ pôsobiaci na vlnové funkcie $\Psi(x)$?
Čomu je rovný operátor $\hat{p}_x$ pôsobiaci na vlnové funkcie $\Psi(x)$?
Vypočítajte komutátor $[\hat{x}, \hat{p}_x]$ a rozhodnite, akú funkciu dostaneme, ak operátor $[\hat{x}, \hat{p}_x]$ pôsobí na vlnovú funkciu $\Psi(x)$.

27. Uveďte príklad dvoch fyzikálnych veličín, ktorým odpovedajú nekomutujúce operátory. Vysvetlite súvis medzi ich nenulovým komutátorom a ich súčasným meraním.
Na druhej strane uveďte aj príklad dvoch fyzikálnych veličín, ktorým odpovedajú komutujúce operátory. Čo potom plyní pre ich meranie?
28. $\hat{A}$ je hermitovský operátor pôsobiaci na vlnové funkcie dostatočne rýchlo konvergujúce k nule pre $x \rightarrow \pm\infty$. Napíšte, čomu sa na základe hermitovosti operátora $\hat{A}$ rovná integrál $\int_{-\infty}^{\infty} [\Psi(x)]^* (\hat{A} \Phi(x)) dx$, ak chceme, aby pod integrálom $\hat{A}$ pôsobil na funkciu Ψ a nie na Φ .
Hľadaná rovnosť je súčasťou definície hermitovského operátora. Svoje porozumenie ukážte na príklade:
Nech $\chi(x)$ je vlastnou funkciou takéhoto hermitovského operátora $\hat{A}$ s vlastnou hodnotou $6a$, kde a je konštanta. Nech pre vlnovú funkciu $\phi(x)$ platí $\int_{-\infty}^{+\infty} \chi^* \phi dx = \frac{1}{2}$. Čomu sa rovná integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} \chi^* (\hat{A} \phi) dx$?
29. Vysvetlite, či je operátor komplexného združenia na množine kvadraticky integrovateľných komplexných funkcií hermitovským operátorom.
30. Vysvetlite, prečo nie je operátor derivácie na množine kvadraticky integrovateľných hladkých komplexných funkcií hermitovským operátorom.
Ako je možné, že operátor hybnosti, ktorý je až na konstantu operátorom derivácie, je hermitovským?
31. Vysvetlite, či je operátor druhej derivácie na množine kvadraticky integrovateľných hladkých komplexných funkcií hermitovským operátorom. Vyskytuje sa tento operátor (až na konstantu) v kvantovej mechanike často, zriedka, alebo vôbec nie? Posúďte podľa toho jeho dôležitosť.
32. Fyzikálnej veličine A odpovedá hermitovský operátor $\hat{A}$. Napíšte integrálny výraz, ktorým možno vypočítať strednú hodnotu merania veličiny A na veľa identických stavoch $\Psi(x)$.
Ukážte, že v žiadnom stave $\Psi(x)$ nemôže mať takto počítaná stredná hodnota $\overline{A}$ imaginárnu časť.
33. Fyzikálnej veličine A odpovedá hermitovský operátor $\hat{A}$. Vychádzajúc z toho, že v žiadnom stave $\Psi(x)$ nemôže mať stredná hodnota $\overline{A}$ imaginárnu časť, dokážte, že každá vlastná hodnota $\hat{A}$ je reálne číslo.

34. Ukážte, že operátor súradnice $\hat{x}$ pôsobiaci na funkcie dostatočne rýchlo konvergujúce k nule na reálnej osi je hermitovským operátorom.
Súčasťou odpovede by malo byť podrobné vysvetlenie každého kroku.
35. Ukážte, že operátor hybnosti $\hat{p}_x$ pôsobiaci na funkcie dostatočne rýchlo konvergujúce k nule na reálnej osi je hermitovským operátorom.
Súčasťou odpovede by malo byť podrobné vysvetlenie každého kroku.
36. Môže mať operátor rôzne vlastné funkcie prislúchajúce tej istej vlastnej hodnote?
Môže mať operátor rôzne vlastné hodnoty prislúchajúce tej istej vlastnej funkcii?
Pre obe otázky: ak áno, uďte príklad, ak nie, vysvetlite, prečo nie.
37. Čo znamená spektrum operátora?
Čo znamená, že spektrum operátora je degenerované, resp. nedegenerované?
Je spektrum hamiltoniánu degenerované v preberaných jednoduchých sústavách: častica na úsečke, jednoduchý harmonický oscilátor, elektrón v atóme vodíka?
Aká je degenerácia základného stavu v týchto sústavách?
38. Ako sú definované zložky operátora momentu hybnosti?
Je niektorý z komutátorov $[\hat{L}_x, \hat{L}_y]$, $[\hat{L}_y, \hat{L}_z]$, $[\hat{L}_z, \hat{L}_x]$ rôzny od nuly?
Je niektorý z komutátorov $[\hat{L}_x, \hat{L}^2]$, $[\hat{L}_y, \hat{L}^2]$, $[\hat{L}_z, \hat{L}^2]$ rôzny od nuly?
Aký dôsledok majú odpovede pre popis stavov častice v poli sféricky symetrického potenciálu, napr. aj pre stavy elektrónu v atóme vodíka?
Odpoveď pre komutátory netreba počítať.
39. Aký je rozdiel medzi potenciálom v kvantovej mechanike (QM) a potenciálom v elektrostati? Vysvetlite, čo sa myslí pod potenciálom $V(\vec{r})$ v QM. Napíšte potenciál $V(\vec{r})$ v QM pre bodovú časticu s elektrickým nábojom q v poli elektrostatického potenciálu $\phi(\vec{r})$.

SCHRÖDINGEROVA ROVNICA A VOĽNÁ ČASTICA

40. Napíšte bezčasovú Schrödingerovu rovnicu a slovne vysvetlite, či možno alebo nemožno v rovnici vykrátiť Ψ .

41. Napíšte bezčasovú Schrödingerovu rovnicu. Rozpíšte, čomu sa rovná hamiltonián, a vysvetlite význam použitých symbolov. Kde sa prejaví, či časticu uvažujeme v jednom rozmere (viazaná na priamku alebo úsečku) alebo v troch rozmeroch?
42. Napíšte bezčasovú Schrödingerovu rovnicu. Je pravda, že vlnová funkcia častice je v kvantovej mechanike vždy riešením tejto rovnice, alebo môže byť častica aj v takom stave, ktorého vlnová funkcia nespĺňa túto rovnicu? *Svoju odpoveď vysvetlite.*
43. Napíšte časovú Schrödingerovu rovnicu a vysvetlite jej význam. Je pravda, že vlnová funkcia častice je v kvantovej mechanike vždy riešením tejto rovnice, alebo môže byť častica aj v takom stave, ktorého vlnová funkcia nespĺňa túto rovnicu?
Pri písaní časovej Schrödingerovej rovnice nevadí, ak si nepamätáte znamienko a presnú polohu konštant.
44. Uvažujme elektrón v dvoch rôznych sústavách. Čím sa odlišuje Schrödingerova rovnica elektrónu v prvej sústave od Schrödingerovej rovnice elektrónu v druhej sústave?
Ak je pravda, že každý systém popisuje iná Schrödingerova rovnica, je možné, že jedna a tá istá vlnová funkcia $\Psi(\vec{r})$ môže v nejakom časovom okamžiku správne popisovať každý z elektrónov? Ak áno, vysvetlite, ako je to možné a v čom je potom matematický opis elektrónov odlišný?
Svoje porozumenie preukážte na príklade elektrónu ako voľnej častice a elektrónu ako jednoduchý harmonický oscilátor, pričom skúmanou vlnovou funkciou nech je gaussovská funkcia typu e^{-kx^2} , kde $k = m\omega/2\hbar$.
45. Odvoďte bezčasovú Schrödingerovu rovnicu z časovej Schrödingerovej rovnice pre “stacionárne riešenia”.
Prečo sú “stacionárne riešenia” stacionárne, ak ich vlnová funkcia závisí na čase?
Pri písaní časovej Schrödingerovej rovnice nevadí, ak si nepamätáte znamienko a presnú polohu konštant.
46. Vlnová funkcia voľnej častice je $\Psi(x) = Ae^{ipx/\hbar}$, kde A je normovacia konštanta. Overte, že táto vlnová funkcia vyhovuje bezčasovej Schrödingerovej rovnici pre voľnú časticu. Napíšte jej časový vývoj.

Ďalej overte, že táto istá vlnová funkcia popisuje stav s ostrou hodnotou hybnosti, teda že je vlastnou funkciou operátora hybnosti $\hat{p}_x$ s vlastnou hodnotou p .

Ako súvisia vami overené výsledky s hodnotou komutátora $[\hat{H}, \hat{p}_x]$, kde $\hat{H}$ je hamiltonián voľnej častice?

47. Vlnová funkcia voľnej častice je $\Psi(x) = A \sin(px/\hbar)$, kde A je normovacia konštanta. Overte, že táto vlnová funkcia vyhovuje bezčasovej Schrödingerovej rovnici pre voľnú časticu.

Popisuje táto vlnová funkcia stav s ostrou hodnotou parity a je teda vlastnou funkciou operátora parity $\hat{P}$? S akou vlastnou hodnotou?

Ako súvisia Vaše odpovede s hodnotou komutátora $[\hat{H}, \hat{P}]$, kde $\hat{H}$ je hamiltonián voľnej častice?

Má častica v stave $\Psi(x)$ aj ostrú hodnotu hybnosti? Vysvetlite, či by mohla byť voľná častica v stave s ostrou hodnotou energie, hybnosti aj parity.

48. V čase $t = 0$ je voľná častica v stave popísanom vlnovou funkciou $\Psi(x) = A e^{ipx/\hbar}$, kde A je normovacia konštanta. Navrhните časový vývoj tejto vlnovej funkcie (t.j. jej závislosť na čase pre $t > 0$) a overte, že spĺňa časovú Schrödingerovu rovnicu (SchR).

Môžete si overiť u skúšajúceho, či máte časovú SchR napísanú so správnymi znamienkami a umiestnením konštánt.

49. Voľná častica s vlnovou funkciou normovanou na konečný interval dĺžky L je vo všeobecnosti v čase $t = 0$ popísaná vlnovým balíkom $\sum_n c_n \Psi_{p_n}$, kde stav s ostrou hodnotou hybnosti $\Psi_{p_n} = e^{ip_n x/\hbar}/\sqrt{L}$ a $p_n = \frac{2\pi\hbar}{L}n$, $n \in \mathbb{Z}$. V tejto otázke uvažujeme, že spomínaný balík sa redukuje na

$$\Psi(x) = c \frac{e^{iqx/\hbar}}{\sqrt{L}} + \frac{-2 + 3i}{5} \frac{e^{i3qx/\hbar}}{\sqrt{L}},$$

kde hybnosť $q \neq 0$ je nejakým celočíselným násobkom $\frac{2\pi\hbar}{L}$.

Určte c za predpokladu, že $\Psi(x)$ je správne normovaná.

(Úloha má veľa riešení.)

50. Voľná častica s vlnovou funkciou normovanou na konečný interval dĺžky L je vo všeobecnosti v čase $t = 0$ popísaná vlnovým balíkom $\sum_n c_n \Psi_{p_n}$, kde stav s ostrou hodnotou hybnosti $\Psi_{p_n} = e^{ip_n x/\hbar}/\sqrt{L}$ a $p_n = \frac{2\pi\hbar}{L}n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Z. V tejto otázke uvažujeme, že spomínaný balík sa redukuje na

$$\Psi(x) = \frac{\sqrt{5}}{4} \frac{e^{-iqx/\hbar}}{\sqrt{L}} + \frac{i}{2} \frac{e^{i2qx/\hbar}}{\sqrt{L}} + \frac{1+2i}{4} \frac{e^{i4qx/\hbar}}{\sqrt{L}} + \frac{1-i}{4} \frac{e^{i7qx/\hbar}}{\sqrt{L}},$$

kde hybnosť $q \neq 0$ je nejakým celočíselným násobkom $\frac{2\pi\hbar}{L}$.

Aké hybnosti a s akými pravdepodobnosťami možno namerať v stave Ψ ?

51. Voľná častica s vlnovou funkciou normovanou na konečný interval dĺžky L je vo všeobecnosti v čase $t = 0$ popísaná vlnovým balíkom $\sum_n c_n \Psi_{p_n}$, kde stav s ostrou hodnotou hybnosti $\Psi_{p_n} = e^{ip_n x/\hbar}/\sqrt{L}$ a $p_n = \frac{2\pi\hbar}{L}n$, $n \in \mathbb{Z}$. V tejto otázke uvažujeme, že spomínaný balík sa redukuje na

$$\Psi(x) = \frac{\sqrt{5}}{4} \frac{e^{-iqx/\hbar}}{\sqrt{L}} + \frac{i}{2} \frac{e^{i2qx/\hbar}}{\sqrt{L}} + \frac{1+2i}{4} \frac{e^{i4qx/\hbar}}{\sqrt{L}} + \frac{1-i}{4} \frac{e^{i7qx/\hbar}}{\sqrt{L}},$$

kde hybnosť $q \neq 0$ je nejakým celočíselným násobkom $\frac{2\pi\hbar}{L}$.

Akú hybnosť je najpravdepodobnejšie namerať v stave Ψ ?

52. Voľná častica s vlnovou funkciou normovanou na konečný interval dĺžky L je vo všeobecnosti v čase $t = 0$ popísaná vlnovým balíkom $\sum_n c_n \Psi_{p_n}$, kde stav s ostrou hodnotou hybnosti $\Psi_{p_n} = e^{ip_n x/\hbar}/\sqrt{L}$ a $p_n = \frac{2\pi\hbar}{L}n$, $n \in \mathbb{Z}$. V tejto otázke uvažujeme, že spomínaný balík sa redukuje na

$$\Psi(x) = \frac{i}{\sqrt{8}} \frac{e^{iqx/\hbar}}{\sqrt{L}} + \frac{2+i}{\sqrt{8}} \frac{e^{i2qx/\hbar}}{\sqrt{L}} + \frac{1+i}{4} \frac{e^{i4qx/\hbar}}{\sqrt{L}} + \frac{1-i}{4} \frac{e^{i7qx/\hbar}}{\sqrt{L}}$$

kde hybnosť $q \neq 0$ je nejakým celočíselným násobkom $\frac{2\pi\hbar}{L}$. Je Ψ správne normovaná? Aký je možný výsledok merania hybnosti v stave Ψ ? S akou pravdepodobnosťou nameriame v stave Ψ hybnosť $11q$?

53. Voľná častica s vlnovou funkciou normovanou na konečný interval dĺžky L je vo všeobecnosti v čase $t = 0$ popísaná vlnovým balíkom $\sum_n c_n \Psi_{p_n}$, kde stav s ostrou hodnotou hybnosti $\Psi_{p_n} = e^{ip_n x/\hbar}/\sqrt{L}$ a $p_n = \frac{2\pi\hbar}{L}n$, $n \in \mathbb{Z}$. V tejto otázke uvažujeme, že spomínaný balík sa redukuje na

$$\Psi(x) = \frac{1+i}{2} \frac{e^{-iqx/\hbar}}{\sqrt{L}} + \frac{1-i}{2} \frac{e^{i7qx/\hbar}}{\sqrt{L}}$$

kde hybnosť $q \neq 0$ je nejakým celočíselným násobkom $\frac{2\pi\hbar}{L}$.

Aká je stredná hodnota hybnosti $\bar{p}$ častice v stave Ψ ?

Aká je neurčitosť hybnosti Δp v stave Ψ ?

54. Voľná častica s vlnovou funkciou normovanou na konečný interval dĺžky L je vo všeobecnosti v čase $t = 0$ popísaná vlnovým balíkom $\sum_n c_n \Psi_{p_n}$, kde stav s ostrou hodnotou hybnosti $\Psi_{p_n} = e^{ip_n x/\hbar}/\sqrt{L}$ a $p_n = \frac{2\pi\hbar}{L}n$, $n \in \mathbb{Z}$. V tejto otázke uvažujeme, že spomínaný balík sa redukuje na

$$\Psi(x) = \frac{1+i}{4} \frac{e^{i4qx/\hbar}}{\sqrt{L}} + \sqrt{\frac{7}{8}} \frac{e^{i8qx/\hbar}}{\sqrt{L}}$$

kde hybnosť $q \neq 0$ je nejakým celočíselným násobkom $\frac{2\pi\hbar}{L}$. Aká je stredná hodnota hybnosti častice v stave Ψ v čase $t = 0$? A aká je v čase $t > 0$? Odpoveď vysvetlite.

55. Voľná častica s vlnovou funkciou normovanou na konečný interval dĺžky L je vo všeobecnosti v čase $t = 0$ popísaná vlnovým balíkom $\sum_n c_n \Psi_{p_n}$, kde stav s ostrou hodnotou hybnosti $\Psi_{p_n} = e^{ip_n x/\hbar}/\sqrt{L}$ a $p_n = \frac{2\pi\hbar}{L}n$, $n \in \mathbb{Z}$. V tejto otázke uvažujeme, že spomínaný balík sa redukuje na

$$\Psi(x) = \frac{\sqrt{5}}{4} \frac{e^{-i3qx/\hbar}}{\sqrt{L}} + \frac{i}{2} \frac{e^{-i2qx/\hbar}}{\sqrt{L}} + \frac{1+2i}{4} \frac{e^{iqx/\hbar}}{\sqrt{L}} + \frac{1-i}{4} \frac{e^{i2qx/\hbar}}{\sqrt{L}},$$

kde hybnosť $q \neq 0$ je nejakým celočíselným násobkom $\frac{2\pi\hbar}{L}$. Aký je možný výsledok merania energie v stave Ψ pre časticu o hmotnosti m , a s akými pravdepodobnosťami? Aký je najpravdepodobnejší výsledok tohto merania?

56. Voľná častica s vlnovou funkciou normovanou na konečný interval dĺžky L je vo všeobecnosti v čase $t = 0$ popísaná vlnovým balíkom $\sum_n c_n \Psi_{p_n}$, kde stav s ostrou hodnotou hybnosti $\Psi_{p_n} = e^{ip_n x/\hbar}/\sqrt{L}$ a $p_n = \frac{2\pi\hbar}{L}n$, $n \in \mathbb{Z}$. V tejto otázke uvažujeme, že spomínaný balík sa redukuje na

$$\Psi(x) = \frac{i}{\sqrt{8}} \frac{e^{iqx/\hbar}}{\sqrt{L}} + \frac{2+i}{\sqrt{8}} \frac{e^{i2qx/\hbar}}{\sqrt{L}} + \frac{1+i}{4} \frac{e^{i4qx/\hbar}}{\sqrt{L}} + \frac{1-i}{4} \frac{e^{i7qx/\hbar}}{\sqrt{L}}$$

kde hybnosť $q \neq 0$ je nejakým celočíselným násobkom $\frac{2\pi\hbar}{L}$. V stave Ψ sme namerali hybnosť častice $7q$. Aký je možný výsledok merania hybnosti, ak tejto istej častici budeme merať hybnosť po druhýkrát?

57. Voľná častica s vlnovou funkciou normovanou na konečný interval dĺžky L je vo všeobecnosti v čase $t = 0$ popísaná vlnovým balíkom $\sum_n c_n \Psi_{p_n}$,

kde stav s ostrou hodnotou hybnosti $\Psi_{p_n} = e^{ip_n x/\hbar}/\sqrt{L}$ a $p_n = \frac{2\pi\hbar}{L}n$, $n \in \mathbb{Z}$. V tejto otázke uvažujeme, že spomínaný balík sa redukuje na

$$\Psi(x) = \frac{i}{\sqrt{8}} \frac{e^{iqx/\hbar}}{\sqrt{L}} + \frac{2+i}{\sqrt{8}} \frac{e^{i2qx/\hbar}}{\sqrt{L}} + \frac{1+i}{4} \frac{e^{i4qx/\hbar}}{\sqrt{L}} + \frac{1-i}{4} \frac{e^{i7qx/\hbar}}{\sqrt{L}}$$

kde hybnosť $q \neq 0$ je nejakým celočíselným násobkom $\frac{2\pi\hbar}{L}$.

V stave Ψ sme namerali hybnosť častice $7q$. Na tejto istej častici budeme potom merať energiu. S akou pravdepodobnosťou akú energiu nameriame, ak častica má hmotnosť m ?

58. Voľná častica s vlnovou funkciou normovanou na konečný interval dĺžky L je vo všeobecnosti v čase $t = 0$ popísaná vlnovým balíkom $\sum_n c_n \Psi_{p_n}$, kde stav s ostrou hodnotou hybnosti $\Psi_{p_n} = e^{ip_n x/\hbar}/\sqrt{L}$ a $p_n = \frac{2\pi\hbar}{L}n$, $n \in \mathbb{Z}$. V tejto otázke uvažujeme, že spomínaný balík sa v čase $t = 0$ redukuje na

$$\Psi(x) = \frac{1+i}{2} \frac{e^{i4qx/\hbar}}{\sqrt{L}} + \frac{1-i}{2} \frac{e^{i7qx/\hbar}}{\sqrt{L}}$$

kde hybnosť $q \neq 0$ je nejakým celočíselným násobkom $\frac{2\pi\hbar}{L}$.

Napište, ako vyzerá $\Psi(x, t)$ v neskoršom čase $t > 0$ pre časticu s hmotnosťou m .

59. Voľnej častici s hmotnosťou m sme pri meraní hybnosti zistili hybnosť p . Potom sme jej merali energiu. Čo možno povedať o výsledku tohto merania?

Uvažujme takú istú časticu, tiež jej najprv meriame hybnosť a potom energiu, pričom je známe, že jej bola odmeraná 4-krát väčšia energia ako prvej častici. Z týchto údajov načrtnite reálnu časť vlnovej funkcie prvej a druhej častice po meraní energie s dôrazom na to, aby ste správne zakreslili, ako sa líšia vlnové dĺžky v náčrtkoch.

60. Voľná častica je popísaná ako vlnový balík $\Psi(x) = \int c(k) e^{ikx} dk$ s gaussovsky rozloženou hybnosťou $c(k) = A e^{-(k-k_0)^2/(2\Delta k^2)}$, kde $A, k_0 > 0$ a $\Delta k > 0$ sú konštanty a $\Delta k \ll k_0$. Bez počítania načrtnite tvar reálnej časti vlnovej funkcie $\Psi(x)$. Odpoveď vysvetlite. Čo sa zmení na náčrtku pre $t > 0$?

Zmení sa niečo na oboch náčrtkoch $\text{Re}\Psi(x)$ (pre $t = 0$) a aj $\text{Re}\Psi(x, t)$ pre $t > 0$, ak k_0 zmení znamienko? Ak áno, prekreslite a vysvetlite.

ČASTICA NA ÚSEČKE

61. Uvažujme časticu viazanú na úsečke dĺžky L .
Napíšte hamiltonián pre tento jednoduchý systém a načrtnite, ako vyzerá jeho potenciál $V(x)$.
62. Uvažujme časticu viazanú na úsečke dĺžky L .
Určte, či existujú viazané, resp. rozptylové stavy pre takýto jednoduchý systém. *Odpoveď zdôvodnite na základe kritérii pre existenciu týchto stavov z vlastností potenciálu. "Existujú"/"Neexistujú" nestačí.*
63. Uvažujme časticu viazanú na úsečke dĺžky L .
Napíšte a zároveň načrtnite, ako vyzerajú vlnové funkcie stacionárnych stavov takejto častice. *Normováciu konštantu si netreba pamätať, stačí ju zapísať jednoducho ako A .*
Ktorá z týchto funkcií odpovedá základnému stavu? Ktoré funkcie odpovedajú prvým dvom najnižším excitovaným stavom?
64. Je možné mať na úsečke viazanú časticu v stacionárnom stave s kvantovým číslom $n = 0$? Odpoveď zdôvodnite.
Predpokladáme štandardnú definíciu tohto kvantového čísla ako aj stacionárnych stavov, ako bolo na prednáške a je aj v Zelenej učebnici.
65. Uvažujme časticu viazanú na úsečke dĺžky L . Napíšte vlnovú funkciu základného stavu častice. Výpočtom určte normováciu konštantu.
66. Uvažujme časticu viazanú na úsečke dĺžky L .
Napíšte vlnovú funkciu excitovaného stavu častice s kvantovým číslom n . (Nevadí, ak si nepamätáte normováciu konštantu.) Ukážte, že vyhovuje bezčasovej Schrödingerovej rovnici a z tohto výpočtu určte energiu častice v tomto stave. Aká vychádza závislosť na n ?
Možno z výsledku vidieť, či bude mať častica tendenciu roztláčať alebo sťahovať úsečku, na ktorú je viazaná?
67. Ako závisia diskkrétne hodnoty energie častice viazanej na úsečke dĺžky L od kvantového čísla n ? *Netreba reprodukovať celý vzorec so všetkými konštantami. Stačí správne napísať závislosť na kvantovom čísle n .*
Načrtnite, ako na n závisia rozostupy jednotlivých energetických hladín a porovnajte to s náčrtkami rozostupov hladín pre elektrón v atóme vodíka a pre harmonický oscilátor.

68. Energia základného stavu častice na úsečke je 5 eV. Aké je energia prvého a druhého excitovaného stavu?
 Detekujeme vlnové dĺžky žiarenia odpovedajúceho prechodom častice z 2. na 1. excitovaný stav, a z 1. excitovaného na základný stav. Ktorému z týchto prechodov odpovedá čiara s väčšou vlnovou dĺžkou? Aký je pomer týchto vlnových dĺžok?
69. Energia druhého excitovaného stavu častice na úsečke je 12 eV. Je niektorá z emisných spektrálnych čiar častice vo viditeľnej oblasti spektra?
70. Uvažujme časticu viazanú na úsečke dĺžky L .
 Vypočítajte, v akom pomere sú energie fotónov vyžiarených
 (i) pri prechode častice z druhej excitovanej na prvú excitovanú hladinu
 (ii) a pri prechode častice z prvej excitovanej na základnú hladinu.
71. Máme časticu viazanú na úsečke dĺžky L . Správne normované vlnové funkcie stacionárnych stavov častice označme $\Phi_n(x)$.
 Častica je v stave Ψ , v ktorom pri meraní energie nameriame vždy iba jednu z dvoch najnižších energií, pričom energiu základného stavu nameriame rovnako často ako energiu prvého excitovaného stavu. Navrhните správne normovanú vlnovú funkciu stavu Ψ ako superpozíciu vlnových funkcií $\Phi_n(x)$.
(Úloha má veľa riešení.)
 Aká je stredná hodnota merania polohy častice v stavoch Φ_n ?
 Urobte predpoveď pre strednú hodnotu merania polohy častice voči stredu úsečky vo vami navrhovanom stave Ψ . Bude táto stredná hodnota menšia, väčšia alebo rovná $L/2$? *(Odpoveď vysvetlite.)*
72. Máme časticu viazanú na úsečke dĺžky L . Správne normované vlnové funkcie stacionárnych stavov častice označme $\Phi_n(x)$.
 V čase $t = 0$ je častica v stave Ψ , v ktorom pri meraní energie nameriame vždy iba jednu z dvoch najnižších energií, pričom energiu základného stavu nameriame dvakrát častejšie než energiu prvého excitovaného stavu. Navrhните správne normovanú vlnovú funkciu stavu Ψ ako superpozíciu vlnových funkcií $\Phi_n(x)$.
(Úloha má veľa riešení.)
 Aká je stredná hodnota merania energie častice v stave Ψ ? *(Výjadrite ju ako násobok energie základného stavu a svoju odpoveď vysvetlite.)*
 Aká vlnová funkcia bude popisovať túto časticu v čase $t > 0$?

73. Máme časticu viazanú na úsečke dĺžky L . Vlnové funkcie stacionárnych stavov častice označme $\Phi_n(x)$.
 Načrtnite, ako vyzerá funkcia $|\Phi_2(x)|^2$ a vysvetlite jej fyzikálny význam. Bez podrobného výpočtu, len na základe grafických argumentov urobte predpoveď pre najpravdepodobnejšiu polohu častice, najmenej pravdepodobnú polohu a strednú hodnotu merania polohy častice v stave $\Phi_2(x)$.
 Bez podrobného výpočtu, len na základe grafických argumentov zoradte podľa veľkosti pravdepodobnosti nájsť časticu (i) v prvej tretine úsečky, (ii) v druhej tretine úsečky, (iii) v tretej tretine úsečky.
74. Máme časticu viazanú na úsečke dĺžky L . Vlnové funkcie stacionárnych stavov častice označme $\Phi_n(x)$.
 Načrtnite, ako vyzerá funkcia $|\Phi_5(x)|^2$ a vysvetlite jej fyzikálny význam. Na základe grafických argumentov urobte predpoveď pre najpravdepodobnejšiu polohu častice, najmenej pravdepodobnú polohu a strednú hodnotu merania polohy častice v stave $\Phi_5(x)$.
75. Máme časticu viazanú na intervale $(0, L)$ na reálnej osi. Správne normované vlnové funkcie stacionárnych stavov častice označme $\Phi_n(x)$.
 Na základe grafických argumentov navrhните vlnovú funkciu $\Psi(x)$ ako jednoduchú, správne normovanú superpozíciu stavov Φ_n , takú, že v stave Ψ bude určite stredná hodnota merania polohy častice $\bar{x} > L/2$.
76. Častica na úsečke je v stave popísanom vlnovou funkciou $\Psi(x) = Ax(L - x)$. Čo by ste povedali na otázku, akú má častica energiu.
Odpoveď podrobne vysvetlite.
 Čo by ste povedali na otázku, akú energiu jej nameriame?
77. Častica na úsečke je v stave popísanom vlnovou funkciou $\Psi(x) = Ax(L - x)$. Čo by ste povedali na otázku, (i) akú energiu (spomedzi spektra hamiltoniánu) jej určite neodmeriame pri meraní energie a (ii) akú energiu jej odmeriame so zanedbateľnou pravdepodobnosťou?
Odpovede podrobne vysvetlite.
78. Tri identické (princiálne nerozoznatelné) a vzájomne neinteragujúce častice sú viazané na úsečku. Spin častíc je $1/2$, sú to teda fermióny. Pre takéto častice platí Pauliho vylučovací princíp.
 Systém sa nachádza v základnom stave. Aké sú kvantové čísla obsadených jednočasticových stavov?

Aká je degenerácia tohto stavu?

Aká je energia tohto stavu ako násobok E_1 , energie základného stavu jednej častice?

Aká je energia prvého excitovaného stavu spomínaných troch častíc?

79. Tri identické (princiálne nerozoznateľné) a vzájomne neinteragujúce častice sú viazané na úsečku. Spin častíc je 0, sú to teda bozóny. Pre takéto častice *neplatí* Pauliho vylučovací princíp.

Systém sa nachádza v základnom stave. Aké sú kvantové čísla obsadených jednočasticových stavov?

Aká je degenerácia tohto stavu?

Aká je energia tohto stavu ako násobok E_1 , energie základného stavu jednej častice?

Aká je energia prvého excitovaného stavu spomínaných troch častíc?

Ako sa zmenia tieto energie (ak vôbec) pre fermióny?

80. Uvažujme systém mnohých neinteragujúcich fermiónov. *Ide o užitočný model pre opis vodivostných elektrónov v kove.*

Vysvetlite, čo je energia základného stavu tohto systému a čo je jeho Fermiho energia. Ktorá z týchto energií je väčšia?

JEDNODUCHÝ HARMONICKÝ OSCILÁTOR

81. Uvažujme jednoduchý kvantový harmonický oscilátor s fyzikálnymi parametrami m a ω .

Napište hamiltonián pre tento jednoduchý systém a načrtnite, ako vyzerá jeho potenciál $V(x)$.

82. Uvažujme jednoduchý kvantový harmonický oscilátor.

Určte, či existujú viazané, resp. rozptylové stavy pre takýto jednoduchý systém. *Odpoveď zdôvodnite podľa kritérii pre existenciu týchto stavov z vlastností potenciálu. Samotné "Existujú"/"Neexistujú" nestačí.*

83. Uvažujme jednoduchý kvantový harmonický oscilátor.

Ako závisia jeho energetické hladiny od kvantového čísla n ?

Aká je degenerácia týchto hladín?

Načrtnite, ako na n závisia rozostupy jednotlivých energetických hladín a porovnajte to s náčrtkami rozstupov hladín pre elektrón v atóme vodíka a pre časticu viazanú na úsečke.

84. Uvažujme kvantový harmonický oscilátor.
Energia 1. excitovaného stavu je 6 eV. Určte energie druhého a tretieho excitovaného stavu.
85. Uvažujme súbor veľa identických kvantových harmonických oscilátorov, každý s tými istými fyzikálnymi parametrami m a ω . Oscilátory sú vzbudené do rôznych excitovaných stavov a pri prechodoch na nižšie hladiny vyžarujú prebytočnú energiu.
Určte najmenšiu energiu žiarenia v emisnom spektre oscilátorov.
86. Uvažujme kvantový harmonický oscilátor. V akom pomere sú energie fotónov odpovedajúcich
(i) prechodom z druhej excitovanej hladiny na základnú hladinu, a
(ii) prechodom z prvej excitovanej hladiny na základnú hladinu.
87. Uvažujme jednoduchý kvantový harmonický oscilátor.
Graficky načrtnite tvar vlnovej funkcie základného stavu. Výpočtom alebo na základe jednoduchých grafických argumentov určte najpravdepodobnejšiu polohu a strednú hodnotu merania polohy oscilátora v tomto stave.
Čo by ste povedali na otázku, aká je najmenej pravdepodobná poloha oscilátora?
88. Uvažujme jednoduchý kvantový harmonický oscilátor.
Graficky načrtnite tvar vlnovej funkcie prvého excitovaného stavu. Výpočtom alebo na základe jednoduchých grafických argumentov určte strednú hodnotu merania polohy oscilátora v tomto stave.
Váš náčrtok vlnovej funkcie by mal mať jedno minimum a jedno maximum. Aký je ich fyzikálny význam, čo je tam maximálne, resp. minimálne?
Čo by ste povedali na otázku, aká je najmenej pravdepodobná poloha oscilátora?
89. Uvažujme kvantový jednoduchý harmonický oscilátor (JHO).
Načrtnite vlnovú funkciu jeho základného stavu $\Phi_0(x)$ a prvého excitovaného stavu $\Phi_1(x)$ v čase $t = 0$. Na základe jednoduchých grafických argumentov ukážte, kde je najpravdepodobnejšie nájsť oscilátor v základnom stave.
Zmení sa táto predpoveď pre prvý excitovaný stav?

Ako budú vyzeráť $\Phi_0(x)$ a $\Phi_1(x)$ v čase $t > 0$? Aký pohyb koná JHO v týchto dvoch stavoch? Kmitá?

Dá sa povedať, že JHO s väčšou energiou (v stave Φ_1 v porovnaní so stavom Φ_0) “je ďalej od stredu”? V akom zmysle? Vzdiali sa stredná poloha oscilátora od stredu? Ktorá veličina podľa vás charakterizuje vzdialenosť JHO od stredu?

90. Možno vybrať komplexné čísla c_0 a c_2 tak, aby v stave popísanom vlnovou funkciou $\Psi(x) = c_0\Phi_0(x) + c_2\Phi_2(x)$ kmitala stredná hodnota polohy $\bar{x}(t)$ jednoduchého harmonického oscilátora? Φ_0 a Φ_2 sú vlnové funkcie základného a druhého excitovaného stavu.

Ak áno, pre ktoré hodnoty c_0 a c_2 bude amplitúda kmitov maximálna? Ak nie, vysvetlite, prečo nie.

91. Uvažujme kvantový harmonický oscilátor.

Vlnové funkcie stacionárnych stavov oscilátora označme $\Phi_n(x)$.

Bez podrobného výpočtu, len na základe grafických argumentov navrhните vlnovú funkciu $\Psi(x)$ ako jednoduchú, *správne normovanú* superpozíciu stavov $\Phi_n(x)$, takú, že v stave $\Psi(x)$ bude určite stredná hodnota merania výchylky oscilátora záporná.

92. Jednoduchý kvantový harmonický oscilátor je charakterizovaný parametrami potenciálu m a ω . Kvôli jeho kvantovej povahe je pri jeho popise dôležitá aj konštanta $\hbar$. Ukážte rozmerovou analýzou, aká kombinácia uvedených troch parametrov dáva dĺžkový rozmer, a teda typickú výchylku kvantového oscilátora.

93. Uvažujme kvantový harmonický oscilátor v stacionárnom stave $\Phi_n(x)$. Napíšte vzťah, ktorý vyjadruje pravdepodobnosť nájsť oscilátor v tomto stave vychýlený v polohe, ktorá nie je klasicky dovolená (je mimo intervalu ohraničeného klasickou amplitúdou).

Integrál netreba počítat; stačí správne určiť jeho hranice a *vysvetliť*, či táto pravdepodobnosť je nula alebo môže byť aj rôzna od nuly.

ATÓM VODÍKA

94. Čo to znamená, že potenciál je sféricky symetrický?

Ktorá z jednoduchých sústav, ktoré sme študovali na kvantovej mechanike, mala sféricky symetrický potenciál?

V akom tvare nachádzame vlnové funkcie stacionárnych stavov $\Psi(\vec{r}) = \Psi(r, \theta, \phi)$ vo sféricky symetrickom potenciáli?

95. Vysvetlite, podľa čoho vieme, že môžeme elektrón viazaný v atóme vodíka popisovať nerelativisticky. Je to preto, že jeho rýchlosť v atóme vodíka je oveľa menšia ako c ?
96. Uvažujme elektrón v atóme vodíka. Jadro (protón) považujeme za nekonečne ťažké.
Napíšte hamiltonián pre tento jednoduchý systém a v obrázku s pomenovanými osami načrtnite, ako vyzerá jeho potenciál $V(r)$.
97. Uvažujme ionizovaný atóm hélia s jediným elektrónom. Jadro (2 protóny a 2 neutróny) považujeme za nekonečne ťažké.
Napíšte potenciál $V(\vec{r})$ vystupujúci v hamiltoniáne pre elektrón v takomto systéme.
Napíšte hodnoty energetických hladín elektrónu ako násobky energie základného stavu elektrónu v atóme vodíka E_1 .
98. Uvažujme elektrón elektricky priťahovaný ku kladnému nekonečne ťažkému jadrú atómu vodíka.
Určte, pre aké energie elektrónu existujú viazané stavy tohoto systému, a pre aké energie existujú rozptylové stavy. Energie viazaných stavov konkretizujte.
Odpoveď zdôvodnite na základe kritérií pre existenciu týchto stavov z vlastností potenciálu. Samotný interval energií ako odpoveď nestačí.
99. Uvažujme elektrón v atóme vodíka.
Ako závisí energia viazaných stavov od hlavného kvantového čísla n ?
Načrtnite, ako na n závisia rozostupy jednotlivých energetických hladín a porovnajte to s náčrtkami rozostupov hladín pre časticu viazanú na úsečke a pre harmonický oscilátor.
100. Uvažujme elektrón v atóme vodíka. Energia základného stavu je -13.6 eV .
Určte energiu prvého a druhého excitovaného stavu.
101. Uvažujme termalizovaný súbor mnohých atómov vodíka (riedky plyn).
Jednotlivé atómy sú vzbudené do rôznych excitovaných stavov a pri preskokoch na nižšie hladiny vyžarujú prebytočnú energiu.

Určte maximálnu a minimálnu energiu žiarenia v emisnom spektre takéhoto plynu. Pri akej teplote $k_B T$ (v jednotkách eV, k_B je Boltzmannova konštanta) prestávame vidieť emisné spektrum?

Pripomeňme, že energia základného stavu je -13.6 eV.

102. Uvažujme elektrón v atóme vodíka.
V akom pomere sú energie fotónov odpovedajúcich
(i) prechodom z druhej excitovanej hladiny na základnú hladinu, a
(ii) prechodom z prvej excitovanej hladiny na základnú hladinu.
103. Uvažujme elektrón v atóme vodíka.
Aké kvantové čísla popisujú stacionárne stavy elektrónu?
Určte hodnoty, ktoré môžu tieto čísla nadobúdať.
104. Uvažujme elektrón v atóme vodíka.
V akom separovanom tvare nachádzame vlnové funkcie stacionárnych stavov elektrónu?
V odpovedi je dôležité napísať, ktorá funkcia závisí od akých premenných, a od akých kvantových čísel.
Pre ktoré stacionárne stavy je celková vlnová funkcia sféricky symetrická (nezávisí na uhloch)?
105. Uvažujme elektrón v atóme vodíka. Elektrón je v základnom stave.
Aké sú jeho možné kvantové čísla?
Aká je uhlová závislosť vlnovej funkcie elektrónu?
Aká je degenerácia tohto stavu, ak zoberieme do úvahy aj spinové stupne voľnosti elektrónu?
106. Uvažujme elektrón v atóme vodíka. Elektrón je v 1. excitovanom stave.
Aké sú jeho možné kvantové čísla?
Aká je degenerácia tohto stavu, ak zoberieme do úvahy aj spinové stupne voľnosti elektrónu?
107. Uvažujme elektrón v atóme vodíka. Elektrón je v základnom stave.
Aká je predpoveď kvantovej mechaniky pre strednú hodnotu merania súradnice x elektrónu v tomto stave?
Odpoveď zdôvodnite slovne či výpočtom, nestačí napísať iba hodnotu $\bar{x}$.
108. Uvažujme elektrón v atóme vodíka. Elektrón je v základnom stave.
Aká je predpoveď kvantovej mechaniky pre strednú hodnotu merania

polohy elektrónu v tomto stave?

Odpoveď zdôvodnite slovne alebo výpočtom, nestačí napísať iba hodnotu $\vec{r} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

109. Uvažujme elektrón v atóme vodíka. Elektrón je v základnom stave. Predpokladajme, že máme veľa takýchto atómov, a na každom raz zmeriame polohu elektrónu. Výsledok merania polohy pokaždé vynesieme do 3-rozmerného obrázku ako drobnú bodku. Po mnohých meraniach dostaneme z bodiek oblak. Aký tvar bude mať tento oblak? Bude mať napr. ostrú hranicu? Bude nejako sploštený alebo vykazovať iný výnimočný smer? V ktorej oblasti bude oblak najhustejší? Aká je predpoveď kvantovej mechaniky pre najpravdepodobnejšiu hodnotu merania polohy elektrónu v základnom stave atómu vodíka?
110. Uvažujme elektrón v atóme vodíka. Elektrón je v základnom stave. Aká je predpoveď kvantovej mechaniky pre strednú hodnotu merania hybnosti (p_x, p_y, p_z) elektrónu v tomto stave?
Odpoveď zdôvodnite.
111. Uvažujme elektrón v atóme vodíka. Elektrón je v základnom stave. Aká je predpoveď kvantovej mechaniky pre meranie orbitálneho momentu hybnosti L^2 a jeho priemetu L_z elektrónu v tomto stave? Môže byť elektrón ešte aj v nejakom inom fyzikálne odlišnom stave, v ktorom budú rovnaké predpovede pre jeho L^2 a L_z ?
Obe odpovede zdôvodnite.
Možno predpovedať aj výsledok merania L_x alebo L_y ?
112. Uvažujme elektrón v atóme vodíka. Elektrón je v 1. excitovanom stave. Aká je predpoveď kvantovej mechaniky pre výsledok merania orbitálneho momentu hybnosti L^2 a jeho priemetu L_z elektrónu v tomto stave?
Odpoveď zdôvodnite.
Aké hodnoty možno namerať, ak meriame L_x alebo L_y ?
113. Uvažujme elektrón v atóme vodíka. Elektrón je v 1. excitovanom stave. Navrhните jeho vlnovú funkciu v termínoch radiálnych a uhlových funkcií (netreba ich explicitne vypisovať), prípadne ich superpozície, s dôrazom na ich správne kvantové čísla, a to tak, aby stredná hodnota

merania L_z elektrónu bola $\hbar$.

Je možné požadovať aj iné hodnoty pre $\overline{L}_z$? Je $\overline{L}_z$ kvantovaná, alebo môže nadobúdať spojité hodnoty? Ak spojité, ako sa to dá dosiahnuť?

114. Uvažujme elektrón v atóme vodíka. Elektrón je v 1. excitovanom stave. Navrhните jeho vlnovú funkciu v termínoch radiálnych a uhlových funkcií (netreba ich explicitne vypisovať), prípadne ich superpozície, s dôrazom na ich správne kvantové čísla, a to tak, aby stredná hodnota merania L_z elektrónu bola $-\hbar/2$.

Je možné požadovať aj iné hodnoty $\overline{L}_z$ pre takto zadany elektrón? Je $\overline{L}_z$ kvantovaná, alebo môže nadobúdať spojité hodnoty?

115. Uvažujme elektrón v atóme vodíka.

Navrhните jeho vlnovú funkciu v termínoch radiálnych a uhlových funkcií (netreba ich explicitne vypisovať), prípadne ich superpozície, s dôrazom na ich správne kvantové čísla, a to tak, aby stredná hodnota merania L_z elektrónu bola $\frac{5}{4}\hbar$.

Aké energie možno namerať elektrónu, ktorého vlnovú funkciu ste navrhli?

116. Uvažujme elektrón v atóme vodíka. Elektrón je v základnom stave.

Aký je priebeh hustoty pravdepodobnosti nájsť takýto elektrón vo vzdialenosti r od jadra? *Odpoveď načrtnite na obrázku s pomenovanými osami.*

Kde bude pravdepodobnejšie nájsť elektrón: vo vzdialenosti $r = a$ alebo $r = 3a$? *Odpoveď vysvetlite. V oboch prípadoch predpokladáme výskyt v tenkej guľovej vrstvičke rovnakej hrúbky a daného polomeru.*

117. Uvažujme elektrón v atóme vodíka. Elektrón je v základnom stave.

Výpočtom odhadnite, koľkokrát pravdepodobnejšie je nájsť elektrón v guľovej vrstvičke o polomere a ako v rovnako tenkej guľovej vrstvičke o polomere $3a$. (*Jadro je v strede každej vrstvičky.*)

Na akú maximálnu vzdialenosť sa môže tento elektrón vzdialiť od jadra?

SPIN

118. Elektróny s náhodne orientovanými spinmi prechádzajú cez Sternov-Gerlachov prístroj s nehomogénnym magnetickým poľom v smere osi z . Aké hodnoty S_z nameriame prístrojom?

Čo sa zmení na Vašej odpovedi, ak vyletujúcim elektrónom postavíme do cesty druhý taký istý SG prístroj? (načrtnite obrázok)

Napište, aký operátor odpovedá meranej fyzikálnej veličine. Aké sú jeho vlastné stavy *vo všeobecnom formalizme* a im prislúchajúce vlastné hodnoty?

Aké sú spinové stavy elektrónov po meraní (teda po prechode cez tento SG prístroj) *v spinorovej reprezentácii*?

Odvoďte tvar týchto spinorov (po meraní) z vlastností matice S_z , ktorú priradíme operátoru $\hat{S}_z$.

119. Elektróny v spinovom stave $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ prechádzajú cez Sternov-Gerlachov prístroj s nehomogénnym magnetickým poľom v smere osi z . Aké hodnoty S_z a s akými pravdepodobnosťami nameriame prístrojom?
Aká je stredná hodnota merania S_z na týchto elektrónoch? Aká je neurčitosť ΔS_z tohto merania?
120. Elektróny v spinovom stave $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, kde $a, b \neq 0$, prechádzajú cez Sternov-Gerlachov prístroj s nehomogénnym magnetickým poľom v smere osi z . Aké hodnoty S_z a s akými pravdepodobnosťami nameriame prístrojom?
Aká je stredná hodnota merania S_z na týchto elektrónoch?
Aká je normovacia podmienka pre a a b ? (*Musí byť normovacia podmienka splnená, ak chceme správne zodpovedať túto otázku?*)
121. Elektróny v spinovom stave $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, kde A je normovacia konštanta, prechádzajú cez Sternov-Gerlachov prístroj s nehomogénnym magnetickým poľom v smere osi z . Aká je stredná hodnota merania S_z nameraná prístrojom po prechode mnohých elektrónov?
Aké je $\overline{S_z^2}$ a ΔS_z ? *Dávajú vaše odpovede zmysel?*
122. Elektróny v spinovom stave $A \begin{pmatrix} i \\ 3 \end{pmatrix}$, kde A je normovacia konštanta, prechádzajú cez Sternov-Gerlachov prístroj s nehomogénnym magnetickým poľom v smere osi z . Aká je stredná hodnota merania S_z nameraná prístrojom po prechode mnohých elektrónov?
123. Elektróny v spinovom stave $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ prechádzajú cez Sternov-Gerlachov prístroj s nehomogénnym magnetickým poľom v smere osi x . Aká matrica odpovedá operátoru S_x ?
Aká je stredná hodnota merania S_x nameraná prístrojom po prechode mnohých elektrónov?

124. Elektróny v spinovom stave $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ prechádzajú cez Sternov-Gerlachov prístroj s nehomogénnym magnetickým poľom v smere osi x . Aká matica odpovedá operátoru S_x ?
Aká je stredná hodnota merania S_x nameraná prístrojom po prechode mnohých elektrónov?
125. Elektróny v spinovom stave $A \begin{pmatrix} i \\ 3 \end{pmatrix}$, kde A je normovacia konštanta, prechádzajú cez Sternov-Gerlachov prístroj s nehomogénnym magnetickým poľom v smere osi x . Aká je stredná hodnota merania S_x nameraná prístrojom po prechode mnohých elektrónov?
Vypočítajte strednú kvadratickú odchýlku merania S_x a vysvetlite, prečo pri výpočte vychádza jednoduchý výsledok pre $\overline{S_x^2}$.
126. Elektrón v spinovom stave $A \begin{pmatrix} 3 \\ 4i \end{pmatrix}$, kde A je normovacia konštanta, prechádza cez Sternov-Gerlachov prístroj s nehomogénnym magnetickým poľom v smere osi x .
S akou pravdepodobnosťou mu prístrojom nameriame $S_x = +\hbar/2$?
S akou pravdepodobnosťou mu prístrojom nameriame $S_x = -\hbar/2$?
Použite tieto pravdepodobnosti na vypočítanie strednej hodnoty $\overline{S_x}$ a strednej kvadratickej odchýlky ΔS_x . Vysvetlite, prečo pri výpočte vychádza jednoduchý výsledok pre $\overline{S_x^2}$.
127. Elektróny v spinovom stave $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ prechádzajú cez Sternov-Gerlachov prístroj s nehomogénnym magnetickým poľom v smere osi z . Navrhните konštanty a a b (vrátane správneho normovania), aby bola stredná hodnota merania S_z rovná $\hbar/4$.
128. Elektróny v spinovom stave $\frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 1+2i \\ 1-i \end{pmatrix}$ prechádzajú cez Sternov-Gerlachov prístroj s nehomogénnym magnetickým poľom v smere osi z . Vypočítajte, v akom pomere budú intenzity zväzkov (t.j. počty elektrónov vo zväzkoch) po prechode prístrojom.

PORUCHOVÁ TEÓRIA

129. Napíšte vzťah pre korekciu energie n -tej hladiny v prvom ráde poruchovej teórie a vysvetlite význam napísaných symbolov.

130. Atóm vodíka v základnom stave umiestnime do konštantného vonkajšieho elektrického poľa $\vec{E}_{ext}$ v smere osi z . Napíšte poruchový hamiltonián odpovedajúci pôsobeniu poľa na elektrón¹ a určte korekciu k energii elektrónu v prvom ráde poruchovej teórie.
131. Uvažujme časticu viazanú na úsečke dĺžky L . Graficky navrhnete tvar dodatočného (poruchového) hamiltoniánu pôsobiaceho na túto časticu, aby bola korekcia k energii základného stavu v prvom ráde poruchovej teórie nulová. Svoju odpoveď zdôvodnite.
132. Uvažujme časticu viazanú na úsečke dĺžky L . Graficky navrhnete tvar dodatočného (poruchového) hamiltoniánu pôsobiaceho na túto časticu, aby bola korekcia k energii základného stavu v prvom ráde poruchovej teórie väčšia ako korekcia k energii prvého excitovaného stavu. Svoju odpoveď zdôvodnite.
133. Uvažujme časticu viazanú na úsečke dĺžky L . Na časticu pôsobí poruchový hamiltonián popísaný spojitou funkciou, ktorá je nulová na koncoch úsečky, pre $x \in (0, L)$ je kladná a má jedno výrazné maximum v strede úsečky. Vysvetlite, akým spôsobom sa zmení emisná čiara odpovedajúca prechodu častice z prvého excitovaného do základného stavu po zapnutí tejto poruchy.

¹Vzťah medzi elektrostatickým potenciálom ϕ a intenzitou elektrického poľa $\vec{E}$ je $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$.