Prednaska20190218.pdf

Prednaska20190221.pdf

Prednaska20190225.pdf

Prednaska20190228.pdf

Prednaska20190304.pdf

Prednaska20190306.pdf

Prednaska20190307.pdf

Prednaska20190311.pdf

Prednaska20190314.pdf

Prednaska20190318.pdf

Prednaska20190321.pdf

Prednaska20190325.pdf

Prednaska20190328.pdf

Prednaska20190401.pdf

Prednaska20190404.pdf

Prednaska20190408.pdf

Prednaska20190411.pdf

Prednaska20190415.pdf

Prednaska20190425.pdf

Prednaska20190429.pdf

Prednaska20190502.pdf

Prednaska20190506.pdf

Prednaska20190509.pdf

Prednaska20190513.pdf

Prednaska20190516.pdf

Prednaska20190516dodatok.pdf

Pravidlá

Maximálny počet bodov za semester 40, za skúšku 60 (písomka 35, ústna 25)
Hodnotenie: >85 A, >75 B, >65 C, >55 D, >45 E, inak Fx
Súčet bodov za semester plus skúšková písomka musí byť > 45 pre pripustenie k ústnej skúške. **To znamená, že za semester treba získať >10 bodov !!!** pre pripustenie ku skúške.

Na každom cvičení krátka písomka, spolu 20 bodov/semester
Z každého cvičenia domáca úloha, nezapočítava sa, ale nepodceňujte to !!!!
Krátke písomky spravidla budú súvisieť s úlohami zadanými na predchádzajúcom cvičení.
Midterm písomka 10 bodov
Endterm písomka 10 bodov
Sú aj dobrovoľné výberové cvičenia ako samostatný predmet.

Strašenie

- Nepodceňujte prácu počas semestra
- Dôraz je na pochopenie, nie na naučenie
- ale Rátajte veľa drilovacích príkladov
- Dodatkové výberové cvičenia
- S malým počtom bodov za semester sa skúška nedá urobiť

http://davinci.fmph.uniba.sk/~cerny1/

Na tej stránke budú postupne pribúdať prednášky pre tento semester. Ale sú tam všetky prednášky, tak ako odzneli v minulom roku v zimnom aj letnom semestri. Sú tam aj .pptx s **originálnym záznamom zvuku,** ako naozaj odznel na prednáške.

Odporúčaná literatúra:

Fyzika část 1. Mechanika : Vysokoškolská učebnice obecné fyziky / David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker ; přeložili Jana Musilová ... [et al.]. Brno : Vysoké učení technické VUTIUM, 2000

Fyzika pre študujúcich na vysokých školách technických : 1 : mechanika, akustika, termika / Dionýz Ilkovič. Bratislava : Alfa, 1972

Všeobecná fyzika : 1 : mechanika a molekulová fyzika / Štefan Veis, Ján Maďar, Viktor

Programové vyhlásenie fyziky

Systém, stav, zmena stavu, časový vývoj

- okamih (**stav systému**) možno zaznamenať a na základe záznamu ho zrekonštruovať
- časový vývoj systému je časová postupnosť stavov (okamihov)
- časový vývoj systému je možné **predpovedať**, vychádzajúc zo znalosti počiatočného stavu.
- Technológiou predpovede budúcnosti sú matematické **pohybové rovnice**. Časový vývoj hľadáme ako riešenie pohybových rovníc, ktoré spĺňa počiatočnú podmienku (stav na začiatku je známy počiatočný stav)

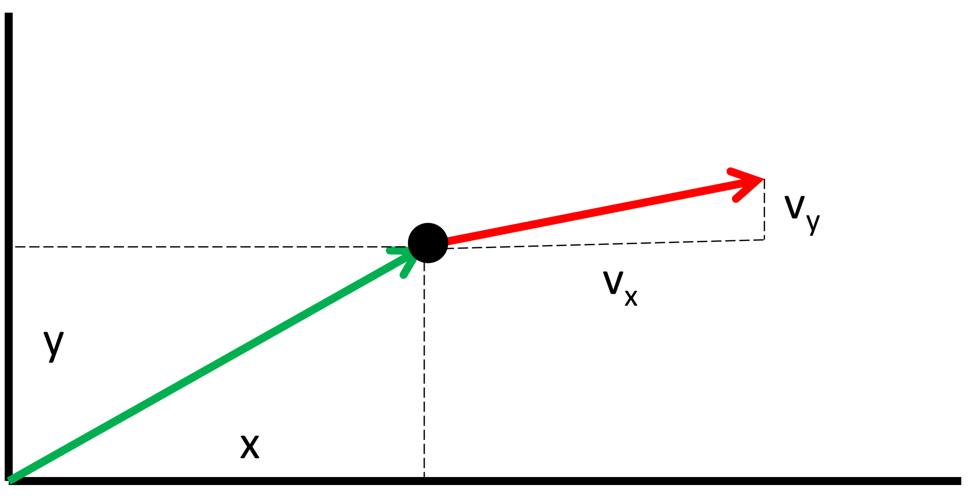
Častica (hmotný bod) ako fyzikálny systém

Stav častice: (možno zadať aj pomocou dvoch vektorov)

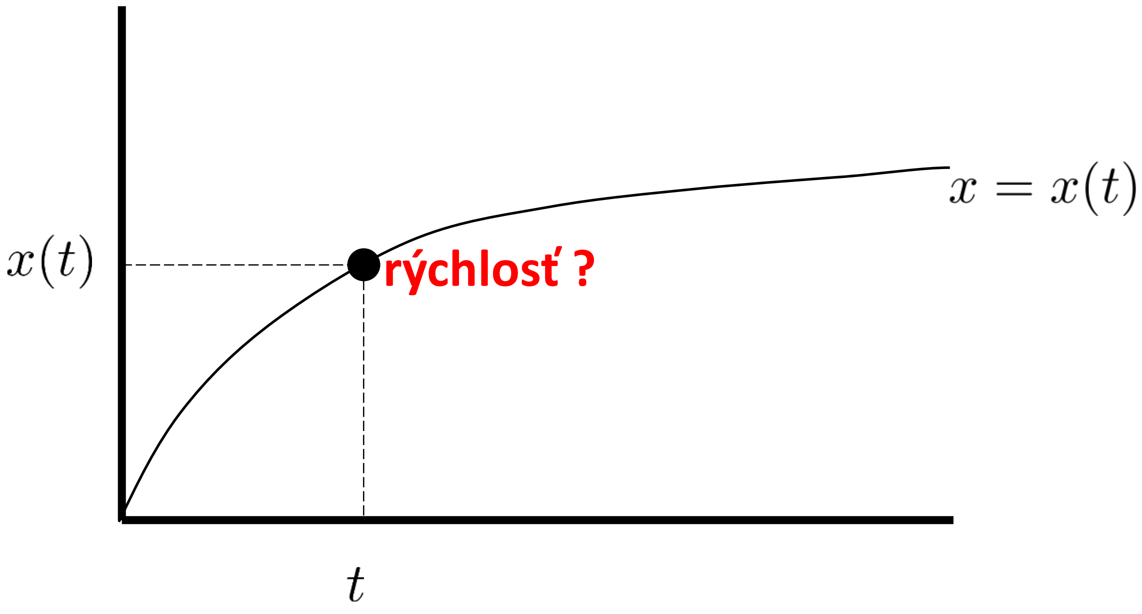
- poloha $\overrightarrow{r} = \{x, y, z\}$
- rýchlosť $\overrightarrow{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$

Stav častice (hmotného bodu) viem zaznamenať pomocou šestice čísel

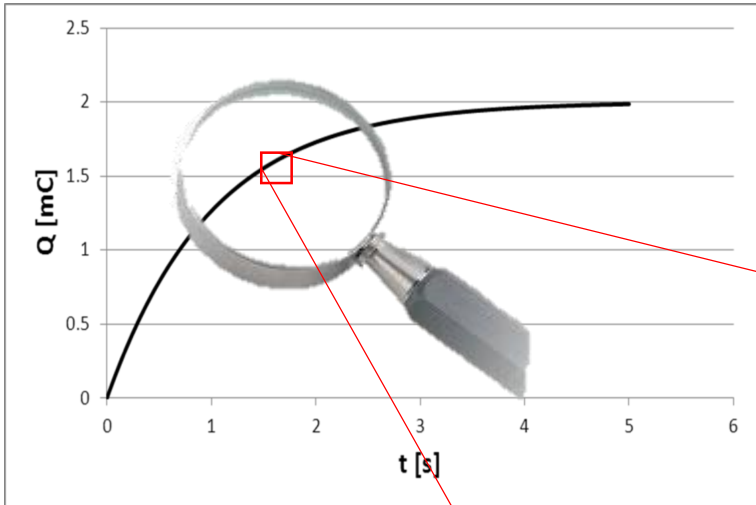
$$\{x, y, z, v_x, v_y, v_z\}$$



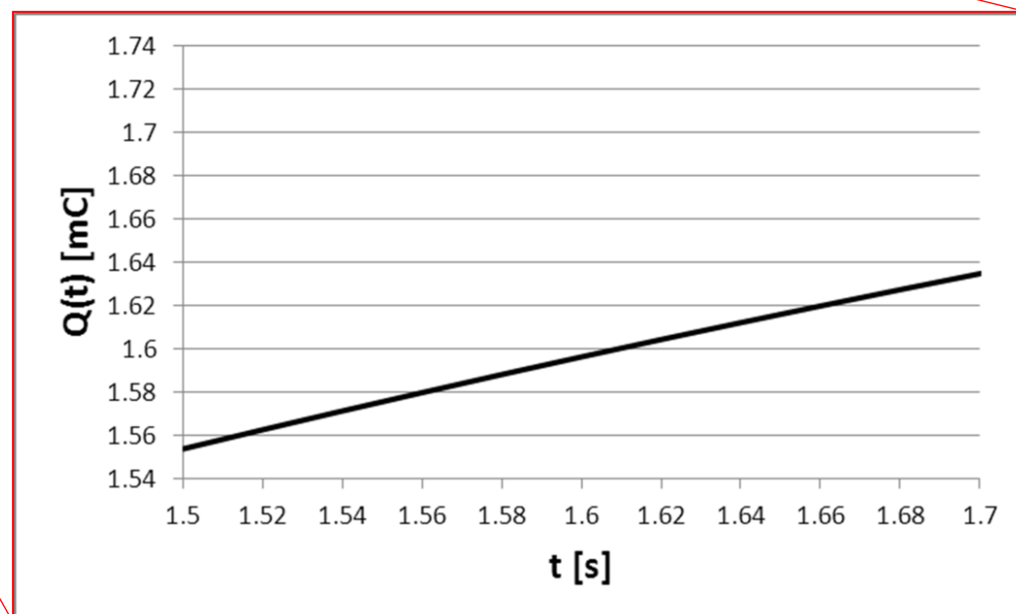
Nerovnomerný pohyb (po priamke)

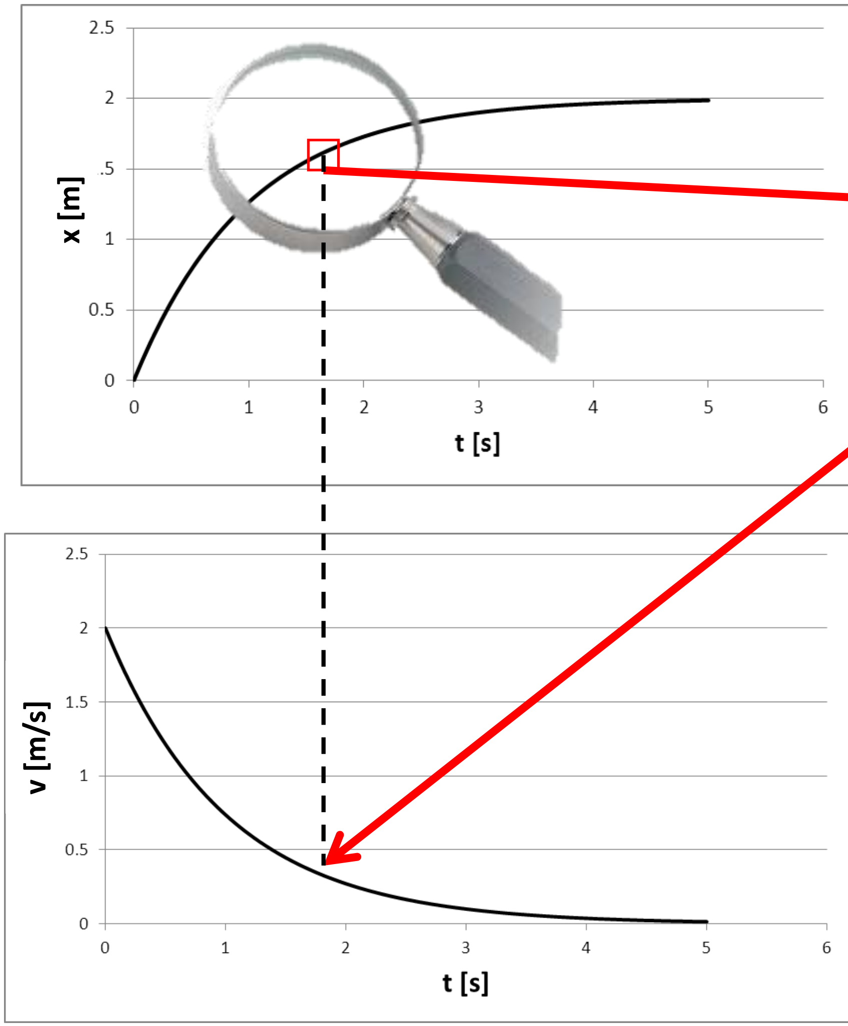


Newtonov trik



Ak sa pozrieme na dostatočne malý úsek grafu pri vhodnom zväčšení, vyzerá ako priamka





$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Výpočet urobíme vo veľmi maličkom okienku: zvolíme Δt tak malé, aby sa do toho okienka zmestilo, nájdeme príslušné Δx a vypočítame podiel, to čo dostaneme nazveme **okamžitá hodnota rýchlosti** **lebo okienko „pokrýva len okamih“**

Neskôr exaktní matematici vybabrali s Newtonom, kritizujúc: čo to je za neexaktnú reč „tak malé Δt ako je rozumné“, to treba formulovať matematicky presne a definovali:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Záver tejto dlhej diskusie:

Poloha častice je „jednookamihová záležitosť“, v každom okamihu častica „niekde je“.

Okamžitá rýchlosť častice je „dvojbodová“ (dvojokamihová) záležitosť, ale **prakticky pripísateľná k jednému okamihu**

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Opakovanie

Zovšeobecnenie pojmu rýchlosť
Rýchlosť narastania hocijakej veličiny

Newton: ako definovať pojem

okamžitá rýchlosť zmeny nejakej veličiny

V okolí želaného okamihu zvolím tak malé Δt ako je rozumné a urobím podiel

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

potom I sa nazýva okamžitá rýchlosť zmeny veličiny Q, matematická definícia znie

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Zrýchlenie

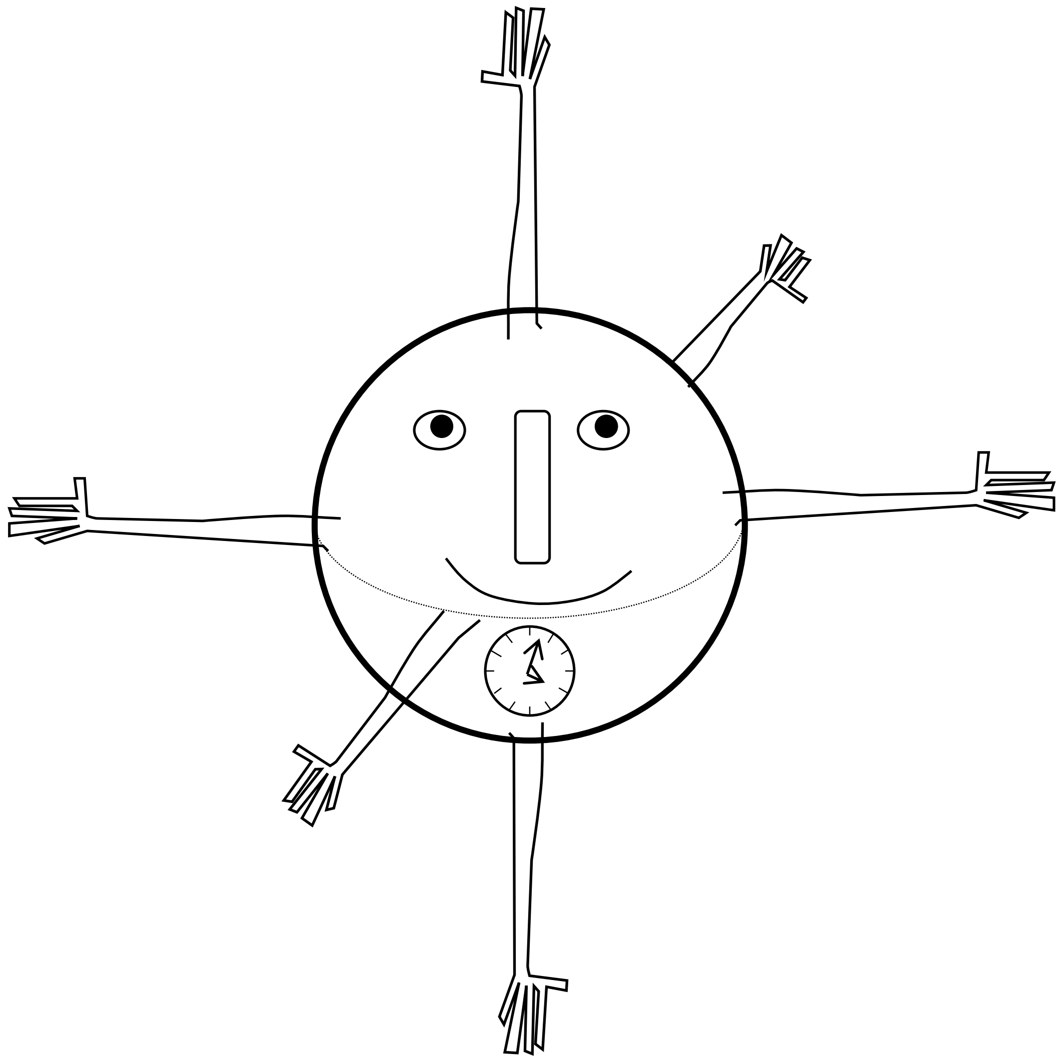
$$\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{F}}{m}$$

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt}$$

zrýchlenie:
rýchlosť s akou sa mení rýchlosť

$$\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z) = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}\right)$$

Súradnicový trpaslík (má 6 rúk a hodinky)

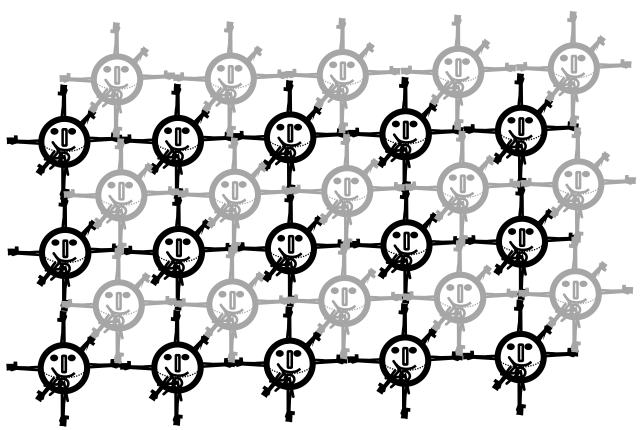


Súradnicová sústava

vznikne tak, že trpaslíkov pomenujeme. Každý trpaslík dostane trojslovné meno

Najjednoduchšie mená sa trpaslíkom vytvoria pomocou trojice čísel. Jeden trpaslík (počiatok súradnicovej sústavy) dostane meno (0,0,0). Jeho pravý sused "v smere x" bude (1,0,0), ľavý (-1,0,0). Horný sused bude (0,0,1) dolný (0,0,-1). Atď.

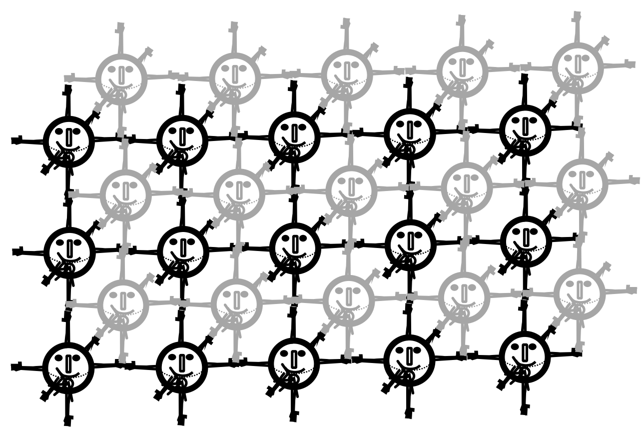
Mená trpaslíka udávajú súradnice "bodu v priestore"



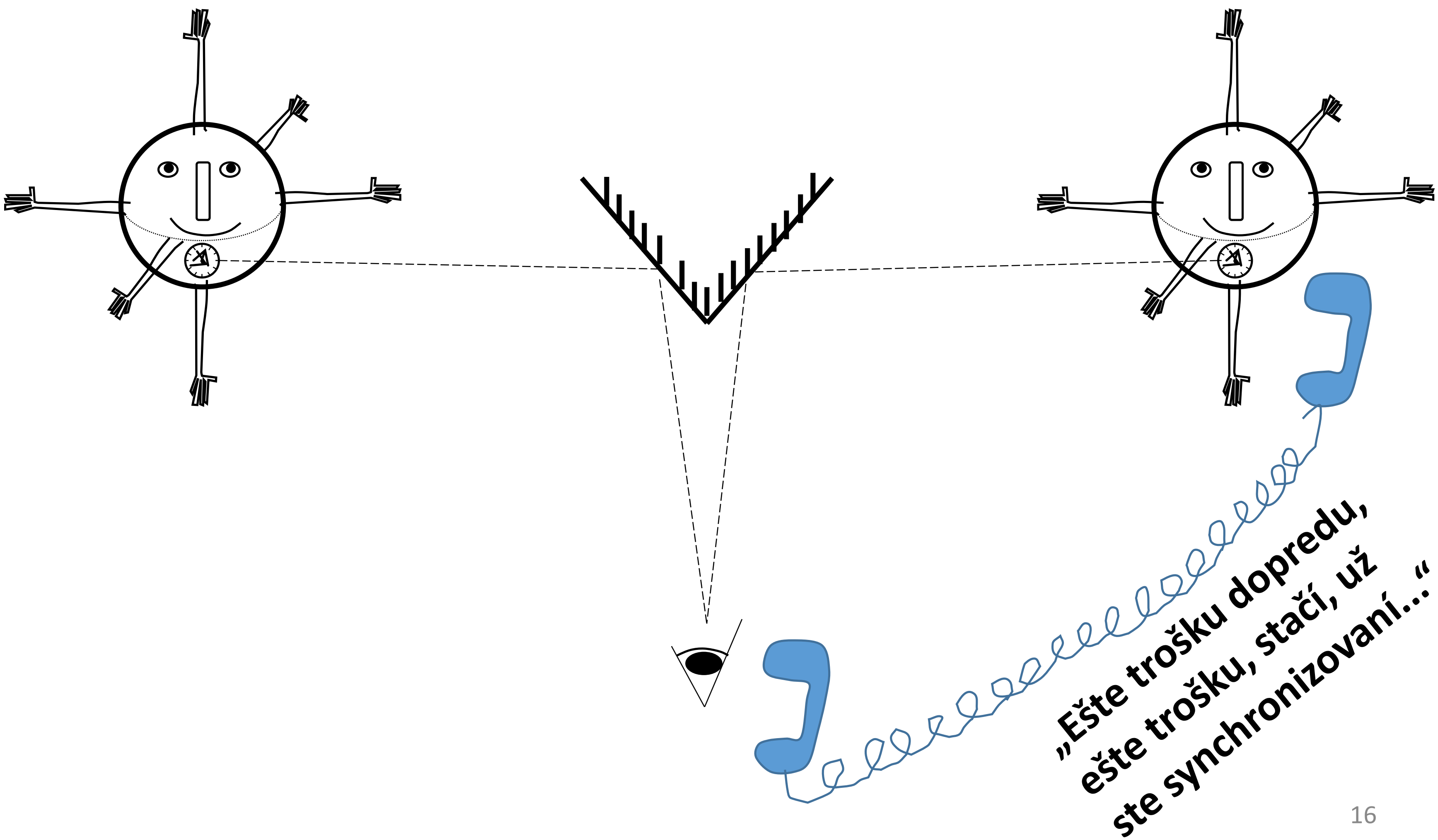
Súradnicová sústava

Mená trpaslíkov sme urobili celočíselné, ale môžeme si ich predstaviť veľmi maličkých, napríklad že vzdialenosti medzi nimi budú 10^{-12} m. Takže súradnice vyjadrené v metroch budú reálne čísla s 12 platnými desatinnými miestami, čo postačuje pre veľa fyzikálnych problémov.

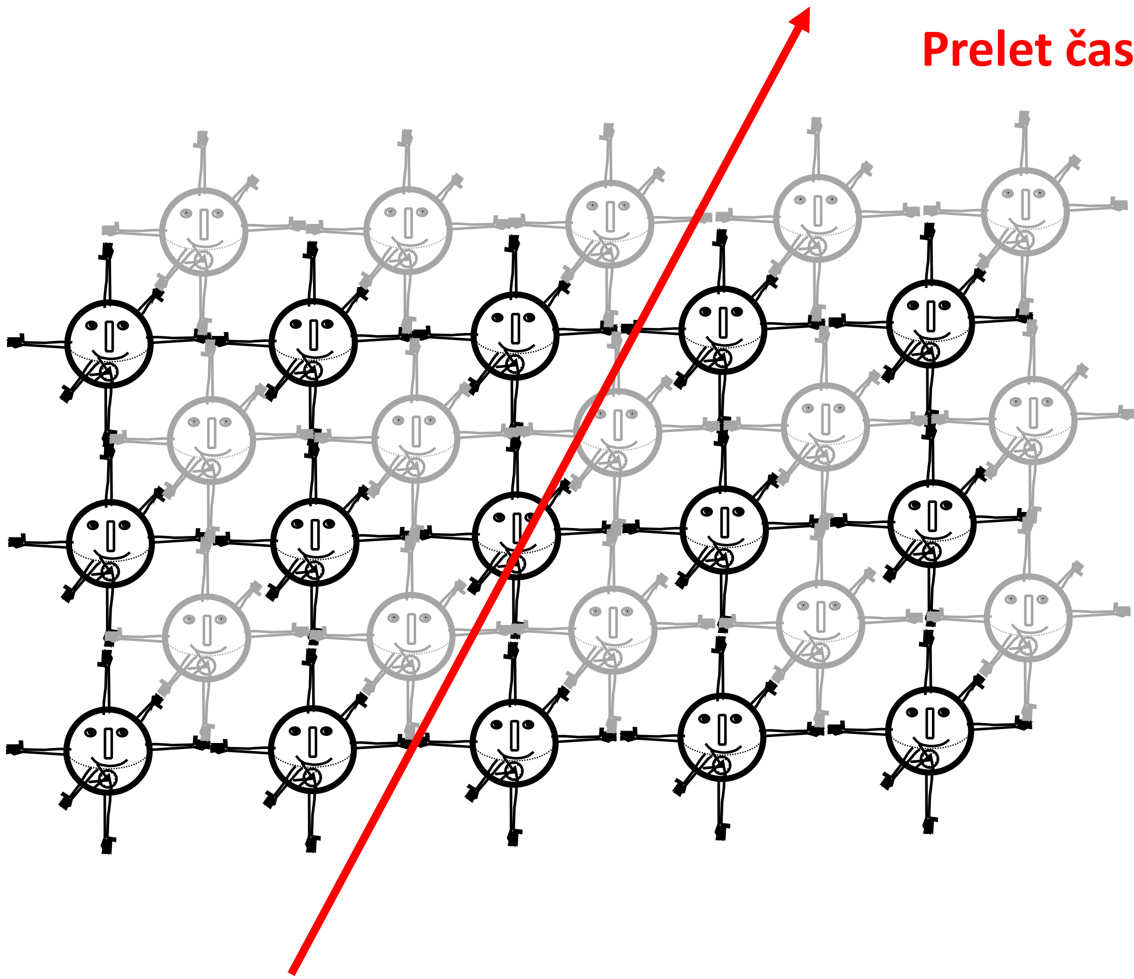
Trpaslíci vzdialení od seba 10^{-35} m, to už nie je dobrý nápad. Máme dôvody domnievať sa, že vlastnosti nášho priestoru na tak malých vzdialenostiach sú radikálne iné



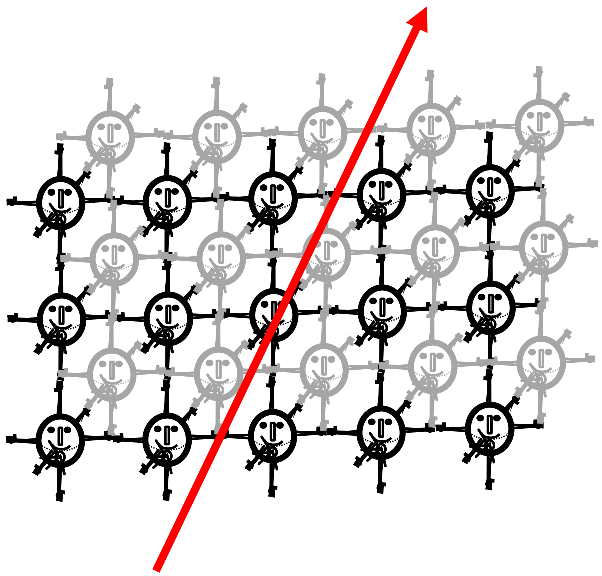
Synchronizácia hodín



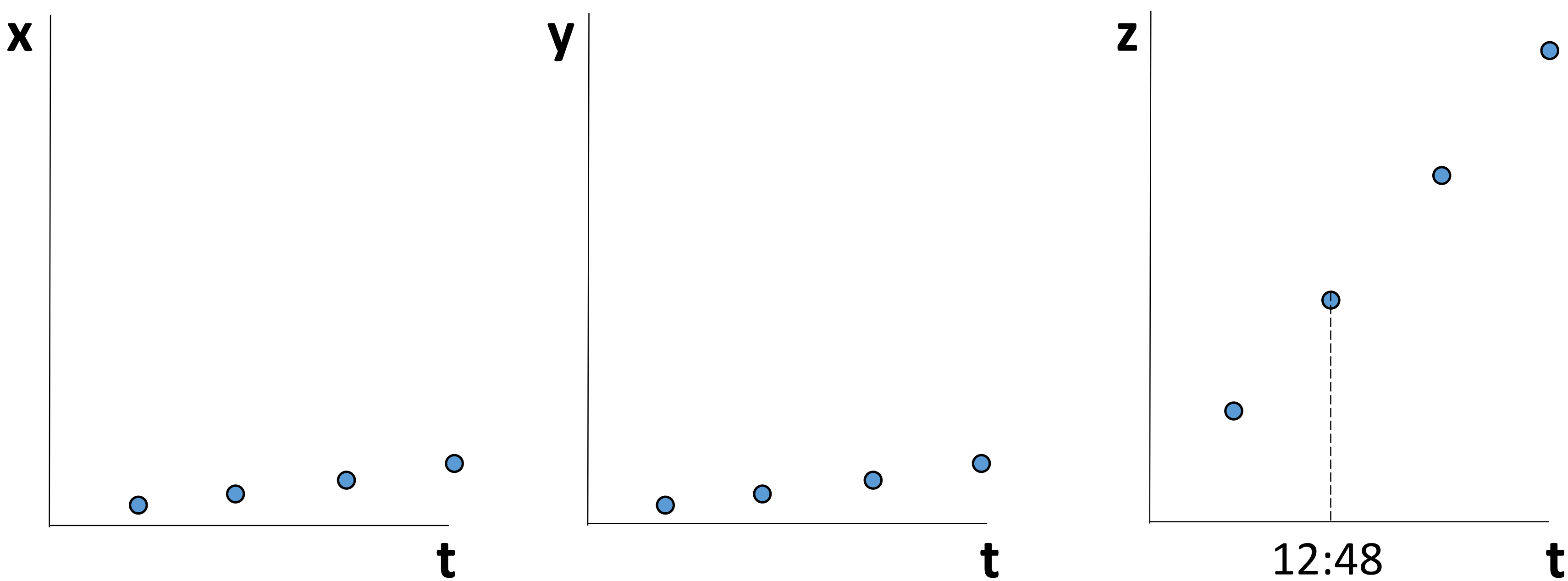
Prelet častice súradnicovou sústavou

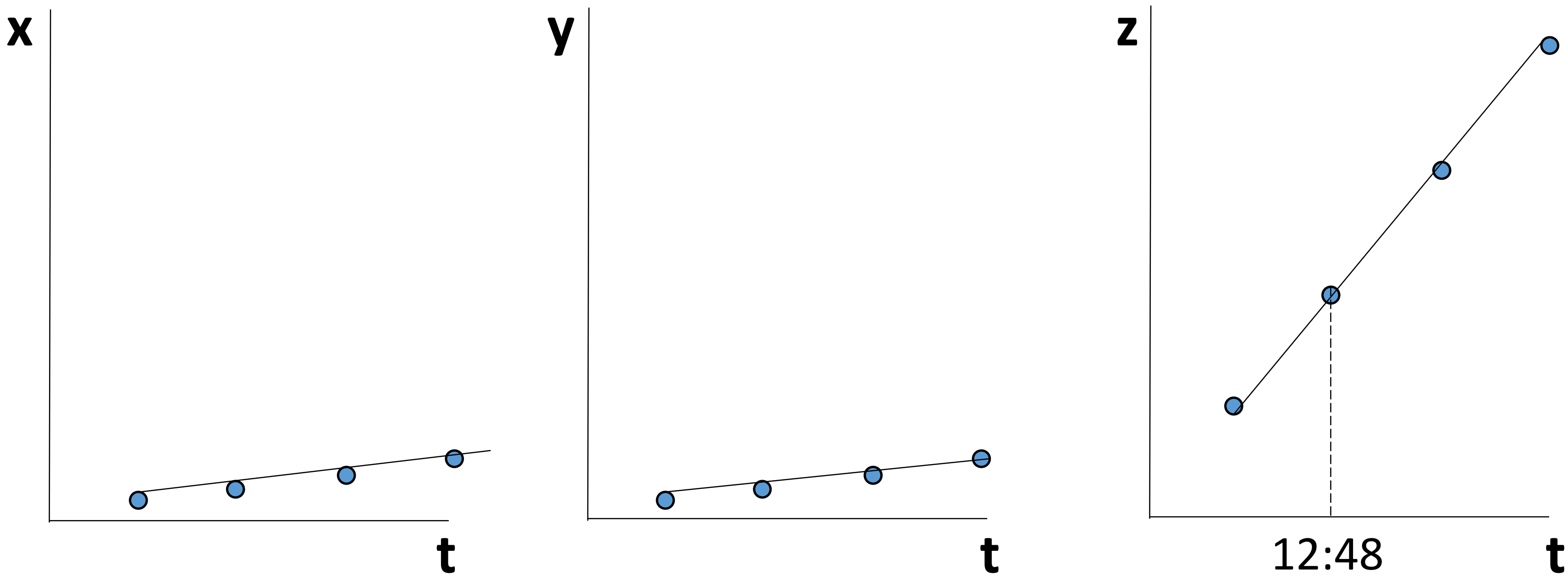


Každý trpaslík ktorý vidí tesne okolo seba preletieť časticu (to je pre neho **udalosť**) urobí o tom záznam na lístok, na ktorý **napíše svoje meno (x,y,z) a uvedie čas**, ktorý ukazovali jeho hodiny pri tom prelete. Lístok pošle do ústredia, kde lístky zhromaždia a vyhodnotia



Ústredie dostalo lístky:
(1,2,7; 12:47)
(2,3,14; 12:48)
(3,4,21; 12:49)
(4,5,28,12:50)
...



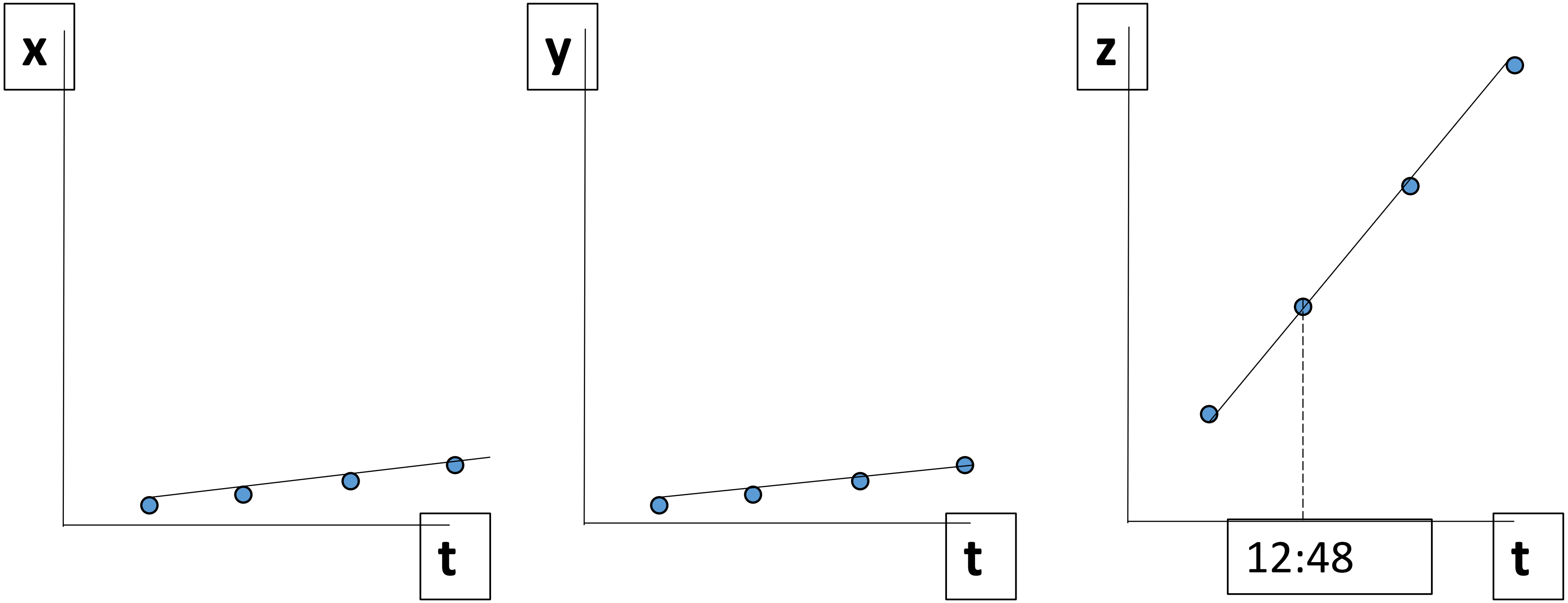


Pohyb častice nazveme rovnomerný priamočiary, ak trpaslíkovské záznamy sa dajú „fitovať" tak, že existujú tri konštanty v_x, v_y, v_z také, že záznamy vyhovujú vzťahom

$$x(t) = x_0 + v_x(t - t_0)$$

$$y(t) = y_0 + v_y(t - t_0)$$

$$z(t) = z_0 + v_z(t - t_0)$$



?

Pohyb častice nazveme **rovnomerný** priamočiary, ak trpaslíkovské záznamy sa dajú „fitovať“ tak, že existujú tri konštanty v_x, v_y, v_z také, že záznamy vyhovujú vzťahom

$$x(t) = x_0 + v_x(t - t_0)$$

$$y(t) = y_0 + v_y(t - t_0)$$

$$z(t) = z_0 + v_z(t - t_0)$$

Hop, niečo sme zabudli! Podarí sa to takto, iba keď trpaslíci budú mať „dobré“ hodinky, teda také, ktoré rovnomerne (pravidelne) tikajú.

Čo sú to dobré (rovnomerné, pravidelne tikajúce) hodinky

Také, že uplynie rovnako dlhý čas medzi tým čo ukážu 12:47 a potom 12:48, ako medzi tým, čo ukážu 12:54 a potom 12:55

Ale čo je to „uplynie rovnako dlhý čas“?

Čo sú to dobré (rovnomerné, pravidelne tikajúce) hodinky

Také že uplynie rovnako dlhý čas medzi tým čo ukážu 12:47 a potom 12:48, ako medzi tým, čo ukážu 12:54 a potom 12:55

Ale čo je to „uplynie rovnako dlhý čas“?

- **mám návod na výrobu hodín, ktoré majú gombík štart**
- **vyrobím dvojo hodín, dám ich vedľa seba**
- **jedny naštartujem, začnú tikať**
- **v okamihu, keď ukazujú číslo 1000, naštartujem druhé hodiny**
- **sledujem, či synchrónne ukazujú dvojice (1000, 0), (1001,1), (1002,2), (1003,3), ...**
- **Ak áno, budem hovoriť, že idú rovnomerne, lebo tisíci tik trvá rovnako dlho ako prvý. Lebo „verím“ že prvý tik hodín naštartovaných v pondelok bude trvať rovnako dlho ako prvý tik hodín naštartovaných v stredu, ak sú vyrobené podľa rovnakého návodu**

Už vieme, čo to znamená „rovnomerne“ a „priamočiaro“

Skontrolujme teda naučenú stredoškolskú vetu:

Hmotný bod (častica), na ktorý nepôsobí žiadna sila, sa pohybuje rovnomerne priamočiaro alebo stojí.

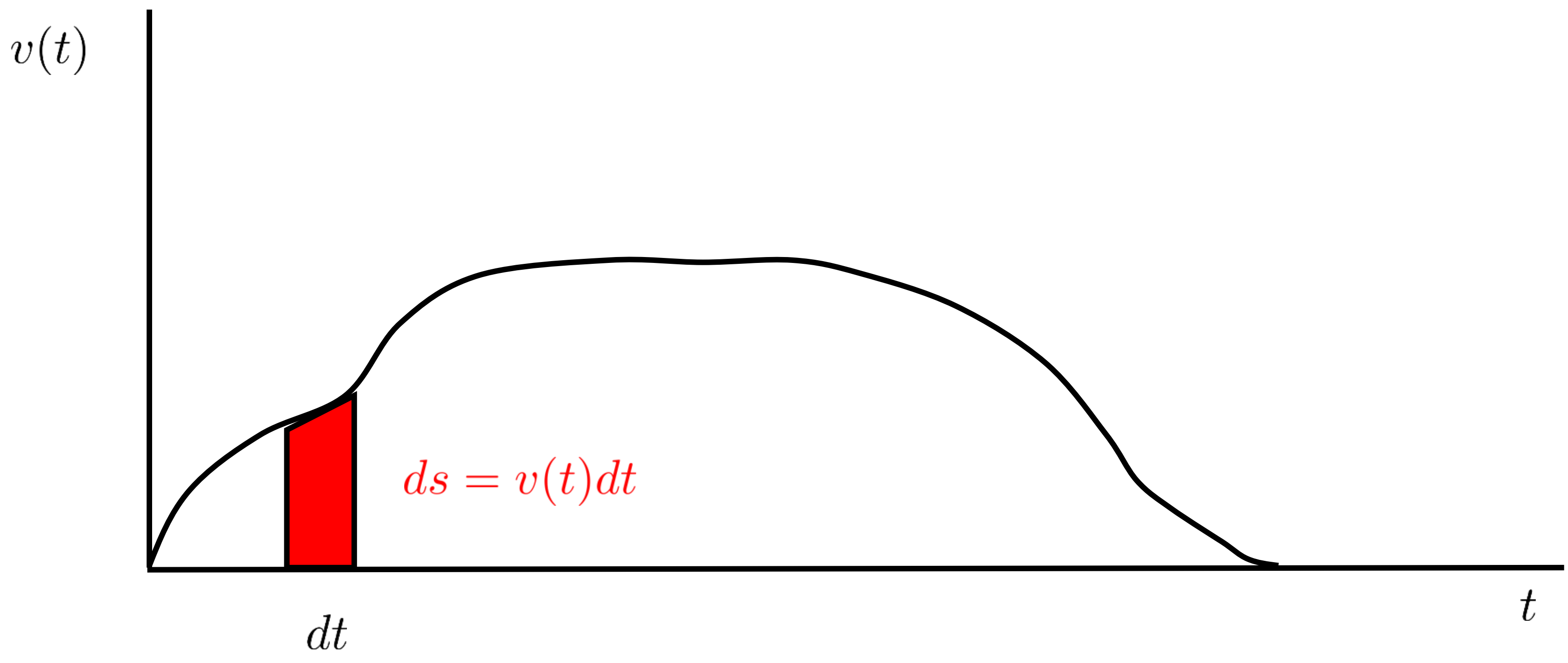
Už vieme, čo tým hovoríme, ale zjavne to nie je pravda:

Trpaslíci, navzájom pochytaní za ruky, ktorí sedia v električke práve zahýbajúcej doľava a pozorujú guľu položenú na sedadle, uvidia, že guľa sa rozbehne doprava bez toho, že by na ňu niekto aktívne pôsobil silou. Trpaslíci, stojaci na zastávke a nazerajúci cez okno uvidia, že guľa pekne pokračuje v rovnomernom priamočiarom pohybe, ibaže električka pod ňou „uhla doľava“.

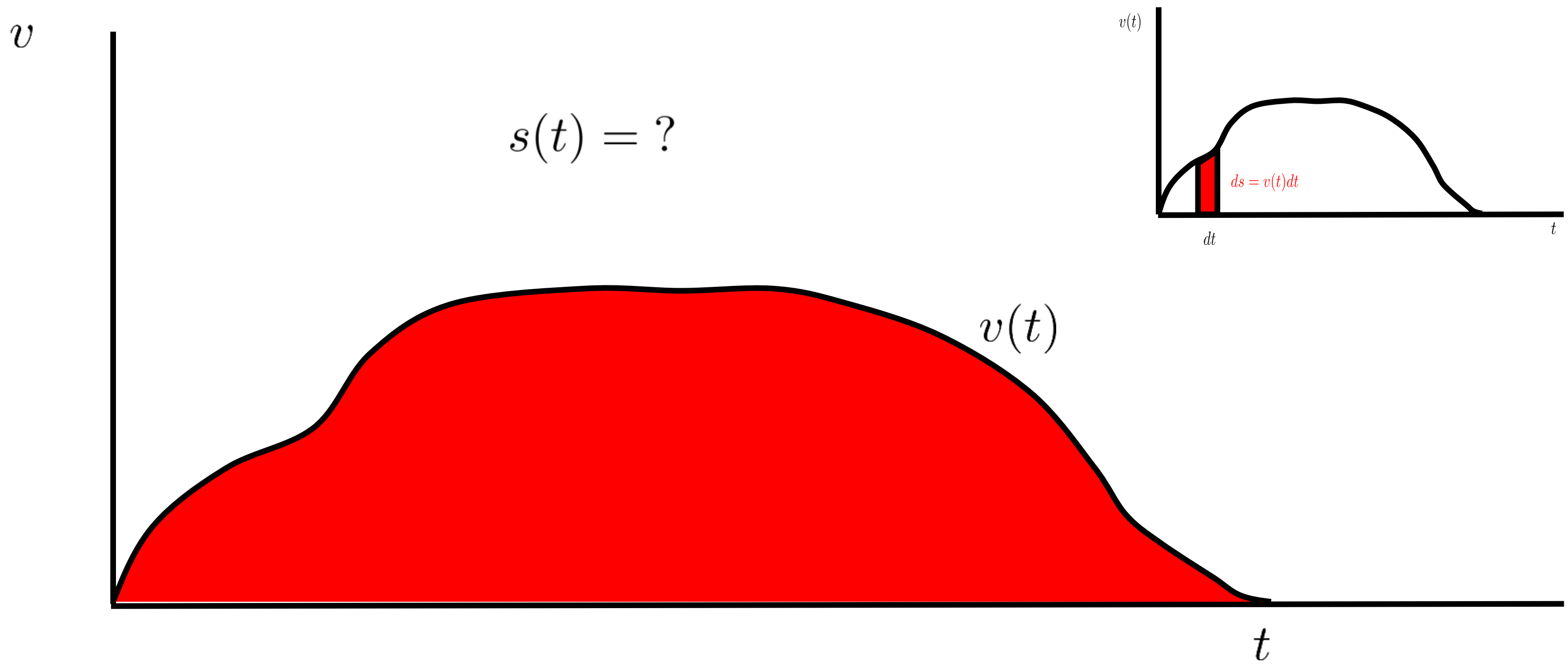
Záver: zákon zotrvačnosti sme zatiaľ sformulovali zle. Správne má byť takto:
Existuje súradnicová sústava, voči ktorej sa voľné hmotné body pohybujú rovnomerne priamočiaro (prípadne nulovou rýchlosťou). Taká sústava sa volá inerciálna.
Logický dôsledok: ak existuje jedna inerciálna sústava, potom je inerciálna i každá sústava, ktorá sa voči už identifikovanej inerciálnej sústave pohybuje (ako celok) rovnomerne priamočiaro.

Ak chcete robiť fyziku a nenarobiť si zbytočné komplikácie, používajte len

inerciálne sústavy.


$v(t)$
$ds = v(t)dt$
dt
t

Poznám priebeh rýchlosti v čase $v(t)$, chcem určiť $s(t)$



Dráha prejdená od času $t = 0$ až po čas t je

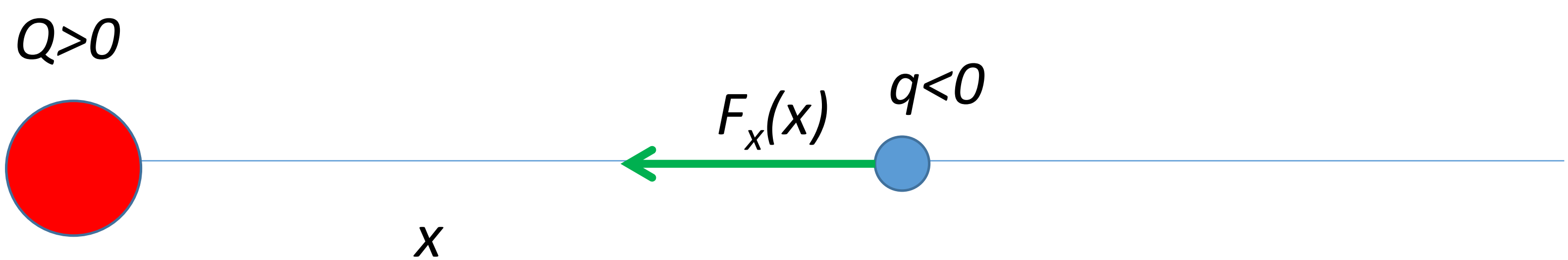
- opak derivácie funkcie $v(t)$
- plocha pod krivkou $v(t)$

Matematický poznatok: plocha pod krivkou sa dá vypočítať pomocou „opaku derivácie“.

Vyšetrime jednorozmerný pohyb, hmotný bod sa kĺže po osi *x*,

ak je (by bol) v mieste *x*,
pôsobí (pôsobila by) naň sila $F_x(x)$
funkcia $F_x(x)$ je známa (máme nejakú teóriu)

Príklad



$$F_x(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{x^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q||q|}{x^2}$$

Ako mi znalosť funkcie $F_x(x)$ umožňuje predpovedať budúcnosť

- Poznám počiatočný stav v čase t=0 $x(0), v_x(0)$
- Poznám hodnotu $F(x(0))$
- Teda podľa Newtona poznám zrýchlenie v čase 0

$$a_x(0) = \frac{F(x(0))}{m}$$

- Zo známej rýchlosti viem vypočítať polohu za krátky okamih dt

$$x(dt) = x(0) + v_x(0)dt$$

- Zo známeho zrýchlenia viem vypočítať rýchlosť za krátky okamih dt

$$v_x(dt) = v_x(0) + a_x(0)dt$$

- V novej polohe viem vypočítať aké bude zrýchlenie v čase dt
- Viem teda stav v budúcom čase dt a pokračujem rovnako do ešte budúcejšieho času $2dt$

$$a_x(dt) = \frac{F(x(dt))}{m}$$

$$x(2dt) = x(dt) + v_x(dt)dt$$

$$v_x(2dt) = v_x(dt) + a_x(dt)dt$$

Reťazenie predpovedí budúcnosti

$$a_x(0) = \frac{F(x(0))}{m}$$

$$x(dt) = x(0) + v_x(0)dt$$

$$v_x(dt) = v_x(0) + a_x(0)dt$$

$$a_x(dt) = \frac{F(x(dt))}{m}$$

$$x(2dt) = x(dt) + v_x(dt)dt$$

$$v_x(2dt) = v_x(dt) + a_x(dt)dt$$

$$a_x(2dt) = \frac{F(x(2dt))}{m}$$

$$x(3dt) = x(2dt) + v_x(2dt)dt$$

$$v_x(3dt) = v_x(2dt) + a_x(2dt)dt$$

Skladanie posunutí

Posuňme časticu, ktorá sa pôvodne nachádza v bode (x, y, z) vektorom $\vec{a}$ do bodu (x', y', z') a odtiaľ vektorom $\vec{b}$ do bodu (x'', y'', z'').

Vektory posunutí sú

$$\vec{a} = (x' - x, y' - y, z' - z)$$

$$\vec{b} = (x'' - x', y'' - y', z'' - z')$$

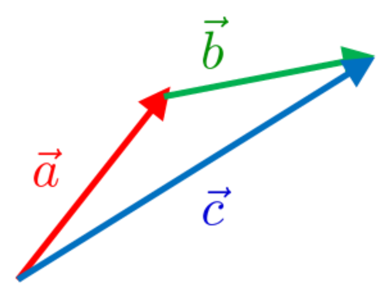
Celú operáciu môžeme vykonať jediným posunutím z bodu (x, y, z) priamo do bodu (x'', y'', z'') pomocou vektora posunutia

$$\vec{c} = (x'' - x, y'' - y, z'' - z)$$

pričom platí $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

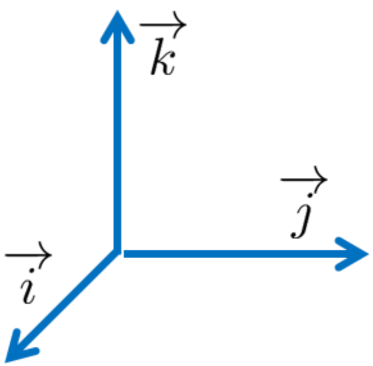
Vidno to hneď po dosadení súradníc.

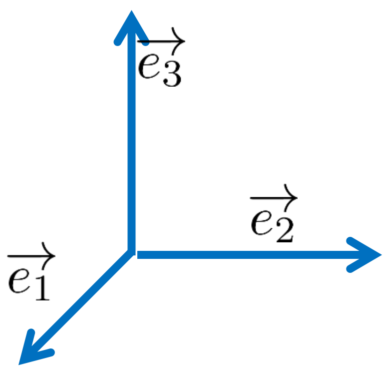
Záver:
Skladaniu posunutí zodpovedá súčet príslušných vektorov posunutia
To je tiež dôvod (ba možno hlavný), prečo bol súčet vektorov definovaný, ako bol. Teda cez súčet zložiek.



Pozor! Písmenom a tu neoznačujeme zrýchlenie ale posunutie. Písmen je málo! Pri čítaní treba rozmýšľať, nie fotografovať text do mozgu.

Alternatívne označenie





$$\overrightarrow{e_1} \equiv \overrightarrow{i}, \quad \overrightarrow{e_2} \equiv \overrightarrow{j}, \quad \overrightarrow{e_3} \equiv \overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{a} = a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3} a_i \overrightarrow{e_i}$$

kde $a_1 \equiv a_x, \quad a_2 \equiv a_y, \quad a_3 \equiv a_z$

Zavedieme symbol $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ak } i \neq j \\ 1 & \text{ak } i = j \end{cases}$ pre $i, j \in \{1, 2, 3\}$

$$\vec{e_i}.\vec{e_j} = \delta_{ij}$$

$$\vec{e_i}.\vec{a} = \sum_j \vec{e_i}.\vec{e_j} a_j = \sum_j \delta_{ij} a_j = a_i$$

$$\boxed{a_i = \vec{e_i}\vec{a}}$$

Majme teda výraz typu $$b_i = \sum_j A_{ij} a_j$$

Treba to vnímať takto. Na vstupe (na pravej strane) je vektor $\vec{a}$ a pomocou matice A_{ij} z neho vyrobíme nový vektor $\vec{b}$. Hovoríme, že matica A_{ij} transformuje vektor $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$. Rozpíšme pre istotu ako vypočítame prvú zložku vektora $\vec{b}$:

$$b_1 = A_{11}a_1 + A_{12}a_2 + A_{13}a_3$$

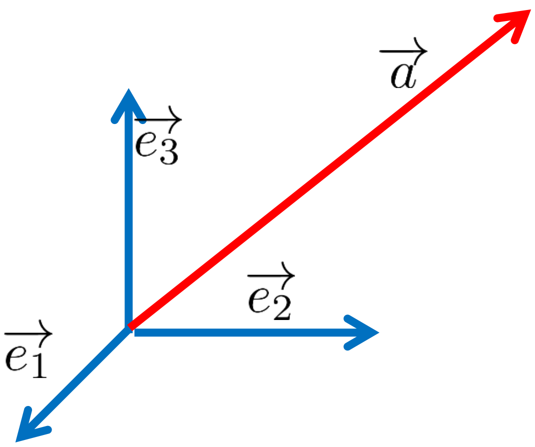
Zapíšme teraz všetko v maticovom (tabuľkovom) tvare

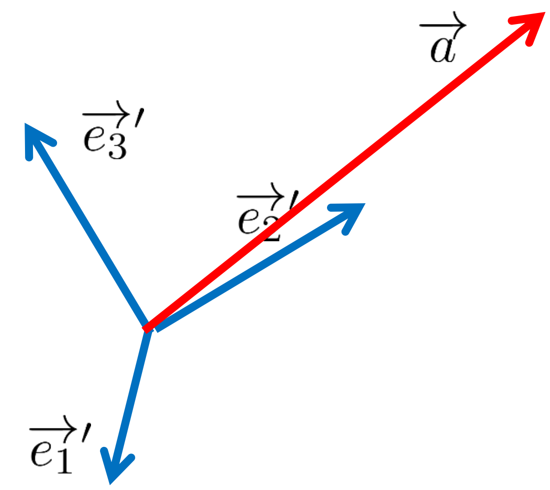
$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

V zápise sme použili akoby znamienko súčinu, bodku. Tým sme akoby definovali „ako sa násobia matice“. Všimnite si ukazováky na obrázku. Ukazujú ako vznikne prvý riadok výsledného vektora. Môžem si to predstaviť tak, že ukazovákom ľavej ruky postupne ukazujem prvky v prvom riadku matice a ukazovákom pravej ruky postupne prvky vektorového stĺpca tak že ukazováky posúvam synchrónne. Červená ruka ukazuje prvú synchrónnu polohu, modrá druhú a zelená tretiu. Vynásobím vždy prvoky, na ktoré ukazujú synchronizované prstu a vzniknuté súčiny sčítam.

$$b_1 = \color{red}{A_{11}a_1} + \color{blue}{A_{12}a_2} + \color{green}{A_{13}a_3}$$

Rovnaký vektor vyjadrený v dvoch bázach



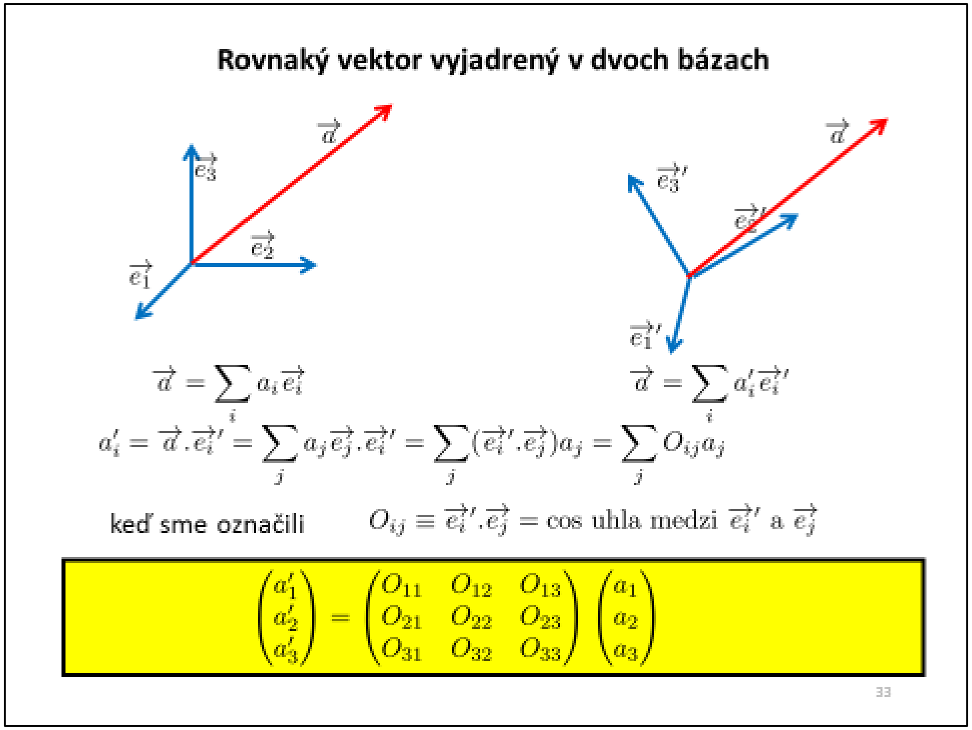


$$\overrightarrow{a} = \sum_i a_i \overrightarrow{e_i} \qquad \overrightarrow{a} = \sum_i a_i' \overrightarrow{e_i}'$$

$$a_i' = \overrightarrow{a}.\overrightarrow{e_i}' = \sum_j a_j \overrightarrow{e_j}.\overrightarrow{e_i}' = \sum_j (\overrightarrow{e_i}'.\overrightarrow{e_j}) a_j = \sum_j O_{ij} a_j$$

keď sme označili $\quad O_{ij} \equiv \overrightarrow{e_i}'.\overrightarrow{e_j} = \text{cos uhla medzi } \overrightarrow{e_i}' \text{ a } \overrightarrow{e_j}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} & O_{13} \\ O_{21} & O_{22} & O_{23} \\ O_{31} & O_{32} & O_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}$$

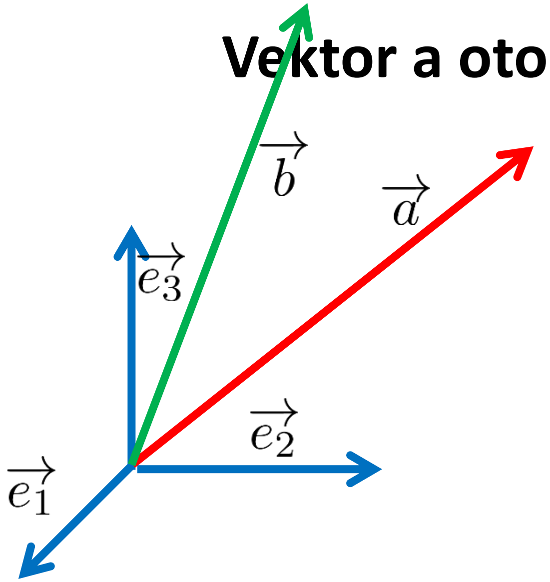


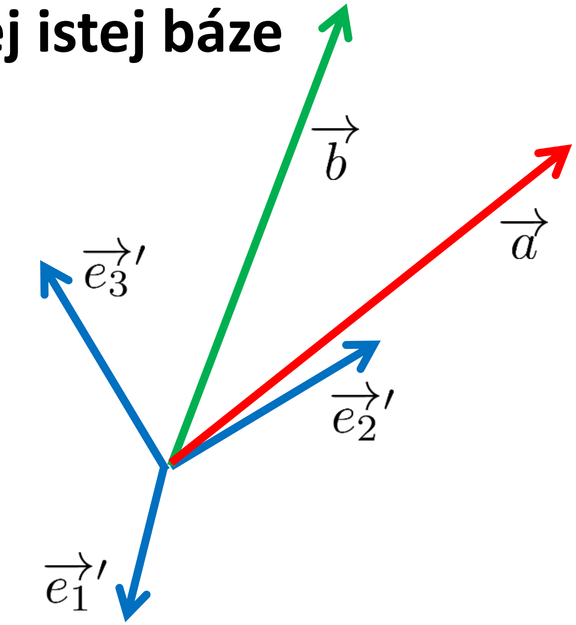
Poopravme si predstavu („definíciu“), čo je to vektor. Doteraz sme sa tvárili, že vektor sú tri čísla. Presnejšia predstava je že pri zadanej ortogonálnej báze je vektor daný troma číslami, **pričom pri prechode k inej báze sa tá trojica čísel transformuje pomocou matice „smerových kosínusov“**. Teda trojica čísel „sa stáva vektorom“ až po doplnení pravidla transformácie prechodu k inej báze. Transformačné pravidlo je kľúčová vec aby objekt mal vlastnosť „vektorovosť“.

Tieto vety sú len slabým odvarom toho, čo všetko si predstaví matematik pod pojmom vektor. Ak si chcete spraviť o tom predstavu, otvorte si knižku

M.Fecko:Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov, ISBN:9788089256204

Vektor a otočený vektor v tej istej báze





$$\vec{a} = \sum_i a_i \vec{e_i}$$

$$\vec{b} = \sum_i a_i \vec{e_i}' = \sum_i b_i \vec{e_i}$$

$$b_i = \vec{b} . \vec{e_i} = \sum_j a_j \vec{e_j}' . \vec{e_i} = \sum_j (\vec{e_i} . \vec{e_j}') a_j = \sum_j R_{ij} a_j$$

keď sme označili $R_{ij} \equiv \vec{e_i} . \vec{e_j}' = \text{cos uhla medzi } \vec{e_i} \text{ a } \vec{e_j}'$

predtým bolo $O_{ij} \equiv \vec{e_i}' . \vec{e_j} = \text{cos uhla medzi } \vec{e_i}' \text{ a } \vec{e_j}$

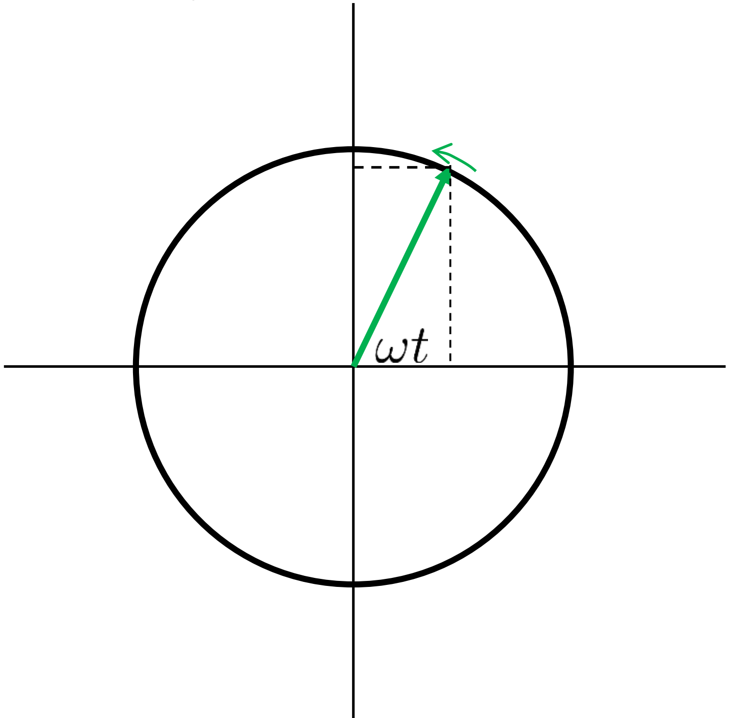
$\boxed{R_{ij} = O_{ji}}$ Rotačná matica R a matica O sú navzájom transponované

Newtonove zákony mechaniky

1. Zákon zotrvačnosti
2. Zákon sily
3. Zákon akcie a reakcie

Rovnomerný pohyb po kružnici

Uhol sprievodiča narastá rovnomerne s časom, za kladný smer rotácie sa považuje pohyb proti smeru hodinových ručičiek, uhol sa meria v radiánoch, ω sa volá uhlová rýchlosť



$$\varphi = \omega t$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

ω je rýchlosť narastania uhla φ, preto termín uhlová rýchlosť

$$\vec{r} = (r\cos\omega t, r\sin\omega t, 0)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (-\omega r\sin\omega t, \omega r\cos\omega t, 0)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (-\omega^2 r\cos\omega t, -\omega^2 r\sin\omega t, 0)$$

$$|\vec{v}| = \omega r$$

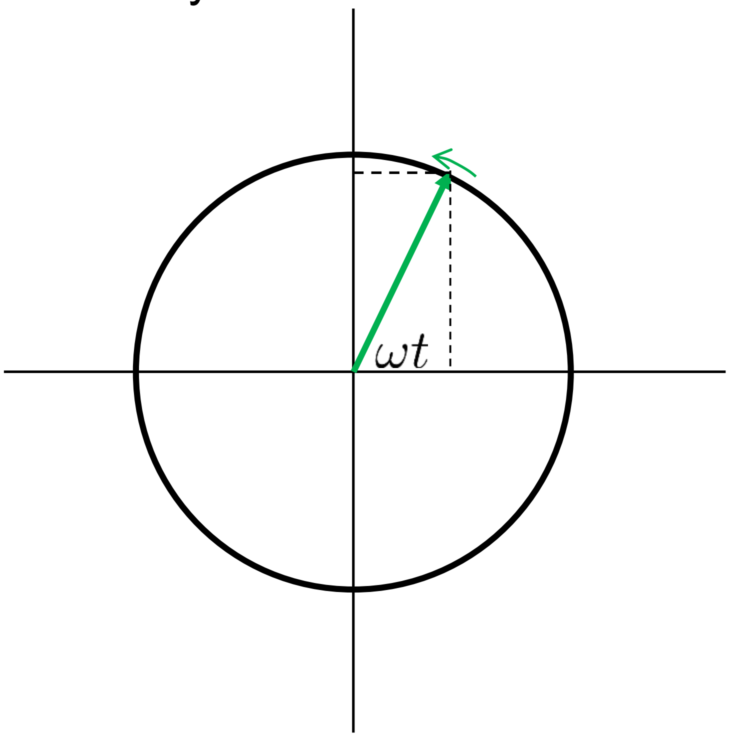
$$|\vec{a}| = \omega^2 r$$

Je zjavné, že vektor rýchlosti je v každom okamihu kolmý na sprievodič, lebo skalárny súčin tých vektorov je nulový, má teda smer dotyčnice ku kruhovej trajektórii.

$$\vec{r}.\vec{v} = -\omega r^2 \sin\omega t\cos\omega t + \omega r^2 \sin\omega t\cos\omega t = 0$$

Rovnomerný pohyb po kružnici

Uhol sprievodiča narastá rovnomerne s časom, za kladný smer rotácie sa považuje pohyb proti smeru hodinových ručičiek, uhol sa meria v radiánoch, ω sa volá uhlová rýchlosť



$$\varphi = \omega t$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

ω je rýchlosť narastania uhla φ, preto termín uhlová rýchlosť

$$\vec{r} = (r\cos\omega t, r\sin\omega t, 0)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (-\omega r\sin\omega t, \omega r\cos\omega t, 0)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (-\omega^2 r\cos\omega t, \omega^2 r\sin\omega t, 0)$$

$$|\vec{v}| = \omega r$$

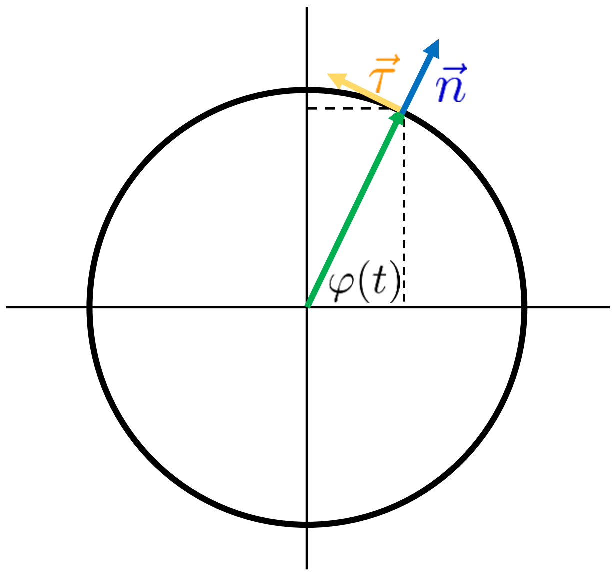
$$|\vec{a}| = \omega^2 r$$

Prostým porovnaním zložiek polohového vektora a zrýchlenia vidno, že **zrýchleniae má smer do stredu kružnice** (teda rovnobežný ale opačný ako sprievodič). Volá sa to **dostredivé zrýchlenie**. Zrýchlenie je teda nenulové, hoci veľkosť rýchlosti je konštantná. Rýchlosť ako vektor však nie je konštantná, smer vektora rýchlosti sa stále mení.

$$\boxed{|\vec{a}| = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}}$$

Nerovnomerný pohyb po kružnici

Uhol sprievodiča závisí ľubovoľne na čase.



$$\varphi(t)$$
$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt}$$

uhol je ľubovoľnou (aj nelineárnou) funkciou času, uhlová rýchlosť nie je konštantná

$$\vec{r} = (r\cos(\varphi(t)), r\sin(\varphi(t)), 0) = r\vec{n}$$
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (-\omega(t)r\sin(\varphi(t)), \omega(t)r\cos(\varphi(t)), 0)$$
$$|\vec{v}| = \omega r$$
$$\vec{v} = |\vec{v}|\vec{\tau}, \qquad \vec{\tau} = (-\sin(\varphi(t)), \cos(\varphi(t)), 0)$$
$$\vec{r} = |\vec{r}|\vec{n}, \qquad \vec{n} = (\cos(\varphi(t)), \sin(\varphi(t)), 0)$$

$\vec{\tau}$ je jednotkový vektor v smere dotyčnice, rýchlosť má smer dotyčnice ku kruhovej trajektórii, $\vec{n}$ je vektor v smere normály, teda kolmý na $\vec{\tau}$, $\quad \vec{n}.\vec{\tau} = 0$

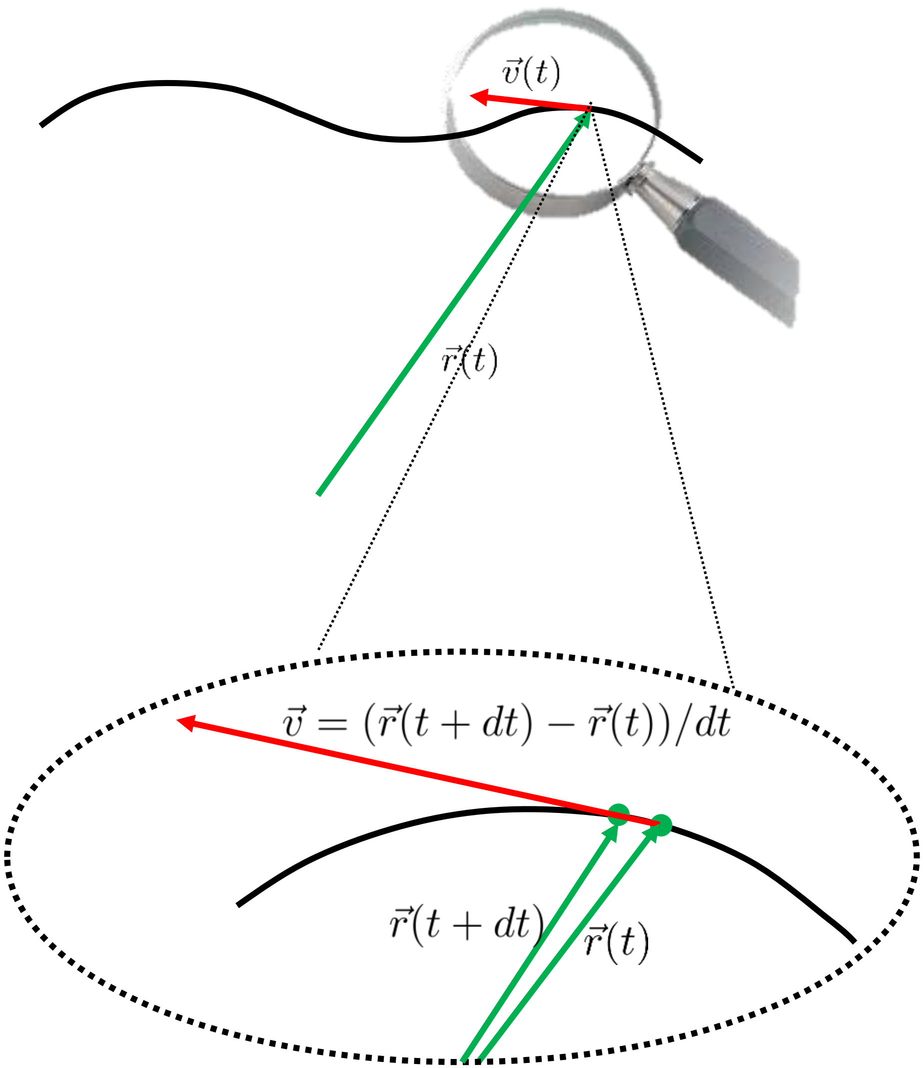
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (-\dot{\omega}r\sin(\varphi) - \omega^2 r\cos(\varphi), \;\; \dot{\omega}(t)r\cos(\varphi) - \omega^2 r\sin(\varphi), \;\; 0)$$

$$\boxed{\vec{a} = \dot{\omega}r\vec{\tau} - \omega^2 r\vec{n}}$$ uvedomme si že $\quad r\dot{\omega} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$

Zrýchlenie má zložky tangenciálnu a dostredivú. Tangenciálna je „zodpovedná“ za zmenu veľkosti rýchlosti, normálová je známe dostredivé zrýchlenie, „zodpovedné“ za zmenu smeru rýchlosti

Nerovnomerný pohyb po ľubovoľnej krivke

Uvažujme všeobecný pohyb častice daný časovým priebehom $\vec{r}(t)$



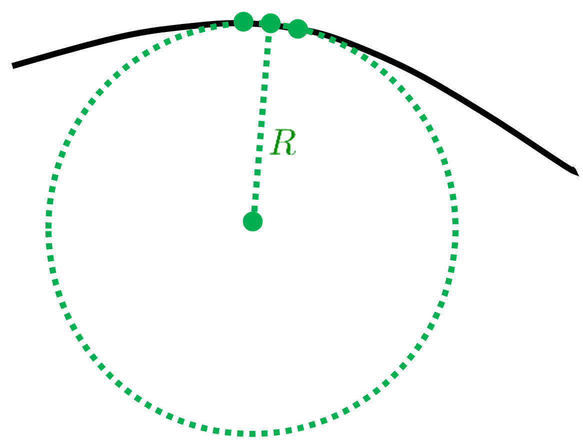
Rýchlosť v čase t bude

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}(t) = |\vec{v}(t)|\vec{\tau}$$

$\vec{\tau}$ je jednotkový vektor v smere rýchlosti v bode $\vec{r}(t)$. Otázka je, v akom vzťahu je vektor $\vec{\tau}$ ku trajektórii v bode $\vec{r}(t)$. Tvrdíme, že **vektor $\vec{\tau}$ má smer dotyčnice k trajkektórii**.
Naozaj: pre výpočet vektora rýchlosti sú dôležité dva (infinitezimálne) blízke body trajektórie, vektor rýchlosti a teda aj $\vec{\tau}$ má smer spojnice tých dvoch bodov
Definícia dotyčnice ku krivke je:
Je to priamka prechádzajúca dvoma infinitezimálne blízkymi bodmi krivky

Oskulačná kružnica

Uvažujme všeobecnú krivku a na nej tri (infinitezimálne) blízke body. Krivka vo všeobecnosti neleží v jednej rovine. Ale tri nejaké body určujú rovinu a súčasne v tej rovine jednoznačne nejakú kružnicu, ktorá sa nazýva **oskulačná kružnica** tej krivky v jednom jej bode (v strednom z tých troch bodov). Polomer oskulačnej kružnice sa nazýva **polomer krivosti krivky** v uvažovanom bode.
Súčasne je zrejmé, že krivka a jej oskulačná kružnica majú v uvažovanom bode **spoločnú dotyčnicu**.



Prijmime intuitívne bez rigorózneho dôkazu, že v limite, keď uvažované tri body budú nekonečne blízko pri sebe, postupnosť nimi tvorených kružníc sa bude blížiť k limitnej oskulačnej kružnici v uvažovanom bode. V matematickej limite je teda oskulačná kružnica „bodový pojem“, fyzikálne je to „trojbodový pojem“ (v tom zmysle ako sme sa bavili, že rýchlosť je „dvojbodový pojem“ a zrýchlenie „trojbodový“

$$\boxed{\vec{a}_0 = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{\tau}_0 - \frac{|\vec{v}_0|^2}{R_0}\vec{n}_0}$$

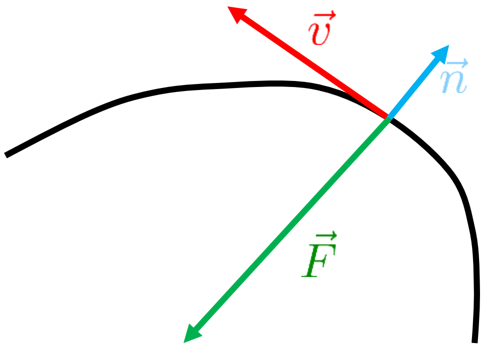
Vektor $\vec{n}_0$ je jednotkový vektor normály trajektórie v bode $\vec{r}_0$, je kolmý na dotyčnicu $\vec{\tau}_0$, leží v rovine oskulačnej kružnice a má smer od stredu oskulačnej kružnice von. Znamienko – v rovnici potom znamená že normálová zložka **smeruje do stredu** oskulačnej kružnice, hovoríme o **dostredivom zrýchlení**.

Tangenciálne zrýchlenie teda vypovedá o zmene veľkosti rýchlosti, normálové (dostredivé) zrýchlenie o zmene smeru rýchlosti. Zapamätajte si vzorec pre veľkosť dostredivého zrýchlenia

$$\boxed{\frac{|\vec{v}|^2}{R}}$$

Zdôraznime ešte, že dotyčnica ku krivke je väčšine ľudí intuitívne zrejmý pojem aj pri priestorovej krivke, ktorá neleží v nejakej rovine. Ale normálový vektor kolmý k dotyčnici vlastnosťou kolmosti nie je určený jednoznačne, musíme ešte určiť, v ktorej rovine leží. Je to práve rovina oskulačnej kružnice. Teda vektor normály ku krivke „je trojbodový pojem“, kým vektor dotyčnice ku krivke je „je dvojbodový pojem“.

Dostredivá sila



Ak sa častica pohybuje po zakrivenej dráhe, má dostredivé zrýchlenie a teda naň musí pôsobiť dostredivá sila

$$\vec{F}_{\mathrm{dostr}} = m\vec{a}_{\mathrm{dostr}} = -\frac{mv^2}{r}\vec{n}$$

kde r je polomer krivosti trajektórie.

Keby nepôsobila dostredivá sila, častica by pokračovala zotrvačným rovnomerným priamočiarym pohybom v smere dotyčnice, ako to napríklad vidno na odbrúsených časticiach kovu pri brúsení:

Transformácia: otočenie fyzikálneho systému

Najme systém častíc, polohy ktorých v nejakom okamihu sú dané sústavou polohových vektorov

$$\vec{r}_n, \quad n \in (1, N)$$

poznamenajme, že symbol n nie je zložka vektora ale index vektora, teda čísluje jednotlivé častice.

Predstavme si teraz, že celý systém častíc otočíme do nových polôh tak, že každý z polohových vektorov otočíme o rovnaký uhol voči zvolenej (rovnakej osi) otáčania. Po otočení sa častice budú nachádzať v nových (transformovaných) polohách

$$\vec{r}_n \to \vec{r}_n{}', \quad n \in (1, N)$$

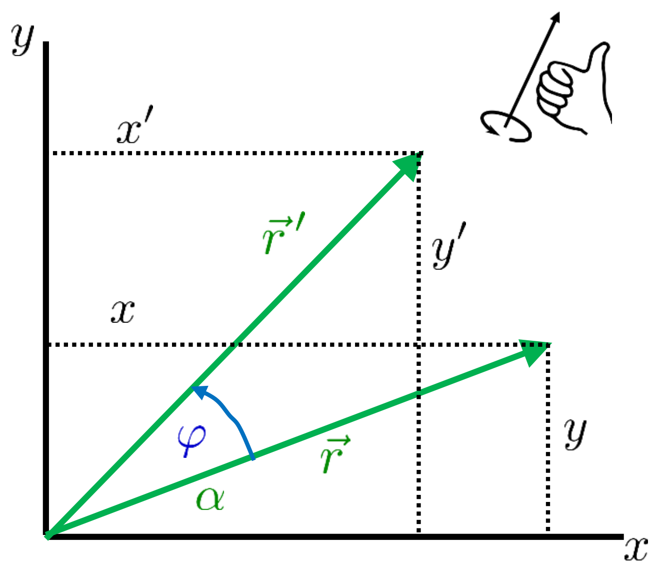
Vykonaná transformácia sa volá „otočenie fyzikálneho systému". Transformácia otočenia je zadaná rotačnou maticou (spoločnou pre všetky vektory) R_{ij}

$$(\vec{r}_n{}')_i = \sum_j R_{ij} (\vec{r}_n)_j$$

Ako sme videli, prvky rotačnej matice sú vlastne skalárne súčiny nejakých jednotkových vektorov, teda vlastne kosínusy uhlov, ktoré tie jednotkové vektory zvierajú. Nazývame ich „smerové kosínusy“. Naša intuícia si spravidla nevie predstaviť „ako vyzerá“ otočenie, zadané 9 smerovými kosínusmi. Každé otočenie sa ale dá vyjadriť ako otočenie okolo nejakej fixnej osi o nejaký uhol. To je intuitívne oveľa prijateľnejšie.

Takže pohrajme sa s otočeniami okolo osí.

Začneme otočením okolo osi z. Pri takom otočení sa z-ové súradnice častíc nemenia, menia sa len x-ové a y-ové súradnice, takže je to rovinný problém, na ktorý sa môžeme pozrieť v rovine xy. Sledujme jednu časticu ležiacu v rovine xy na obr.



Os z smeruje od nákresnej roviny smerom „k čitateľovi“, kladný smer otočenia o uhol φ, je daný prstami pravej ruky ak palec ukazuje smer osi z.

$$x = r\cos\alpha \qquad y = r\sin\alpha$$

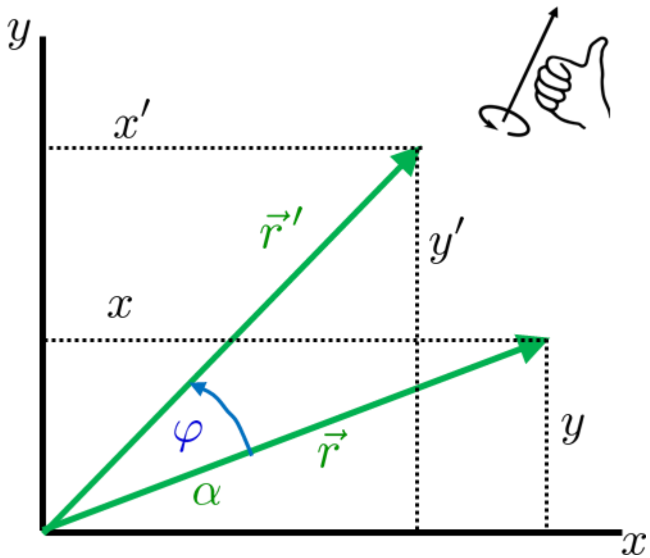
$$x' = r\cos(\alpha+\varphi) \qquad y' = r\sin(\alpha+\varphi)$$

$$x' = r\cos\alpha\cos\varphi - r\sin\alpha\sin\varphi$$

$$y' = r\sin\alpha\cos\varphi + r\cos\alpha\sin\varphi$$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' &= y\cos\varphi + x\sin\varphi \end{aligned}}$$

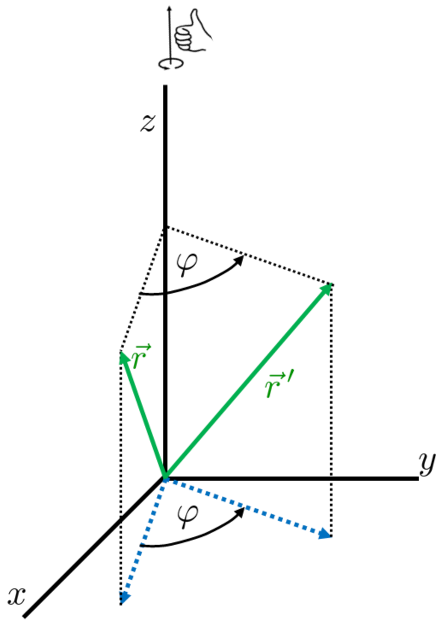
Zapamätajte si, ako vyzerajú vzorce pre rotáciu v dvoch rozmeroch!



$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' &= y\cos\varphi + x\sin\varphi \end{aligned}}$$

Súradnice otočeného vektora sú „zmiešaniny“ súradníc pôvodného vektora. Pomocou kosínusu a sínusu. Pri sínuse je jedno znamienko kladné druhé záporné. Na to, kde je sínus a kde kosínus prídete z úvahy o limite veľmi malého otočenia. Pri malom otočení sa súradnice „moc nezmenia“, takže v limite malého uhla musí byť $x' \approx x, y' \approx y$. Pre malé uhly $\cos\varphi \approx 1$, $\sin\varphi \approx 0$, taže je to jasné.
To, pri ktorom sínuse je záporné znamienko vidím z obrázku: $x' < x$.

Rotačná matica pre otočenie okolo osi z



$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi$$
$$y' = y\cos\varphi + x\sin\varphi$$
$$z' = z$$

Po nejakých pokusoch a omyloch by sa vám malo podariť napísať, ako vyzerá rotačná matica pre takúto transformáciu. Dostanete

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Overte si maticovým násobením, že je to dobre.

Skladanie otočení okolo tej istej osi

Urobme najprv otočenie okolo osi z o uhol φ a následne ďalšie otočenie zase okolo osi z o uhol ϑ. Takže bude

$$
\begin{aligned}
x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi \\
y' &= y\cos\varphi + x\sin\varphi \\
z' &= z
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
x'' &= x'\cos\vartheta - y'\sin\vartheta \\
y'' &= y'\cos\vartheta + x'\sin\vartheta \\
z'' &= z'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
\qquad
\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}
$$

$$
r'_j = \sum_k R_{jk} r_k \qquad\qquad r''_i = \sum_j \tilde{R}_{ij} r'_j
$$

$$
r''_i = \sum_j \tilde{R}_{ij} \sum_k R_{jk} r_k = \sum_k R'_{ik} r_k
$$

Dve po sebe nasledujúce otočenia, ktorým prislúchajú rotačné matice R a $\tilde{R}$ sa dajú chápať ako jedna (výsledná) rotácia s rotačnou maticou R'

$$
R'_{ik} = \sum_j \tilde{R}_{ij} R_{jk}
$$

$$R'_{ik} = \sum_j \tilde{R}_{ij} R_{jk}$$

Všimnime si štruktúru výrazu. Na ľavej strane je dvojindexová matica, teda vlastne je to 9 rovníc, každá pre nejakú kombináciu hodnôt indexov ij. V súčte je jeden nemý index, teda je to súčet troch súčinov. V súčinoch sú prvky z dvoch matíc, pričom sa sčíta tak že druhý index (stĺpcový) prvku prvej matice je rovnaký ako prvý index (riadkový) prvku druhej matice. V maticovom zápise je to

$$\begin{pmatrix} R'_{11} & R'_{12} & R'_{13} \\ R'_{21} & R'_{22} & R'_{23} \\ R'_{31} & R'_{32} & R'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{R}_{11} & \tilde{R}_{12} & \tilde{R}_{13} \\ \tilde{R}_{21} & \tilde{R}_{22} & \tilde{R}_{23} \\ \tilde{R}_{31} & \tilde{R}_{32} & \tilde{R}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}$$

Na obrázku konkrétne vidíme, ako sa vypočíta prvok R'_{23}. Ukazujeme synchrónne ukazovákom ľavej ruky prvky v druhom riadku ľavej matice a ukazovákom pravej ruky prvky v treťom stĺpci pravej matice.

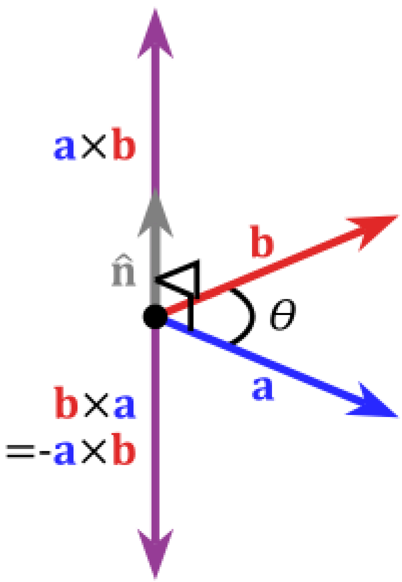
$$R'_{23} = \color{red}{\tilde{R}_{21} R_{13}} + \color{blue}{\tilde{R}_{22} R_{23}} + \color{green}{\tilde{R}_{23} R_{33}}$$

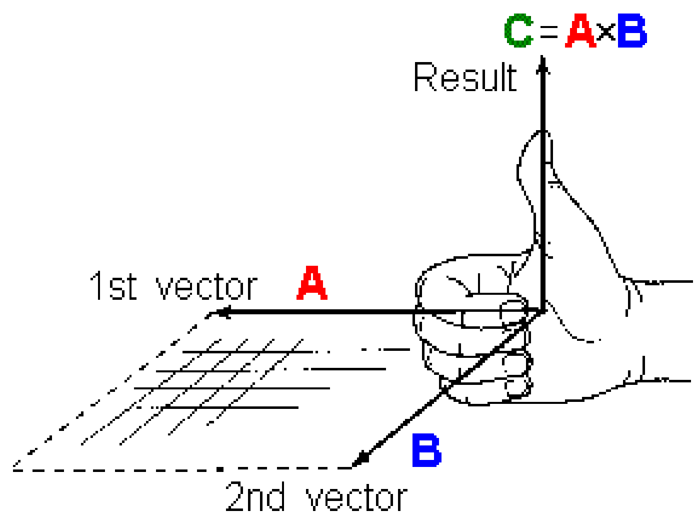
Analogicky získame všetkých 9 prvkov výslednej matice.

Spoľahlivo si nacvičte techniku násobenia dvoch matíc!

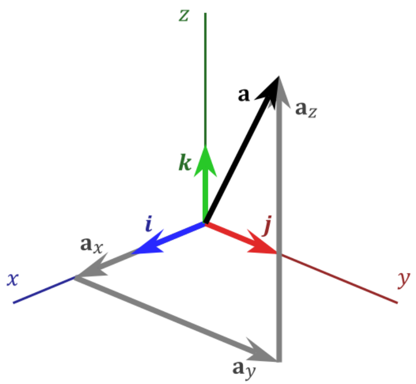
Vektorový súčin

Definícia $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \Theta \; \vec{n}$





Pravidlo pravej ruky: prsty pravej ruky postavíme tak, aby ukázali stáčanie vektora $\vec{A}$ smerom k vektoru $\vec{B}$ a palec potom ukáže smer vektorového súčinu $\vec{A} \times \vec{B}$



$$\boxed{\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}} \qquad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$

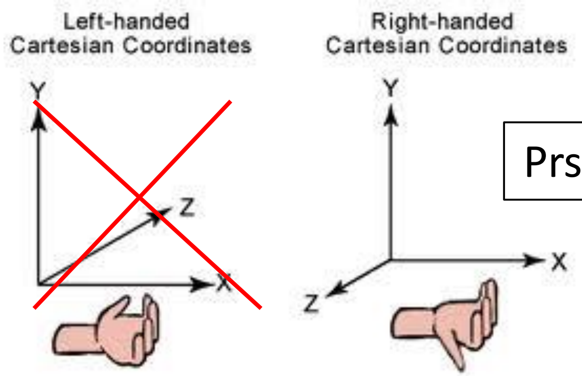
$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \qquad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

Platí v pravotočivej báze

Osi x,y,z nemôžeme pomenovať ľubovoľne, ale tak, aby toto platilo



Prsty otáčajú od "x" k "y", palec ukáže "z".

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \qquad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) \\
&= a_x b_x \vec{i} \times \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \times \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \times \vec{k} + \cdots \\
&= a_x b_y \vec{k} + a_x b_z(-\vec{j}) + \ldots \\
&= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}
\end{aligned}$$

Tu sme využili distributívnosť vektorového súčinu, ktorá z definície, ktorú sme uviedli triviálne nevyplýva. Záujemcov od dôkaz odkazujeme na doplnkovú Powerpoint prezentáciu o vektorovom súčine

$$(\vec{a}\times\vec{b})_x = (a_y b_z - a_z b_y)$$
$$(\vec{a}\times\vec{b})_y = (a_z b_x - a_x b_z)$$
$$(\vec{a}\times\vec{b})_z = (a_x b_y - a_y b_x)$$

$$xyz - xzy$$
$$yzx - yxz$$
$$zxy - zyx$$

prirodzené poradie - neprirodzené poradie

Levi-Civitov antisymetrický ε-symbol

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} &= -\varepsilon_{jik} \\ \varepsilon_{ijk} &= -\varepsilon_{ikj} \\ \varepsilon_{ijk} &= -\varepsilon_{kji} \end{aligned}\right\} i,j,k \in \{1,2,3\}$$

ε-symbol je totálne antisymetrický všetky hodnoty s aspoň dvoma rovnakými indexami musia byť nulové

$$\varepsilon_{11k} = \varepsilon_{22k} = \varepsilon_{33k} = \varepsilon_{1j1} = \varepsilon_{2j2} = \varepsilon_{3j3} = \varepsilon_{i11} = \varepsilon_{i22} = \varepsilon_{i33} = 0$$

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$$
$$\varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1$$

Toto je konvencia: pre prirodzené poradie je hodnota 1, pre neprirodzené -1

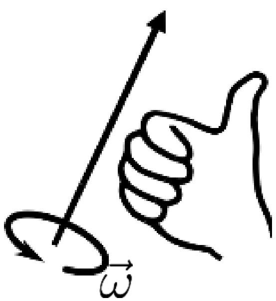
$$(\vec{a}\times\vec{b})_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

Nápad: uhlová rýchlosť a uhol otočenia ako vektory

Infinitezimálne otočenia sa konajú ako postupnosť v čase okolo fixnej osi, vždy každdé infinitezimálne otočenie za malý (infinitezimálny) čas dt.
Infinitezimálny uhol otočenia bude $\mathrm{d}\varphi = \omega\, dt$ a význam ω je zrejmý: je to rýchlosť narastania uhla otočenia v čase

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

Vyrobme teraz vektor $\vec{\omega}$ tak, aby v ňom bola zakódovaná nielen uhlová rýchlosť otáčania ale aj smer osi, okolo ktorej sa otáča. Kódovanie je jednoduché:



Vektor $\vec{\omega}$ má smer osi otáčania a takú orientáciu, aby prsty pravej ruky ukazovali smer otáčania ak palec ukazuje orientáciu vektora $\vec{\omega}$. Veľkosť toho vektora je veľkosť uhlovej rýchlosti

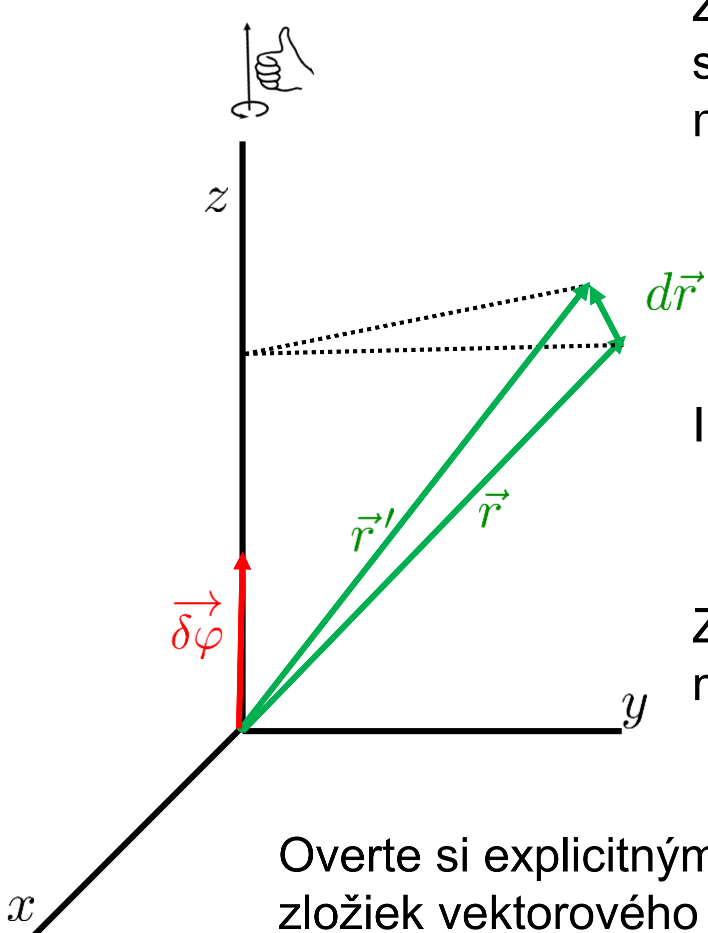
$$|\vec{\omega}| = \omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

Potom je prirodzené zaviesť aj infinitezimálny uhol otočenia ako vektor $\overrightarrow{\delta\varphi}$

$$\overrightarrow{\delta\varphi} = \vec{\omega} dt$$

Je to vektor v smere osi otáčania a jeho veľkosť je uhol otočenia $|\overrightarrow{\delta\varphi}| = \delta\varphi = \omega dt$

Zmena polohového vektora pri infinitezimálnom otočení



Zistili sme, že súradnice polohového vektora sa pri infinitezimálnom otočení okolo osi z menia takto:

$$x' = x - y\delta\varphi$$
$$y' = y + x\delta\varphi$$
$$z' = z$$

Infinitezimálny vektor otočenia $\overrightarrow{\delta\varphi}$ má zložky

$$\overrightarrow{\delta\varphi} = (0, 0, \delta\varphi)$$

Zmena polohového vektora $d\vec{r} = \vec{r}\,' - \vec{r}$ má zložky

$$d\vec{r} = (-y\delta\varphi, x\delta\varphi, 0)$$

Overte si explicitným výpočtom podľa pravidla pre počítanie zložiek vektorového súčinu
$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$
že platí

$$\boxed{d\vec{r} = \overrightarrow{\delta\varphi} \times \vec{r}}$$

Zmena polohového vektora pri infinitezimálnom otočení

$$d\vec{r} = \overrightarrow{\delta\varphi} \times \vec{r}$$

Tento vzťah sme si odvodili pre rotáciu okolo osi z, teda vektor $\overrightarrow{\delta\varphi}$ mal smer osi z. Ale dostali sme vzťah medzi vektormi, ktorý nemôže záležať na to, ako sú zvolené osi. Teda je to univerzálne platný vzťah. Hovorí toto:
Ak $\overrightarrow{\delta\varphi}$ je vektor infinitezimálnej rotácie okolo ľubovoľnej osi (**teda má smer osi rotácie a veľkosť infinitezimálneho rotačného uhla**), potom zmena polohového vektora je určená takto

$$d\vec{r} = \overrightarrow{\delta\varphi} \times \vec{r}$$

resp.

$$\vec{r} \to \vec{r}\,' = \vec{r} + d\vec{r} = \vec{r} + \overrightarrow{\delta\varphi} \times \vec{r}$$

$$\overrightarrow{\delta\varphi} = \vec{\omega} dt$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Hmotný stred

$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i\vec{v}_i = \sum_i \vec{F}_i(\vec{r}_i,\vec{v}_i)$$

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F}$$

Pokúsime sa lepšie „precítiť", čo tá rovnica znamená, upravíme preto výraz pre celkovú hybnosť

$$\vec{P} = \sum_i m_i\vec{v}_i = \frac{d}{dt}\sum_i m_i\vec{r}_i = \sum_i m_i \frac{d}{dt}\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

Označme celkovú hmotnosť sústavy ako m, teda $m = \sum m_i$
a zaveďme označenie

$$\boxed{\vec{R}^* = \frac{1}{m}\sum_i m_i\vec{r}_i}$$

Symbol $\vec{R}^*$ môžeme zjavne chápať ako polohový vektor čohosi, otázka je čoho. Je to vážená suma polohových vektorov jednotlivých častíc. Je to čosi ako stredný polohový vektor systému, ale jednotlivé častice v ňom nezavážia rovnako. Váha, ktorou častica prispieva do tej sumy, je $\sum_i m_i/m$. Teda výsledný vektor je „bližšie k častici veľkou hmotnosťou ako k častici s malou hmotnosťou. Je to polohový vektor bodu, ktorý sa (definitoricky) nazýva **hmotný stred** sústavy.

Prepíšeme teraz rovnicu $$\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F}$$

využijúc polohový vektor hmotného stredu: $$\vec{P} = m\frac{d}{dt}\vec{R}^*$$

$$\frac{d}{dt}m\frac{d}{dt}\vec{R}^* = \vec{F}$$

$$\boxed{m\frac{d^2}{dt^2}\vec{R}^* = \vec{F}}$$

Práve sme odvodili vetu o hmotnom strede:
Hmotný stred sústavy sa pohybuje akoby to bol hmotný bod, v ktorom je sústredená celá hmotnosť systému a pôsobila by naň sila rovná vektorovému súčtu všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu.

Poznamenajme, že túto rovnicu sme odvodili súc motivovaný záujmom o pohyb tuhého telesa, ale v tomto odvodení sme tuhosť systému nijako nevyužili. Vnútorné sily vypadli kvôli univerzálnemu princípu akcie a reakcie takže **veta o hmotnom strede je univerzálne platná pre hocijaký systém**.

Nulová vonkajšia sila, zachovanie hybnosti

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F}$$

Pre nulovú celkovú vonkajšiu silu dostaneme

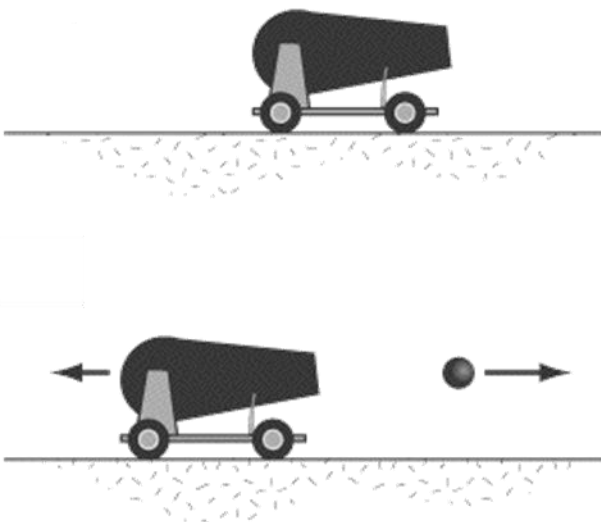
$$\frac{d}{dt}\vec{P} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \mathrm{const}$$

Dostali sme zákon zachovania hybnosti: Pri nulovej sumárnej vonkajšej sile sa celková hybnosť sústavy častíc zachováva. Prakticky to znamená, že ak pre takú sústavu vypočítame v nejakom okamihu jej celkovú hybnosť a potom v neskorom okamihu znovu, dostaneme tú istú hodnotu (ten istý vektor). Platí to všeobecne, nielen pre tuhé teleso.

Môže sa stať, že celková vonkajšia sila nie je nulová, ale má nulovú len niektorú zložku (napríklad priemet na os x). v takom prípade dostaneme

$$\frac{d}{dt}P_x = 0 \quad \Rightarrow \quad P_x = \mathrm{const}$$

V tomto prípade sa zachováva x-ová zložka hybnosti sústavy.



Tu je klasický príklad na použitie zákona zachovania hybnosti.
Na začiatku máme nabitý kanón v pokoji. Jeho hybnosť je nulová.
Kanón je na kolieskach ako zvýraznenie faktu, že zanedbávame trenie pri pohybe kanóna vo vodorovnom smere.
Vo vodorovnom smere nepôsobí na kanón ani na náboj v ňom žiadna vonkajšia sila.
Preto sa zachováva vodorovná zložka hybnosti.

Akt výstrelu náboja je aktom pôsobenia vnútorných síl systému, nie je ovplyvnený vonkajšími silami. Preto po výstrele bude celková hybnosť systému kanón + náboj nulová. Keďže náboj má po výstrele zjavne hybnosť v smere dopredu, musí mať kanón po výstrele hybnosť v smere dozadu. Vojaci tomu hovoria, že kanón dostane spätný ráz. Pre hmotnosti a rýchlosti kanóna a náboja po výstrele teda platí

$$mv + MV = 0$$

Rýchlosti sme nepísali ako vektory, lebo sú to len vodorovné zložky rýchlosti. Pre rýchlosť kanóna V tak dostaneme záporné číslo, čo znamená, že sa pohybuje v zápornom smere, teda doľava.

Nulová vonkajšia sila, veta o hmotnom strede

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F}$$

Pre nulovú celkovú vonkajšiu silu dostaneme

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \mathrm{const}$$

Vyjadrené cez rovnicu pre pohyb hmotného stredu dostaneme

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{R}^* = 0$$

Ak je celková vonkajšia sila nulová, hmotný stred sa pohybuje akoby hmotný bod podľa zákona zotrvačnosti, teda rovnomerne priamočiaro alebo stojí (voči inerciálnej sústave). Platí to všeobecne, nielen pre tuhé teleso.

Znamená to, že hmotný stred systému, ak na počiatku stojí, sa nemôže len pôsobením vnútorných síl posunúť a teda ani začať posúvať.

Ľudovo povedané i keby vnútri sústavy boli trpaslíci vybavení slobodnou vôľou, nemôžu vykonať, bez podpory zvonku sústavy, nič, čo by posunulo polohu hmotného stredu.

Moment hybnosti

Uvažujme časticu, jej pohyb popisovaný voči inerciálnej sústave. Počiatok inerciálnej sústavy berme ako referenčný bod, voči ktorému budeme popisovať polohu častice pomocou polohového vektora $\vec{r}(t)$. Okamžitá rýchlosť častice v okamihu t bude

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Pre časticu v stave $\vec{r},\ \vec{v}$ sme už definovali veličinu hybnosť (anglicky momentum) vzťahom

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Definujeme teraz novú veličinu, **moment hybnosti** (anglicky angular momentum), vzťahom

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Presnejšie by sme mali hovoriť moment hybnosti voči zvolenému referenčnému bodu. Ak zvolíme iný referenčný pod, potom i keď nezmeníme smery osí súradnicovej sústavy, moment hybnosti častice bude vo všeobecnosti iný než voči pôvodnému referenčnému bodu.

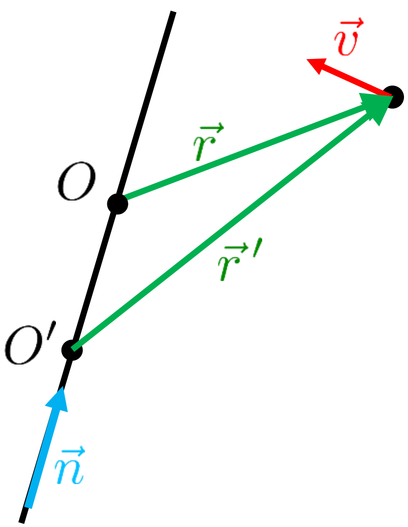
Moment hybnosti vzhľadom na priamku

Aby sme podobné veci mali na jednom mieste, definujme ešte moment hybnosti vzhľadom na priamku. Myslíme orientovanú priamku, teda čosi ako priamku, ktorej smer a orientácia je daná nejakým **jednotkovým vektorom** $\vec{n}$.

Moment hybnosti vzhľadom na priamku, je **priemet momentu hybnosti definovaného vzhľadom na referenčný bod ležiaci na tej priamke na tú priamku.** Trochu krkolomná veta, ale obsahuje všetko dôležité, aby definícia bola korektná. Na prvý pohľad sa to nezdá, lebo sa nepovedalo, kde na uvažovanej priamke sa má umiestniť referenčný bod, ale, ako hneď uvidíme, môže to byť ľubovoľný bod na osi.

Priemet momentu hybnosti na priamku označme M (je to skalárna hodnota, môže byť aj záporná, lebo os má orientáciu).

$$M = \vec{n}.\vec{L} = \vec{n}.(\vec{r} \times m\vec{v})$$



Keby sme za referenčný bod na priamke zvolili namiesto bodu O bod O', (a ξ také číslo také, aby platilo $\overrightarrow{O'O} = \xi\vec{n}$) dostali by sme

$$M' = \vec{n}.\vec{L}\,' = \vec{n}.(\vec{r}\,' \times m\vec{v}) = \vec{n}.((\vec{r} + \xi\vec{n}) \times m\vec{v})$$

$$= \vec{n}.(\vec{r} \times m\vec{v}) + \vec{n}.(\xi\vec{n}) \times m\vec{v}) = \vec{n}.(\vec{r} \times m\vec{v}) = M$$

Druhý člen súčtu vypadol, pretože vektorový súčin v ňom je kolmý na vektor $\vec{n}$, a teda jeho skalárny súčin s vektorom $\vec{n}$ je nulový. Priemet momentu hybnosti na priamku teda nezávisí na voľbe referenčného bodu na nej.

Moment hybnosti vzhľadom na priamku

Poznamenajme, že niektorí autori zavádzajú moment hybnosti vzhľadom na priamku ak vektor, ktorý má smer jednotkového vektora tej priamky $\vec{n}$, takto

$$\vec{M} = \vec{n}(\vec{n}.\vec{L}) = \vec{n}(\vec{n}.(\vec{r} \times m\vec{v}))$$

Moment sily

Vypočítajme teraz, ako závisí moment hybnosti častice na čase, ak sa častica pohybuje v súlade so zákonom sily.

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a} = 0 + \vec{r} \times \vec{F}$$

Definujme **moment sily (vzhľadom na referenčný bod)** ako

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

(anglický termín torque alebo momentum of force)

potom teda platí

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

Pre moment hybnosti a moment sily platí teda čosi ako analógia zákona pre hybnosť a silu

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Zatiaľ to vyzerá ako hromadenie nových definícií, ale postupne uvidíme, načo je to všetko dobré.

Moment sily vzhľadom na priamku

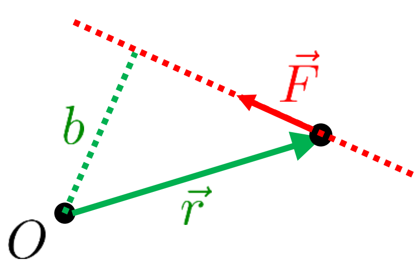
V analógii s momentom hybnosti vzhľadom na priamku definujeme aj moment sily vzhľadom na priamku:
Moment sily vzhľadom na priamku, je **priemet momentu sily definovaného vzhľadom na referenčný bod ležiaci na tej priamke na tú priamku.**

Priemet momentu sily na priamku označme N (je to skalárna hodnota, môže byť aj záporná, lebo priamka má orientáciu).

$$N = \vec{n}.\vec{\tau} = \vec{n}.(\vec{r} \times \vec{F})$$

Poznamenajme, že niektorí autori zavádzajú moment sily vzhľadom na priamku ak vektor, ktorý má smer jednotkového vektora tej priamky $\vec{n}$ takto

$$\vec{N} = \vec{n}(\vec{n}.\vec{\tau}) = \vec{n}(\vec{n}.(\vec{r} \times \vec{F}))$$



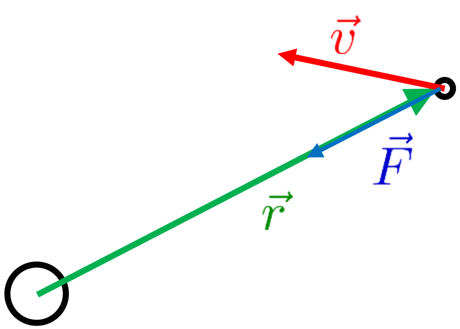
Ak je sila kolmá na uvažovanú priamku, zavádzame pojem rameno sily presne analogicky ako sme to robili pri momente hybnosti a dostaneme

$$|\vec{N}| = b|\vec{F}|$$

teda veľkosť momentu sily vzhľadom na priamku je súčin **ramena sily** a veľkosti sily.

Moment hybnosti: jedna častica v centrálnom poli

Ako ukážku užitočnosti pojmov moment hybnosti a moment sily uvažujme jednu časticu, ktorá sa nachádza vo vonkajšom silovom poli vyjadrujúcom pôsobenie vonkajšieho telesa fixovaného v referenčnom bode.
Uvažujme centrálne silové pole, t.j. že sila medzi vonkajším telesom v referenčnom bode a uvažovanou časticou má smer spojnice (polohového vektora častice). Príklad je Zem ako hmotný bod v gravitačnom poli Slnka ako centrálneho telesa v referenčnom bode.



Moment hybnosti častice vzhľadom na referenčný bod bude

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Sila na časticu má podľa predpokladu smer polohového vektora, teda

$$\vec{F} = \alpha(\vec{r})\vec{r}$$

kde $\alpha(\vec{r})$ je ľubovoľná skalárna funkcia polohy častice. Moment tej sily vzhľadom na centrálny bod bude nulový

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \alpha\vec{r} = 0$$

takže dostaneme

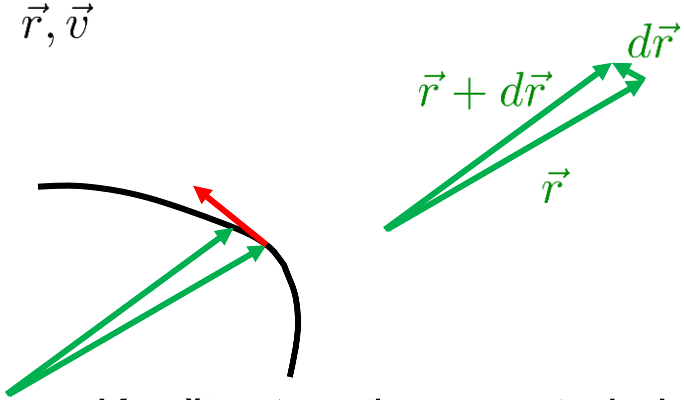
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = 0$$

Moment hybnosti: jedna častica v centrálnom poli

Moment hybnosti sa teda zachováva, je to konštantný vektor počas celého pohybu častice

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \mathrm{const}$$

Z definície vektorového súčinu je teda zrejmé, že vektory $\vec{r}, \vec{v}$ sú trvalo kolmé na konštantný vektor $\vec{L}$, teda stále ležia v rovine, kolmej na vektor $\vec{L}$, teda ležia v konštantnej rovine. Pohyb častice v centrálnom poli nejakého telesa je teda rovinný pohyb, prebieha v konštantnej rovine, ktorá je kolmá na vektor momentu hybnosti. Nakreslime si časť trajektórie v tej rovine, spolu s vektormi $\vec{r}, \vec{v}$



Platí $$|\vec{L}| = \frac{m}{dt}|\vec{r} \times d\vec{r}|$$

Veľkosť vektorového súčinu $|\vec{r} \times d\vec{r}|$ je zjavne rovná ploche zeleného trojuholníka, takže je to plocha opísaná polohovým vektorom (sprievodičom) za čas dt.

Konštantnosť momentu hybnosti potom znamená, že sprievodič opíše počas pohybu častice za rovnaké časové úseky rovnaké plochy. Keplerov zákon.

$$\frac{d}{dt}\sum_i \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i(\vec{r}_i, \vec{v}_i)$$

Suma na ľavej strane je celkový moment hybnosti sústavy, na ľavej strane je súčet momentov síl, teda celkový moment vonkajších síl

$$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{\tau}}$$

Upozornime, že túto rovnicu sme dostali za predpokladu, že vnútorné medzičasticové sily sú centrálne.

Zopakujme si:

Pre translačný pohyb telesa ako celku (pohyb ťažiska) sme dostali „Newtonovu rovnicu sily“

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F}$$

Ako uvidíme neskôr, rovnica $\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{\tau}$

je analógom Newtonovej rovnice pre rotačný pohyb telesa ako celku.

Prípad nulového momentu síl

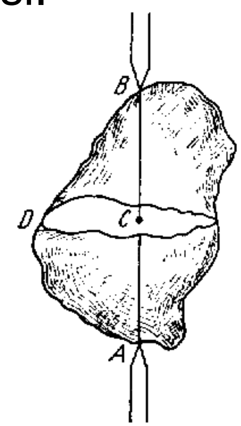
V prípade nulového momentu vonkajších síl ($\vec{\tau} = 0$) dostaneme vzťah

$$\vec{L} = \mathrm{const}$$

To je zákon zachovania momentu hybnosti.

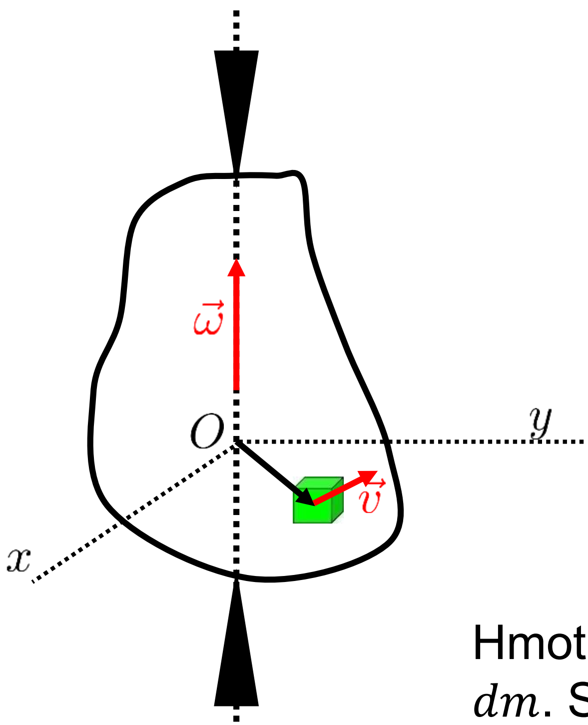
Aby nám rovnice obsahujúce moment hybnosti boli na niečo užitočné, musíme sa naučiť vypočítať moment hybnosti aspoň v nejakých typických situáciách.

Najjednoduchší prípad je tuhé teleso upevnené tak, že môže ľubovoľne rotovať okolo fixnej osi.



Tuhé teleso rotujúce okolo fixnej osi

jednotkový vektor v smere osi je $\vec{n}$, uhlová rýchlosť má smer osi $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$. Problém si značne zjednodušíme, keď budeme rátať moment hybnosti voči osi, teda $\vec{L}.\vec{n}$.
Bez ujmy na všeobecnosti môžeme stotožniť os z nehybnej inerciálnej vzťažnej sústavy za totožnú s osou rotácie telesa. Uvažujme malý objemový element telesa dV, ktorého okamžité súradnice (voči pevnej vzťažnej sústave) sú (x, y, z). Ten bod v dôsledku rotácie telesa okolo osi sa bude pohybovať po kružnici



polomerom $\sqrt{x^2 + y^2}$ a to je súčasne i rameno hybnosti.
Veľkosť rýchlosti toho elementu bude

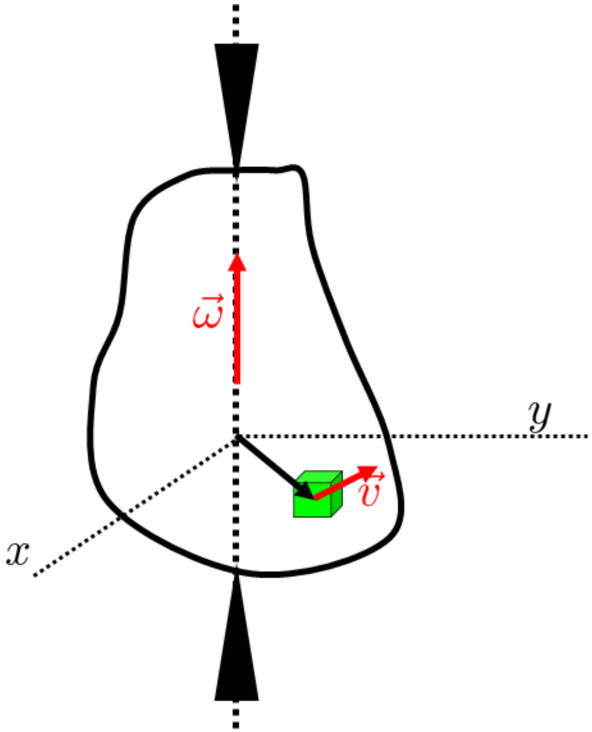
$$\omega\sqrt{x^2 + y^2}$$

Preto pre moment hybnosti toho objemového elementu vzhľadom na os (chápaný ako vektor) bude platiť („rameno krát hybnosť")

$$\delta\vec{M} = \sqrt{x^2 + y^2}\, dm\,\vec{\omega}\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\delta\vec{M} = dm\,\vec{\omega}(x^2 + y^2)$$

Hmotnosť uvažovaného objemového elementu sme označili dm. Súčasne si treba uvedomiť, že smer vektora momentu hybnosti voči referenčnému bodu O je naozaj $\vec{n}$ a teda aj $\vec{\omega}$.



Celkový moment hybnosti telesa vzhľadom na os otáčania teda dostaneme ako súčet cez všetky objemové elementy telesa.

$$\vec{M} = \vec{\omega} \int dm(x^2 + y^2) = \vec{\omega} I$$

Označili sme

$$\boxed{I = \int dm(x^2 + y^2)}$$

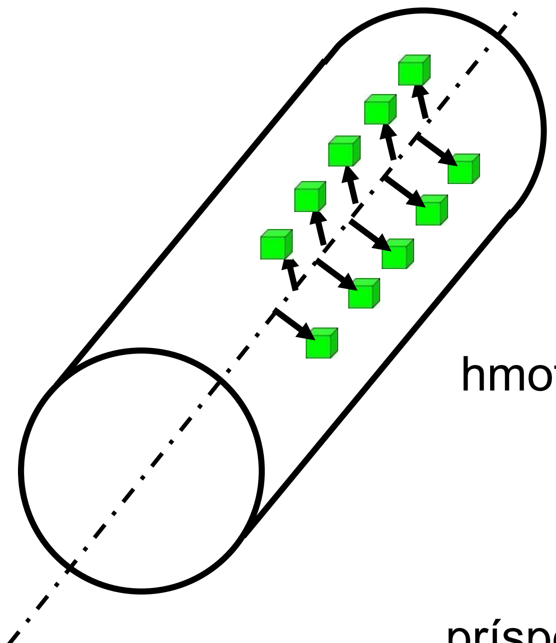
veličina I sa **volá moment zotrvačnosti telesa voči osi z** . V definícii momentu zotrvačnosti nie je dôležité, že za os otáčanie sme zvolili práve os z. **Moment zotrvačnosti tuhého telesa** je definovaný voči akejkoľvek osi otáčania vzťahom

$$I = \int dm \varrho^2$$

kde ϱ je vzdialenosť hmotného elementu telesa od osi otáčania.
Zopakujme teda: moment hybnosti tuhého telesa rotujúceho okolo fixnej osi uhlovou rýchlosťou $\vec{\omega}$ je

$$\boxed{\vec{M} = \vec{\omega} I}$$

Moment zotrvačnosti valca rotujúceho okolo svojej osi



$$I = \int dm(x^2 + y^2)$$

hmotnosť LEGO kocky

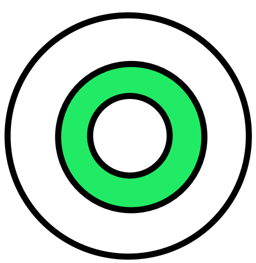
kvadrát vzdialenosti LEGO kocky od osi

hmotnosť „medzivalčia“ (R je polomer valca, h výška)

$$2\pi r dr h \frac{m}{\pi R^2 h} = 2m \frac{r dr}{R^2}$$

príspevok „medzivalčia“ k momentu zotrvačnosti

$$2m \frac{r dr}{R^2} r^2$$

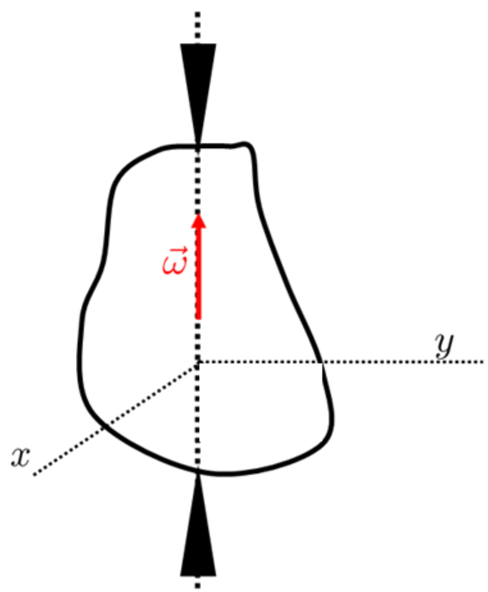


$$I = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2m}{R^2} \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^R = \frac{1}{2} m R^2$$

Tuhé teleso rotujúce okolo fixnej osi

Programové vyhlásenie fyziky

- Vybrať kúsok sveta ako fyzikálny systém
- Popísať okamžitý stav toho systému
- Nájsť pohybové rovnice
- Predpovedať vývoj stavu do budúcnosti



- Systém: teleso rotujúce okolo fixnej osi
- Okamžitý stav: momentálny uhol otočenia voči zvolenej štandardnej polohe (natočeniu) a uhlová rýchlosť, teda stav je dvojica $(\vec{\vartheta}, \vec{\omega})$. Napísali sme to ako dva vektory, ale oba ležia v osi otáčania, takže na zadanie stavu stačia dve čísla. Vektorové označenie sme použili pre zvýraznenie faktu, že tie čísla môžu byť kladné aj záporné
- Pohybová rovnica: V každom stave musíme poznať moment síl voči osi otáčania, ktorými vonkajší svet pôsobí na to teleso, teda $\vec{N}$. Je to opäť vektor ležiaci v osi, takže zase je to iba jedno číslo (kladné alebo záporné). Pohybová rovnica sa dostane zo všeobecnej rovnice

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{\tau}$$

jej priemetom na os otáčania

$$\frac{d}{dt}\vec{n}.\vec{L} = \vec{n}.\vec{\tau}$$

$$\boxed{I\frac{d}{dt}\vec{\omega} = \vec{N}}$$

Tuhé teleso v homogénnom gravitačnom poli.

Na hmotnostný element telesa dm pôsobí v jeho ľubovoľnej polohe sila

$\delta\vec{F} = -\delta m\, g\, \vec{k}$.

Prvým dôsledkom je, že vektorový súčet všetkých síl sa počíta veľmi jednoducho:

$$\vec{F} = -g\vec{k}\int \delta m = -mg\vec{k} = \vec{G}$$

m je celková hmotnosť telesa. Dostali sme teda celkovú tiaž telesa. Upozornime, že tento vzorec nič nehovorí o nejakom „pôsobisku tiaže“. Je to jednoducho vektor, teda čosi, čo má tri zložky a žiadne pôsobisko.

Ťažisko

Vypočítajme celkový moment hybnosti tiažových síl pôsobiacich na tuhé teleso. Zvoľme si ľubovoľný okamih a stav natočenia telesa. Uvažujeme hmotný element telesa $\delta m(\vec{\mathrm{r}})$. Týmto označením chceme povedať, že uvažujeme hmotný element, ktorý sa pre dané natočenie telesa nachádza v polohe $\vec{r}$. Celkový moment hybnosti získame sčítaním cez všetky hmotné elementy telesa. Dostaneme

$$\vec{\tau} = \int \vec{r} \times (-\delta m g \vec{k})$$

Druhý činiteľ vo vektorovom súčine je konštantný vektor, môžeme ho „vyňať pred zátvorku“, teda von z integrálneho súčtu a dostaneme

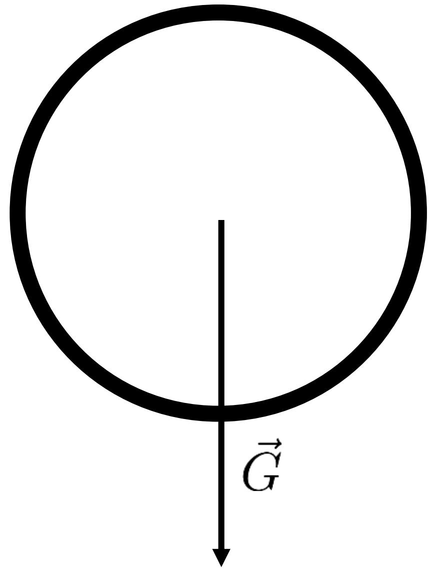
$$\vec{\tau} = -g \left(\int \delta m \vec{r} \right) \times \vec{k}$$

$$\vec{\tau} = -gm \frac{\int \delta m \vec{r}}{\int \delta m} \times \vec{k}$$

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{R}^* \times \vec{G}}$$

Vo vzorci vystupuje polohový vektor hmotného stredu telesa. Slovne vyjadrené: moment tiažových síl pôsobiacich na tuhé teleso ja taký istý, aký by bol moment tiažovej sily pôsobiacej na hmotný bod, ktorý „by sedel“ v hmotnom strede telesa a jeho hmotnosť by bola rovná celkovej hmotnosti telesa. To je dôvod, prečo sa hmotný stred nazýva často „**ťažisko**“ a kreslia sa ľudové obrázky, že „tiaž telesa pôsobí v ťažisku“. Zdôraznime, že referenčný bod sme nevolili nijako špeciálne!

Upozornime, že ľudové obrázky o tiaži pôsobiacej v ťažisku sú dostatočne mätúce napríklad v situáciách ako je tiaž železnej obruče, ktorá má ťažisko v svojom geometrickom strede (kde nie je ani kúsok železa):

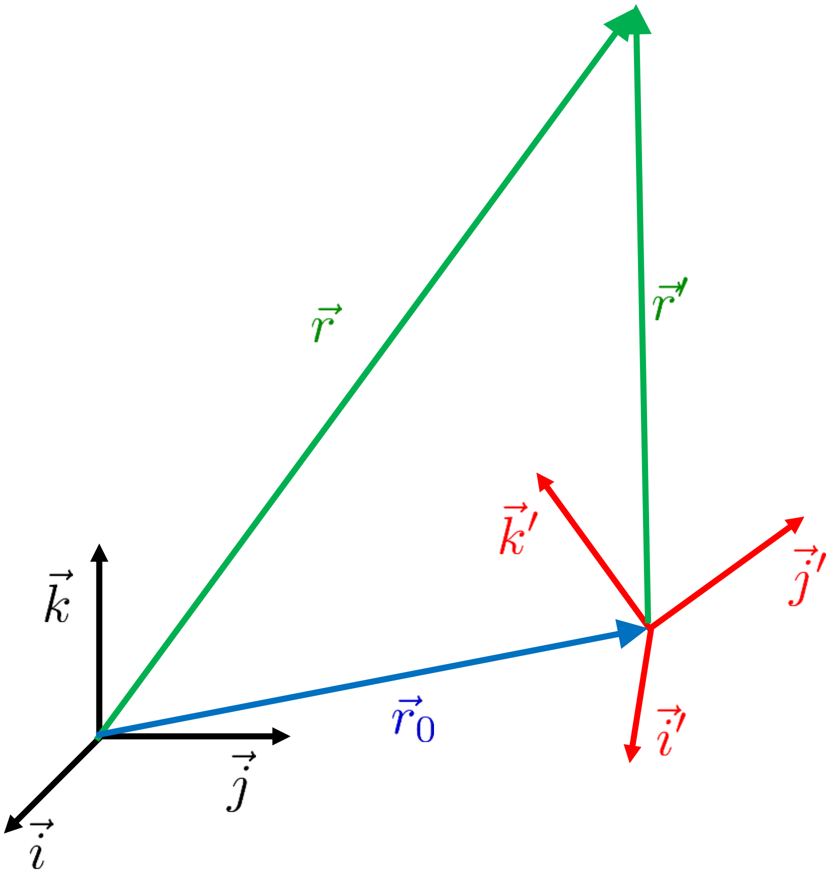


Obrázok sám o sebe nie je zlý, ak ho chápeme tak, že vyjadruje vzorec

$$\vec{\tau} = \vec{R}^* \times \vec{G}$$

mätúca je len naivná ľudová interpretácia toho obrázka.

Neinerciálne sústavy



Sústava $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ je inerciálna, sústava $(\vec{\imath}',\vec{\jmath}',\vec{k}')$ je neinerciálna. Uvažujme hmotný bod. Jeho polohový vektor voči inerciálnej sústave je $\vec{r}$, voči neinerciálnej sústave $\vec{r}'$. Polohový vektor počiatku neinerciálnej sústavy voči inerciálnej je $\vec{r}_0$.

Neinerciálna sústava je ako tuhé teleso, jeho stav (voči inerciálnej sústave je v každom okamihu zadateľný ako

$$\vec{r}_0(t), \vec{v}_0(t), R_{ij}(t), \vec{\omega}(t)$$

Keď sme bez ujmy na všeobecnosti považovali počiatok neinerciálnej sústavy za jej ťažisko. Platí teda, že $\vec{\omega}$ je uhlová rýchlosť pohybu neinerciálnej sústavy a

$$\vec{v}_0 = \frac{d}{dt}\vec{r}_0$$

Neinerciálne sústavy

$$\boxed{\vec{a}'(t) = \frac{1}{m}\left(\vec{F} - m\vec{a}_0(t) - 2m\,\vec{\omega}(t)\times\vec{v}\,'(t) - m\vec{\omega}(t)\times(\vec{\omega}(t)\times\vec{r}\,') - m\left(\frac{d}{dt}\vec{\omega}(t)\right)\times\vec{r}\,'\right)}$$

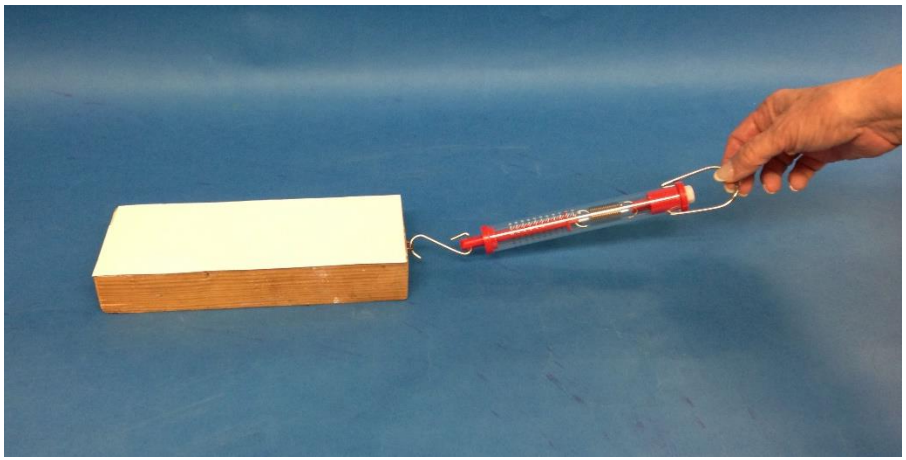
Pozorovateľ v neinerciálnej sústave sa nad touto rovnicou zamyslí a povie si:
Veď ja vlastne môžem robiť fyziku v neinerciálnej sústave, len Newtonov zákon sily bude mať u mňa iný tvar. Urobím to takto:

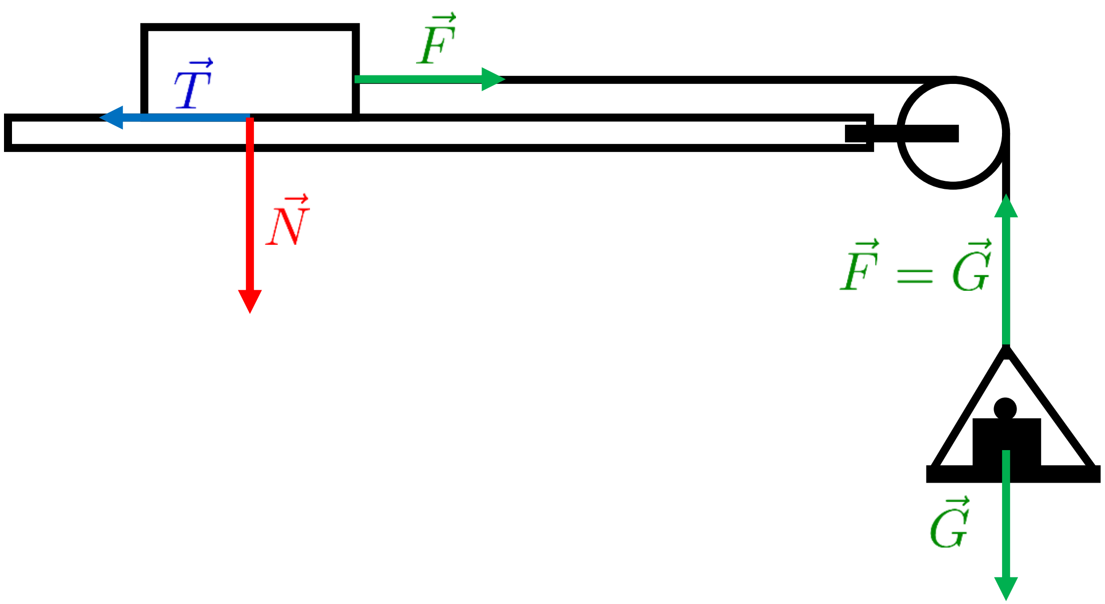
- zmeriam si zrýchlenie počiatku mojej neinerciálnej sústavy $\vec{a}_0$ voči inerciálnej
- zmeriam uhlovú rýchlosť rotácie $\vec{\omega}(t)$ mojej sústavy voči inerciálnej
- vypočítam aj uhlové zrýchlenie $\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt}$
- potom si poviem, že v mojej neinerciálnej sústave okrem naozajstnej sily $\vec{F}$ pôsobia ešte ďalšie mystické zotrvačné sily neznámeho pôvodu, a to

zotrvačná sila postupného zrýchlenia:	$-m\vec{a}_0(t)$
Coriolisova sila:	$-2m\,\vec{\omega}(t)\times\vec{v}\,'(t)$
odstredivá sila:	$-m\vec{\omega}(t)\times(\vec{\omega}(t)\times\vec{r}\,')$
zotrvačná sila rotačného zrýchlenia:	$-m\left(\frac{d}{dt}\vec{\omega}(t)\right)\times\vec{r}\,'$

- **a napíšem akoby Newtonovu rovnicu s pridaním zotrvačných síl**

Trenie (šmykové)





Teleso stojí napriek ťažnej sile $\vec{F}$.

Kolmá tlaková sila $\vec{F}$

Trenie $\vec{T}$

Ak teleso stojí, celková sila naň pôsobiaca je nulová

$$|\vec{T}| = |\vec{F}|$$

Trenie „akurát" vyrovná ťažnú silu

Ale trenie nie je schopné vyrovnať akokoľvek veľkú ťažnú silu, pri istej kritickej veľkosti sa teleso dá do pohybu

$$\boxed{|\vec{T}_{krit}| = |\vec{F}_{krit}| = f|\vec{N}|}$$

f je koeficient (statického) trenia

Trenie (šmykové)

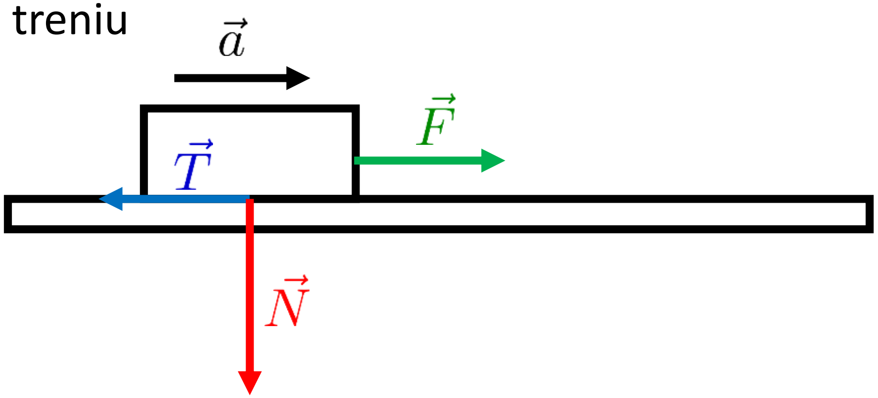
Ak teleso stojí, celková sila naň pôsobiaca je nulová Trenie „akurát“ vyrovná ťažnú silu

$$|\vec{T}| = |\vec{F}|$$

Statické trenie je menšie ako jeho maximálna kritická hodnota

$$\boxed{|\vec{T}| \leq f|\vec{N}| = |\vec{T}_{krit}|}$$

Ak už sa teleso hýbe (šmýka po podložke), trecia sila je v podstate rovná kritickému treniu



$$\vec{a} = \frac{1}{m}(\vec{F} - f_d\vec{N})$$

f_d je koeficient dynamického trenia

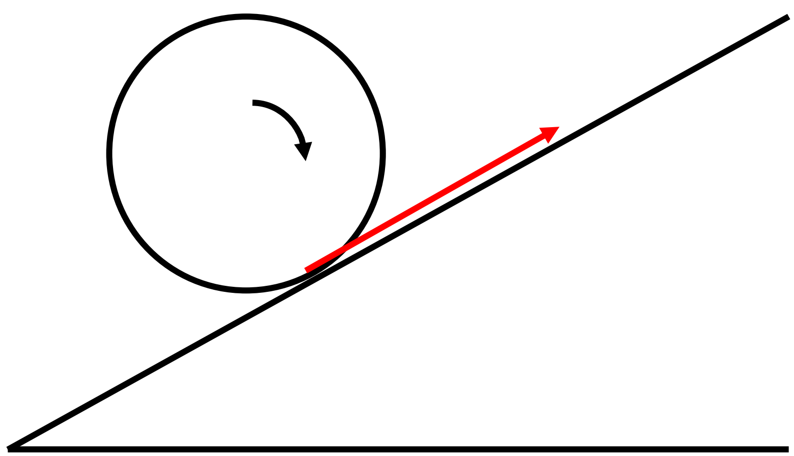
Dynamické trenie je spravidla menšie než kritické statické trenie, teda ťažná sila, ktorá je schopná uviesť teleso do pohybu je väčšia ako sila, ktorá je potom schopná udržiavať teleso v rovnomernom priamočiarom pohybe ($f_d < f$).

Trenie (šmykové)

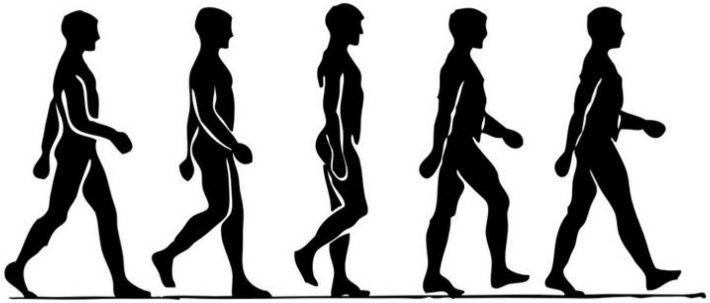
$$\boxed{|\vec{T}| \leq f|\vec{N}| = |\vec{T}_{krit}|}$$

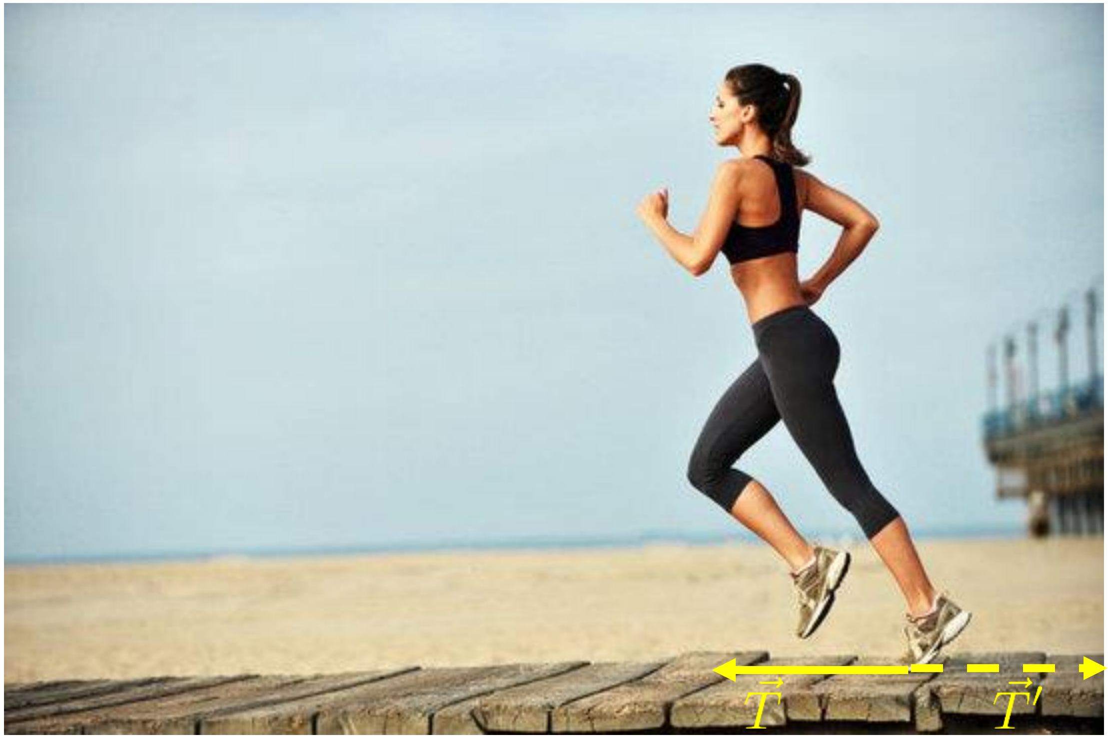
- Ak teleso prešmykuje voči podložke, trecia sily je „dopredu určená čo do veľkosti aj smeru. Smer trecej sily je proti smery preklzovania
- Ak teleso neprešmykuje, potom ani smer ani veľkosť trecej sily nevieme určiť dopredu, vyjde nám to až pri riešení Newtonových pohybových rovníc

Preklzujúci valec



Kto poháňa chodca? Trenie.





Chodec tlačí na topánku smerom dozadu, ako keby chcel, aby sa topánka šmýkala dozadu. Trenie tomu bráni silou, **ktorá smeruje dopredu**. Na chodca nepôsobí vo vodorovnom smere žiadna vonkajšia sila okrem trenia. Trenie teda poháňa chodca dopredu. Nie je teda pravdou, že trenie vždy pôsobí proti pohybu.

Statika tuhého telesa

Pripomeňme si rovnice dynamiky tuhého telesa

$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i\vec{v}_i = \sum_i \vec{F}_i(\vec{r}_i, \vec{v}_i)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F}}$$

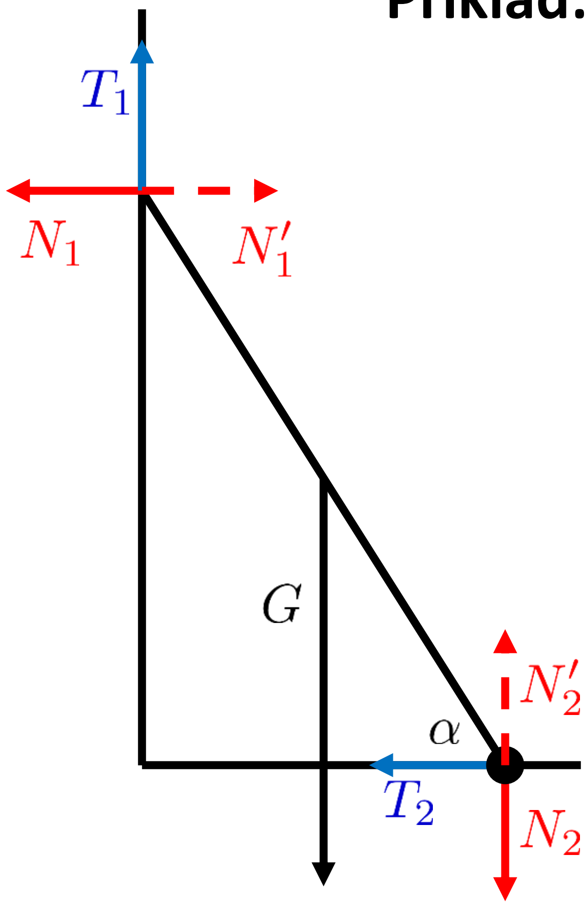
$$\frac{d}{dt}\sum_i \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i(\vec{r}_i, \vec{v}_i)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{\tau}}$$

Statika: $\vec{P} = 0, \vec{\mathrm{L}} = 0.$ $\boxed{\vec{F} = 0 \quad \vec{\tau} = 0}$

Často stačí len požadovať len nulovosť (priemetu) momentu hybnosti na nejakú os otáčania.

Príklad: Kritický uhol opretého rebríka



Pre kritický uhol, keď rebrík práve začne šmýkaním padať sú obe trecie sily práve kritické

$$T_1 = f_1 N_1$$

$$T_2 = f_2 N_2$$

$$G = T_1 + N_2'$$

$$T_2 = N_1'$$

$$0 = T_1 L \cos\alpha + N_1 L \sin\alpha - G\frac{L}{2}\cos\alpha$$

moment síl vzhľadom na os v spodnom bode rebríka

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{1 - f_1 f_2}{2 f_2}}$$

Gravitačný zákon

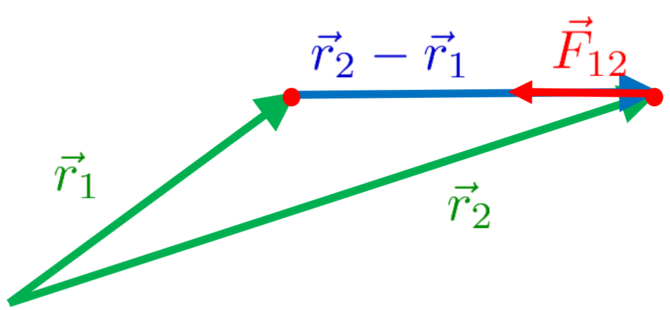
Newtonov gravitačný zákon možno zhrnúť do jednoduchého vzorca. Dve hmotné telesá zanedbateľných rozmerov (hmotné body) vo vzdialenosti r sa priťahujú silou

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$\varkappa$ = 6.673×10^{-11} N·(m/kg)^2 je gravitačná konštanta

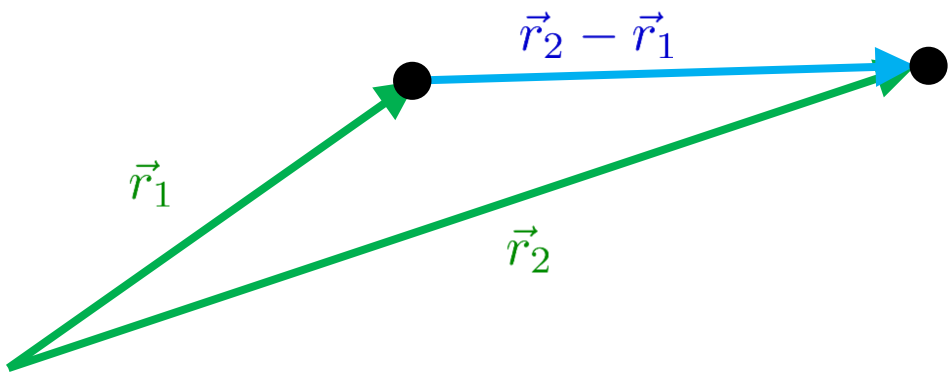
Vektorový zápis toho istého znie takto: teleso 1 pôsobí na teleso 2 silou

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2}\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$



Znamienko – hovorí, že sila je príťažlivá, teda má smer opčný ako vektor $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$.
Newtonov zákon je univerzálny, hovorí že ľubovoľné telesá na seba takto gravitačne pôsobia.

$$F(r) = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

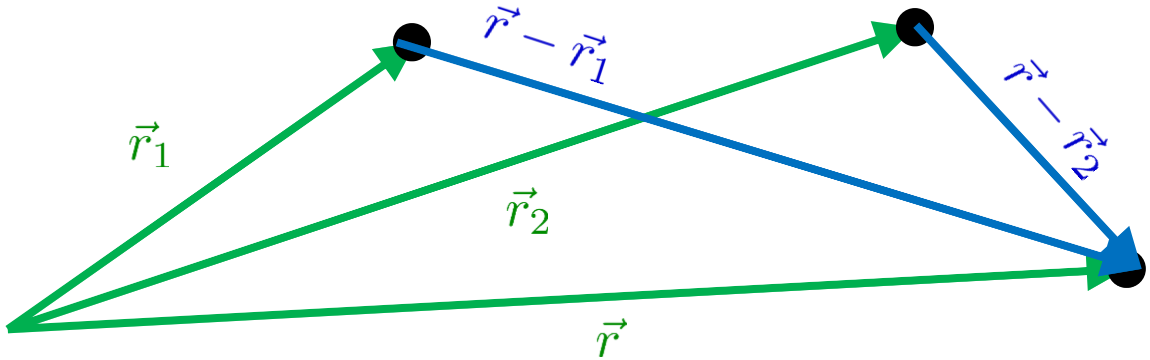


Vo vektorovom tvare (sila je vektor, takže okrem veľkosti má aj smer) silu, ktorou teleso „1“ pôsobí na teleso „2“ vyjadríme takto

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2}\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

Pre pochopenie tohto vzorca si treba uvedomiť, že výraz $\dfrac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$ je jednotkový vektor v smere $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ a znamienko – pred vzorcom hovorí, že sila je príťažlivá, smeruje ku častici „1“, teda opačne, ako je orientovaný vektor $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Trik so zápisom jednotkového vektora si zapamätajte, bude sa často používať.



Ak na teleso v bode $\vec{r}$ pôsobí viac gravitujúcich telies, potom celková gravitačná sila pôsobiaca na to teleso bude vektorovým súčtom gravitačných síl od jednotlivých telies. Pre situáciu na obrázku to teda bude

$$\vec{F} = -G\frac{mm_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} - G\frac{mm_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}$$

V tomto vzorci môžeme zvýrazniť (pridaním argumentu $\vec{r}$ do symbol sily), že sila, ktorú počítame, pôsobí na teleso umiestnené v polohe $\vec{r}$.

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{mm_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} - G\frac{mm_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}$$

Gravitačné pole

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{mm_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} - G\frac{mm_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}$$

Vzorec svojím zápisom evokuje myšlienku, že sa môžem zaujímať nielen o to, aká sila pôsobí na teleso m ak je (naozaj) umiestnené v polohe $\vec{r}$, ale aj o virtuálne možnosti: že aká sila **by** na teleso pôsobila, **keby** bolo umiestnené v (rôznych) polohách $\vec{r}$, pri fixných polohách gravitujúcich telies $\vec{r}_1, \vec{r}_2$.

Pri takejto virtuálnej interpretácii si dokonca môžeme predstaviť, že teleso m sa (zatiaľ) nenachádza nikde a aj tak vzorec vyjadruje aká sila **by** na teleso pôsobila, **keby** bolo umiestnené v (rôznych) polohách $\vec{r}$, pri fixných polohách gravitujúcich telies $\vec{r}_1, \vec{r}_2$. Vyvoláva to predstavu, že v priestore v okolí gravitujúcich telies m_1, m_2 je „čosi ako skrytá možnosť, že keby sme do toho priestoru vložili teleso m do bodu $\vec{r}$, pôsobila by naň gravitačná sila, daná tým vzorcom. Zavádzame preto pojem „gravitačné pole". V našom vzorci ale explicitne vystupuje hmotnosť m. Gravitujúce telesá „vytvárajúce gravitačné pole" môžu ale pôsobiť na teleso akejkoľvek hmotnosti, preto je rozumnejšie charakterizovať gravitačné pole samotné bez odvolávania sa na hmotnosť telesa, na ktoré to pole bude pôsobiť.

Gravitačné pole

Gravitačné pole v priestore charakterizujeme vektorom intenzity gravitačného poľa $\vec{g}$. Vektor intenzity je definovaný v každom bode priestoru ako podiel gravitačnej sily, ktorá by v tom bode pôsobila na teleso hmotnosti m a tej hmotnosti m. Teda

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{1}{m}\vec{F}(\vec{r})$$

Všimnime si, že intenzita gravitačného poľa je vlastne gravitačné zrýchlenie, ktoré pole udeľuje telesám v uvažovanom bode.

Intenzita gravitačného poľa v mieste $\vec{r}$ budeného jedným (bodovým) telesom o hmotnosti M umiestneným v počiatku súradnicovej sústavy je

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G\frac{M}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Intenzita gravitačného poľa v mieste $\vec{r}$ budeného viacerými bodovými telesami o hmotnostiach M_i umiestnenými v bodoch $\vec{r}_i$ je

$$\vec{g}(\vec{r}) = \sum_i -G\frac{M_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

Gravitačné pole

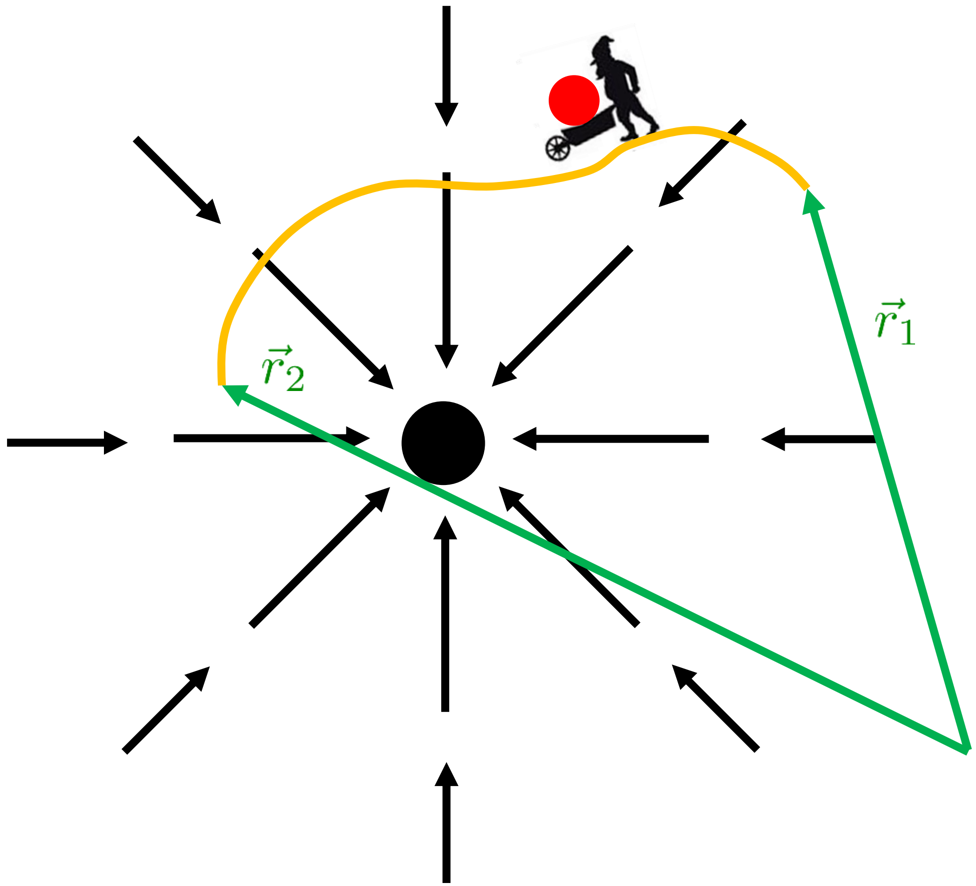
Poznamenajme, že slovo pole v pojme „gravitačné pole“ sa vo fyzike štandardne používa na pomenovanie faktu, že niečo (nejaká fyzikálna veličina) je definovaná v každom bode priestoru. V prípade gravitačného poľa hovoríme špeciálne, že je to vektorové pole, lebo intenzitu gravitácie definuje v každom bode vektor.

Ak chceme zistiť (zmerať, zmapovať) gravitačné pole (intenzitu gravitačného poľa) v nejakom priestore, potom to v princípe môžeme urobiť pomocou nejakého bodového testovacieho telesa ľubovoľnej hmotnosti m. S týmto telesom musíme „navštíviť“ v princípe každý bod uvažovaného priestoru, zmerať (vhodným silomerom) gravitačnú silu, ktorá na tom mieste na testovacie teleso pôsobí. Potom intenzita gravitačného poľa v tom bode bude

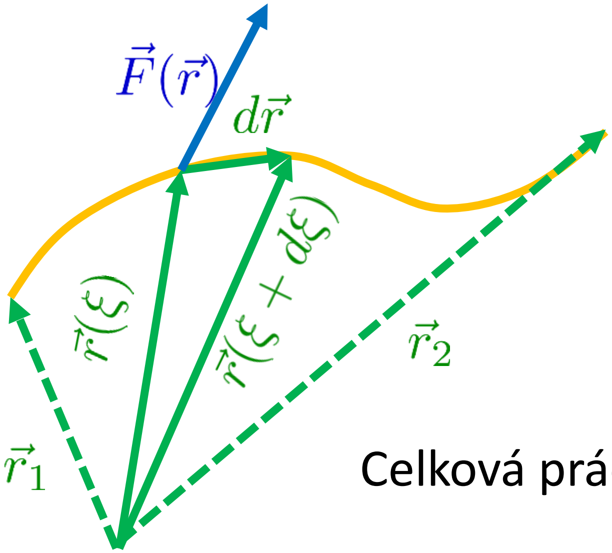
$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{1}{m}\vec{F}(\vec{r})$$

Bodov v priestore je nespočítateľne veľa, preto „navštíviť testovacím telesom“ každý bod je nemožné. Prakticky mapujeme pole tak, že zmeriame pole v nejakej diskrétnej sieti meracích bodov a v ostatných bodoch v prípade potreby dopočítame hodnotu poľa vhodnou matematickou interpoláciou nameraných bodov. Existujú komerčne dostupné meracie prístroje na meranie gravitačného poľa, gravimetre.

Práca v gravitačnom poli



Práca nekonštantnej sily po krivej trajektórii



Uvažujme časticu, ktorá sa pohybovala po trajektórii $\vec{r}(\xi)$, pričom v bode $\vec{r}$ na ňu pôsobila sila $\vec{F}(\vec{r})$. Sila vo všeobecnosti nie je rovnobežná s príslušným úsekom dráhy $d\vec{r}$. Prijmime (momentálne, dôvod si povieme neskôr) bez dlhého zdôvodňovania, že práca vykonaná silou pôsobiacou na úseku dráhy $d\vec{r}$ je daná skalárnym súčinom $\boxed{\delta A = \vec{F}(\vec{r}).d\vec{r}}$

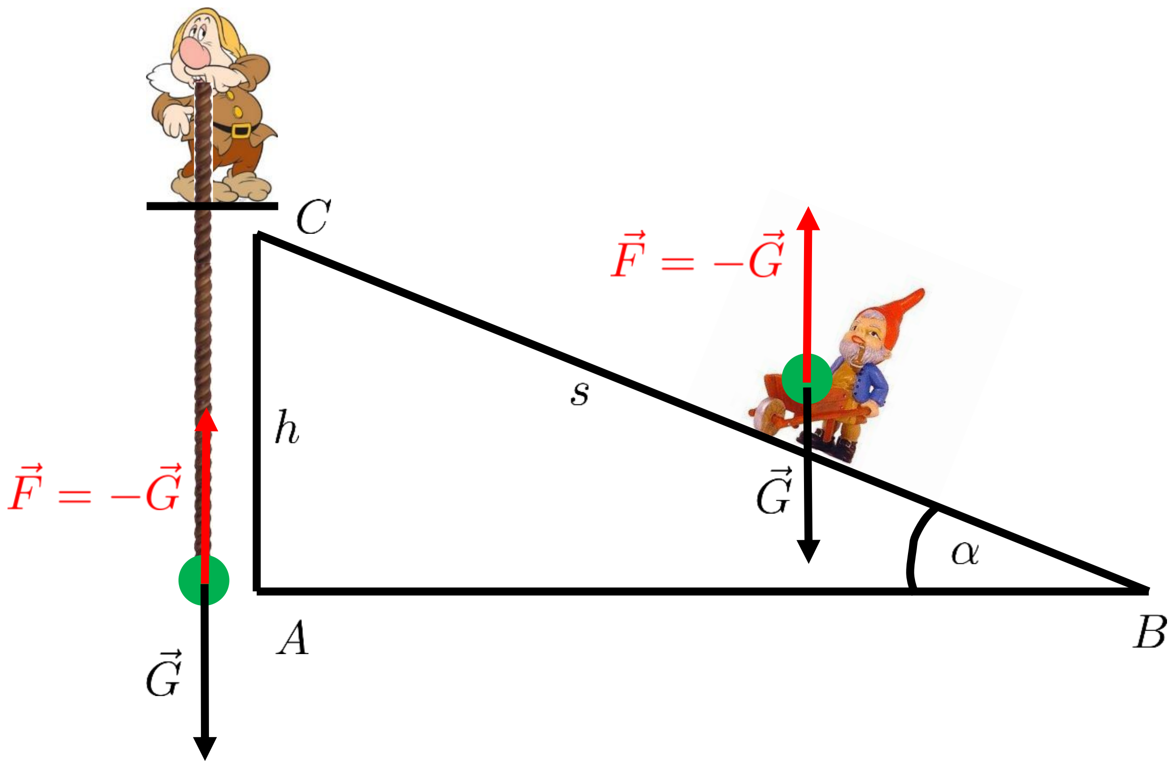
Celková práca vykonaná na trajektórii od bodu $\vec{r}_1$ až po bod $\vec{r}_2$ bude

$$A = \int \delta A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}).d\vec{r}$$

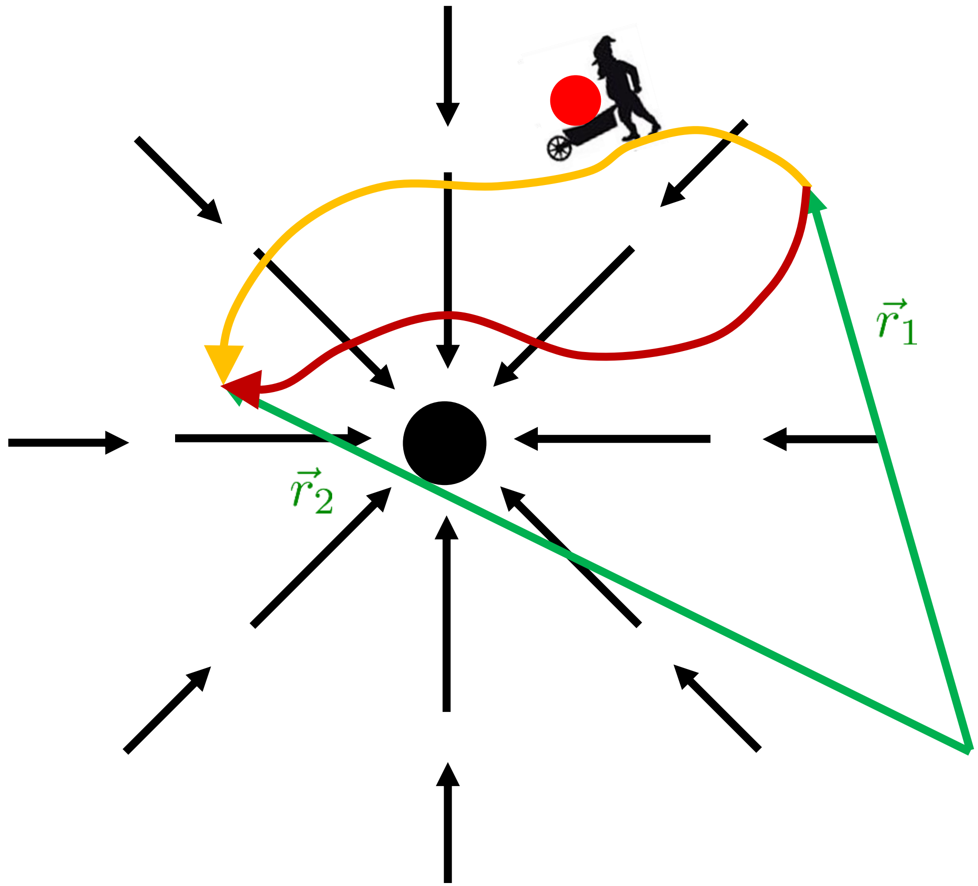
Symboly integrálov neoznačujú žiadne „opaky derivácií“, sú to označenia pre súčty veľkého množstva malých čísel. Najlepšie je predstaviť si to ako numeriku na počítači. Rozkúskujem dráhu na malé úseky. Na každom úseku vypočítam skalárny súčin $\vec{F}(\vec{r}).d\vec{r}$ a takto vzniknuté číselká sčítam.

Všimnite si, že sme pre malý element vykonanej práce použili symbol δA a nie dA. Apriórne totiž nevieme, či existuje nejaká funkcia $A(\vec{r})$, pre ktorú by δA bolo diferenciálom a zaslúžilo by si to označenie dA, takže by platilo

$$\int \delta A \stackrel{?}{=} A(\vec{r}_2) - A(\vec{r}_1)$$

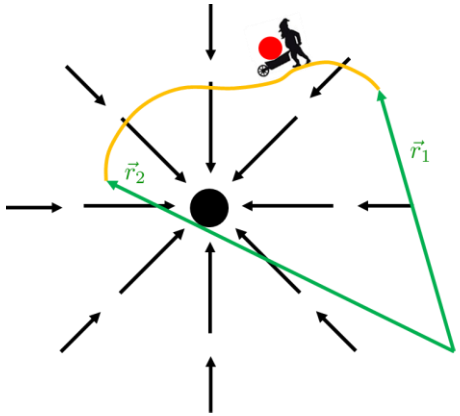


Môžme sa pýtať prečo sa nám zachcelo definovať fyzikálnu prácu tak, aby práca v gravitačnom poli po dráhe AC vyšla rovnako ako práca po dráhe BC. Akej fyzike to zodpovedá? Tá otázka znamená: „Akej našej skúsenosti to zodpovedá?“ Nuž takej, že sa nedá spraviť perpetuum mobile. Neexistencia perpetua mobile sa nedá „dokázať z ničoho“, nie je to logická nutnosť. Len celá doterajšia skúsenosť ľudstva hovorí, že sa to (asi?) nedá spraviť. Príkladu s prácou na naklonenej rovine zodpovedá nasledujúci (nefungujúci!) návrh na konštrukciu perpetua mobile



Trpaslík premiestňuje teleso v gravitačnom poli. Koná pritom prácu. Má na výber dve trajektórie, obe vedú z bodu $\vec{r}_1$ do bodu $\vec{r}_2$. Ak by práca vykonaná trpaslíkom nebola po rôznych trajektóriách rovnaká, dalo by sa skonštruovať perpetuum mobile. Ak veríme, že to nie je možné potom musí platiť tvrdenie: Práca v gravitačnom poli po ľubovoľnej trajektórii spájajúcej dva fixné body je rovnaká, nezávislá na zvolenej trajektórii.

Potenciálna energia



Uvažujme trpaslíka, ktorý v gravitačnom poli bodovej častice premiestňuje časticu s hmotnosťou m z miesta $\vec{r}_1$ na miesto $\vec{r}_2$. Vypočítali sme prácu na to potrebnú

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} mG\frac{M}{r^2}\frac{\vec{r}.d\vec{r}}{r} = -mGM\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

Pozrime sa teraz na tento vzorec z iného pohľadu. Práca, ktorú musí vykonať trpaslík, aby premiestnil teleso o hmotnosti m z bodu $\vec{r}$ hocikam do nekonečnej vzdialenosti je

$$A(\vec{r} \to \infty) = -U(\vec{r}) = mGM\frac{1}{|\vec{r}|}$$

Zaviedli sme tak veľmi užitočnú funkciu $U(\vec{r})$, pomocou ktorej vieme vypočítať prácu trpaslíka medzi dvoma ľubovoľnými bodmi

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} mG\frac{M}{r^2}\frac{\vec{r}.d\vec{r}}{r} = U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)$$

Toto je práca, ktorú musí vykonať trpaslík ako konateľ práce.

Potenciálna energia

Pozrime sa teraz na prácu, ktorú naopak koná pri tom istom premiestňovaní gravitačné pole ako konateľ nad trpaslíkom ako trpiteľom, dostaneme

$$A' = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} mG\frac{M}{r^2}\frac{\vec{r}.d\vec{r}}{r} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2)$$

Ak $A' > 0$, potom trpaslík zarobil čosi na úkor gravitačného poľa a získanú prácu môže využiť na niečo užitočné, napríklad dobiť si baterky (ak je to trpaslík fungujúci na elektrinu). Prenášaná častica vykonala prácu A' nad trpaslíkom, takže častica v gravitačnom poli má schopnosť vykonať pri premiestnení nejakú prácu. Asi ste sa stretli s vyjadrením, že schopnosť telesa konať prácu súvisí s jeho energiou, takže je prirodzené nazvať funkciu $U(\vec{r})$ potenciálnou energiu častice v mieste $\vec{r}$. Ak častica má na začiatku presunu (v bode $\vec{r}_1$) väčšiu energiu ako na konci presunu (v bode $\vec{r}_2$) vykoná pri presune kladnú prácu.
Všimnime si, že sme dostali

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \delta A = U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)$$

takže sme mohli písať namiesto δA diferenciál dA, lebo vykonaná práca je v prípade gravitačného poľa diferenciálom potenciálnej energie, čo sme na začiatku našich úvah s istotou nevedeli.

Potenciálna energia

Pre prácu vykonanú na infinitezimálnej trajektórii $d\vec{r}$ dostaneme

$$-\vec{G}(\vec{r}).d\vec{r} = \vec{F}(\vec{r}).d\vec{r} = \delta A = dU = U(\vec{r} + d\vec{r}) - U(\vec{r})$$

Potenciálna energia je funkciou polohy, jej argumentom je vektor $\vec{r} = (x, y, z)$. Potenciálnu energiu môžeme preto chápať aj ako funkciu troch skalárnych premenných x, y, z. Dostaneme teda rovnicu

$$G_x dx + G_y dy + G_z dz = -U(x + dx, y + dy, z + dz) + U(x, y, z)$$

na pravej strane urobíme rozvoj do prvého rádu pomocou parciálnych derivácií a dostaneme

$$G_x dx + G_y dy + G_z dz = -U(x, y, z) - \frac{\partial U}{\partial x} dx - \frac{\partial U}{\partial y} dy - \frac{\partial U}{\partial z} dz + U(x, y, z)$$

$$G_x dx + G_y dy + G_z dz = -\frac{\partial U}{\partial x} dx - \frac{\partial U}{\partial y} dy - \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

Potenciálna energia

$$G_x dx + G_y dy + G_z dz = -\frac{\partial U}{\partial x}dx - \frac{\partial U}{\partial y}dy - \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

Gravitačné pole teda pôsobí na časticu v mieste (x, y, z) silou

$$\boxed{\begin{aligned} G_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} \\ G_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} \\ G_z &= -\frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned}}$$

kde $U(x, y, z)$ je potenciálna energia častice. Všimnime si, že potenciálna energia je skalár a troma parciálnymi deriváciami z tohto skalára vyrobíme vektor (gravitačnú silu). Aby sa zvýraznila túto skutočnosť, matematici zaviedli osobitný symbol vektorovej povahy

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Tri symboly parciálnej derivácie sme zapísali, ako keby to boli zložky nejakého vektora.

Operátor nabla

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Poznamenajme, že abstraktný symbol $\vec{\nabla}$ (čítaj „nabla“) reprezentuje matematický objekt typu „operátor“. **Operátorom v matematike nazývame nejaký predpis (operáciu), ktorý z jedného matematického objektu vyrobí nejaký iný matematický objekt** vo všeobecnosti aj iného typu ako bol pôvodný objekt. Zvykneme hovoriť, že operátor „pôsobí“ na objekt a vyrobí z neho iný objekt.

Príkladom je operátor derivácie $\frac{d}{dx}$, ktorý vyrobí z nejakej funkcie jej deriváciu.

Operátor nabla vyrobí zo skalárnej funkcie polohy vektorovú funkciu polohy. Vyrobí teda tri funkcie polohy, ktoré tvoria tri priemety výslednej vektorovej funkcie, v našom prípade

$$\vec{G}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) = \left(-\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}, -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}, -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\right)$$

Často sa používa ešte „vektorovejší“ zápis tvaru $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$
a dostaneme

$$\vec{G}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\vec{k}$$

Gradient

Operácia pôsobenia nabla na skalárnu funkciu typu

$$\vec{G}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\vec{k}$$

sa volá **gradient**. Uvedený vzorec potom čítame takto:

Gravitačná sila pôsobiaca na časticu sa vypočíta ako záporný gradient potenciálnej energie tej častice v gravitačnom poli.

Formuláciu „záporný gradient“ si treba zapamätať, patrí to do štandardnej výzbroje fyzika.

Gravitačný potenciál

Potenciálna energia (testovacej) častice v gravitačnom poli je úmerná jej hmotnosti, teda necharakterizuje len gravitačné pole samotné ale aj časticu, ktorou ho testujeme. Preto zavádzame nový pojem gravitačný potenciál $\varphi(\vec{r})$ poľa v bode $\vec{r}$ vzťahom

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{m} U(\vec{r})$$

Fyzikálne je to práca, ktorú musíme vykonať, aby sme premiestnili testovaciu časticu jednotkovej hmotnosti z bodu $\vec{r}$ do nekonečna.
Intenzita gravitačného poľa sa potom dá vypočítať podľa vzťahu

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$$

Naša doterajšia diskusia o potenciálnej energii sa týkala gravitačného poľa budeného jednou bodovou časticou. Všeobecne môžeme uvažovať gravitačné pole budené viacerými bodovými časticami

$$\vec{g}(\vec{r}) = \sum_i -G \frac{M_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

alebo spojitým rozložením gravitujúcej hmotnosti

$$\vec{g}(\vec{r}) = \int -G \frac{\varrho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3\vec{r}\,'$$

Gravitačný potenciál

Všetky vzťahy pre potenciál, ktoré sme diskutovali boli lineárne, preto zovšeobecnenie na prípad viacerých zdrojov gravitačného poľa je triviálne. Gravitačný potenciál poľa budeného viacerými bodovými zdrojmi je teda

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i -G\frac{M_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

a pre spojité rozloženie

$$\varphi(\vec{r}) = \int -G\frac{\varrho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3\vec{r}\,'$$

explicitným derivovaním sa možno presvedčiť o tom, že intenzita poľa sa dá vypočítať ako záporný gradient potenciálu

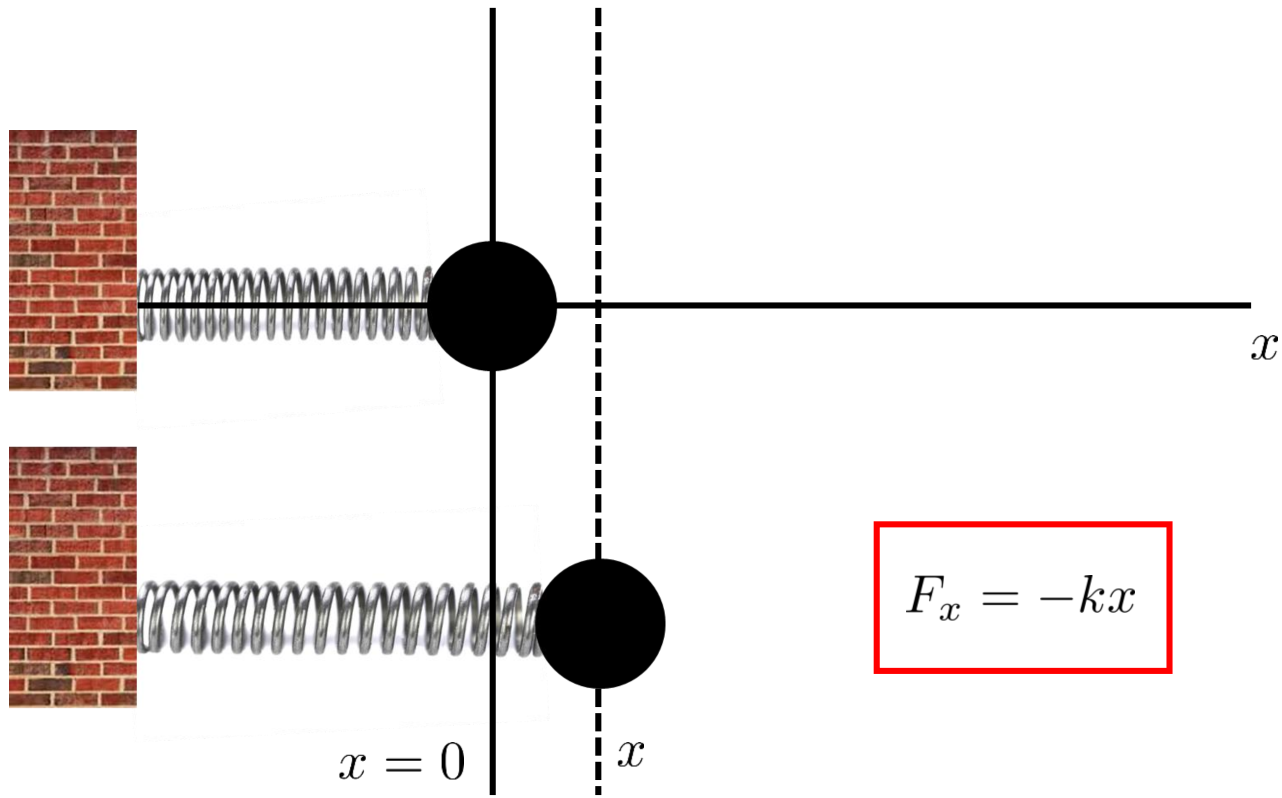
$$\vec{g}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$$

teda že platí

$$\vec{g}(\vec{r}) = \int -G\frac{\varrho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3\vec{r}\,' = -\vec{\nabla}\int -G\frac{\varrho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Poznamenajme, že ak chceme pre dané rozloženie gravitujúcej hmoty priamu vypočítať intenzitu gravitačného poľa, musíme pracovať s vektormi a teda „dávať pozor na kosínusy“. Spravidla je jednoduchšie vypočítať najprv skalárnu veličinu potenciál a potom vypočítať intenzitu ako záporný gradient potenciálu.

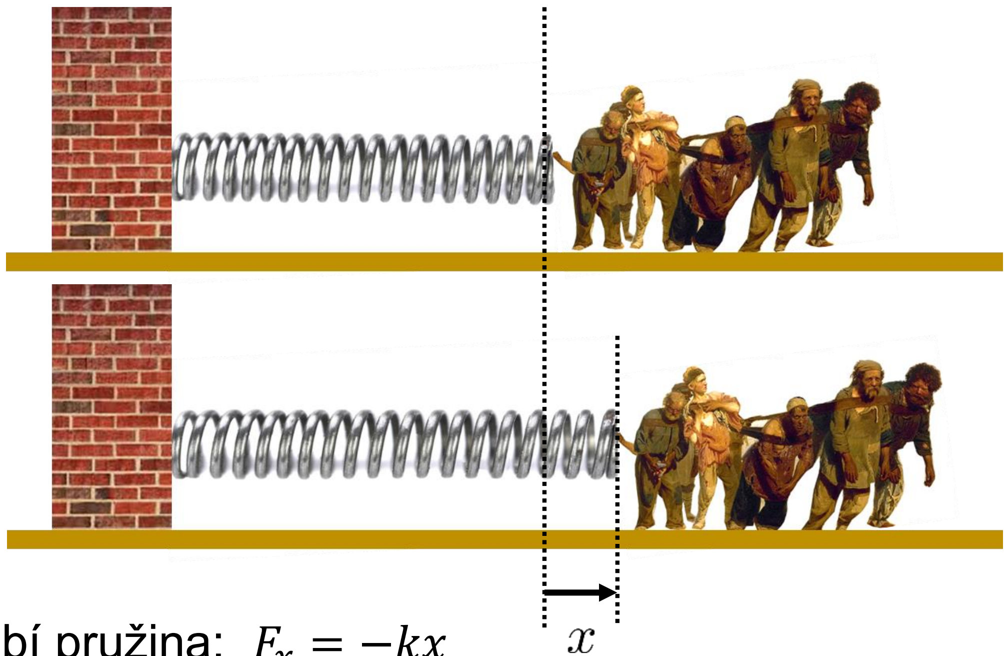
Harmonický oscilátor



$$\boxed{F_x = -kx}$$

V ďalšom, pokiaľ budeme študovať jednorozmerný oscilátor, nebudeme písať pri sile index. Budeme proste písať $F = -kx$ a budeme mať na mysli priemet sily na os x. (Preto nech niekoho neprekvapí záporné znamienko.)

Práca pri napínaní pružiny



Sila, ktorou pôsobí pružina: $F_x = -kx$

Sila, ktorou pôsobia burlaci: $\tilde{F}_x = kx$

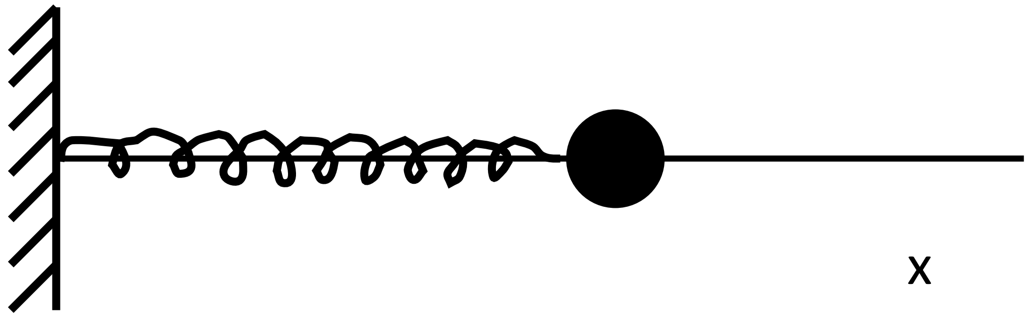
Práca, ktorú vykonajú burlaci pri napínaní pružiny z rovnovážneho stavu o vzdialenosť x:

$$A = \int_0^x \tilde{F}_{(}x')dx' = \int_0^x kx'dx' = \frac{1}{2}kx^2$$

Potenciálna energia pružnosti

$$\boxed{U(x) = \frac{1}{2}kx^2}$$

Oscilátor



Rovnovážna poloha nech je x = 0

Pružina: $F_x = -Kx$

Pohybová rovnica: $m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx$

Uhádneme riešenie: $x(t) = A\sin(\omega t)$ $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

Naozaj: $m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2 A\sin(\omega t) = -KA\sin(\omega t) = -Kx(t)$

Ale rovnako dobré je aj riešenie $x(t) = B\cos(\omega t)$

Rovnica $m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx$ je tzv. lineárna, čo znamená, že súčet jej

dvoch riešení je tiež riešením, teda aj riešenie

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

Pri zadaných počiatočných podmienkach $x(0) = x_0, v(0) = v_0$
dopočítame najprv rýchlosť $v(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$
a dostaneme jednoznačne

$$\boxed{x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{1}{\omega}v_0\sin(\omega t)}$$

pohyb je periodický s periódou $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$

naozaj: $\cos(\omega(t+T)) = \cos(\omega(t+\frac{2\pi}{\omega})) = \cos(\omega t + 2\pi)) = \cos(\omega t)$

Pri ľubovoľných počiatočných podmienkach vieme teda jednoznačne predpovedať budúcnosť, takže sme zrejme našli v tvare

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \qquad \text{(\#)}$$

všetky riešenia pohybovej rovnice. Lebo ak by boli nejaké ďalšie, potom by budúcnosť už nebola jednoznačná. Čo fyzikálne neočakávame. Je na matematikoch, aby naozaj dokázali, že sú to všetky riešenia. Tým sa tu zaoberať nebudeme. Riešenia sme proste uhádli a našli sme ich tak dosť. Ešte trochu iné ekvivalentné vyjadrenie v tvare (budeme hľadať X_0 a δ)

$$x(t) = X_0\cos(\omega t + \delta)$$

$$x(t) = X_0\cos(\omega t)\cos\delta - X_0\sin(\omega t)\sin\delta)$$

porovnaním s (#) dostaneme $A = X_0\cos\delta, B = -X_0\sin\delta$

odtiaľ zrejme $X_0 = \sqrt{A^2 + B^2}$

Potom treba nájsť také δ, aby platilo $A = X_0\cos\delta, B = -X_0\sin\delta$

$$\boxed{-\frac{B}{A} = \tan\delta, \qquad \delta = \mathrm{atan2}(-B, A)}$$

Pri ľubovoľných počiatočných podmienkach vieme teda jednoznačne predpovedať budúcnosť, takže sme zrejme našli v tvare

atan2 je programátorské značenie, ktoré matematici nepoznajú, obor hodnôt funkcie atan2 je totiž (-π, π), kým obor hodnôt inverznej funkcie k tangensu, arctan() je (-π/2, π/2)
Funkcia atan2 je totiž definovaná nie ako inverzná funkcia k tangensu ale ako polárny uhol φ bodu s kartézskymi súradnicami (x,y), teda taký uhol, že platí

$$x = \sqrt{x^2 + y^2}\cos\varphi, \qquad y = \sqrt{x^2 + y^2}\sin\varphi$$

$$\varphi = \mathrm{atan2}(y, x)$$

vš ... y
bu
m
za
Eš
p

odtiaľ zrejme
$$X_0 = \sqrt{A^2 + B^2}$$
Potom treba nájsť také δ, aby platilo
teda

$$\boxed{-\frac{B}{A} = \tan\delta, \qquad \delta = \mathrm{atan2}(-B, A)}$$

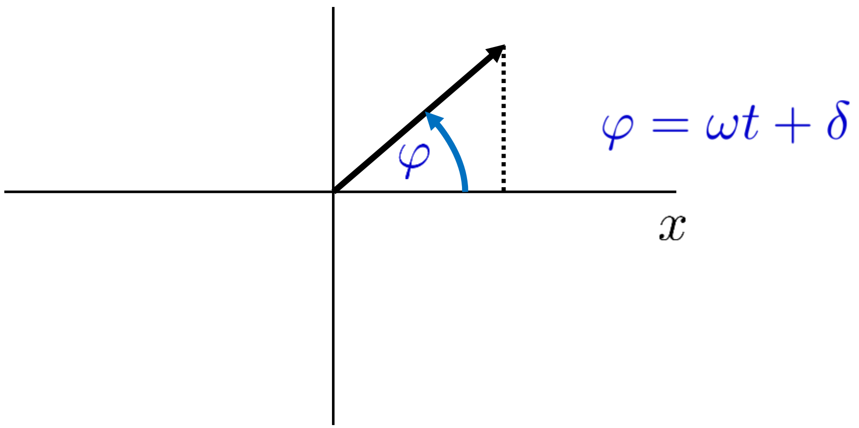
Parametre X_0 a δ vo vyjadrení

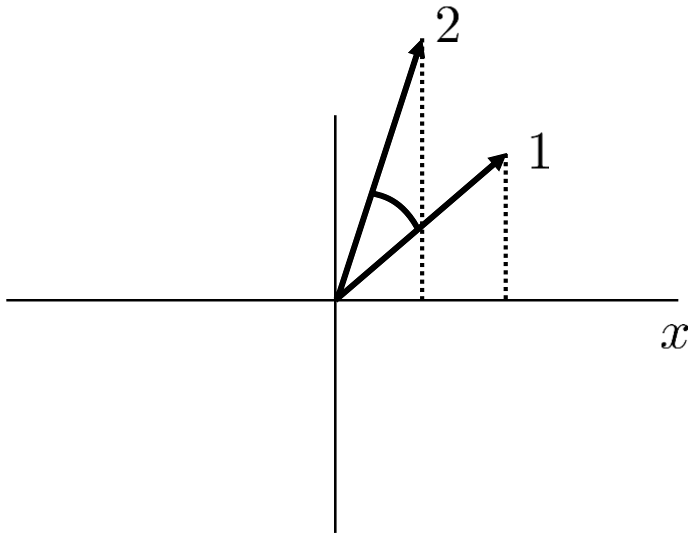
$$x(t) = X_0 \cos(\omega t + \delta)$$

sa nazývajú „amplitúda“ a „fáza“. Poznamenajme, že v literatúre (učebniciach) nie je zhoda v definícii pojmu „fáza“. Môžete stretnúť vyjadrenia

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t - \delta)$$
$$x(t) = X_0 \sin(\omega t + \delta)$$
$$x(t) = X_0 \sin(\omega t - \delta)$$

Parameter δ vo všetkých vyjadreniach sa môže volať „fáza“. Pre niekoho uprednostnenie „kosínusovky“ pred „sínusovkou“ je často motivované tým, že kmitavý pohyb sa dá vnímať ako priemet rotujúceho vektora „na os x“. Ten rotujúci vektor sa niekedy zvykne nazývať „fázor“. Dĺžka fázora je rovná amplitúde X_0.





$$x_1(t) = X_1 \cos(\omega t + \delta_1)$$
$$x_2(t) = X_2 \cos(\omega t + \delta_2)$$

Vizualizácia kmitavého pohybu pomocou rotujúceho fázora je užitočná najmä pri porovnávaní dvoch kmitavých pohybov s rovnakou frekvenciou ale rôznymi amplitúdami a fázami. Používa sa potom intuitívne veľmi rukolapný pojem „fázový rozdiel“ alebo „fázový posun“ $(\delta_2 - \delta_1)$ medzi dvoma kmitaniami, čo je proste uhol, ktorý zvierajú tie dva fázory.

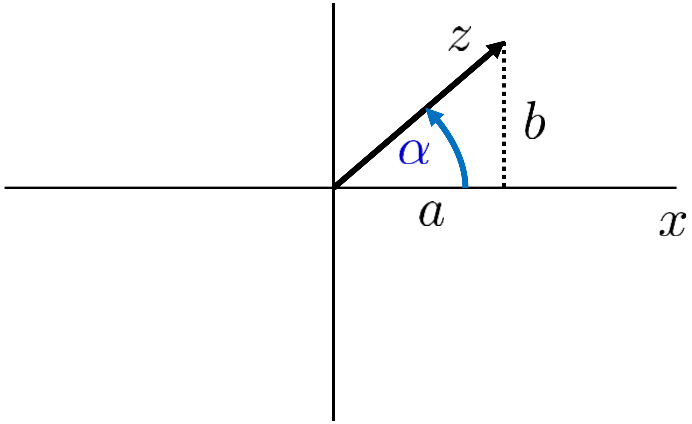
Technika vizualizácie kmitavého pohybu pomocou rotujúcich fázorov má elegantné vyjadrenie pomocou komplexných čísel. Komplexné čísla prinášajú okrem intuitívne priezračnej vizualizácie aj, ako uvidíme neskôr, značné technické zjednodušenie niektorých výpočtov.

Rotujúci vektor v rovine si totiž ľahko môžeme predstaviť ako (rotujúce) komplexné číslo v komplexnej rovine.

Komplexné číslo $z = a + ib$ môžeme vždy vyjadriť v tvare

$$z = |z|e^{i\alpha}$$

kde $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ a $\alpha = \mathrm{atan2}(\frac{b}{a})$. V komplexnej rovine sa to vizualizuje takto



Je teda zrejmé, že rotujúci fázor príslušný ku kmitaniu

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t + \delta)$$

môžeme vyjadriť ako komplexnú funkciu reálnej premennej „čas“ takto

$$z(t) = X_0 \exp(i(\omega t + \delta))$$

a kmitavý pohyb potom ako reálnu časť

$$x(t) = \mathrm{Re}\ z(t) = \mathrm{Re}\ X_0 \exp(i(\omega t + \delta))$$

Užitočné je použiť vo vyjadrení komplexnú „amplitúdu“ tak že do nej zahrnieme aj fázu takto

$$X = X_0 e^{i\delta}$$

$$x(t) = \mathrm{Re}\ z(t) = \mathrm{Re}\ X \exp(i\omega t)$$

Využívame tu Eulerov vzťah $\exp(i\alpha) = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$

Pravidlo o „násobení exponent“ potom pracuje namiesto nás (oslobodí nás od používania goniometrických vzťahov), keď dostaneme

$$x(t) = \mathrm{Re}\ z(t) = \mathrm{Re}\ X \exp(i\omega t) = \mathrm{Re}\ X_0 \exp i\delta \exp(i\omega t) = \mathrm{Re}\ X_0 \exp(i\omega t + i\delta)$$

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t + \delta)$$

Pri práci s komplexným vyjadrením kmitavého pohybu často nepíšeme symbol pre reálu časť a chápeme ho implicitne, keď na konci výpočtu zoberieme len reálnu časť výsledku.

Zachovanie energie

Stav harmonického oscilátora v ľubovoľnom okamihu je určený polohou a rýchlosťou oscilátora. Funkciu polohy sme našli

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t + \delta)$$

rýchlosť v ľubovoľnom čase určíme derivovaní, teda

$$v(t) = \dot{x}(t) = -X_0 \omega \sin(\omega t + \delta)$$

Kinentická energia oscilátora v čase t bude

$$W_k(t) = \frac{1}{2} m v^2(t) = \frac{1}{2} m X_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \delta)$$

potenciálna energia (pružnosti) bude

$$U(t) = \frac{1}{2} k x^2(t) = \frac{1}{2} k X_0^2 \cos^2(\omega t + \delta)$$

Využijeme vzťah $m\omega^2 = k$ a dostaneme pre celkovú energiu

$$E(t) = W_k(t) + U(t) = \frac{1}{2} m\omega^2 X_0^2 \sin^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2} m\omega^2 X_0^2 \cos^2(\omega t + \delta)$$

$$\boxed{E(t) = W_k(t) + U(t) = \frac{1}{2} m\omega^2 X_0^2}$$

Vidno, že celková energia oscilátora je na čase nezávislá, teda energia sa zachováva.

Lineárny oscilátor s tlmením

Nech proti pohybu pôsobí odpor prostredia úmerný rýchlosti ale proti smeru rýchlosti, teda sila v tvare $-\alpha\dot{x}$ (bodka nad písmenom značí prvú deriváciu podľa času, dve bodky druhú deriváciu podľa času). Pohybová rovnica potom bude

$$m\ddot{x} = -Kx - \alpha\dot{x}$$

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{kde} \quad \omega_0^2 = \frac{K}{m}, \quad b = \frac{\alpha}{2m}$$

Všimnime si, že v pohybovej rovnici sú **dve časové škály**: konštanty ω_0 aj b majú rovnaký fyzikálny rozmer s^{-1}.

Predpokladajme $\omega_0 \gg b$

a hľadajme riešenie v tvare

$$x(t) = Xe^{-t/\tau}\cos(\omega t + \delta)$$

Odkiaľ sa berie taká genialita? Nuž ak trenie je malé, očakávame, že to bude kmitať podobne ako oscilátor, ale trenie spôsobí, že kmity budú postupne zanikať, teda že ich amplitúda bude klesať a vo vzdialenej budúcnosti klesne až na nulu. Jediná funkcia, ktorú poznáme a má také „klesavé vlastnosti“ je exponenciála.

Všimnime si ale, že v navrhovanom riešení

$$x(t) = Xe^{-t/\tau}\cos(\omega t + \delta)$$

máme nejaké parametre (τ, ω, δ), ktoré v rovnici

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{kde} \quad \omega_0^2 = \frac{K}{m}, \quad b = \frac{\alpha}{2m}$$

nevystupujú. Robíme niečo, čomu sa hovorí „hľadajme riešenie v tvare“, čo občas privádza študentov alebo čitateľov do zúfalstva. Ale často stačí len nepodceniť sám seba a zamyslieť sa, čo viedlo k takému návrhu na hľadania. Niečo som sa pokúsil naznačiť v predchádzajúcom odstavci „odkiaľ sa berie taká genialita?“. Možno že nepochopíme na prvýkrát úplne všetko, ale na niečo sa prísť dá. Napríklad, že prečo geniálny autor nazval parameter v exponenciále τ. Lebo potreboval v argumente exponenciály čas t, aby mu to postupne klesalo. Ale v argumente exponenciály nemôžu byť sekundy, lebo nevieme, ako by sa číslo umocňovalo na sekundy. V argumente musí byť fyzikálne bezrozmerná vec, teda sekundy v argumente treba zlikvidovať. Najlepšie dať tam zlomok kde v menovateli budú tiež sekundy, aby sa to vykrátilo. Takže neznámy parameter τ bude v sekundách, má čosi spoločné s nejakým časom, preto označenie τ, lebo to je grécke písmeno pre t. Naučte sa to vnímať okamžite, keď vidíte zápis $\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, tak hneď máte vidieť sekundy v menovateli. **Snažte si pri učení sa klásť otázky „Prečo?“**

Máme teda rovnicu $\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{kde} \quad \omega_0^2 = \dfrac{K}{m}, \quad b = \dfrac{\alpha}{2m}$

a jej riešenie „hľadáme v tvare“ $x(t) = Xe^{-t/\tau}\cos(\omega t + \delta)$

Robí sa to tak, že robíme „ako keby“ skúšku správnosti. Dosadíme navrhované riešenie do rovnice a vyskúšame, či je splnená. A zistíme, že aj môže byť splnená, ale to by sme museli voliť zatiaľ neznáme parametre (τ, ω, δ) nie ľubovoľne, ale nejako konkrétne.

Tak dosaďme, dostaneme

$$\dot{x}(t) = -X\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\cos(\omega t + \delta) - Xe^{-t/\tau}\omega\sin(\omega t + \delta)$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) = {} & X\frac{1}{\tau^2}e^{-t/\tau}\cos(\omega t + \delta) + X\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\omega\sin(\omega t + \delta) \\ & + X\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\omega\sin(\omega t + \delta) - Xe^{-t/\tau}\omega^2\cos(\omega t + \delta)\end{aligned}$$

Máme teda rovnicu $\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{kde} \quad \omega_0^2 = \frac{K}{m}, \quad b = \frac{\alpha}{2m}$

a jej riešenie „hľadáme v tvare“ $x(t) = Xe^{-t/\tau}\cos(\omega t + \delta)$

Robí sa to tak, že robíme „ako keby“ skúšku správnosti. Dosadíme navrhované riešenie do rovnice a vyskúšame, či je splnená. A zistíme, že aj môže byť splnená, ale to by sme museli voliť zatiaľ neznáme parametre (τ, ω, δ) nie ľubovoľne, ale nejako konkrétne.

Tak dosaďme, dostaneme

$$\dot{x}(t) = -X\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\cos(\omega t + \delta) - Xe^{-t/\tau}\omega\sin(\omega t + \delta)$$

$$\ddot{x}(t) = X\frac{1}{\tau^2}e^{-t/\tau}\cos(\omega t + \delta) + X\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\omega\sin(\omega t + \delta)$$
$$+X\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\omega\sin(\omega t + \delta) - Xe^{-t/\tau}\omega^2\cos(\omega t + \delta)$$

$$-Xe^{-t/\tau}(\omega^2 - \frac{1}{\tau^2})\cos(\omega t + \delta) + 2X\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\omega\sin(\omega t + \delta)$$
$$-2bX\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\cos(\omega t + \delta) - 2bXe^{-t/\tau}\omega\sin(\omega t + \delta)$$
$$+X\omega_0^2 e^{-t/\tau}\cos(\omega t + \delta) \stackrel{?}{=} 0$$

$$-Xe^{-t/\tau}(\omega^2 - \frac{1}{\tau^2})\cos(\omega t + \delta) + 2X\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\omega\sin(\omega t + \delta)$$

$$-2bX\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\cos(\omega t + \delta) - 2bXe^{-t/\tau}\omega\sin(\omega t + \delta)$$

$$+X\omega_0^2 e^{-t/\tau}\cos(\omega t + \delta) \stackrel{?}{=} 0$$

$$-Xe^{-t/\tau}(\omega^2 - \frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2 + \frac{2b}{\tau})\cos(\omega t + \delta)$$

$$+2X(\frac{1}{\tau} - b)e^{-t/\tau}\omega\sin(\omega t + \delta) \stackrel{?}{=} 0$$

Znamienko rovnosti má platiť stále, teda v každom čase. Tlo je možné len tak, že koeficienty pri sínuse aj pri kosínuse sú rovné nule. Aby vypadol sínus, musíme voliť

$$\boxed{\frac{1}{\tau} = b}$$

a aby vypadol kosínus, musíme voliť $\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 - b^2}$

Parameter δ môže myť ľubovoľný (v podstate iba hovorí kedy začneme počítať čas)

Lineárny oscilátor s tlmením

Pohybová rovnica tlmeného oscilátora

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

má teda riešenie

$$x(t) = Xe^{-t/\tau}\cos(\omega t + \delta) = Xe^{-bt}\cos(\omega t + \delta)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - b^2 \qquad \frac{1}{\tau} = b$$

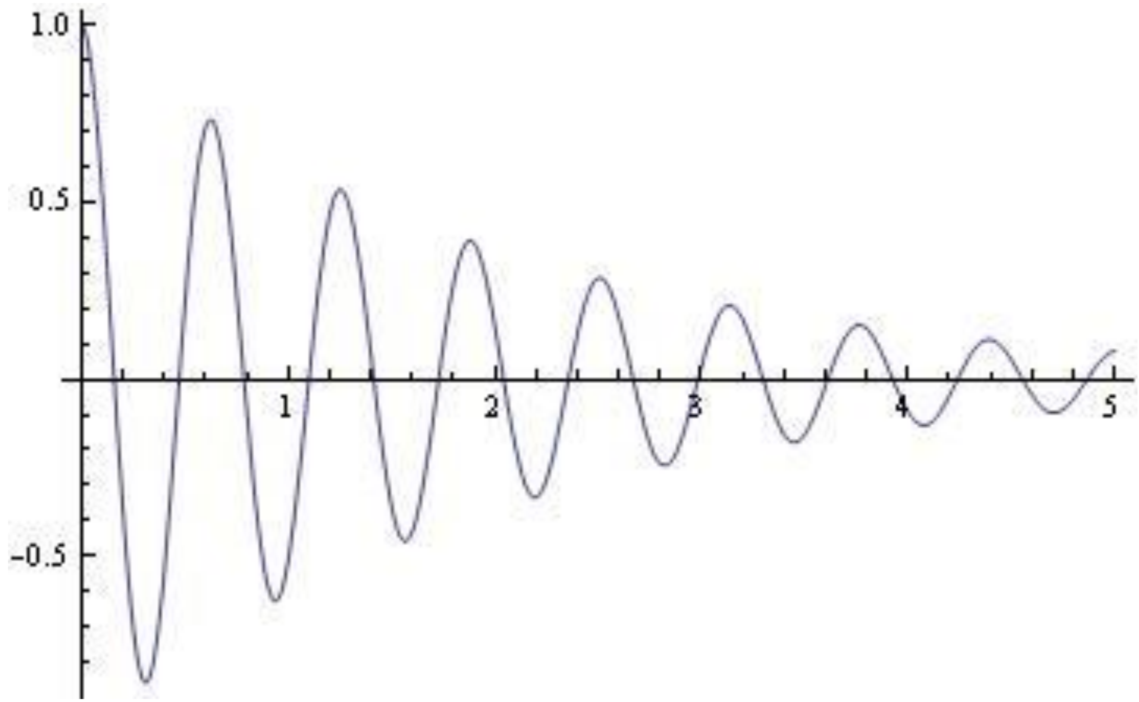
Parameter δ je ľubovoľný

Predpokladáme pritom, že trenie je dostatočne malé, teda že platí $\omega_0^2 > b^2$.

V prípade, veľkého trenia, teda pri $\omega_0^2 \geq b^2$ pohyb nemá kmitavý charakter, treba hľadať iné riešenie, ale nebudeme sa tým zaoberať.

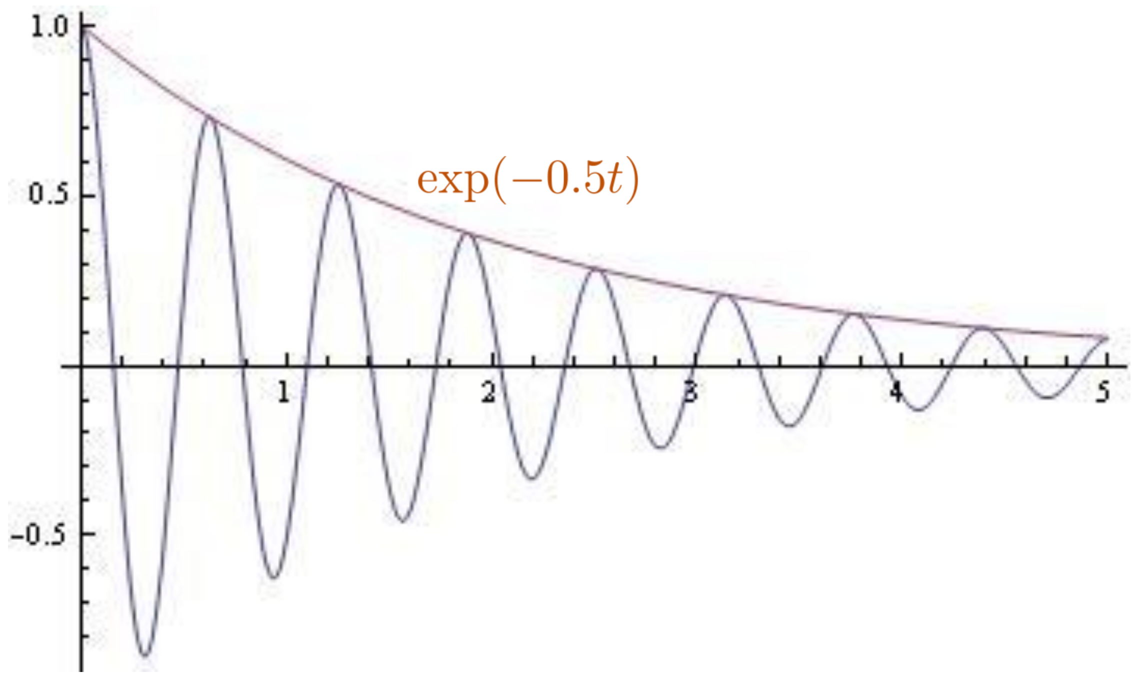
$$x(t) = Xe^{-bt}\cos(\omega t + \delta)$$

Graf pre hodnoty: $b = 0.5, \omega = 10, \delta = 0$

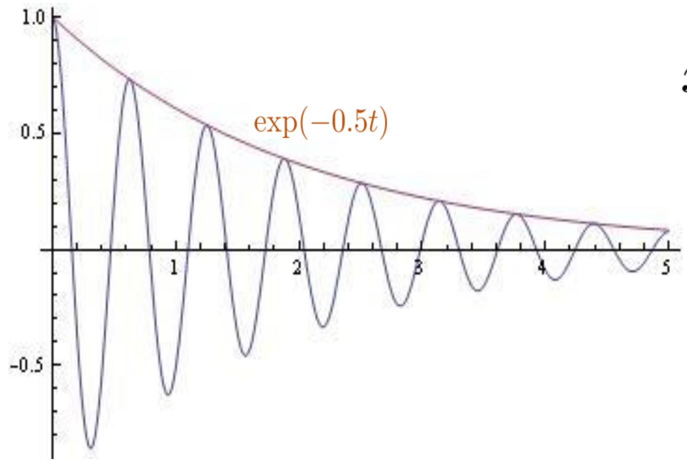


$$x(t) = Xe^{-bt}\cos(\omega t + \delta)$$

$$b = 0.5, \omega = 10, \delta = 0$$



Čo je to perióda (frekvencia) neperiodického signálu?



$$x(t) = Xe^{-bt}\cos(\omega t + \delta)$$

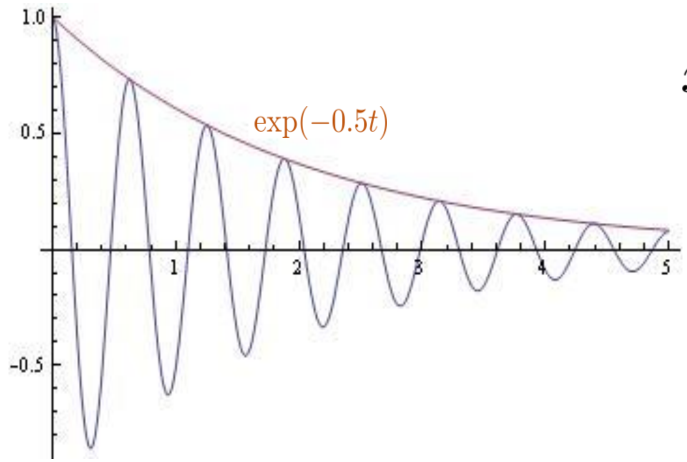
$$b = 0.5, \omega = 10, \delta = 0$$

Napočítam 8 píkov za 5 sekúnd

$$f = \frac{8}{5} = 1.6s^{-1}$$

$$\omega = 2\pi f = 10.05s^{-1}$$

Čo je to perióda (frekvencia) neperiodického signálu?



$$x(t) = Xe^{-bt}\cos(\omega t + \delta)$$

$$b = 0.5, \omega = 10, \delta = 0$$

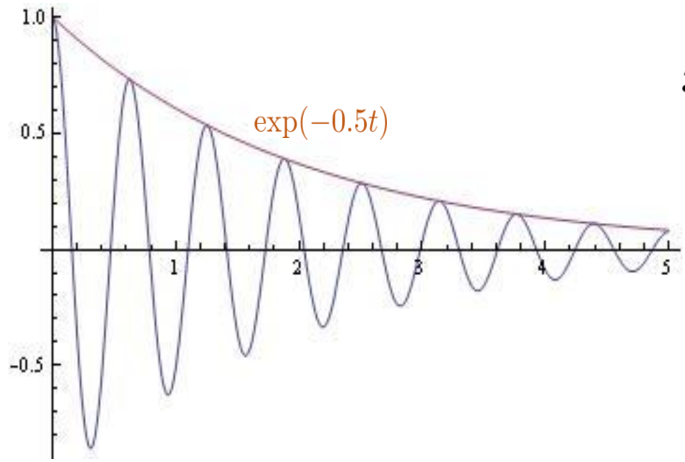
?

Napočítam 8 píkov za 5 sekúnd

$$f = \frac{8}{5} = 1.4s^{-1}$$

$$\omega = 2\pi f = 10.05s^{-1}$$

Čo je to perióda (frekvencia) neperiodického signálu?



$$x(t) = Xe^{-bt}\cos(\omega t + \delta)$$

$$b = 0.5, \omega = 10, \delta = 0$$

?

Napočítam 8 píkov za 5 sekúnd

$$f = \frac{8}{5} = 1.4 s^{-1}$$

$$\omega = 2\pi f = 10.05 s^{-1}$$

O poslednom píku nemám istotu, preto

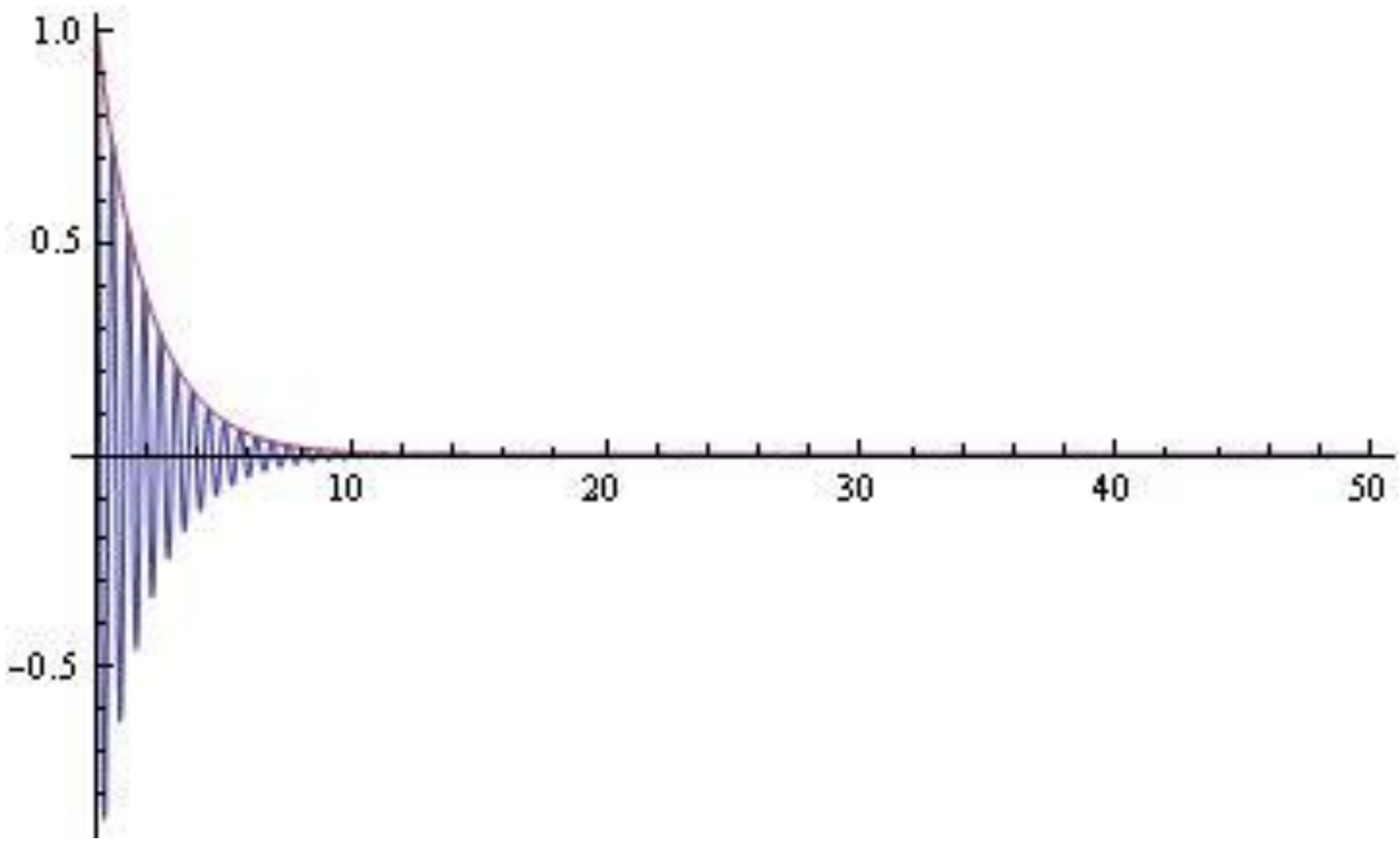
$$f = \frac{8 \pm 1}{5} = (1.6 \pm 0.2) s^{-1}$$

Keby som rátal píky nie počas 5 sekúnd ale počas 50 sekúnd, naivne by som čakal, že dostanem

$$f = \frac{80 \pm 1}{50} = (1.6 \pm 0.02) s^{-1}$$

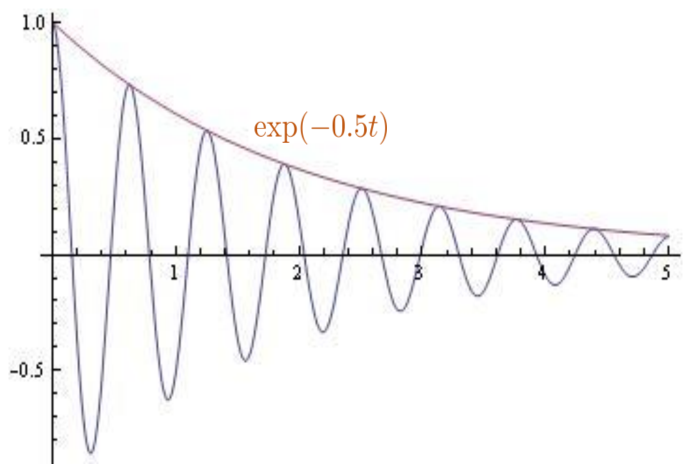
Skúste určiť počet píkov za 50 sekúnd signálu!

Nedá sa to, lebo čas 50 sekúnd je pridlhý voči tomu ako rýchlo klesá oná exponenciála



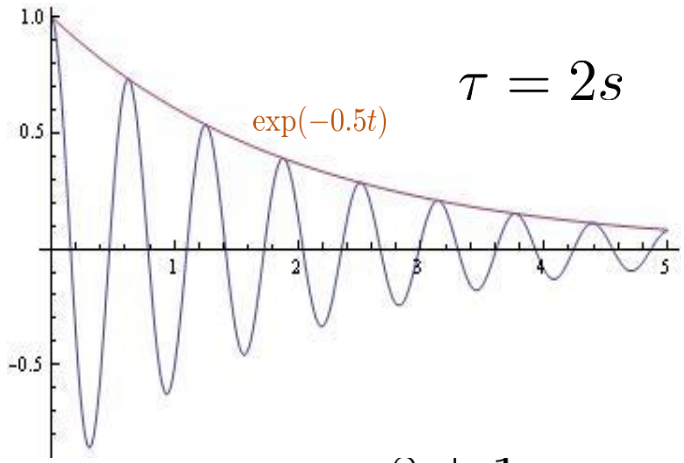
Ako rýchlo klesá exponenciála?

$$\exp(-bt) = \exp(-\frac{t}{\tau}) \qquad \tau = \frac{1}{b}$$



$$\exp(-0.5t) = \exp(-\frac{t}{2})$$

Za dobu $t \approx \tau$ exponenciála už viditeľne poklesne, za dobu $t \approx \text{niekoľko}\ \tau$ poklesne tak, že sa už píky ďalej rátať nedajú



$$f = \frac{8 \pm 1}{5} = (1.6 \pm 0.2)s^{-1}$$

Chyba (nepresnosť) určenia frekvencie je teda

$$\Delta f \approx \pm \frac{1}{\text{niekoľko } \tau}$$

Rádovo teda platí čosi, čo sa zvykne volať „princíp neurčitosti“

$$|\Delta f|\tau \approx 1$$

Absolútna chyba určenia frekvencie krát doba prítomnosti signálu je rádovo rovná jednej

Disipácia energie tlmených kmitov

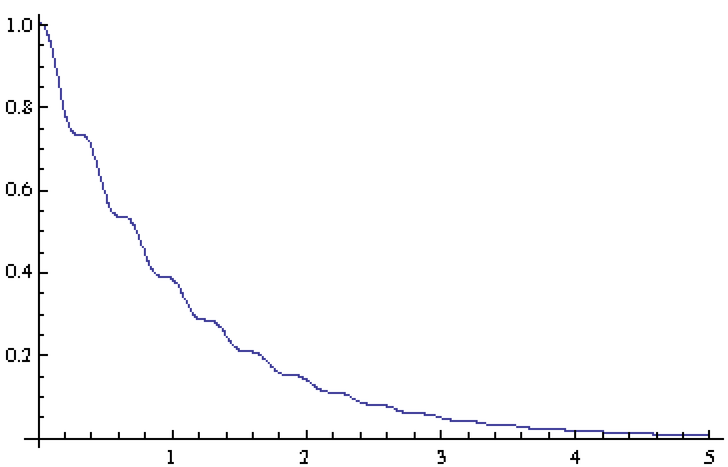
$$\boxed{x(t) = Xe^{-bt}\cos(\omega t) \qquad v(t) = -Xbe^{-bt}\cos(\omega t) - Xe^{-bt}\omega\sin(\omega t)}$$

$$\begin{aligned} E(t) &= W_k(t) + U(t) \\ &= \frac{1}{2}kX^2e^{-2bt}\cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}mX^2b^2e^{-2bt}\cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}mX^2\omega^2e^{-2bt}\sin^2(\omega t) + \\ &+ mb\omega X^2e^{-2bt}\cos(\omega t)\sin(\omega t) \end{aligned}$$

Využijeme: $m\omega^2 = m\omega_0^2 - mb^2 = k - mb^2$

$$\boxed{E(t) = \frac{1}{2}m\omega^2X^2e^{-2bt} + mX^2b^2e^{-2bt}\cos^2(\omega t) + mb\omega X^2e^{-2bt}\cos(\omega t)\sin(\omega t)}$$

```
Plot[(1 + 2 b^2 (Cos[omega t])^2 / (omega)^2 + b / omega Sin[2 omega t])
  Exp[-2 b t], {t, 0, 5}]
```



Graf pre $\omega = 10, b = 0.5$
Plotované je

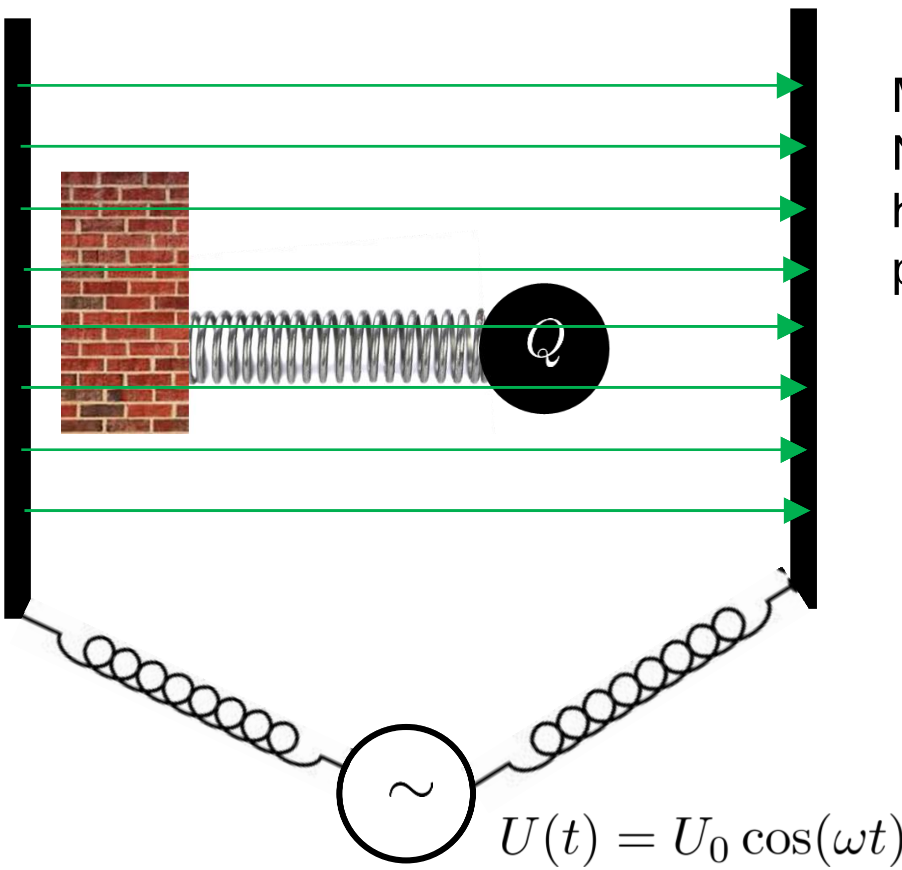
$$\frac{2E(t)}{m\omega^2X^2}$$

Budený oscilátor s tlmením

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

Špeciálny prípad

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$$



Možná realizácia:
Nabité teliesko na nevodivej pružine v homogénnom striedavom elektrickom poli

Budený oscilátor s tlmením

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$$

Použijeme trik s komplexnými fázormi a pokúsime sa najprv nájsť aspoň jedno riešenie pohybovej rovnice. Zapíšeme ju v komplexných číslach

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 e^{i\omega t}$$

Skúsime hľadať komplexné riešenie v tvare $x(t) = \tilde{x}_0 e^{i\omega t}$
Po dosadení do rovnice dostaneme

$$-\omega^2 \tilde{x}_0 e^{i\omega t} + 2i\omega b \tilde{x}_0 e^{i\omega t} + \omega_0^2 \tilde{x}_0 e^{i\omega t} = f_0 e^{i\omega t}$$

$$\tilde{x}_0 = \frac{f_0}{-\omega^2 + \omega_0^2 + 2ib\omega}$$

Dostali sme komplexný fázor $\tilde{x}_0$ s nejakým fázovým posunom voči reálnemu fázoru f_0. Vypočítame veľkosť a fázu fázora $\tilde{x}_0$.

Budený oscilátor s tlmením

$$\tilde{x}_0 = \frac{f_0}{-\omega^2 + \omega_0^2 + 2ib\omega} = |\tilde{x}_0| e^{i\delta}$$

$$\boxed{|\tilde{x}_0| = \frac{|f_0|}{\sqrt{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + 4b^2\omega^2}}}$$

$$|\tilde{x}_0| e^{i\delta} = \frac{f_0}{-\omega^2 + \omega_0^2 + 2ib\omega} = \frac{f_0}{|-\omega^2 + \omega_0^2 + 2ib\omega| e^{i\alpha}}$$

Zjavne platí $\delta = -\alpha$. Fázu menovateľa určíme ľahko, takže dostaneme

$$\boxed{\delta = -\mathrm{atan2}\left(2b\omega, -\omega^2 + \omega_0^2\right)}$$

Budený oscilátor s tlmením

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$$

Vrátiac sa k reálnym číslam môžeme tvrdiť, že sme našli jedno nejaké špeciálne riešenie pohybovej rovnice

$$x_0(t) = \mathrm{Re}\left(\frac{f_0}{-\omega^2 + \omega_0^2 + 2ib\omega} e^{i\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(|\tilde{x}_0| e^{i\delta} e^{i\omega t}\right)$$

kde $$|\tilde{x}_0| = \frac{|f_0|}{\sqrt{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + 4b^2\omega^2}} \qquad \delta = -\mathrm{atan2}\left(2b\omega, -\omega^2 + \omega_0^2\right)$$

Pohybová rovnica je lineárna, takže ak k nájdenému špeciálnemu riešeniu pripočítame ľubovoľné riešenie pohybovej rovnice bez pravej strany, dostaneme tiež nejaké riešenie. Rovnica bez pravej strany je rovnica tlmeného lineárneho oscilátora, jej riešenia poznáme, takže dostaneme

$$\boxed{x(t) = X e^{-t/\tau} \cos(\omega_b t + \beta) + \mathrm{Re}\left(|\tilde{x}_0| e^{i\delta} e^{i\omega t}\right) \ \text{ kde } \omega_b = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}, \ \ \tau = \frac{1}{b}}$$

V tomto riešení sú parametre X, β ľubovoľné parametere, ktoré treba určiť z počiatočných podmienok

Budený oscilátor s tlmením

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$$

$$x(t) = Xe^{-t/\tau}\cos(\omega_b t + \beta) + \mathrm{Re}\left(|\tilde{x}_0| e^{i\delta} e^{i\omega t}\right)$$

$$\omega_b = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}, \quad \tau = \frac{1}{b} \quad |\tilde{x}_0| = \frac{|f_0|}{\sqrt{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + 4b^2\omega^2}} \qquad \delta = -\mathrm{atan2}\left(2b\omega, -\omega^2 + \omega_0^2\right)$$

V tomto riešení sú parametre X, β ľubovoľné parametre, ktoré treba určiť z počiatočných podmienok. Ľahko sa dá presvedčiť o tom, že pre ľubovoľné počiatočné podmienky

$$x_0(t=0) = A, \quad \dot{x}(t=0) = B$$

sa dajú nájsť parametre X, β tak, že riešenie spĺňa tie počiatočné podmienky. Tým sme „fyzikálne“ dokázali (fyzika požaduje jednoznačnú predpoveď budúcnosti), že sme našli všetky riešenia pohybovej rovnice. Zapamätajte si poučku **„ľubovoľné riešenie lineárnej rovnice s pravou stranou sa dá písať ako súčet všeobecného riešenia tej rovnice bez pravej strany a nejakého špeciálneho (parciálneho) riešenia tej rovnice s pravou stranou“**
Pripomeňme ešte, že sa zaujímame iba o prípad malého trenia, teda $\omega_0^2 > b^2$.

Budený oscilátor s tlmením

$$x(t) = Xe^{-t/\tau}\cos(\omega_b t + \beta) + \mathrm{Re}\left(|\tilde{x}_0|e^{i\delta}e^{i\omega t}\right)$$

Pozrime sa teraz, ako vyzerá kvalitatívny charakter nájdeného riešenia.
Pre dostatočne dlhé časy, teda $t \gg \tau$. Časť riešenia zodpovedajúca riešeniu bez pravej strany „exponenciálne vymrie“ (prakticky stačí čas t niekoľkokrát τ) a teda po dlhom čase nastane „vynútený pohyb“

$$x_0(t) = \mathrm{Re}\left(|\tilde{x}_0|e^{i\delta}e^{i\omega t}\right)$$

Exponenciálneho vymretiu homogénneho riešenia hovoríme **„prechodový jav“**.

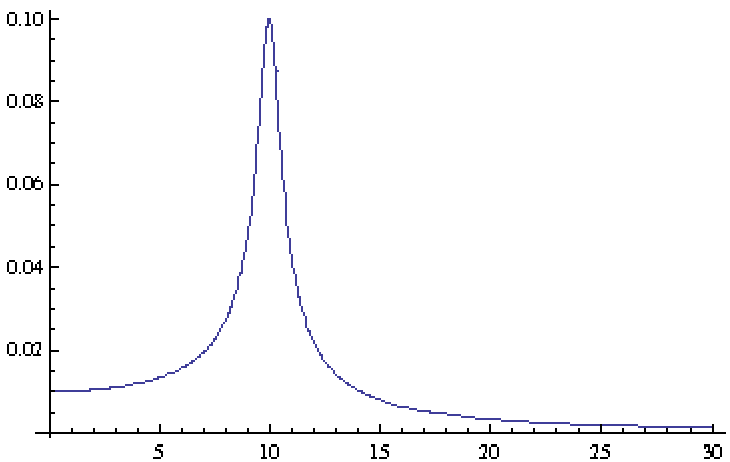
Amplitúda aj fáza vynútených kmitov závisia na vynucujúcej frekvencii, tak ako to ukazujú vzorce

$$|\tilde{x}_0| = \frac{|f_0|}{\sqrt{(-\omega^2+\omega_0^2)^2 + 4b^2\omega^2}} \qquad \delta = -\mathrm{atan2}\left(2b\omega, -\omega^2+\omega_0^2\right)$$

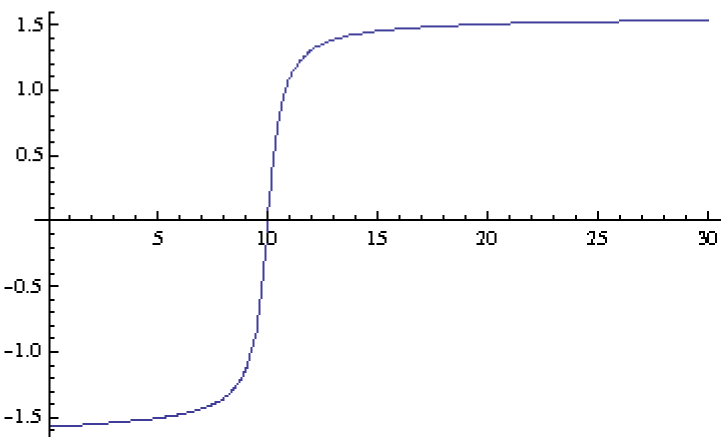
Už prostý pohľad na tie vzorce s cieľom „vyšetriť priebeh funkcie v závislosti na ω" ukazuje, že sa môže diať niečo zaujímavé v oblasti $\omega \approx \omega_0$, kde sú menovatele výrazne malé. Pozrime si najprv numerické obrázky.

Rezonancia

```
Plot[1/Sqrt[(-omega^2 + omega0^2)^2 + 4 b^2 omega^2], {omega, 0., 30.},
 PlotRange → Full]
```




```
Plot[-ArcTan[2 b omega, -omega^2 + omega0^2], {omega, 0., 30.}, PlotRange → Full]
```

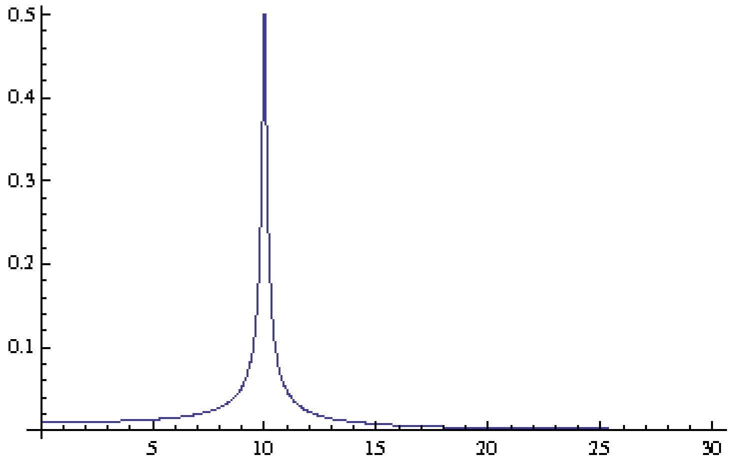


Amplitúda a fáza v závislosti na vynucujúcej frekvencii ω pre hodnoty $\omega_0 = 10, b = 0.5$

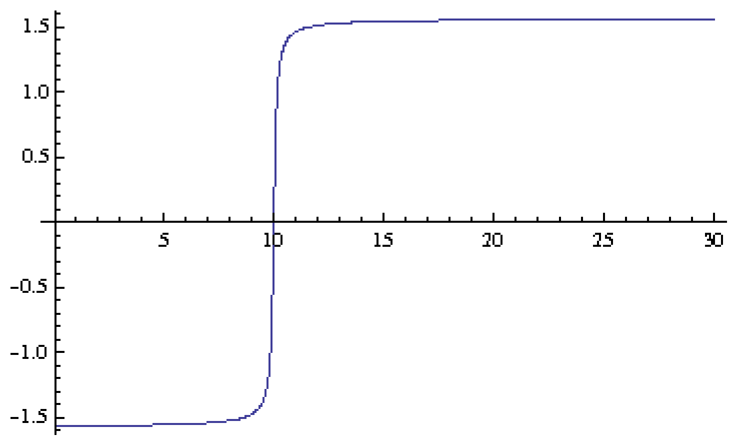
Poznámka.
Obrázky boli nakreslené v programe Mathematica a pre zaujímavosť som do nich nakopíroval aj príslušný plotovací príkaz. I keď nepoznáte jazyk programu Mathematica, prezrite si ten príkaz a zistíte, že porozumiete jeho štruktúru. Nebojte sa lúštiť neznáme veci, je to zábavné, poučné a často nevyhnutné, lebo návody a popisy funkčnosti sú často neúplné alebo dokonca chybné. Otázka **„Ako to funguje?“** patrí do kompetencie fyzika. Všimnite si napríklad, že potrebná funkcia sa nevolá atan2 ale ArcTan.

Rezonancia

```
Plot[1/Sqrt[(-omega^2 + omega0^2)^2 + 4 b^2 omega^2], {omega, 0., 30.},
 PlotRange → Full]
```



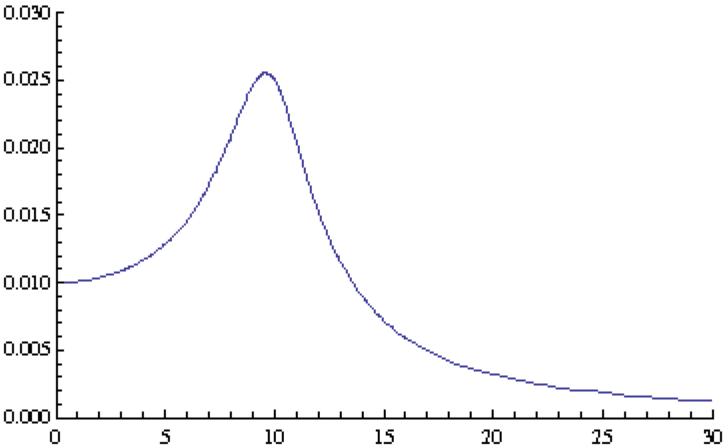

```
Plot[-ArcTan[2 b omega, -omega^2 + omega0^2], {omega, 0., 30.}, PlotRange → Full]
```



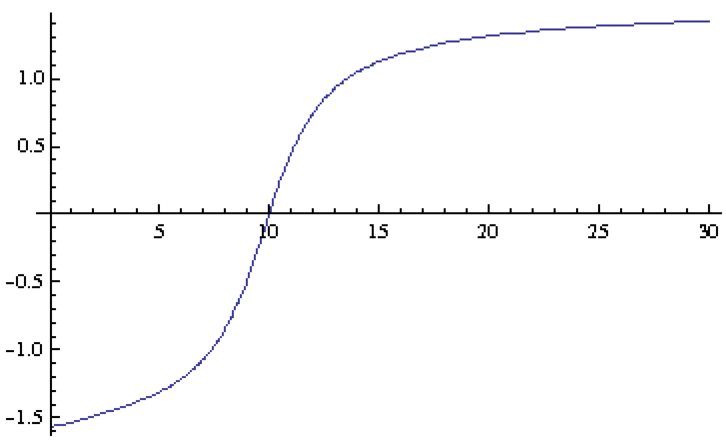
Amplitúda a fáza v závislosti na vynucujúcej frekvencii ω pre hodnoty $\omega_0 = 10, b = 0.1$

Rezonancia

```
Plot[1/Sqrt[(-omega^2 + omega0^2)^2 + 4 b^2 omega^2], {omega, 0., 30.},
 PlotRange → {{0., 30}, {0., 0.03}}]
```



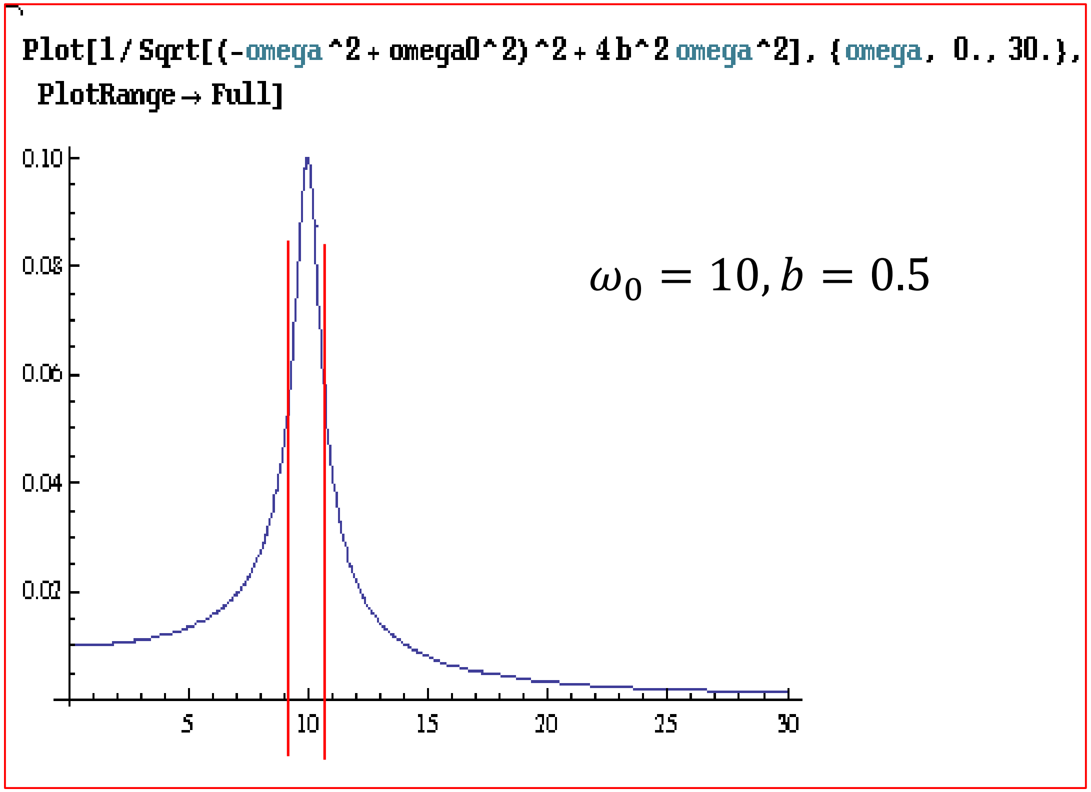

```
Plot[-ArcTan[2 b omega, -omega^2 + omega0^2], {omega, 0., 30.}, PlotRange → Full]
```



Amplitúda a fáza v závislosti na vynucujúcej frekvencii ω pre hodnoty $\omega_0 = 10, b = 2.0$

Rezonancia

Z prezentovaných grafov je zrejmé, že amplitúda vynútených kmitov má výrazné maximum v oblasti, keď frekvencia vynucujúcej sily je blízka k frekvencii vlastných kmitov oscilátora, teda kmitov zodpovedajúcich riešeniu „bez pravej strany“. Tento jav sa volá **rezonancia**. Vidno tiež, že rezonančný pík je veľmi úzky ak koeficient trenia b je malý. Porovnaním obrázkov vidíme, že šírka rezonančného píku má **rádovo** veľkosť $\Delta\omega \approx b$



Na obrázku je „šírka píku“ naznačená zvislými červenými čiarami.
Nedefinovali sme presne, čo nazývame šírkou píku, každý pokus o presnú definíciu by bol značne ľubovoľný. Všimnime si tiež, že ani pojem „frekvencia vlastných kmitov tlmeného oscilátora“ nie je dosť exaktne definovateľná, videli sme, že taká frekvencia je rádovo definovateľná iba s presnosťou

$$|\Delta f|\tau \approx 1 \qquad |\Delta f| \approx b$$

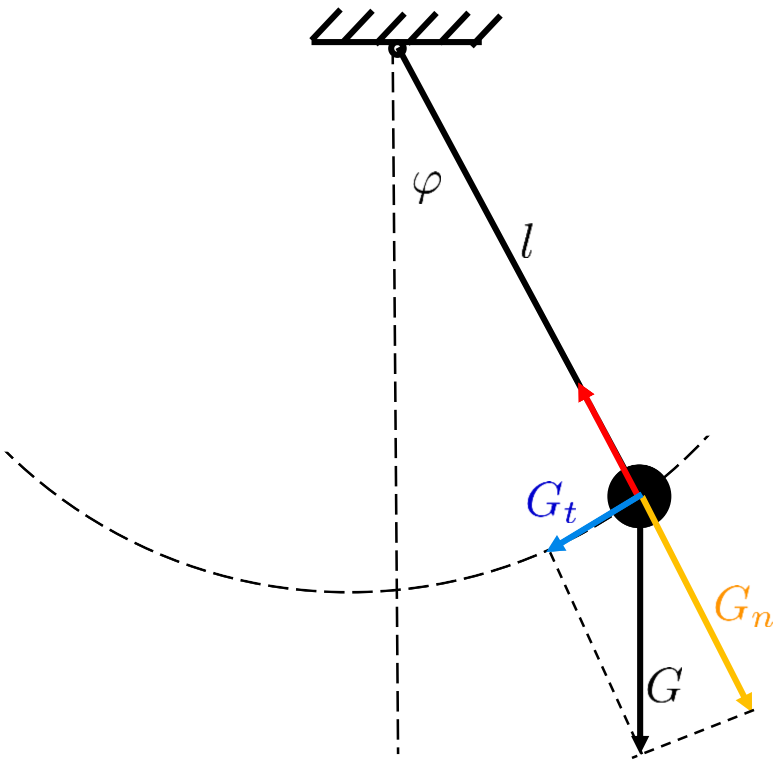
Rezonancia

Rezonancia je „ľudovo populárny“ jav. Spomeňme napríklad varovania o pochodujúcom vojsku, ktoré rozkmitá most a stým súvisiaci vojenský príkaz „Zrušiť krok!“ Je to trochu na úrovni ľudovej rozprávky, ale nasledujúce linky na videá na webe ukazujú, že niečo podobné naozaj exituje.

https://www.youtube.com/watch?v=j-zczJXSxnw
https://www.youtube.com/watch?v=eAXVa__XWZ8
https://www.youtube.com/watch?v=uWoiMMLIvco

Problém je v tom, že v učebniciach sa podobné príklady uvádzajú ako ilustrácia pri výklade vynútených kmitov lineárneho tlmeného oscilátora. Rozkmitaný most je matematicky riadne iná káva. I keď pravda je aj taká, že niekde v hlbinách matematiky sa dajú nájsť súvislosti medzi „matematikou oscilátora“ a „matematikou mosta“. Bez vysvetlenia uveďme len mystické zaklínadlo „analytické vlastnosti Greenovej funkcie“ (možno si na to spomeniete pri štúdiu teoretickej fyziky). Ani toto zaklínadlo nevysvetľuje všetko. V tých ukážkach most v Tahome spadol nie kvôli jednoduchému periodickému vynucovaniu ale kvôli vírom vyvolaným vetrom a Miléniový most v Londýne dostal bočné kmity najmä vďaka inžiniermi nepredpokladanej (psychologickej?) spätnej väzbe medzi pohybom davu a reakciami mosta.

Matematické kyvadlo



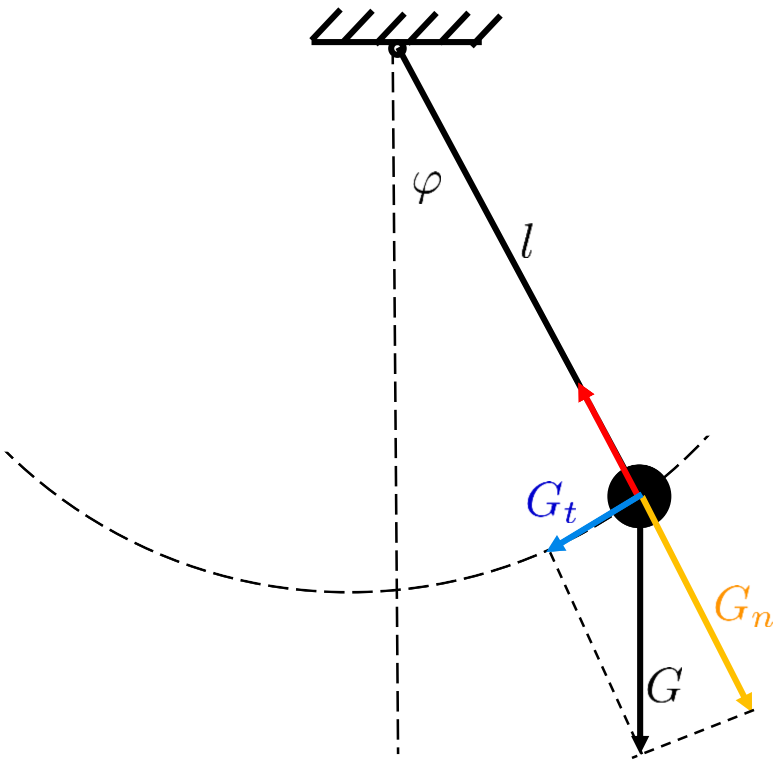
- Hmotný bod na nehmotnom závese dĺžky l (tyčke alebo lanku)
- Trajektóriou je kružnica
- V tangenciálnom smere pôsobí len zložka tiaže o veľkosti $mg\sin(\varphi)$.
- Výchylku hmotného bodu meriame dĺžkou dráhy pozdĺž kružnice
- Dráhu od rovnovážneho bodu doľava chápeme ako kladnú, doprava ako zápornú
- Tangenciálnme zrýchlenie vyjadruje zmenu rýchlosti v dotyčnicovom smere
- pohybová rovnica teda bude

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin(\varphi)$$

- dráhja pozdĺž kružnice sa vyjadruje ako $s = l\varphi$, preto nakoniec dostaneme rovnicu

$$\boxed{\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{1}{l}g\sin(\varphi)}$$

Matematické kyvadlo



$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{1}{l} g \sin(\varphi)$$

Pre malé uhly platí $\sin(\varphi) \approx \varphi$, takže nakoniec máme

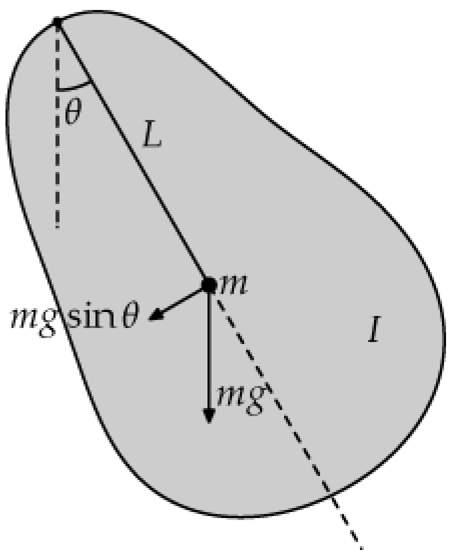
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\varphi$$

Porovnaním s rovnicou harmonického oscilátora

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m}x = -\omega^2 x$$

$$\boxed{\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t + \delta) \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

Fyzikálne kyvadlo



Pohybová rovnica tuhého telesa rotujúceho okolo fixnej osi (L je vzdialenosť ťažiska od osi)

$$I\frac{d}{dt}\omega = N$$

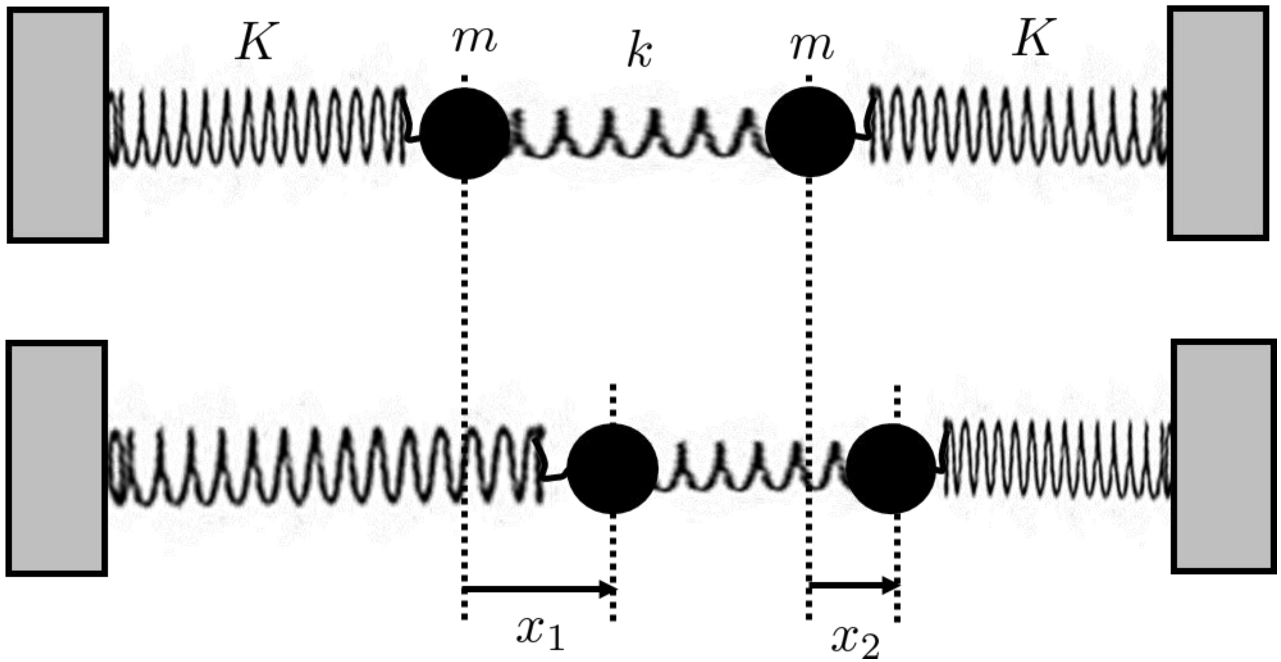
$$I\frac{d^2}{dt^2}\theta = -mgL\sin(\theta) \approx -mgL\theta$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta \approx -\frac{mgL}{I}\theta = -\omega^2\theta$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}}$$

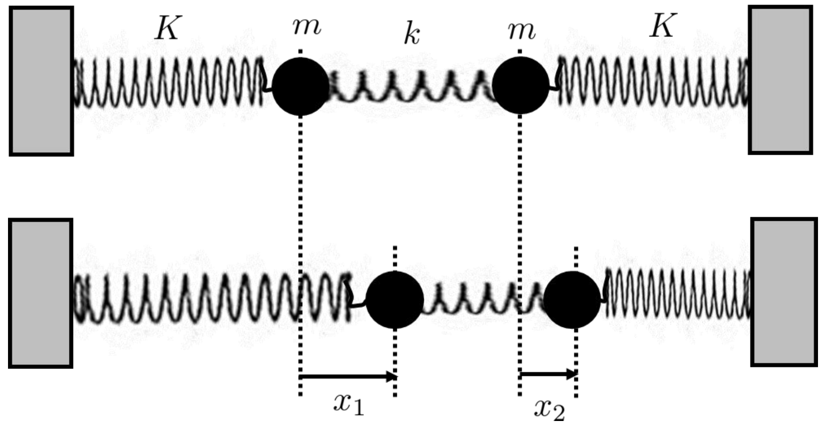
Kmity zložitejších sústav.
Vlny.

Dva viazané oscilátory



Uvažujme dva oscilátory, pre zjednodušenie výpočtov nech majú rovnaké hmotnosti m a rovnaké tuhosti ich vratných pružín K.Oscilátory sú previazané pružinou tuhosti k. Na hornom obrázku sú oscilátory v rovnovážnych polohách, všetky pružiny považujeme za nedeformované. Na spodnom obrázku sú oba oscilátory vychýlené z rovnovážnych polôh. Polohu každého oscilátora určuje súradnica meraná od jeho rovnovážnej polohy.

Dva viazané oscilátory



Pohybové rovnice majú tvar

$$m\ddot{x}_1 = -Kx_1 - k(x_1 - x_2) \qquad m\ddot{x}_2 = -Kx_2 - k(x_2 - x_1)$$

Istý problém pri napísaní tých rovníc môže spôsobiť sila od väzbovej pružiny k. Treba si uvedomiť, že keby výchylky oboch oscilátorov boli rovnaké, pružina k by vôbec nebola deformovaná, preto veľkosť sily, ktorou pružina pôsobí bude úmerná rozdielu $|x_1 - x_2|$. Na každú časticu pôsobí tá pružina silou proti smeru výchylky tej častice. Preto vo výraze pre silu v pohybovej rovnici pre časticu 1 musí výchylka x_1 vystupovať so záporným znamienkom, preto je tam člen $-k(x_1 - x_2)$. A presne opačný člen bude v rovnici pre druhú časticu.

$$m\ddot{x}_1 = -Kx_1 - k(x_1 - x_2) \qquad m\ddot{x}_2 = -Kx_2 - k(x_2 - x_1)$$

Pri riešení tých rovníc použijeme „geniálny trik“, rovnice raz sčítame a raz odčítame a dostaneme iné dve rovnice

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -K(x_1 + x_2)$$
$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -(K + 2k)(x_1 - x_2)$$

V tých rovniciach vystupujú hľadané funkcie len v kombináciách $x_1 + x_2$ v prvej rovnici a $x_1 - x_2$ v druhej rovnici. Tie rovnice sú navzájom nezávislé, možno ich riešiť každú samostatne. Zaveďme nové funkcie

$$\xi(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad \eta(t) = x_1(t) - x_2(t)$$
$$m\ddot{\xi} = -K\xi \quad m\ddot{\eta} = -(K + 2k)\eta$$

Dostali sme dve nezávislé rovnice pre akoby dva harmonické oscilátory, všeobecné riešenie má tvar

$$\xi = A\cos\omega_\xi t + B\sin\omega_\xi t \quad \eta = C\cos\omega_\eta t + D\sin\omega_\eta t$$

$$\omega_\xi = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \omega_\eta = \sqrt{\frac{K + 2k}{m}}$$

Odtiaľ už ľahko vyjadríme pôvodné funkcie x_1, x_2.

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{2}(A\cos\omega_\xi t + B\sin\omega_\xi t + C\cos\omega_\eta t + D\sin\omega_\eta t) \\ x_2(t) &= \frac{1}{2}(A\cos\omega_\xi t + B\sin\omega_\xi t - C\cos\omega_\eta t - D\sin\omega_\eta t) \end{aligned}}$$

Všeobecné riešenie obsahuje 4 neznáme konštanty A, B, C, D. Určíme ich z počiatočných hodnôt $x_1(0), x_2(0), \dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0)$.

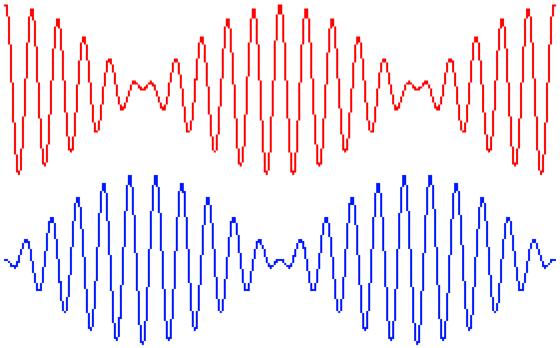
Ako príklad vyšetrime, ako vyzerá riešenie pre prípad, že vychýlime jeden oscilátor, druhý ostane v rovnovážnej polohe

$$x_1(0) = X, x_2(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0$$

Riešením je zjavne $A = C = X, B = D = 0$ a dostaneme

$$x_1(t) = X\cos\left(\frac{\omega_\xi + \omega_\eta}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_\xi - \omega_\eta}{2}t\right)$$

$$x_2(t) = -X\sin\left(\frac{\omega_\xi + \omega_\eta}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_\xi - \omega_\eta}{2}t\right)$$



Typický priebeh kmitov je na obrázku. Oscilátory kmitajú „na striedačku“

Dva viazané oscilátory, normálne módy

Interpretačne zaujímavé riešenia dostaneme, ak vyberieme také počiatočné podmienky, aby

- $C = D = 0$ („ξ“-kmity, teda $\eta = 0$)
- $A = B = 0$ („η“-kmity, teda $\xi = 0$)

$\boxed{\xi\text{-mód } C = D = 0}$

$$x_1^{(\xi)}(t) = \frac{1}{2}(A\cos\omega_\xi t + B\sin\omega_\xi t)$$

$$x_2^{(\xi)}(t) = \frac{1}{2}(A\cos\omega_\xi t + B\sin\omega_\xi t)$$

Je to mód, v ktorom oba oscilátory kmitajú **synchrónne rovnako, v každom čase majú rovnaké výchylky aj rýchlosti**. Väzbová pružina je teda v každom okamihu nedeformovaná, nepôsobí teda silou, teda ako keby tam ani nebola. Oscilátory neinteragujú, každý si kmitá svojou vlastnou frekvenciou ω_ξ. Je zrejmé, ako naštartovať oscilátory, aby kmitali v tomto móde: Na začiatku ich vychýlime z rovnováhy rovnako a udelíme im rovnakú počiatočnú rýchlosť. Ak ich len pustíme bez udelenia rýchlosti, bude navyše $B = 0$.

Dva viazané oscilátory, normálne módy

$\boxed{\eta\text{-mód A} = B = 0}$

$$x_1^{(\eta)}(t) = \frac{1}{2}(C\cos\omega_\eta t + D\sin\omega_\eta t)$$
$$x_2^{(\eta)}(t) = -\frac{1}{2}(C\cos\omega_\eta t + D\sin\omega_\eta t)$$

Je to mód, v ktorom oba oscilátory kmitajú **rovnakou frekvenciou ale s opačnou fázou, teda „proti sebe“**. V každom čase majú opačné výchylky aj rýchlosti. Oscilátory ako keby neinteragovali, každý kmitá frekvenciou ω_η. Tá frekvencia je väčšia ako vlastná frekvencia oscilátorov. Väzbová pružina je oboma oscilátormi deformovaná rovnako, preto jej efekt je taký, že efektívne zvyšuje tuhosť „vlastných“ oscilátorových pružín. Je zrejmé, ako naštartovať oscilátory, aby kmitali v tomto móde: Na začiatku ich vychýlime z rovnováhy presne opačne a udelíme im opačné počiatočné rýchlosti. Ak ich len pustíme bez udelenia rýchlosti, bude navyše D $= 0$.

ξ-mód aj η-mód, ktoré sme práve popísali, sa súhrnne nazývajú normálne módy a majú niekoľko spoločných charakteristík:

- normálne módy sú monofrekvenčné, teda ich časová závislosť je popísaná harmonickou funkciou s jedinou frekvenciou, všetky komponenty (naše oscilátory) kmitajú s tou istou frekvenciou
- normálne módy sú stacionárne, teda jednotlivé komponenty systému (naše oscilátory) sa pohybujú stále rovnako, nedochádza k presunom energie medzi komponentami
- normálne módy tvoria úplný systém, teda ľubovoľný iný pohyb uvažovanej sústavy sa dá vyjadriť ako superpozícia normálnych módov

Normálne módy sme našli „geniálnym trikom“. Prišli sme na to, že pôvodné pohybové rovnice môžeme sčítaním a odčítaním premeniť na nové navzájom nezávislé rovnice.

Ak by sme boli vedeli, že hľadáme „normálne módy“, mohli sme ich nájsť aj bez geniálnych trikov tak, že by sme hľadali špeciálne pohyby s práve popísanými vlastnosťami normálnych módov. Ukážeme si to.

$$m\ddot{x}_1 = -Kx_1 - k(x_1 - x_2) \qquad m\ddot{x}_2 = -Kx_2 - k(x_2 - x_1)$$

Pri hľadaní normálnych módov použijeme techniku komplexných čísel, ušetrí nám to námahu s trigonometrickými identitami.

Budeme hľadať stacionárne monofrekvenčné kmity, teda riešenia v tvare

$$x_1(t) = \tilde{x}_1 e^{i\omega t} \quad x_2(t) = \tilde{x}_2 e^{i\omega t}$$

Po dosadení do rovníc dostaneme

$$-m\omega^2 \tilde{x}_1 = -(K+k)\tilde{x}_1 + k\tilde{x}_2 \qquad -m\omega^2 \tilde{x}_2 = -(K+k)\tilde{x}_2 + k\tilde{x}_1$$

Trik s monofrekvenčnosťou prerobil sústavu lineárnych diferenciálnych rovníc na sústavu lineárnych algebraických rovníc. Mimochodom, dostali sme homogénne rovnice „bez pravých strán“:

$$(K + k - m\omega^2)\tilde{x}_1 - k\tilde{x}_2 = 0 \qquad -k\tilde{x}_1 + (K + k - m\omega^2)\tilde{x}_2 = 0$$

$$(K+k-m\omega^2)\tilde{x}_1 - k\tilde{x}_2 = 0 \qquad -k\tilde{x}_1 + (K+k-m\omega^2)\tilde{x}_2 = 0$$

Takéto rovnice majú nuď len jedno triviálne riešenie $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = 0$, alebo dve netriviálne riešenia, a to vtedy, ak tie dve rovnice nie sú nezávislé, ale každá hovorí „to isté“, takže máme vlastne iba jednu rovnicu. Bude to vtedy, keď jedna rovnica bude jednoducho násobkom druhej, teda ak existuje číslo c tak, aby platilo

$$K+k-m\omega^2 = -ck$$

$$-k = c(K+k-m\omega^2)$$

odtiaľ

$$K+k-m\omega^2 = c^2(K+k-m\omega^2)$$

$$c = \pm 1$$

$$m\omega^2 = K+k \pm k$$

$$\omega = \begin{cases} \sqrt{\frac{K}{m}} = \omega_\xi \\ \sqrt{\frac{K+2k}{m}} = \omega_\eta \end{cases}$$

Našli sme teda frekvencie normálnych módov a po dosadení tých frekvencií do rovníc

$$(K + k - m\omega^2)\tilde{x}_1 - k\tilde{x}_2 = 0 \qquad - k\tilde{x}_1 + (K + k - m\omega^2)\tilde{x}_2 = 0$$

$$\text{pre } \omega_\xi \quad k\tilde{x}_1 - k\tilde{x}_2 = 0 \text{ teda } \tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$$

$$\text{pre } \omega_\eta \quad - k\tilde{x}_1 - k\tilde{x}_2 = 0 \text{ teda } \tilde{x}_1 = -\tilde{x}_2$$

Dostali sme teda technikou „hľadania monofrekvenčných riešení“ rovnaké normálne módy ako tie, ktoré sme už videli.

V istom zmysle teraz možno lepšie vidíme, v akom zmysle sú normálne módy špeciálne riešenia.

Predovšetkým vidíme, že ide o kolektívne koordinované pohyby jednotlivých zložiek celého systému, teda našich „pôvodných oscilátorov“, z ktorých sa uvažovaný systém skladá.

„Skladať sa z“ je dôležitý pojem pre chápanie okolitého sveta a na príklade viazaných oscilátorov si môžeme ukázať jemné nuansy tohto pojmu.

Skladať sa z

Na príklade viazaných oscilátorov teraz chceme demonštrovať kúsok z metodiky fyziky, prístup k chápaniu reality technikou **„skladať sa z“.**

Povedali sme si niekedy na začiatku semestra:

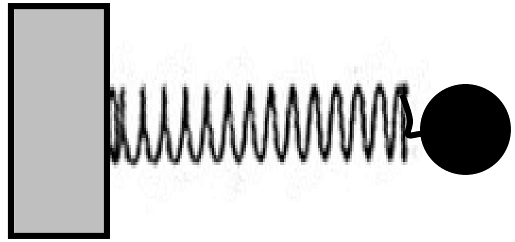
Západná civilizácia:

nemusím mať ambíciu pochopiť „svet v jeho celostnosti“

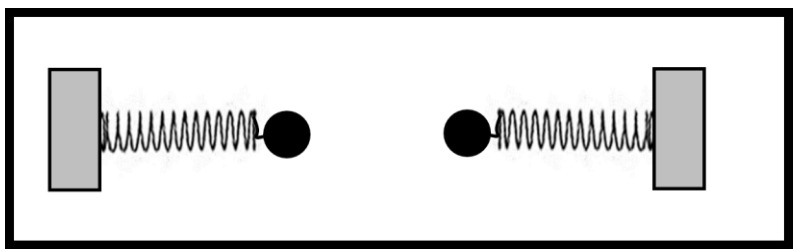
Vymedzím nejakú **časť sveta** (fyzikálny systém)

snažím sa analyzovať „ako funguje“ sám o sebe a tiež v kontakte s okolím.
Potom postupne **skladať z kúskov** celý puzzle.

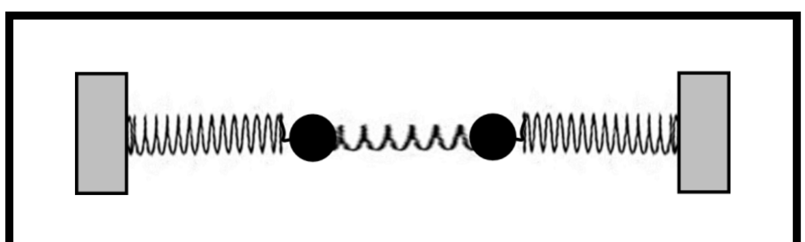
Skladať sa z, čierna skrinka



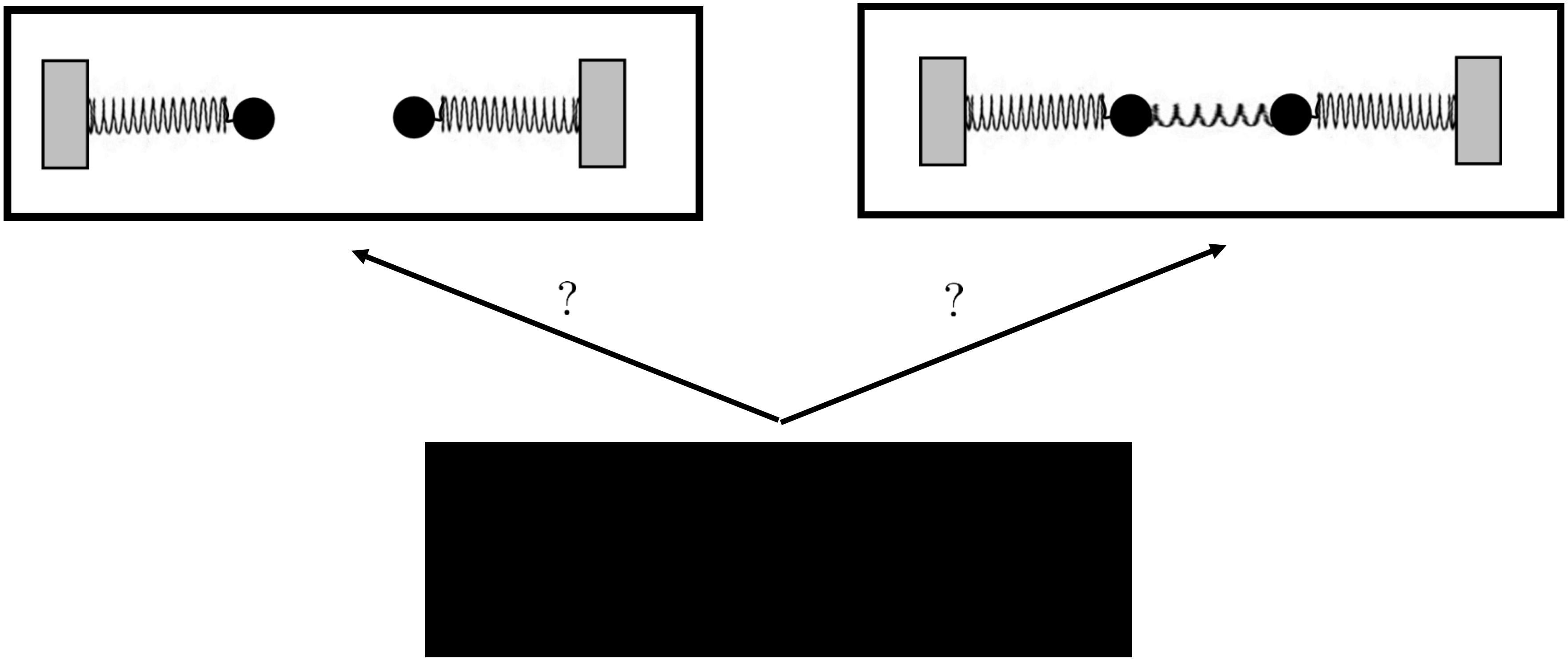
Na začiatku máme pojem harmonický oscilátor. Ten sme dostatočne preskúmali ako samostatný fyzikálny objekt. Teraz máme nový systém, „čiernu skrinku“, o ktorej nám niekto povedal, že sú tam dva oscilátory, teda „skladá sa z“ dvoch oscilátorov. Takže je prirodzené, predstaviť si „vnútro skrinky“ takto:



Ibaže „naozaj“ vyzerá vnútro takto:



Sú tam dva oscilátory, ale **interagujúce**, previazané.



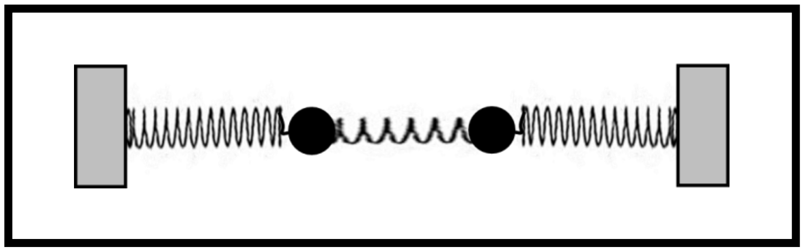
Nevidím dovnútra čiernej skrinky, ale dostanem úlohu zistiť (bez jej rozbitia), čo je vnútri a mám informáciu že „sú tam dva oscilátory“. Môžem napríklad skrinkou zahrkať a potom počúvať, aký zvuk sa odtiaľ šíri. Keby to bola tá skrinka vľavo, mal by som počuť zvuk jedinej frekvencie $\omega = \sqrt{K/m}$, ak to je tá skrinka vpravo budem počuť zvuk skladajúci sa z dvoch frekvencií

$$\sqrt{\frac{K}{m}} = \omega_\xi \qquad \sqrt{\frac{K+2k}{m}} = \omega_\eta$$

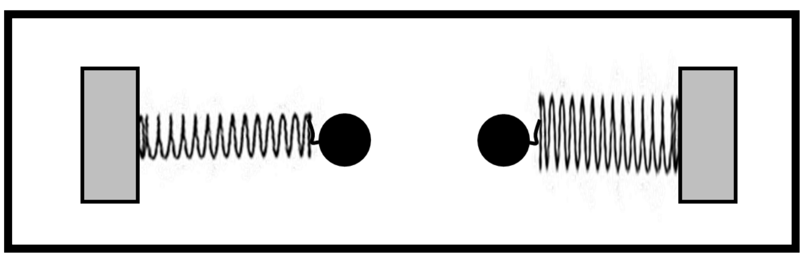
Je to ale naozaj tak, že ak počujem pri rôznom zahrkaní rôzne zvuky, ale vždy len zmes dvoch frekvencií

$$\sqrt{\frac{K}{m}} = \omega_\xi \quad \sqrt{\frac{K+2k}{m}} = \omega_\eta$$

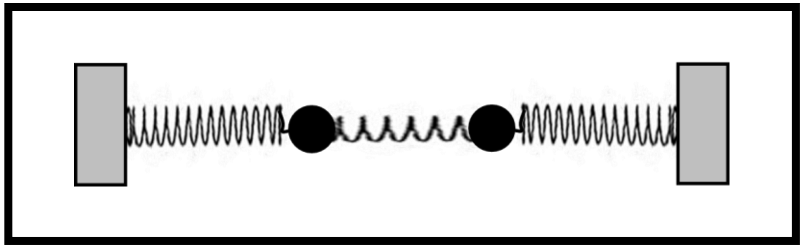
potom môžem usúdiť, že vnútri sú dva viazané oscilátory?

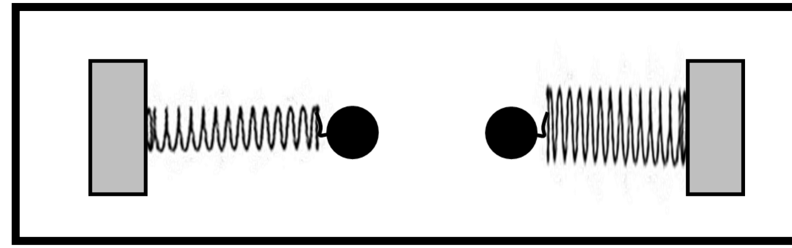


Pozor! Nik mi nepovedal, že sú tam dva **rovnaké** oscilátory! Ak som nepredpojatý a uprednostňujem jednoduché hypotézy, potom možno prirodzenejšia hypotéza bude, že v skrinke sú dva rôzne nezávislé oscilátory,



jeden s vlastnou frekvenciou $\sqrt{K/m}$ a druhý s frekvenciou $\sqrt{(K+2k)/m}$





Ako mám experimentami bez rozbitia skrinky zistiť, či „konštrukčne“ ide o skrinku vľavo alebo tú vpravo. Ak ide o „nerozbitnú“ skrinku a jediné, čo môžem použiť sú vydávané zvuky, potom nijako. Ale vadí to?

Načo je fyzika? Aby mi pomohla prežiť v džungli okolitého sveta. Ak prístupné sú len zvuky, potom ma skrinka ani inak neovplyvňuje, iba zvukmi. Pre moje prispôsobenie sa a pre prežitie sú obe skrinky úplne rovnocenné. Mám plné „právo“ prehlásiť, že v skrinke „sú“ dva nezávislé nerovnaké oscilátory. Že sa skrinka „skladá“ z dvoch oscilátorov ξ a η. Ba dokonca je to tak pre praktické rozhodovanie o mojom prežití jednoduchšie, než povedať, že „sa skladá z dvoch rovnakých ξ oscilátorov ale previazaných“.

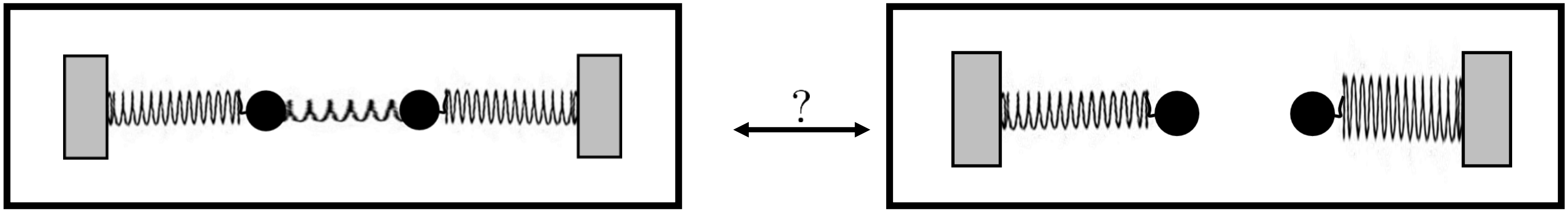
Oscilátor previazaný s nejakým iným sa chová inak, než izolovaný oscilátor, takže dokonca prísne filozoficky naladený človek sa môže pýtať „Je to ešte stále ten oscilátor, ktorý som študoval ako izolovaný, keď je zviazaný s iným podobným?“

Skladať sa z

Všetci sme sa už ako malí učili, že „látky sa skladajú z atómov a tie sa skladajú z protónov, neutrónov a elektrónov“. Ale ak začnem študovať osamotený izolovaný neutrón, zistím pozoruhodnú vec: je to nestabilná častica a zhruba po štvrťhodine sa rozpadne.

Ako sa môžeme „skladať z“ niečoho, čo sa po štvrťhodine rozpadne? Veď nepozorujeme, že by sme sa po štvrťhodine rozpadli! Nuž tak, že neutrón v jadre atómu „sa chová inak“ (a niekto možno povie „je iný“) ako izolovaný neutrón. Dnes rozumieme celkom dobre, ako to funguje, ale treba na to kvantovú teóriu. Takže si len „po škôlkarsky“ povieme, že protóny v jadre „kvantovomechanicky nedovolia“ neutrónu, aby sa rozpadol. Ale ilustruje to ťažkosti pri používaní metodológie „skladať sa z“.

Dilema



Dilemu „ako je to skonštruované naozaj“ je prípustné prerozprávať i takto.

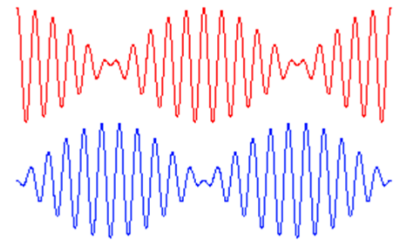
Naozaj sú tam dva viazané rovnaké oscilátory, ale pre účely výpočtov je jednoduchšie, **keď sa budeme tváriť**, že sú tam dva nezávislé nerovnaké oscilátory.

Priam sa núka historická paralela. Na mnohých stredovekých poslucháčov a čitateľov Galilea a Koperníka sa dnes dívame ako na hlupákov, lebo tvrdili, že „naozaj“ sa Slnko točí okolo Zeme, kým heliocentrický systém je len taký výpočtársky trik. Ale v čom sa to líši od nášho príkladu s viazanými oscilátormi?

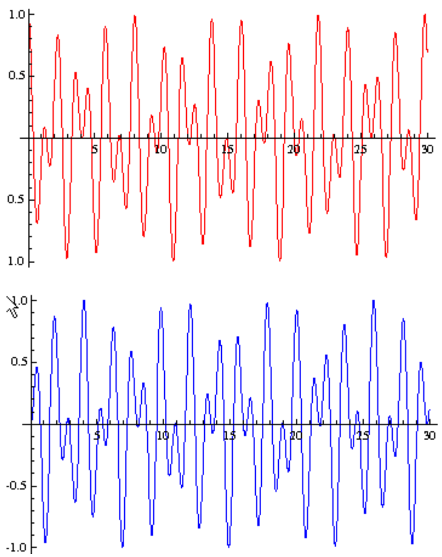
Iná, možno menej známa paralela je takáto. Chemici už v čase okolo Francúzskej revolúcie prišli na to, že chemickým reakciám sa dá jednoducho rozumieť, keď prijmeme vážne atómovú hypotézu a naraz vedeli, že „voda“ je H_2O. A zistili, že tlak plynu sa dá predstaviť ako bombardovanie steny nádoby molekulami, že teplota plynu súvisí s kinetickou energiou chaotického pohybu molekúl (niekedy kolo r. 1860). Ale stále bolo veľa profesorov fyziky, ktorí hovorili „to sú len také výpočtárske triky, naozaj nie sú žiadne atómy“. Až keď Einstein a Smoluchowski kvantitatívne vysvetlili Brownov pohyb povedali, že už „veria“ na atómy.

Vráťme sa ešte k obrázku pohybu „dvoch viazaných oscilátorov“

$$x_1(t) = X\cos\left(\frac{\omega_\xi + \omega_\eta}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_\xi - \omega_\eta}{2}t\right)$$
$$x_2(t) = -X\sin\left(\frac{\omega_\xi + \omega_\eta}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_\xi - \omega_\eta}{2}t\right)$$



na tom obrázku ešte vieme identifikovať dva „harmonické oscilátory, ktoré si striedavo vymieňajú energiu“. Je to preto, že perióda „výmen energie“ je oveľa dlhšia ako perióda „vlastných kmitov“ jednotlivých oscilátorov. Takže každý z našich viazaných oscilátorov „sa ešte stále dosť podobá na seba v stave, keď bol izolovaný“. Ten obrázok sme ale zámerne nakreslili pre situáciu, v ktorej to tak vyzerá, konkrétne pre „slabé previazanie $k \ll K$. Pre prípad $k \approx K$ to dopadne takto:



V tomto prípade je už naozaj ťažké priznať intuitívnu hodnotu popisu „dva rovnaké (viazané) oscilátory.

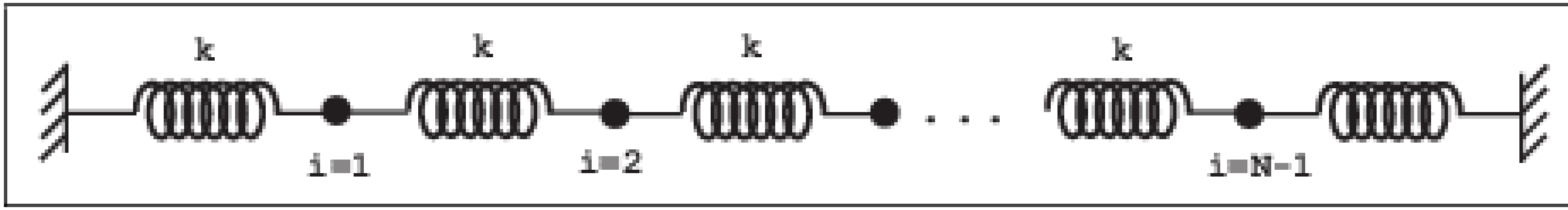
Poučenie z celého je také: ak podsystémy, z ktorých sa celý systém skladá interagujú slabo, je terminológia podsystémov a „skladania sa z nich“ často užitočná pre intuitívne prijateľný popis a porozumenie. V prípade silnej interakcie je technológia „skladať sa z“ debatovateľná.

Čo mám garantovane vedieť

- frakvencia matematického kyvadla
- napísať pohybové rovnice dvoch viazaných oscilátorov
- uveďte nejaké charakteristiky normálnych módov

Retiazka oscilátorov

Uvažujme jednorozmerný systém $N-1$ častíc rovnakej hmotnosti m navzájom poprepájaných pružinami rovnakej tuhosti k. Krajné častice nech sú rovnakými pružinami spojené s pevnými stenami



Hlasujte, čo sú správne pohybové rovnice

cernyv.com l/pwd fmph/fmphedu

a: $$m\ddot{u}_i = -k(u_i - u_{i-1}) - k(u_i - u_{i+1})$$

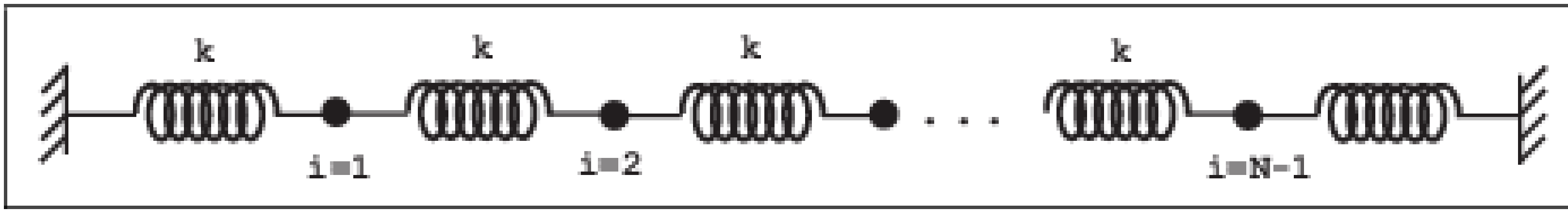
b: $$m\ddot{u}_i = -k(u_i - u_{i-1}) + k(u_i - u_{i+1})$$

c: $$m\ddot{u}_i = -k(u_i - u_{i-1}) - k(u_{i+1} - u_i)$$

d: $$m\ddot{u}_i = +k(u_i - u_{i-1}) - k(u_i - u_{i+1})$$

Retiazka oscilátorov

Uvažujme jednorozmerný systém $N-1$ častíc rovnakej hmotnosti m navzájom poprepájaných pružinami rovnakej tuhosti k. Krajné častice nech sú rovnakými pružinami spojené s pevnými stenami



Napíšeme teraz pohybové rovnice pre tento systém. Označme výchyľku i-tej častice z jej rovnovážnej polohy ako u_i, pre $i = 1, 2, ...(N-1)$. A zaveďme ešte pomocné konštanty $u_0 = 0$, $u_n = 0$. Potom pohybové rovnice sú (pre $i = 1, 2, ...(N-1)$)

$$m\ddot{u}_i = -k(u_i - u_{i-1}) - k(u_i - u_{i+1})$$

Je to systém $n-1$ navzájom viazaných lineárnych diferenciálnych rovníc druhého rádu pre $N-1$ neznámych funkcií $u_i(t)$.

Systém pohybových rovníc pre retiazku oscilátorov sa naučíme riešiť, ale najprv budeme riešiť úlohu v spojitej limite. Riešenie je v spojitom prípade intuitívne prijateľnejšie.

Malá matematická vsuvka

V matematike mávame funkcie aj niekoľkých premenných, ako tu

$$u(t, x)$$

Takúto funkciu môžeme derivovať podľa niektorej z jej premenných, pričom ostatné premenné, podľa ktorých nederivujeme, budeme považovať za konštantné (akoby za parametre) teda napríklad definujeme

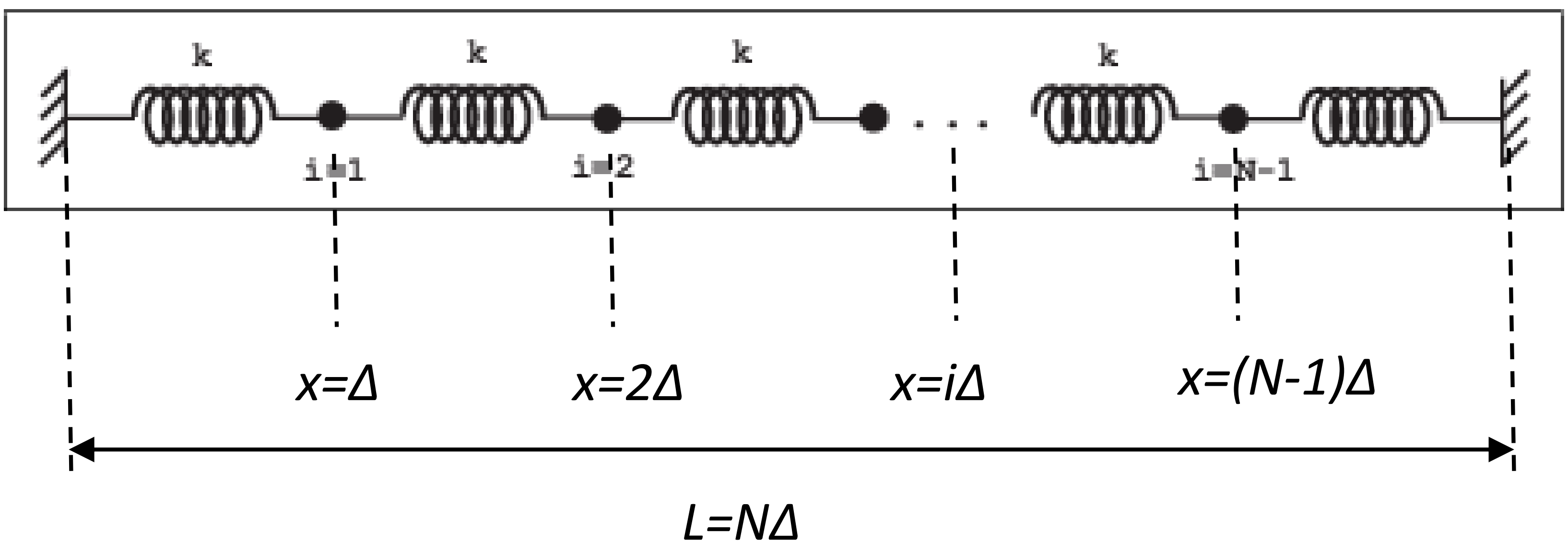
$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \lim_{dt \to 0} \frac{u(t + dt, x) - u(t, x)}{dt}$$

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = \lim_{dx \to 0} \frac{u(t, x + dx) - u(t, x)}{dx}$$

Aby sme upozornili na to, že derivujeme len podľa jednej premennej, kým ostatné sú konštantné, používame v symbole derivácie znak *δ* namiesto *d*. **Volá sa to parciálna derivácia.** Analogicky budeme značiť vyššie parciálne derivácie.

Budeme teraz používať iné označenie, namiesto celočíselného indexu i budeme používať index x ako reálnu súradnicu rovnovážnej polohy uvažovaných bodov. Hmotné body teda sedia v polohách daných súradnicou x, ktorá nadobúda diskrétne hodnoty z mmnožiny

$$x \in i\Delta, \quad i = 1, 2, \ldots N - 1$$



Budeme teraz používať iné označenie, namiesto celočíselného indexu i budeme používať index x ako reálnu súradnicu rovnovážnej polohy uvažovaných bodov. Hmotné body teda sedia v polohách daných súradnicou x, ktorá nadobúda diskrétne hodnoty z mmnožiny

$$x \in i\Delta, \quad i = 1, 2, ...N - 1$$

V tomto označení majú pohybové rovnice tvar

$$m\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = -k(u(t,x) - u(t,x-\Delta)) - k(u(t,x) - u(t,x+\Delta))$$

s okrajovými podmienkami

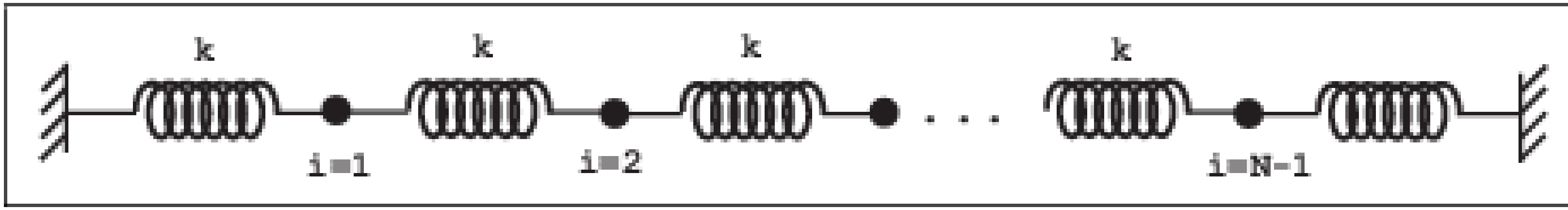
$$u(t, x = 0) = u(t, x = N\Delta) = 0$$

Porovnajte si toto značenie s pôvodnou rovnicou

$$m\ddot{u}_i = -k(u_i - u_{i-1}) - k(u_i - u_{i+1})$$

Je to to isté, len index píšeme ako keby parameter funkcie.

$$x \in i\Delta, \quad i = 1, 2, \ldots N - 1$$



Budeme teraz vyšetrovať limitu kontinua, teda limitu

$$\begin{aligned} N &\rightarrow \infty \\ \Delta &\rightarrow 0 \\ N\Delta &\rightarrow L \end{aligned}$$

V limite vznikne nový typ fyzikálneho objektu: deformovateľná tyč

$$
\begin{aligned}
m\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} &= -k(u(t,x)-u(t,x-\Delta)) - k(u(t,x)-u(t,x+\Delta)) \\
&= -k\Delta\{\frac{u(t,x)-u(t,x-\Delta)}{\Delta} - \frac{u(t,x+\Delta)-u(t,x)}{\Delta}\} \\
&= -k\Delta\{\frac{\partial u(t,x-\Delta)}{\partial x} - \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\} \\
&= k\Delta^2 \frac{\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial u(t,x-\Delta)}{\partial x}}{\Delta} \\
&= k\Delta^2 \frac{\partial^2 u(t,x-\Delta)}{\partial x^2} \\
&= k\Delta^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N &\rightarrow \infty \\
\Delta &\rightarrow 0 \\
N\Delta &\rightarrow L
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \frac{k\Delta^2}{m}\frac{\delta^2 u(t,x)}{\delta x^2}
$$

$$
\begin{aligned}
m\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} &= -k(u(t,x)-u(t,x-\Delta)) - k(u(t,x)-u(t,x+\Delta)) \\
&= -k\Delta\{\frac{u(t,x)-u(t,x-\Delta)}{\Delta} - \frac{u(t,x+\Delta)-u(t,x)}{\Delta}\} \\
&= -k\Delta\{\frac{\partial u(t,x-\Delta)}{\partial x} - \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\} \\
&= k\Delta^2 \frac{\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial u(t,x-\Delta)}{\partial x}}{\Delta} \\
&= k\Delta^2 \frac{\partial^2 u(t,x-\Delta)}{\partial x^2} \\
&= k\Delta^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}
\end{aligned}
$$

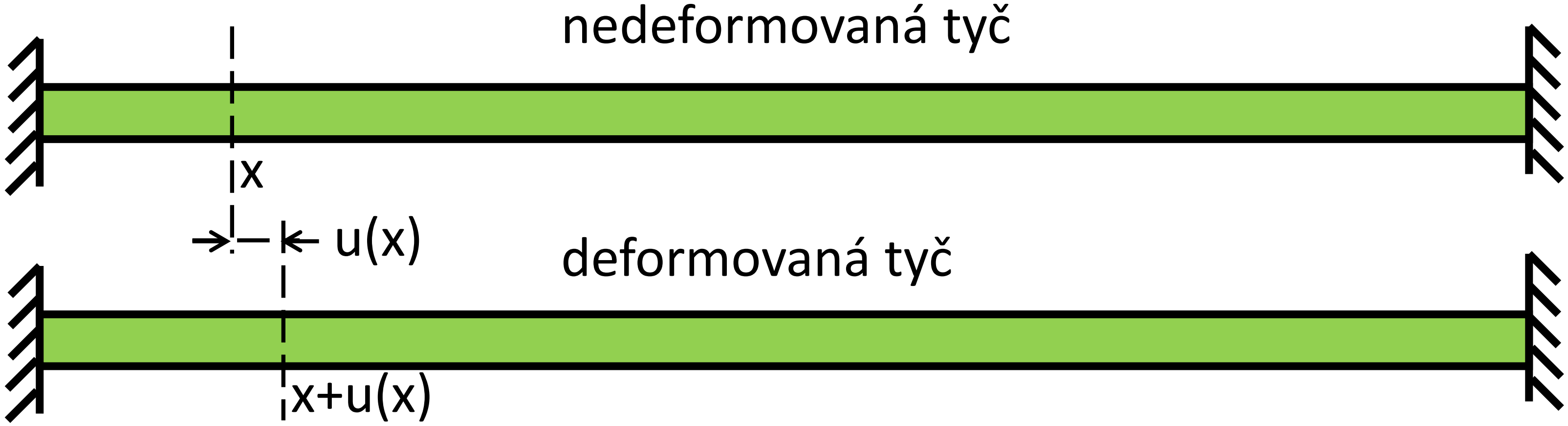
$$
\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \frac{k\Delta^2}{m}\frac{\delta^2 u(t,x)}{\delta x^2}
$$

$$
\boxed{\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}}
$$

$$
\begin{aligned}
N &\rightarrow \infty \\
\Delta &\rightarrow 0 \\
N\Delta &\rightarrow L \\
\frac{k\Delta^2}{m} &\rightarrow c^2
\end{aligned}
$$

Čo sme to stvorili? Nové fyzikálne "zviera"

V limite vznikne nový typ fyzikálneho objektu: deformovateľná tyč



Tyč sa skladá z častíc, ale tie sú malé a sú nahusto, takže ich nevidíme. Možno ani netušíme, že tie častice existujú. Tyč sa nám môže javiť ako osobitný fyzikálny objekt "kus kovu". Javí sa nám ako spojité prostredie "kontinuum" z ničoho elementárnejšieho sa neskladajúce. Dokonca historicky to bolo práve tak. Naša deformovateľná tyč sa môže nachádzať v rôznych stavoch podľa toho, **ako je pozdĺžne, teda v smere tyče**, vychýlený bod (rez) tyče zo svojej kľudovej polohy *x*.

Takže pozor:
zadať stav častice v nejakom okamihu sme vedeli pomocou (iba) 6 čísel: tri zložky vektoru polohy a tri zložky vektoru rýchlosti

Na zadanie stavu tyče potrebujeme "dvakrát spojite nekonečne veľa čísel" teda potrebujeme zadať hodnoty funkcie

$$u(x) \quad \text{pre} \quad x \in \langle 0, L \rangle \quad \text{pričom} \quad u(0) = u(L) = 0$$

a aj jej prvej časovej derivácie

$$\frac{\partial u(x)}{\partial t} \quad \text{pre} \quad x \in \langle 0, L \rangle$$

Budúcnosť budeme predpovedať pomocou rovnice, ktorú sme našli, teda

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} \quad = \quad c^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$$

toto je vlastne spojite nekonečne veľa diferenciálnych rovníc, po jednej pre každé $x \in \langle 0, L \rangle$ Rovnice ale nie sú navzájom nezávislé. Cez pravé strany sa cítia.

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \qquad (\#)$$

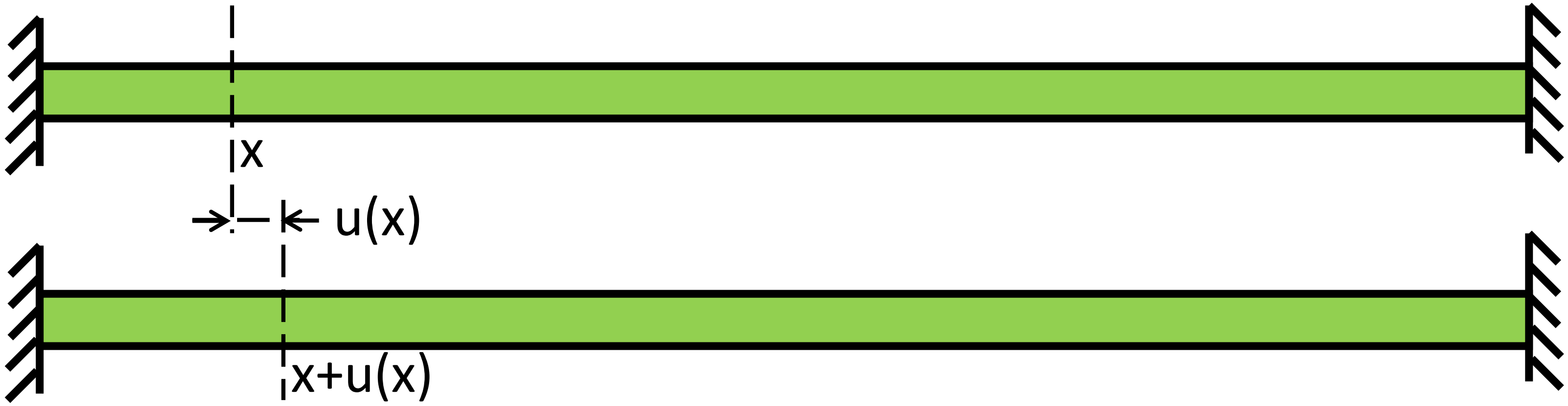
Zdanlivo sú rovnice nezávislé, veď v každej rovnici je len „jedno *x*“. Takže sa to zdanlivo podobá na pohybové rovnice Newtonovho typu

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m}F(x)$$

Ibaže výraz na pravej strane $c^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$ sa týka nie jedného bodu *x* ale troch infinitezimálne blízkych bodov $\{(x-\Delta), x, (x+\Delta)\}$ Druhá derivácia „cíti“ zakrivenie grafu funkcie. Na to potrebuje poznať hodnotu funkcie v troch infinitezimálne blízkych bodoch (kým prvá derivácia, ktorá „meria“ strmosť dotyčnice potrebuje hodnoty funkcie v dvoch infinitezimálne blízkych bodoch). Vidno to z pôvodne diskrétneho výrazu

$$-k(u(t,x) - u(t,x-\Delta)) - k(u(t,x) - u(t,x+\Delta))$$

Rovníc (#) je teda spojite nekonečne veľa a každá z nich „cíti“ aj predchádzajúcu rovnicu aj nasledujúcu rovnicu. Nemôžeme ich riešiť ako jednu po druhej, riešime ich ako „jednu parciálnu diferenciálnu rovnicu“.



Predstierajme teda, že nevieme, že sa tyč skladá z častíc a naučme sa robiť fyziku tyče ako osobitného druhu fyzikálneho objektu. Volá sa to "efektívna teória" alebo efektívny prístup.

Efektívne teórie používame vlastne denne, len si to neuvedomujeme. Hovoríme, že z vodovodu tečie "voda", ako keby "voda" bol osobitný fyzikálny systém (objekt). **V skutočnosti nič také ako "voda" vlastne neexistuje.** Z vodovodu tečie kopa protónov, neutrónov a elektrónov. Ale keby sme chceli stavať priehradu a tečenie "vody" chceli popisovať ako presúvanie protónov, elektrónov a neutrónov, asi by sme sa zbláznili. **Namiesto toho používame efektívny pojem "voda" a popisujeme jej vlastnosti pomocou pojmov ako "hustota" alebo "viskozita".**

Takže budeme skúmať tyč v priblížení efektívnej teórie, **považujúc ju za jednorozmerné kontínuum**

Ako s každým fyzikálnym systémom, musíme sa naučiť

- **ako sa popíše okamžitý stav systému**
- **ako sa predpovedá budúcnosť, teda časový vývoj stavov**

Stav nášho jednorozmerného kontínua v istom okamihu poznáme ak zadáme funkciu deformácie (posunutia každého bodu tyče)

$$u(x) \quad \text{pre} \quad x \in \langle 0, L \rangle \quad \text{pričom} \quad u(0) = u(L) = 0$$

a ešte aj jej prvú časovú deriváciu v uvažovanom okamihu

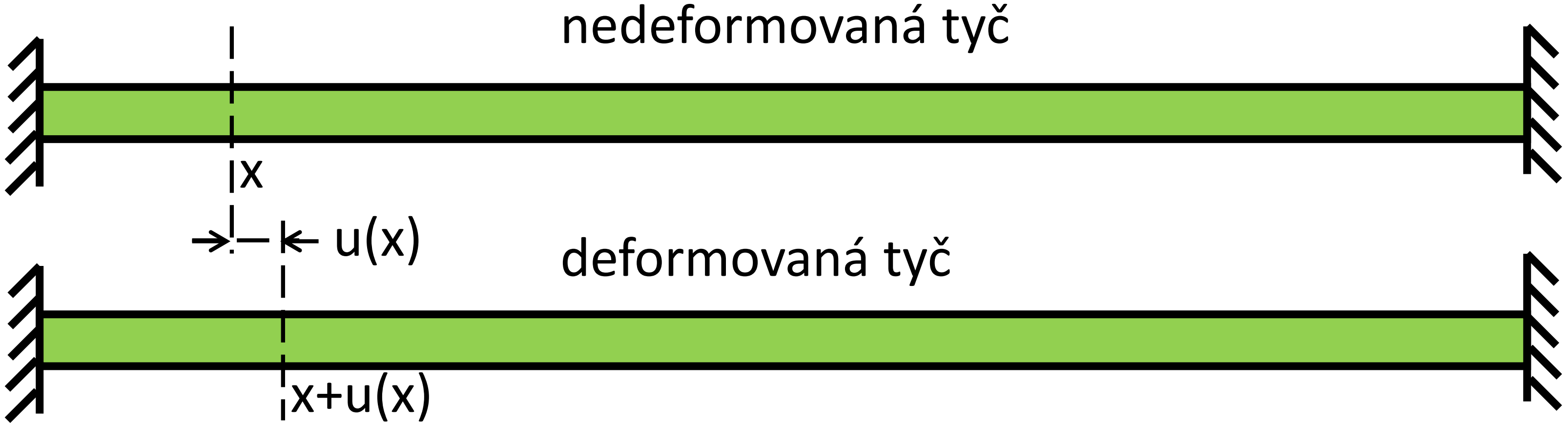
$$\frac{\partial u(x)}{\partial t} \quad \text{pre} \quad x \in \langle 0, L \rangle$$

Že treba zadávať aj časovú deriváciu uvidíme z toho, že pohybová rovnica je druhého rádu podobne ako Newtonova.

- napíšte pohybové rovnice retiazky oscilátorov
- akú rovnicu dostaneme z rovníc retiazky v spojitej limite
- napíšte vlnovú rovnicu
- čo musíme zadať, aby sme zadali okamžitý stav pozdĺžne kmitajúcej tyče

Čo sme to stvorili? Nové fyzikálne "zviera"

V limite vznikne nový typ fyzikálneho objektu: deformovateľná tyč



Tyč sa skladá z častíc, ale tie sú malé a sú nahusto, takže ich nevidíme. Možno ani netušíme, že tie častice existujú. Tyč sa nám môže javiť ako osobitný fyzikálny objekt "kus kovu". Javí sa nám ako spojité prostredie "kontinuum" z ničoho elementárnejšieho sa neskladajúce. Dokonca historicky to bolo práve tak. Naša deformovateľná tyč sa môže nachádzať v rôznych stavoch podľa toho, **ako je pozdĺžne, teda v smere tyče**, vychýlený bod (rez) tyče zo svojej kľudovej polohy *x*.

Takže pozor:
zadať stav častice v nejakom okamihu sme vedeli pomocou (iba) 6 čísel: tri zložky vektoru polohy a tri zložky vektoru rýchlosti

Na zadanie stavu tyče potrebujeme "dvakrát spojite nekonečne veľa čísel" teda potrebujeme zadať hodnoty funkcie

$$u(x) \quad \text{pre} \quad x \in \langle 0, L \rangle \quad \text{pričom} \quad u(0) = u(L) = 0$$

a aj jej prvej časovej derivácie

$$\frac{\partial u(x)}{\partial t} \quad \text{pre} \quad x \in \langle 0, L \rangle$$

Budúcnosť budeme predpovedať pomocou rovnice, ktorú sme našli, teda

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} \quad = \quad c^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$$

toto je vlastne spojite nekonečne veľa diferenciálnych rovníc, po jednej pre každé $x \in \langle 0, L \rangle$ Rovnice ale nie sú navzájom nezávislé. Cez pravé strany sa cítia.

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} \quad = \quad c^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \qquad (\#)$$

Zdanlivo sú rovnice nezávislé, veď v každej rovnici je len „jedno *x*“. Takže sa to zdanlivo podobá na pohybové rovnice Newtonovho typu

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m}F(x)$$

Ibaže výraz na pravej strane $c^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$ sa týka nie jedného bodu *x* ale troch infinitezimálne blízkych bodov $\{(x-\Delta), x, (x+\Delta)\}$ Druhá derivácia „cíti“ zakrivenie grafu funkcie. Na to potrebuje poznať hodnotu funkcie v troch infinitezimálne blízkych bodoch (kým prvá derivácia, ktorá „meria“ strmosť dotyčnice potrebuje hodnoty funkcie v dvoch infinitezimálne blízkych bodoch). Vidno to z pôvodne diskrétneho výrazu

$$-k(u(t,x) - u(t,x-\Delta)) - k(u(t,x) - u(t,x+\Delta))$$

Rovníc (#) je teda spojite nekonečne veľa a každá z nich „cíti“ aj predchádzajúcu rovnicu aj nasledujúcu rovnicu. Nemôžeme ich riešiť ako jednu po druhej, riešime ich ako „jednu parciálnu diferenciálnu rovnicu“.

Hľadáme riešenia vlnovej rovnice

Poučení príkladom dvoch viazaných oscilátorov hľadáme najprv špeciálne riešenia, normálne módy. Mali by mať takéto vlastnosti

- **normálne módy sú monofrekvenčné**
- **normálne módy sú riešenia, takže spĺňajú okrajové podmienky**
- **normálne módy sú stacionárne**
- **normálne módy tvoria úplný systém, t.j. že hocijaké iné riešenie sa dá napísať ako ich superpozícia**

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \text{ s okrajovou podmienkou } \; u(t,0) = u(t,L) = 0$$

Hľadajme monofrekvenčné riešenia v tvare v tvare (zatiaľ nedbáme zatiaľ na okrajové podmienky):

$$u(t,x) = \exp(i\omega t) w(x)$$

Dosadíme do vlnovej rovnice:

$$-\omega^2 \exp(i\omega t) w(x) = c^2 \exp(i\omega t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x) = -\frac{\omega^2}{c^2} w(x)$$

Riešenia tejto rovnice poznáme:

$$w(x) = A\cos(\frac{\omega}{c}x) + B\sin(\frac{\omega}{c}x)$$

Teraz zohľadníme okrajové podmienky: $w(0) = w(L) = 0$. Zistíme, že musí platiť $B = 0$ a že ω nemôže byť hocijaké, ale iba a niektoré číslo z diskrétnej množiny

$$\boxed{\omega_n = c\frac{n\pi}{L}}$$

Zistili sme, že existuje celá množina monofrekvenčných riešení, sú to

$$u_n(t,x) = C\exp(i\omega_n t)\sin(k_n x)$$

kde $$\omega_n = c\frac{n\pi}{L} \qquad k_n = c\frac{n\pi}{L}$$

Tieto riešenie sú zatiaľ napísané ako komplexné, my, samozrejme potrebujeme reálne, takže monofrekvenčné reálne riešenia budeme písať ako

$$\boxed{\begin{gathered} u_n(t,x) = (A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t))\sin(k_n x) \\ \omega_n = c\frac{n\pi}{L} \qquad k_n = c\frac{n\pi}{L} \end{gathered}}$$

Všeobecné riešenie vlnovej rovnice, spĺňajúce okrajové podmienky potom bude

$$u(t,x) = \sum_n (A_n\cos(\omega_n t) + B_n\sin(\omega_n t))\sin(k_n x)$$

kde A_n, B_n sú konštanty, ktoré treba nájsť tak, aby boli splnené aj počiatočné podmienky

Tu je video experimentu demonštrujúce ako možno presúvaním prstov pozdĺž tyče vzbudiť pozdĺžne deformácie, ktorých časový vývoj sa potom prejaví ako zvuk.

Všimnite si koniec videa. Plastový pohár fungujúci ako rezonátor, nezosilní zvuk tyče, ak je k tyči priložený priečne, ale zosilní zvuk pri pozdĺžnom priložení. To dokazuje, že zvukové vlny šíriace sa v tyči sú pozdĺžne.

Vlnová rovnica: ako predpovedáme budúcnosť

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$$

Máme zadaný stav v okamihu *t*=0, teda poznáme funkciu deformácie (posunutia každého bodu tyče)

$$U(x) = u(t,x)\big|_{t=0} \quad \text{pre} \quad x \in \langle 0, L\rangle \quad \text{pričom} \quad U(0) = U(L) = 0$$

a ešte aj jej prvú časovú deriváciu v uvažovanom okamihu

$$V(x) = \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0} \quad \text{pre} \quad x \in \langle 0, L\rangle \quad \text{pričom} \quad V(0) = V(L) = 0$$

Úlohou je nájsť funkciu

$$u(t,x)$$

Pre (všetky) neskoršie časy *t*.

Zaveďme ešte prirodzené označenie $$v(t,x) = \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}$$

Konce tyče sa nehýbu, teda „navyše“ chceme, aby v každom čase platilo

$$u(t,x) = 0 \qquad v(t,x) = 0$$

Vlnová rovnica: jednoduché numerické riešenie

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} &= v(t,x)\\ \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} &= c^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\end{aligned}$$

Toto sú rovnice, ktoré ukazujú ako sa *u(t,x), v(t,x)* budú po malých krokoch posúvať dopredu v čase, porovnaj s Newtonom

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= v(t)\\ \frac{dv(t)}{dt} &= \frac{1}{m}F(x(t))\end{aligned}$$

Posunutie o krok δ dopredu v čase (druhú deriváciu nahradím jej približným numerickým vyčíslením):

$$\begin{aligned}u(t+\delta,x) &= u(t,x)+\delta\, v(t,x)\\ v(t+\delta,x) &= v(t,x)+\delta\, c^2\frac{1}{\Delta^2}\Big(u(t,x-\Delta)-2u(t,x)+u(t,x+\Delta)\Big)\end{aligned}$$

Pri numerickom riešení Δ nebude infinitezimálne, bude to malý krok v x.

Máme teda nápad, ako sa posúvať dopredu po malých časových krokoch.

Diskretizujeme úsečku $(0, L)$ na veľa malých intervalov Δ a budeme vyčísľovať posunutia a rýchlosti len v diskrétnych bodoch

$$x_i = i\Delta$$

Začneme tak, že poznáme v čase $t = 0$ hodnoty posunutí a rýchlostí

$$u(x_i), \quad v(x_i)$$

z počiatočných podmienok a potom sa posunieme o malý krok v čase

$$\begin{aligned} u(t+\delta, x) &= u(t,x) + \delta\, v(t,x) \\ v(t+\delta, x) &= v(t,x) + \delta\, c^2 \frac{1}{\Delta^2}\Big(u(t, x-\Delta) - 2u(t,x) + u(t, x+\Delta)\Big) \end{aligned}$$

Ukážeme si program pre jednoduché numerické riešenie v Pythone. Počiatočné posunutia a rýchlosti zvolíme v tvare

$$u(x_i) = \sin(\frac{\pi}{L} x_i); \;\; v(x_i) = 0$$

Tento konkrétny počiatočných podmienok nie je pre numerické riešenie nijako dôležitý, motivácia pre takú voľbu sa ukáže, až budeme riešiť vlnovú rovnicu analyticky.

Jednoduché numerické riešenie: program

vlna.py

```
from pylab import *
npoints=100; #number of points in x is npoints+1
L=1.
c2=1.    #sound velocity squared
deltax=L/npoints   # step in x
deltat=0.01   # step in time
x=empty(npoints+1)   #coordinates
u=empty(npoints+1)   #currrent displacements
v=empty(npoints+1)    #current velocities
newu=empty(npoints+1)   #new displacements
newv=empty(npoints+1)   #new velocities
for i in range(npoints+1):
    x[i]=i*deltax
    u[i]=sin(pi*x[i]/L)   #initial displacements
    v[i]=0.               #initialk velocities
for j in range(100000):   #make 100000 time steps
    newu[0]=0.        #left boundary condition for displacement
    newv[0]=0.        #left boundary condition for velocity
    newu[npoints]=0.  #right boundary condition for displacement
    newv[npoints]=0.  #right boundary condition for velocity
    for i in range(1,npoints):  #now new values for inside points
        newu[i]=u[i]+v[i]*deltat
        newv[i]=v[i]+c2*(u[i-1]-2.*u[i]+u[i+1])*deltat
    for i in range(1,npoints):  #make current values from new values
        u[i]=newu[i]
        v[i]=newv[i]
    if (j % 1000) ==0:
        print(u[50])   #prints th displacement of the midle point each 1000 time steps
```

Jednoduché numerické riešenie: program

```
for j in range(100000):   #make 100000 time steps
    newu[0]=0.            #left boundary condition for displacement
    newv[0]=0.            #left boundary condition for velocity
    newu[npoints]=0.      #right boundary condition for displacement
    newv[npoints]=0.      #right boundary condition for velocity
    for i in range(1,npoints):  #now new values for inside points
        newu[i]=u[i]+v[i]*deltat
        newv[i]=v[i]+c2*(u[i-1]-2.*u[i]+u[i+1])*deltat
```

$$\begin{aligned} u(t+\delta,x) &= u(t,x)+\delta\, v(t,x) \\ v(t+\delta,x) &= v(t,x)+\delta\, c^2\frac{1}{\Delta^2}\Big(u(t,x-\Delta)-2u(t,x)+u(t,x+\Delta)\Big) \end{aligned}$$

Všimnite si, prečo musíme „opracovať" hraničné body osobitne!
Posúvanie v čase vyžaduje, aby každý posúvaný bod mal ľavého aj pravého suseda, a to hraničné body nemajú. Preto hraničné body nevieme posúvať v čase podľa toho, ako to vyžaduje pohybová parciálna diferenciálna rovnica. Preto potrebujeme **definovať hraničné podmienky v každom čase**.

Zapamätajte si !

Pre fixovanie jednoznačného riešenia parciálnej diferenciálnej rovnice (a teda pre predpovedanie budúcnosti) je treba **okrem tej diferenciálnej rovnice definovať aj okrajové podmienky**. Dôvod sme videli pri pokuse o numerické riešenie: okrajové body nemajú všetkých potrených susedov, preto diferenciálna rovnica samotná nešpecifikuje, čo s tými bodmi urobiť.

Pohybová parciálna diferenciálna rovnica sa „odvodzuje" pre skúmaný systém fyzikálnou analýzou. **Okrajové podmienky treba stanoviť osobitnou rovnako starostlivou fyzikálnou analýzou problému**. Na to sa často zabúda. Fyzik je šťastný, že sa mu „podarilo odvodiť" pohybovú rovnicu a v návale radosti zabudne, že bez okrajových podmienok je mu nanič.

My sme v našom probléme kmitajúcej tyče mali také jednoduché okrajové podmienky, že sme si takmer ani nevšimli, že nejaké podmienky vyrábame. Uvažovali sme tyč „votknutú" medzi dva múry, a teda bolo jasné, že „konce tyče sa nehýbu". Bolo trivialitou zapísať tie podmienky matematicky

$$\boxed{u(t,x) = 0 \qquad\qquad v(t,x) = 0}$$

Veľmi často analýza a odvodenie okrajových podmienok dá viac roboty ako odvodenie samotnej pohybovej rovnice.

Teraz budeme vlnovú rovnicu riešiť analyticky. Pomocou Fourierovho radu.

Matematická vsuvka: Fourierov rozvoj

Veta: Každdú "slušnú" funkciu $U(x)$, definovanú na intervale $\langle 0, L\rangle$ ktorá spĺňa okrajové podmienky $U(0) = U(L) = 0$ možno vyjadriť v tvare nekonečného Fourierovho radu

$$U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\frac{\pi n}{L} x)$$

Pre Fourierove sinsusovky platí

$$\int_0^L \sin(\frac{\pi n}{L} x) \sin(\frac{\pi m}{L} x) dx = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq n \\ \frac{L}{2} & \text{if } m = n \end{cases}$$

preto možno pre zadanú funkciu $U(x)$ koeficienty c_n vyjadriť v tvare

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L U(x) \sin(\frac{\pi n}{L} x) dx$$

Vlnová rovnica: analytické riešenie

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \text{ s okrajovou podmienkou } \ u(t,0) = u(t,L) = 0$$

Geniálny Fourierov nápad: hľadajme riešenie v tvare

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin(\frac{\pi n}{L} x)$$

Po dosadení do vlnovej rovnice dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{c}_n(t) \sin(\frac{\pi n}{L} x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2 n^2 c^2}{L^2} c_n(t) \sin(\frac{\pi n}{L} x)$$

Porovnaním koeficientov na ľavej a pravej strane dostaneme rovnice

$$\ddot{c}_n(t) = -\omega_n^2 c_n(t), \quad \text{kde} \ \ \omega_n = \frac{\pi n c}{L}$$

Sú to rovnice ako keby pre harmonické oscilátory

$$\ddot{c}_n(t) = -\omega_n^2 c_n(t), \quad \text{kde} \quad \omega_n = \frac{\pi n c}{L}$$

všeobecné riešenie má tvar

$$c_n(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$$

teda všeobecné riešenie vlnovej rovnice na intervale $\langle 0, L \rangle$ je

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \sin(\frac{\pi n}{L} x), \quad \text{kde} \quad \omega_n = \frac{\pi n c}{L}$$

Teraz musíme nájsť koeficienty a_n, b_n tak, aby boli splnené počiatočné podmienky

$$u(t,x)\Big|_{t=0} = U(x)$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = V(x)$$

Stačí si uvedomiť, že zadané funkcie $U(x), V(x)$ tiež môžeme vyjadriť v tvare Fourierovho radu

$$U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(\frac{\pi n}{L} x)$$
$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin(\frac{\pi n}{L} x)$$

$$\alpha_n = \frac{L}{2} \int_0^L U(x) \sin(\frac{\pi n}{L} x) dx$$
$$\beta_n = \frac{L}{2} \int_0^L V(x) \sin(\frac{\pi n}{L} x) dx$$

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \sin(\frac{\pi n}{L} x), \quad \text{kde} \quad \omega_n = \frac{\pi n c}{L}$$

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(\omega_n t)+b_n\sin(\omega_n t))\sin(\frac{\pi n}{L}x), \quad \text{kde} \quad \omega_n=\frac{\pi n c}{L}$$

$$v(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n\omega_n\sin(\omega_n t)+b_n\omega_n\cos(\omega_n t))\sin(\frac{\pi n}{L}x)$$

$$U(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin(\frac{\pi n}{L}x) \qquad V(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sin(\frac{\pi n}{L}x)$$

a potom už ľahko vyjadríme riešenie vlnovej rovnice so zadanými okrajovými a počiatočnými podmienkami ako

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos(\omega_n t)+\frac{1}{\omega_n}\beta_n\sin(\omega_n t))\sin(\frac{\pi n}{L}x), \quad \text{kde} \quad \omega_n=\frac{\pi n c}{L}$$

Štandardne sa ešte zavádza označenie $k_n=\frac{\pi n}{L}, \quad \omega_n=ck_n$
takže dostaneme

$$\boxed{u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos(\omega_n t)+\frac{1}{\omega_n}\beta_n\sin(\omega_n t))\sin(k_n x)}$$

- Ako vyzerá Fourierov rozvoj funkcie na úsečke dĺžky L, ktorá má na konci úsečky nulové hodnoty
- Integrál zo súčinu Fourierových sinusoviek na úsečke
- Ako sa nájdu koeficient rozvoja funkcie do sinusoviek na úsečke
- Ako vyzerajú frekvencie normálnych módov vlnovej rovnice na úsečke

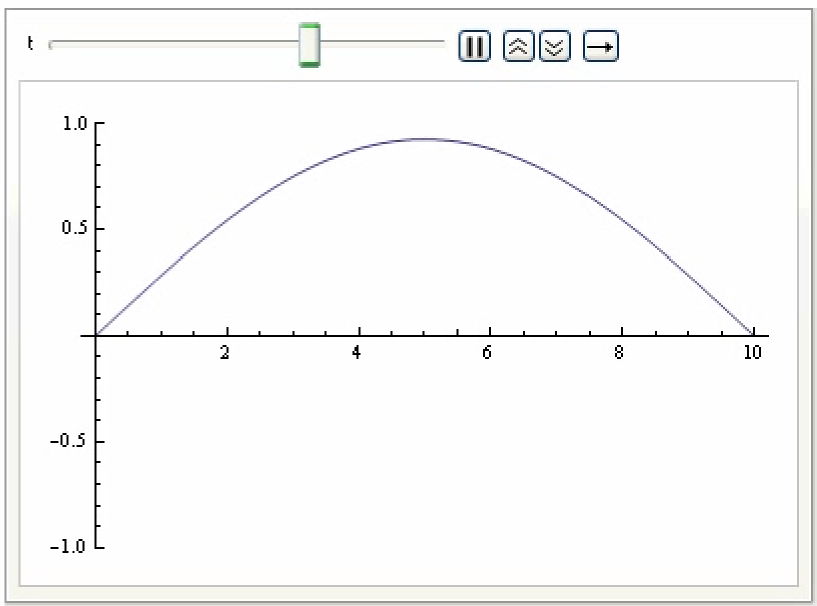
Vlnová rovnica: charakter riešení

Vyšetrime vlastnosti najjednoduchšieho riešenia

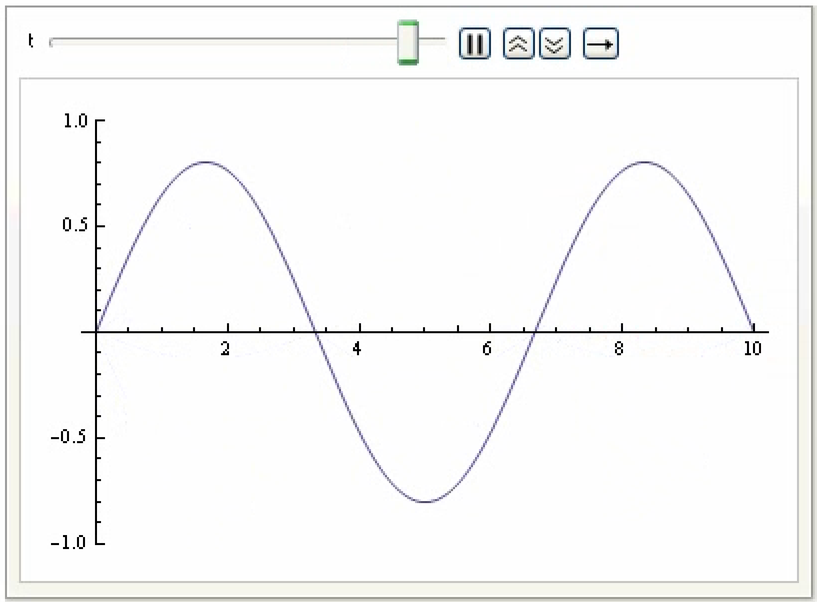
$$u(t,x) = \alpha_1 \cos(\omega_1 t) \sin(k_1 x)$$

```
In[9]:= Animate[Plot[Sin[omega t] Sin[k x], {x, 0, L}, PlotRange → {-1., 1.}],
         {t, 0, 10}]
```

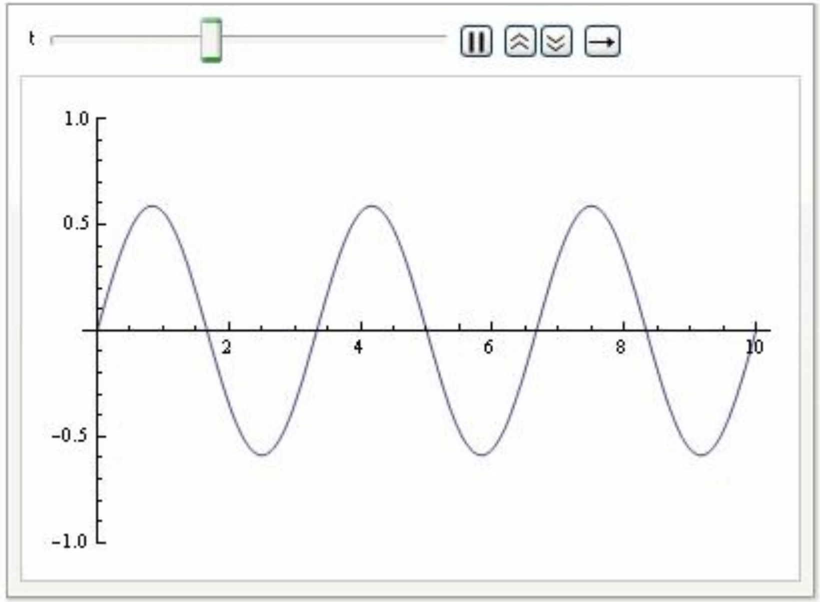
Out[9]=



```
Animate[Plot[Sin[omega3 t] Sin[k3 x], {x, 0, L}, PlotRange → {-1., 1.}],
 {t, 0, 10}]
```

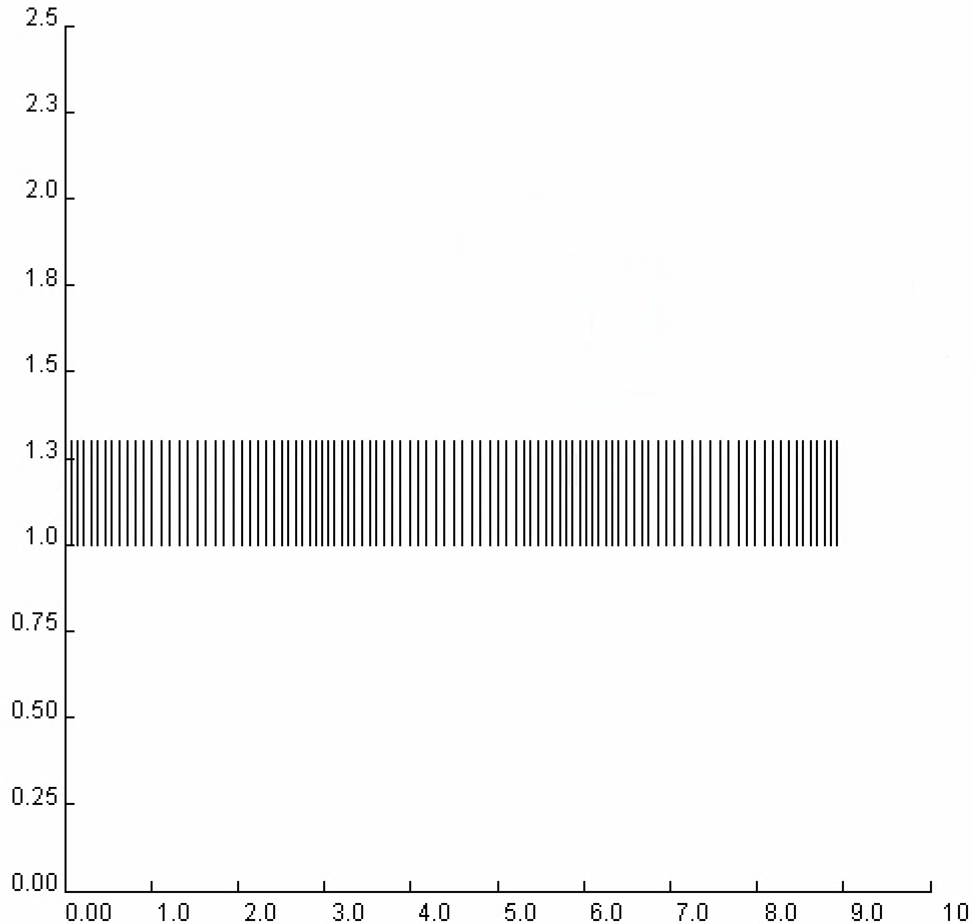


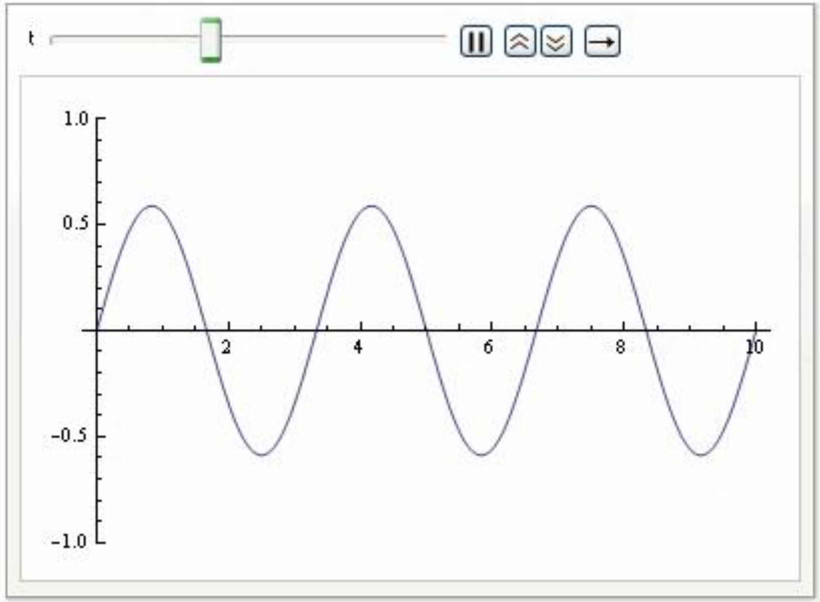
```
Animate[Plot[Sin[omega6 t] Sin[k6 x], {x, 0, L}, PlotRange → {-1., 1.}],
 {t, 0, 10}]
```



Pozor, tyč nekmitá v priečnom smere, ostáva stále rovná. Graf ukazuje veľkosť posunutia v pozdĺžnom smere miesta so súradnicou x v rozličných časoch

Toto je animácia pozdĺžnych posunutí rezov tyče



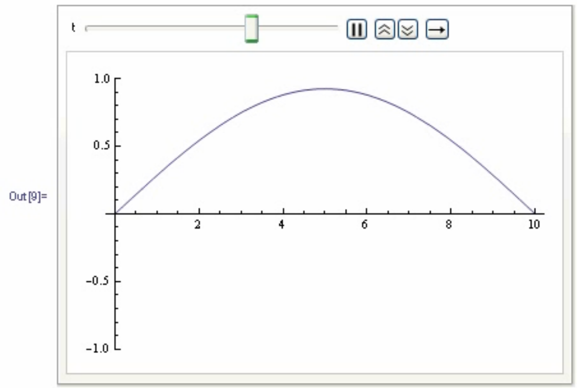


Video ukazuje, že každý rez tyče kmitá ako oscilátor, stále rovnakou frekvenciou a amplitúdou. Niektoré rezy tyče nekmitajú vôbec, to sú takzvané uzly. Riešenie

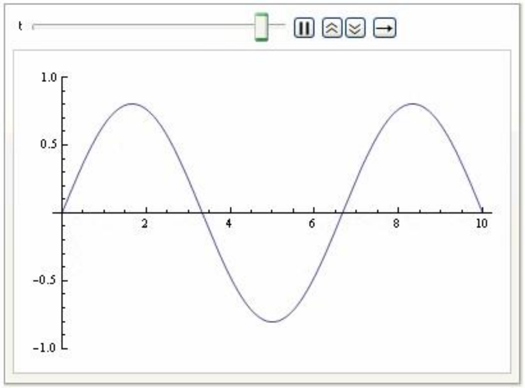
$$u(t, x) = \alpha_n \cos(\omega_n t) \sin(k_n x)$$

popisuje tzv**. stacionárne kmity tyče (stojatú vlnu).** Slovom stojatý máme na mysli to, že po tyči sa nepremiestňuje energia ani amplitúda oscilácií. Všimnime si, že stojatá vlna je monofrekvenčná, všetky body kmitajú jednou a tou istou frekvenciou

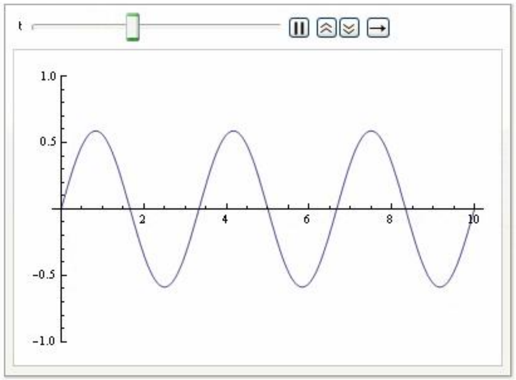
$$u(t,x) = \alpha_n \cos(\omega_n t)\sin(k_n x) \qquad k_n = \frac{\pi n}{L}, \quad \omega_n = c k_n$$



$$k_1 = \frac{\pi}{L},\ \lambda_1 = 2L$$



$$k_3 = \frac{3\pi}{L},\ \lambda_3 = \frac{2L}{3}$$



$$k_6 = \frac{6\pi}{L},\ \lambda_3 = \frac{2L}{6}$$

Index n pri $k_n = \frac{\pi n}{L}$ určuje počet priestorových polperiód kmitov, súvis s vlnovou dĺžkou je

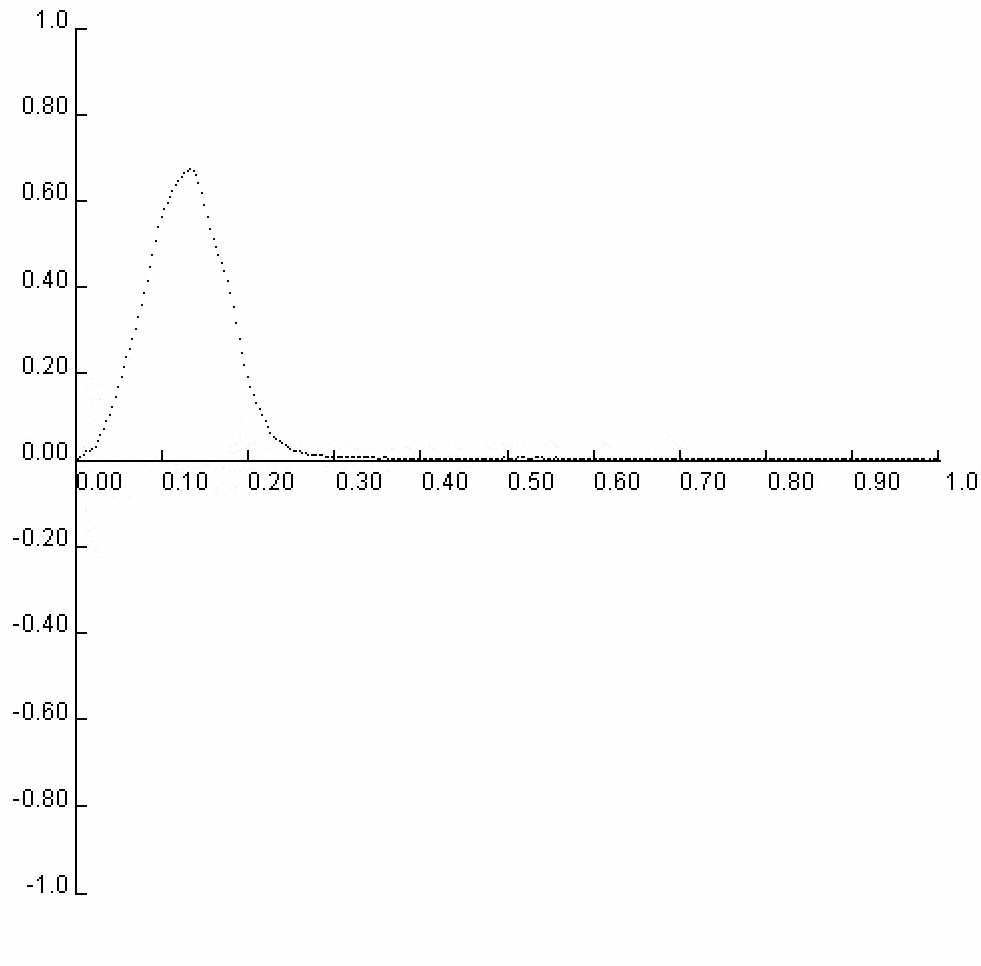
$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}$$

$$\omega_n = c k_n = c\frac{2\pi}{\lambda_n}$$

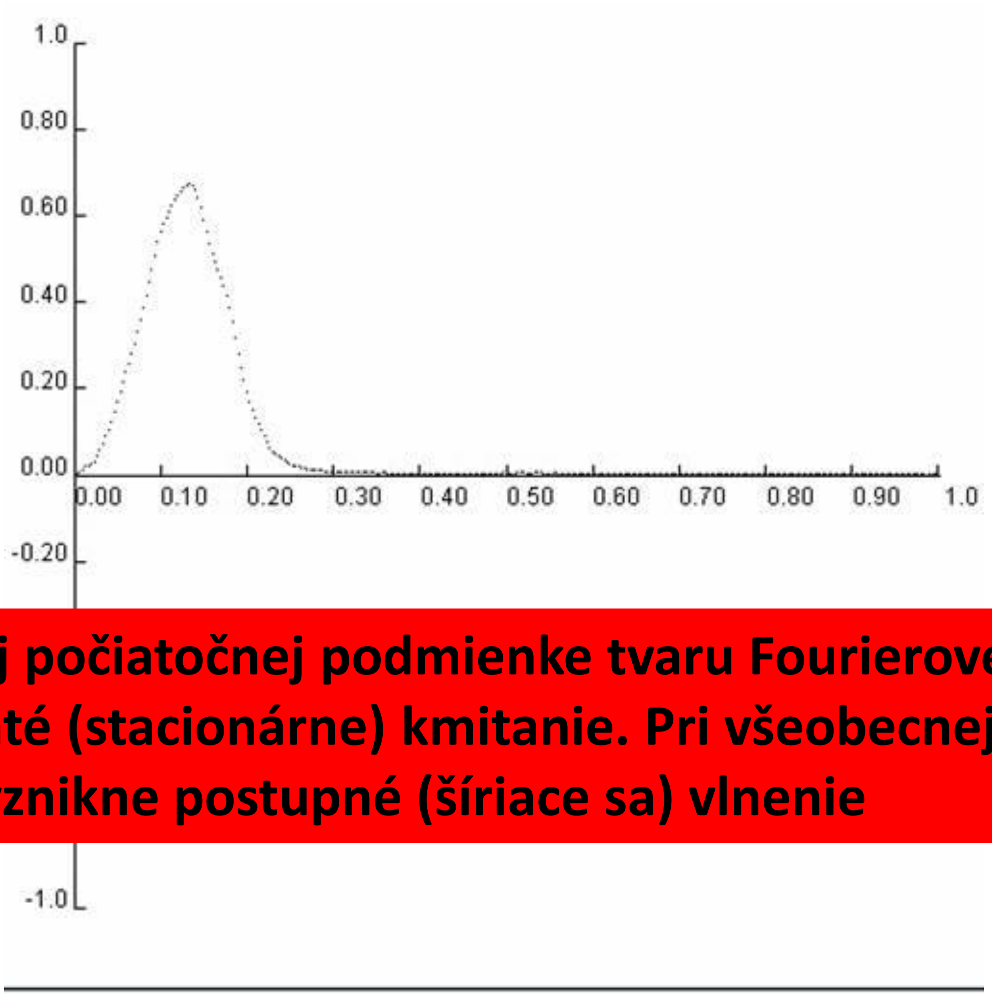
$$c = \frac{\omega_n \lambda_n}{2\pi} = \frac{2\pi}{T}\frac{\lambda_n}{2\pi} = \frac{\lambda_n}{T}$$

c má rozmer rýchlosti !

Ukážka nestacionárneho vlnenia
Na videu je pohybujúca sa vlna



Ukážka nestacionárneho vlnenia
Na videu je pohybujúca sa vlna



Pri špeciálnej počiatočnej podmienke tvaru Fourierovej sínusovky vznikne stojaté (stacionárne) kmitanie. Pri všeobecnej počiatočnej podmienke vznikne postupné (šíriace sa) vlnenie

$$\cos\theta\sin\varphi = \frac{\sin(\theta+\varphi) - \sin(\theta-\varphi)}{2}$$

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \cos(\omega_1 t)\sin(k_1 x) \\ &= \frac{1}{2}(\sin(\omega_1 t + k_1 x) - sin(\omega_1 t + k_1 x)) \\ &= \frac{1}{2}(\sin(\omega_1 (t + \frac{k_1}{\omega_1} x)) - \sin(\omega_1 (t - \frac{k_1}{\omega_1} x))) \\ &= \frac{1}{2}(\sin(\omega_1 (t + \frac{x}{c})) - \sin(\omega_1 (t - \frac{x}{c}))) \end{aligned}$$

Všimnime si, že platí

$$\sin(\omega_1(t - \frac{x}{c})) = \sin(\omega_1((t+\tau) - \frac{x + c\tau}{c}))$$

Posunutie bodu x v čase t = Posunutie bodu $x + c\tau$ v čase $t + \tau$

Bod vzdialenejší vpravo o $c\tau$ má také isté posunutie v čase neskoršom o τ teda popisuje to vzruch (vlnu) šíriacu sa zľava doprava rýchlosťou c. Obdobne prvá sínusovka popisuje vlnenie šíriace sa sprava doľava.

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \cos(\omega_1 t)\sin(k_1 x) \\
&= \frac{1}{2}(\sin(\omega_1(t+\frac{x}{c})) - \sin(\omega_1(t-\frac{x}{c})))
\end{aligned}
$$

Fourierova stojatá vlna vzniká teda superpozíciou dvoch postupných vĺn, jednej šíriacej sa zľava doprava a druhej šíriacej sa sprava doľava. Tie postupné vlny majú v tomto prípade veľmi špeciálny tvar, takže sa **poskladajú na stojatú vlnu**.

Použitím identít pre súčiny trigonometrických funkcií **možno ľubovoľné riešenie vlnovej rovnice napísať ako superpozíciu dvoch postupných vĺn**, jednej šíriacej sa zľava doprava a druhej šíriacej sa sprava doľava. Tie postupné vlny ale všeobecne nemajú taký špeciálny tvar, aby sa poskladali na stojatú vlnu. Spravidla sa poskladajú na vlnenie striedavo sa pohybujúce zľava doprava, po odraze od konca sprava doľava a po ďalšom odraze zase zľava doprava ... Videli sme to na videu.

Vlnová rovnica všeobecne

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} \quad = \quad c^2 \frac{\delta^2 u(t,x)}{\delta x^2}$$

Majme ľubovoľnú funkciu jednej premennej

$$f(\xi)$$

a vyrobme z nej funkciu dvoch premenných t, x takto

$$f(t - \frac{x}{c})$$

Rovno vidím, že takáto funkcia spĺňa vlnovú rovnicu a podobne ju spĺňa aj funkcia

$$g(t + \frac{x}{c})$$

kde $g(\xi)$ je (iná) ľubovoľná funkcia jednej premennej

Nemôžem si ale myslieť, že mnou hľadanú funkciu deformácie

$$u(t,x)$$

budem písať ako

$$u(t,x) = f(t - \frac{x}{c})$$

Lebo funkcia deformácie musí okrem vlnovej funkcie spĺňať aj okrajové podmienky

$$u(t,0) = 0, \quad u(t,L) = 0, \quad \text{pre všetky časy t}$$

Skúsme ale hľadať riešenie v tvare

$$u(t,x) = f(t - \frac{x}{c}) + g(t + \frac{x}{c})$$

a nájdime, aké podmienky musia spĺňať (inak ľubovoľné) funkcie f, g, aby boli identicky splnené okrajové podmienky

Dostaneme

$$u(t,0) = f(t) + g(t) = 0$$

Takže funkcie f a g spolu súvisia takto

$$f = -g$$

máme teda

$$u(t,x) = f(t - \frac{x}{c}) - f(t + \frac{x}{c})$$

teraz podmienka

$$u(t,L) = 0, \quad \text{pre všetky časy t}$$

$$u(t,L) = f(t - \frac{L}{c}) - f(t + \frac{L}{c}) = 0 \quad \text{pre všetky t}$$

Zjavne je treba použiť periodickú funkciu s periódou $T = \dfrac{2L}{cn}$, napríklad

$$f(\xi) = \cos\left(\frac{2\pi}{\frac{2L}{nc}}\xi\right)$$

Potom dostaneme

$$\begin{aligned} u(t,x) &= f(t-\frac{x}{c}) + g(t+\frac{x}{c}) = \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{\frac{2L}{nc}}(t-\frac{x}{c})\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{\frac{2L}{nc}}(t+\frac{x}{c})\right) = \\ &= 2\sin(\frac{\pi c n}{L}t)\sin(\frac{\pi n}{L}x) \end{aligned}$$

Vo všeobecnosti môžeme použiť ľubovoľnú superpozíciu takých riešení (v časovej závislosti môže byť aj kosínus), takže dostávame inou cestou to, čo už poznáme.

Zhrňme naše poznatky o vlnovej rovnici

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} \quad = \quad c^2 \frac{\delta^2 u(t,x)}{\delta x^2}$$

s okrajovými podmienkami

$$u(t,0) = 0, \quad u(t,L) = 0, \quad \text{pre všetky časy t}$$

Všeobecné riešenie môžeme písať v tvare superpozície špeciálnych stacionárnych riešení

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \sin(\frac{\pi n}{L} x), \quad \text{kde} \quad \omega_n = \frac{\pi n}{L}$$

Stacionárne riešenia sú

- monofrekvenčné
- tvoria úplný systém, teda každé riešenie sa dá písať ako ich superpozícia
- sú „ortogonálne“, takže platí

$$\int_0^L \sin(\frac{\pi n}{L} x) \sin(\frac{\pi m}{L} x) dx = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq n \\ \frac{L}{2} & \text{if } m = n \end{cases}$$

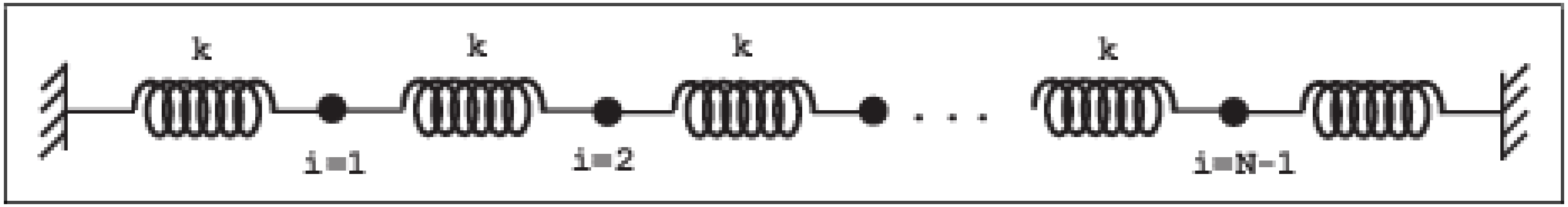
túto vlastnosť využívame pri hľadaní koeficientov rozvoja z počiatočných podmienok

- Zapíšte všeobecné riešenie vlnovej rovnice na úsečke (s nulovými okrajovými podmienkami) ako superpozíciu stacionárnych kmitov
- Uveďte charakteristiky stacionárnych kmitov

Diskrétna retiazka oscilátorov

Po tom, čo sme sa potrápili so spojitou vlnovou rovnicou, vráťme sa k diskrétnej retiazke oscilátorov

Uvažujme jednorozmerný systém $N-1$ častíc rovnakej hmotnosti m navzájom poprepájaných pružinami rovnakej tuhosti k. Krajné častice nech sú rovnakými pružinami spojené s pevnými stenami



Napíšeme teraz pohybové rovnice pre tento systém. Označme výchyľku i-tej častice z jej rovnovážnej polohy ako u_i, pre $i = 1, 2, ...(N-1)$. A zaveďme ešte pomocné konštanty $u_0 = 0$, $u_n = 0$. Potom pohybové rovnice sú (pre $i = 1, 2, ...(N-1)$)

$$m\ddot{u}_i = -k(u_i - u_{i-1}) - k(u_i - u_{i+1})$$

Je to systém $n-1$ navzájom viazaných lineárnych diferenciálnych rovníc druhého rádu pre $N-1$ neznámych funkcií $u_i(t)$.

Spojitý prípad, ktorý sme riešili bol limitou diskrétnej retiazky, takže skúsime predpokladať, že riešenia diskrétneho modelu budú v niečom podobné na riešenia spojitého modelu. Skúsme teda postupovať tak, že nájdeme najprv špeciálne monofrekvenčné stacionárne riešenia, ktoré sú navyše faktorizované, teda vyzerajú ako súčin funkcie času a funkcie priestorovej premennej, ktorej úlohu hrá index i.

Priestorová časť spojitých monofrekvenčných riešení boli sínusovky, takže skúsime čosi ako diskretizovavé sínusovky. Hľadajme teda špeciálne riešenia v tvare

$$u_i^{(n)}(t) = \exp(-\hat{i}\omega_n t)\sin(\frac{\pi n}{N}i) \quad \text{pre} \quad i = 0, 1, 2, ..., N$$

Poznamenajme že používanie komplexných čísel je len pomocný trik, aby sme nemuseli používať priveľa goniometrických vzťahov, skutočné reálne fyzikálne riešenia skonštruujeme nakoniec z komplexných funkcií vhodnými lineárnymi kombináciami.

$$m\ddot{u}_i = -k(u_i - u_{i-1}) - k(u_i - u_{i+1})$$

$$m\ddot{u}_i = -2ku_i + k(u_{i-1} + u_{i+1})$$

Vyskúšame teda riešenie v tvare (komplexnú jednotku píšeme ako $\hat{i}$, aby sa to neplietlo s indexom i.

$$u_i^{(n)}(t) = \exp(-\hat{i}\omega_n t)\sin(\frac{\pi n}{N} i)$$

Po dosadení do sústavy rovníc dostaneme

$$\begin{aligned}
-m\omega_n^2 \sin(\frac{\pi n}{N} i) &= -2k\sin(\frac{\pi n}{N} i) + \\
&\quad +k(\sin(\frac{\pi n}{N}(i-1)) + \sin(\frac{\pi n}{N}(i+1)) \\
-m\omega_n^2 \sin(\frac{\pi n}{N} i) &= -2k\sin(\frac{\pi n}{N} i) + \\
&\quad +2k\sin(\frac{\pi n}{N} i)\cos(\frac{\pi n}{N}) \\
\omega_n^2 &= 2\frac{k}{m}(1 - \cos(\frac{\pi n}{N}))
\end{aligned}$$

Teda navrhnutý tvar je naozaj riešením, ak ω_n volíme podľa práve odvodeného vzťahu.

Našli sme teda riešenia

$$u_i^n(t) = \exp(-\hat{i}\omega_n t)\sin(\frac{n\pi}{N}i); \quad \omega_n^2 = 2\frac{k}{m}(1-\cos(\frac{\pi n}{N}))$$

Pre spojitý prípad sme potrebovali takéto riešenia pre ľubovoľné celé číslo n, teda bolo nekonečne veľa takýchto špeciálnych riešení.

Vzniká otázka, či aj pre diskrétnu retiazku oscilátorov budeme využívať nájdené špeciálne riešenia pre ľubovoľné prirodzené číslo n, teda nekonečne veľa špeciálnych riešení. Navyše sme dostali vyjadrenie pre kvádráty frekvencií, otázka je, či budeme potrebovať aj „záporné omegy“.

Tieto otázky si zodpovieme, keď si dobre uvedomíme, načo tieto špeciálne riešenia potrebujeme.

Potrebujeme ich na predpovedanie budúcnosti. Pri zadaných počiatočných podmienkach

$$u_i(t=0) = U_i; \quad \dot{u}_i(t=0) = V_i$$

chceme príslušné riešenie písať ako

$$u_i(t) = \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{?}(a_n + \hat{i}b_n)u_i^{(n)}(t)$$

Zatiaľ nevieme, po aké veľké n pobeží tá suma.

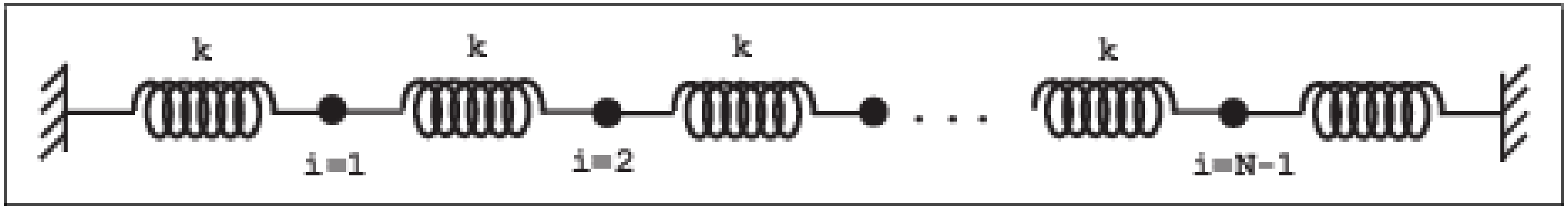
$$u_i(0) = \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{?}(a_n + \hat{i}b_n)u_i^{(n)}(0) = \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{?}(a_n + \hat{i}b_n))\sin(\frac{n\pi}{N}i)$$

$$\dot{u}_i(0) = \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{?}(a_n + \hat{i}b_n)\dot{u}_i^{(n)}(0) = \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{?}(a_n + \hat{i}b_n))(-\hat{i}\omega_n)\sin(\frac{n\pi}{N}i)$$

$$u_i(0) = \sum_{n=1}^{\tilde{N}} a_n \sin(\frac{n\pi}{N}i) = U_i$$

$$\dot{u}_i(0) = \sum_{n=1}^{\tilde{N}} b_n\omega_n \sin(\frac{n\pi}{N}i) = V_i$$

Namiesto otáznika sme ako hornú hranicu v sume písali zatiaľ neznáme číslo $\tilde{N}$. Poznamenajme, že index i v týchto rovniciach prebieha hodnoty $1,2,3, \ldots (N-1)$.



$$u_i(0) = \sum_{n=1}^{\tilde{N}} a_n \sin(\frac{n\pi}{N} i) = U_i$$

$$\dot{u}_i(0) = \sum_{n=1}^{\tilde{N}} b_n \omega_n \sin(\frac{n\pi}{N} i) = V_i$$

Máme teda $2(N-1)$ rovníc o $2\tilde{N}$ neznámych a_n, b_n. Rovnice pre a_n a b_n sú ale nezávislé, takže máme dve sady rovníc. Prvá je $(N-1)$ rovníc o $\tilde{N}$ neznámych a_n, druhá sada je $(N-1)$ rovníc o $\tilde{N}$ neznámych b_n.

Sú to systémy lineárnych rovníc s pravou stranou. Koeficienty pri neznámych sú v oboch sadách rovnaké, sú to čísla

$$A_{in} = \sin(\frac{\pi n}{N} i)$$

Takže prvá sada rovníc znie

$$\sum_{n=1}^{\tilde{N}} A_{in} a_n = U_i$$

Skúsme si tipnúť, ako to celé dopadne. Vo fyzike očakávame jednoznačnú predpoveď budúcnosti, teda jednoznačné riešenie pre koeficienty a_n. Najjednoduchšie by to bolo tak, že $\tilde{N} = N$, teda rovnaký počet rovníc ako neznámych, pričom, aby to fungovalo, tie rovnice musia byť nezávislé.

Veľmi sa to všetko podobá na spojitý prípad, kde sme robili Fourierove rozvoje a tam kľúčom k tomu, že to bolo ľahké, bol vzťah ortogonality

$$\int_0^L \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right)dx = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq n \\ \frac{L}{2} & \text{if } m = n \end{cases}$$

Integrál je suma infinitezimálnych malých čísel. Skúsme si tipnúť, že v diskrétnom prípade by sa to mohlo modifikovať na diskrétnu sumu

$$\sum_{i=0}^{N} \sin\left(\frac{\pi n}{N}i\right)\sin\left(\frac{\pi m}{N}i\right) = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq n \\ ? & \text{if } m = n \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{N} \sin\left(\frac{\pi n}{N}i\right)\sin\left(\frac{\pi m}{N}i\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N}\Big(\cos\left(\frac{\pi(n-m)}{N}i\right) - \cos\left(\frac{\pi(n+m)}{N}i\right)\Big) = ?$$

Nevediac ako ďalej, začal som na Wikipédii, kde som našiel elegantnú Lagrangeovu trigonometrickú identitu

$$\sum_{n=1}^{N} \cos n\theta = -\frac{1}{2} + \frac{\sin(N+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}$$

jej dôkaz som si tiež vygooglil

If $S=1+z+z^2+\cdots+z^n$, then

$$S-zS=(1+z+z^2+\cdots+z^n)-(z+z^2+z^3+\cdots+z^{n+1})=1-z^{n+1}.$$

Therefore, $S=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$, with $z\neq 1$. Equating both expressions of S, we have

$$1+z+z^2+\cdots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

Substitute $z=e^{i\theta}$, with $0<\theta<2\pi$, into the expression, and we get

$$1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}+\cdots+e^{ni\theta}=\frac{1-e^{(n+1)i\theta}}{1-e^{i\theta}}$$

The real component of the left side is $1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta$. For the right side, the real component is (skipping a few steps on this one, but it is)

$$\frac{1}{2}+\frac{\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

If we equate the real components from both sides, we get

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta=\frac{1}{2}+\frac{\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

Múdreho toto malo napadnúť hneď, že suma tých kosínusov je v komplexných číslach geometrická postupnosť! Eulerova formula je sila!

Vrátiac sa k nášmu problému

$$\sum_{i=0}^{N} \sin(\frac{\pi n}{N} i) \sin(\frac{\pi m}{N} i) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N} \Big(\cos(\frac{\pi(n-m)}{N} i) - \cos(\frac{\pi(n+m)}{N} i) \Big) = ?$$

dostaneme

$$\boxed{\sum_{i=0}^{N} \sin(\frac{\pi n}{N} i) \sin(\frac{\pi m}{N} i) = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq n \\ \frac{N-1}{2} & \text{if } m = n \end{cases}}$$

Koeficienty riešenia z počiatočných podmienok potom dostaneme ľahko

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \sin(\frac{n\pi}{N} i) = U_i \qquad \sum_{n=0}^{N} b_n \omega_n \sin(\frac{n\pi}{N} i) = V_i$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{N-1} \sum_{i=0}^{N} U_i \sin(\frac{n\pi}{N} i) \qquad b_n = \frac{2}{\omega_n (N-1)} \sum_{i=0}^{N} V_i \sin(\frac{n\pi}{N} i)}$$

K ľubovoľným počiatočným podmienkam sme teda našli riešenie, čím sme nepriamo dostali odpoveď na otázky, ktoré sme sformulovali takto:

Vzniká otázka, či aj pre diskrétnu retiazku oscilátorov budeme využívať nájdené špeciálne riešenia pre ľubovoľné prirodzené číslo n, teda nekonečne veľa špeciálnych riešení. Navyše sme dostali vyjadrenie pre kvadráty frekvencií, otázka je, či budeme potrebovať aj „záporné omegy“.

Na nájdenie riešenia nám stačilo $N-1$ špeciálnych riešení. To znamená, že tie riešenia tvoria úplný systém a všetky ostatné špeciálne riešenia, ktoré sme našli nie sú už nezávislé, dajú sa vyjadriť pomocou prvých $N-1$ špeciálnych riešení. Ako to vieme? Nuž, sú to riešenia, zodpovedajú im nejaké počiatočné podmienky a teda vieme ich zostaviť pomocou prvých $N-1$ riešení. Tento „dôkaz“ nebol matematický, ale **fyzikálny**. Viera v predpovedateľnosť sveta zo znalosti počiatočného stavu žiada jednoznačnosť riešenia pohybových rovníc pri určitých počiatočných podmienkach. Je na matematikoch, aby dokázali, že Newtonove rovnice spĺňajú takú podmienku jednoznačnosti. **Fyzikálni prvolezci sa musia starať o matematický dôkaz jednoznačnosti. My, ktorí lezieme už za nimi sme uverili, že vytýčená cesta je preverená a môžeme fyzikálne technológie používať, zatĺcť fyzikálnu skobu a zveriť sa jej. Keby to náhodou s nami spadlo, znamená to, že fyzikálna cesta potrebuje korekcie. Párkrát to v histórii spadlo a noví geniálni prvolezci našli lepšie skoby, doplnili napríklad Newtonovu mechaniku o kvantovú mechaniku a teóriu relativity. Staré skoby sme nezahodili, len upresnili v akých skalách ich možno s dôverou používať a v akých skalách treba nové skoby.**

Súčasne vidíme, že nepotrebujeme ani riešenia so „zápornými omegami“. Ľubovoľné počiatočné podmienky sme dokázali splniť len pomocou riešení s kladnými omegami, teda riešenia so zápornými omegami sú vyjadriteľné pomocou riešení skladnými omegami.

Všetky tieto poznámky vyžadujú poriadne premyslenie. Keď ich čítate a rozumiete po slovensky, to ešte neznamená, že aj chápete.

Vari hlavnou úlohou prvej fyzikálnej prednášky magisterského kuru je „pochopiť, čo to znamená pochopiť. Nepodceňujte to. Odmenou je radosť z pochopenia.

Látka ako kontinuum

Objekty okolo nás sú spravidla „látkovej povahy“.

Čo presne nazývame „látka“ nie je dobre definované. V slovenskej terminológii pretrvávajú zvyklosti zavedené niekedy v rámci ideologického „newspeaku“, keď sa hovorilo, že fyzikálne objekty sú vo všeobecnosti „hmotnej povahy“, kde slovo „hmota“ sa vymedzovalo ako označenie pre „objektívnu existenciu“ v protiklade k „vedomiu“. Slovo látka sa potom používa(lo) na značenie čohosi uchopiteľného, viditeľného,.... v protiklade napríklad k „fyzikálnemu poľu“ (napríklad elektromagnetickému).

V anglickej terminológii sa používa jeden spoločný pojem „matter“ a to aj vo vyššie uvedenom význame hmota (ako filozofická kategória) aj ako látka.

Pozrite si wikipédiu, tak slovenskú ako aj anglickú verziu a trošku sa oboznámte s celý tým zmätkom. Vôbec to nie je pre „chápanie fyziky“ potrebné: terminologickí puristi sú často najmä tí, ktorí fyzike rozumejú iba na najnižších leveloch. Ale je dobré o tom počuť, lebo sa s tým určite stretnete. Tak aby ste to nebrali vážne.

Rozdiel medzí látkou a ne-látkou mi pripomína problém, ktorí sme riešili s deťmi v škôlke, keď mali vysvetliť rozdiel medzi ovocím a zeleninou. Ja som to určite nedokázal a, popravde, bolo mi to jedno. Hoci v živote sú tie dva pojmy niekedy aj užitočné. Podobne stolička je prakticky dobrý pojem, ale neviem rigorózne vysvetliť, čo všetko sa nazýva alebo naopak nenazýva stolička.

Látka ako efektívny objekt

Dnes fyzika hodne pokročila v porovnané so začiatkom 19. storočia, keď „zverinec“ fundamentálne rôznych fyzikálnych objektov bol veľmi bohatý. Objekty ako „voda“, „vzduch“, „meď“ boli osobitné „zvieratá“, ktoré spolu nijako nesúvisleli.

Úlohou fyziky ako prírodopisu bolo kvantitatívne popísať vlastnosti látok ako sú (hmotnostná) hustota, teplotná rozťažnosť, moduly pružnosti, tvrdosť, koeficient trenia, farba (spektrálna pohltivosť svetla) a podobne. Ďalej rozhodnúť, ako sa zadáva „stav v danom okamihu“. Pre kus medi to môže byť napríklad tvar objektu v nedeformovanom stave, miera deformácie v každom bode, rýchlosť zmeny tejto deformácie, teplota.
V druhom koku pristupuje „prorocká úloha fyziky“: úloha nájsť (pre daný prípad interakcie s vonkajším prostredím) pohybové rovnice a potom sa naučiť ich riešiť.

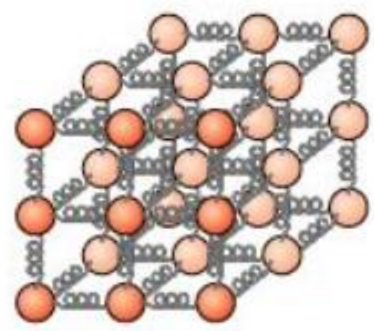
Toto boli nezávislé úlohy pre každú látku.

V 19 storočí objavili chemici atómy a molekuly a pohľad na fyzikálne zverinec sa razom zmenil. Fundametálne zvieratá boli atómy a vzniklo presvedčenie, že ak fyzikálne zvládneme prírodopis i predpovedanie budúcnosti pre atómy, budeme vedieť vypočítať i vlastnosti všetkých látok.

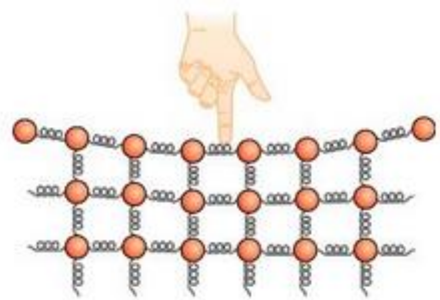
Látky sa stali iba „efektívnymi kolektívnymi zvieratami“. Pre jednoduchosť hovoríme vzduch, ale vieme, že ide o množstvo istých molekúl.

Látka ako efektívny objekt

Tuhú látku a jej vlastnosti teda vnímame ako efektívny popis objektu, ktorý mikroskopicky vyzerá nejako takto



Reakciu tuhej látky na vonkajší silový podnet potom chápeme ako efektívny výraz pre reakciu mriežky atómov na ten silový podnet, nejako takto



Látka ako efektívny objekt

V praxi ale často s vodou pracujeme stále akoby s osobitným „zvieraťom“ voda. Keď inžinier pri návrhu priehrady počíta prúdenie vody v nej, nevníma vec ako pohyb molekúl vody ale ako zmenu stavu zvieraťa „voda“. Píše rovnice „tečenia vody“, ktoré v sebe obsahujú všelijaké mystické „látkové konštanty“ ako hustota, viskozita, koeficient stlačiteľnosti. V princípe by mohol písať rovnice pre všetky molekuly vody. Tie rovnice by obsahovali zákon silového pôsobenia medzi molekulami vody. Ibaže pohybových rovníc by bolo rádovo 10^{36}, lebo toľko je molekúl vody v takej priehrade. Musel by použiť techniku štatistickej fyziky a tá by mu dala v istom priblížení zasa len efektívne rovnice tečenia nového zvieraťa „voda“.

Navyše „molekula vody“ a silové pôsobenie medzi molekulami sú iba efektívne pojmy zjednodušujúce popis správania jadier a elektrónov pomocou kvantovej mechaniky.

A ani to nie je koniec. Jadro je len efektívny pojem pre systém protónov e neutrónov, ktorý treba popísať pomocou jadrovej fyziky.

A ani to nie je koniec, lebo protón a neutrón sú len efektívne pojmy pre systémy kvarkov.

Látka ako efektívny objekt

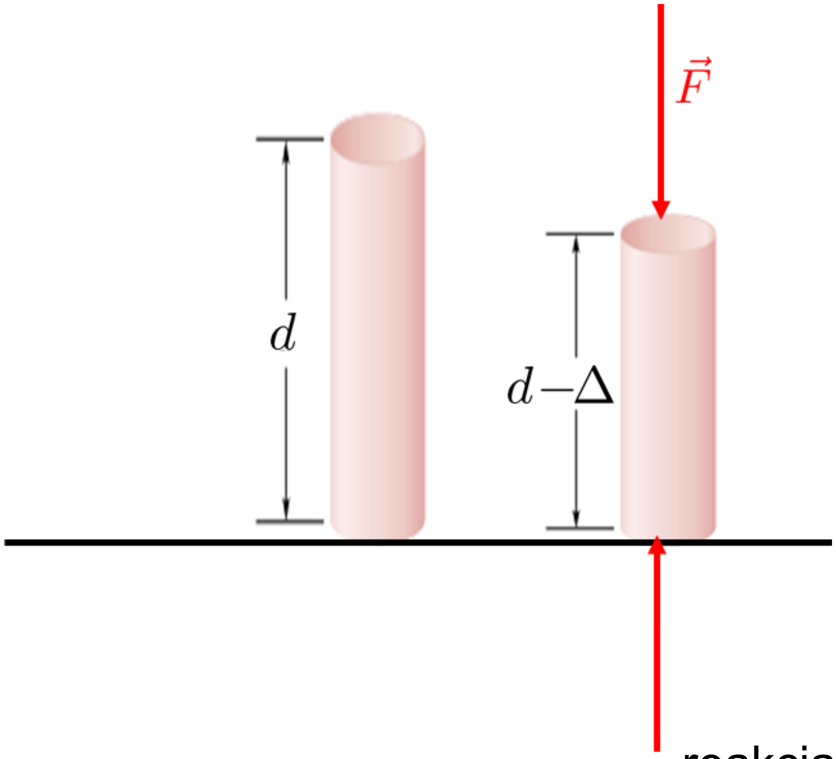
Porozumenie okolitému svetu sa nám teda hierarchizuje na viacero efektívnych úrovní, pričom na istej úrovni spravidla vystačíme s efektívnou teóriou danej úrovne.

Nie vždy a nie celkom. Efektívny popis atómu vodíka je kvantová mechanika a Coulombov zákon pôsobenie dvoch efektívnych bodových častíc (protónu a elektrónu na seba). Ale keby sme energetické hladiny atómu vodíka chceli rátať príliš presne (na mnoho desatinných miest), musíme poznať rozmery protónu, a keby sme aj tie chceli vedieť veľmi presne, nevystačíme s efektívnym pojmom „protón" ale potrebovali by sme teóriu štruktúry protónu nižšej (kvarkovej) úrovne.

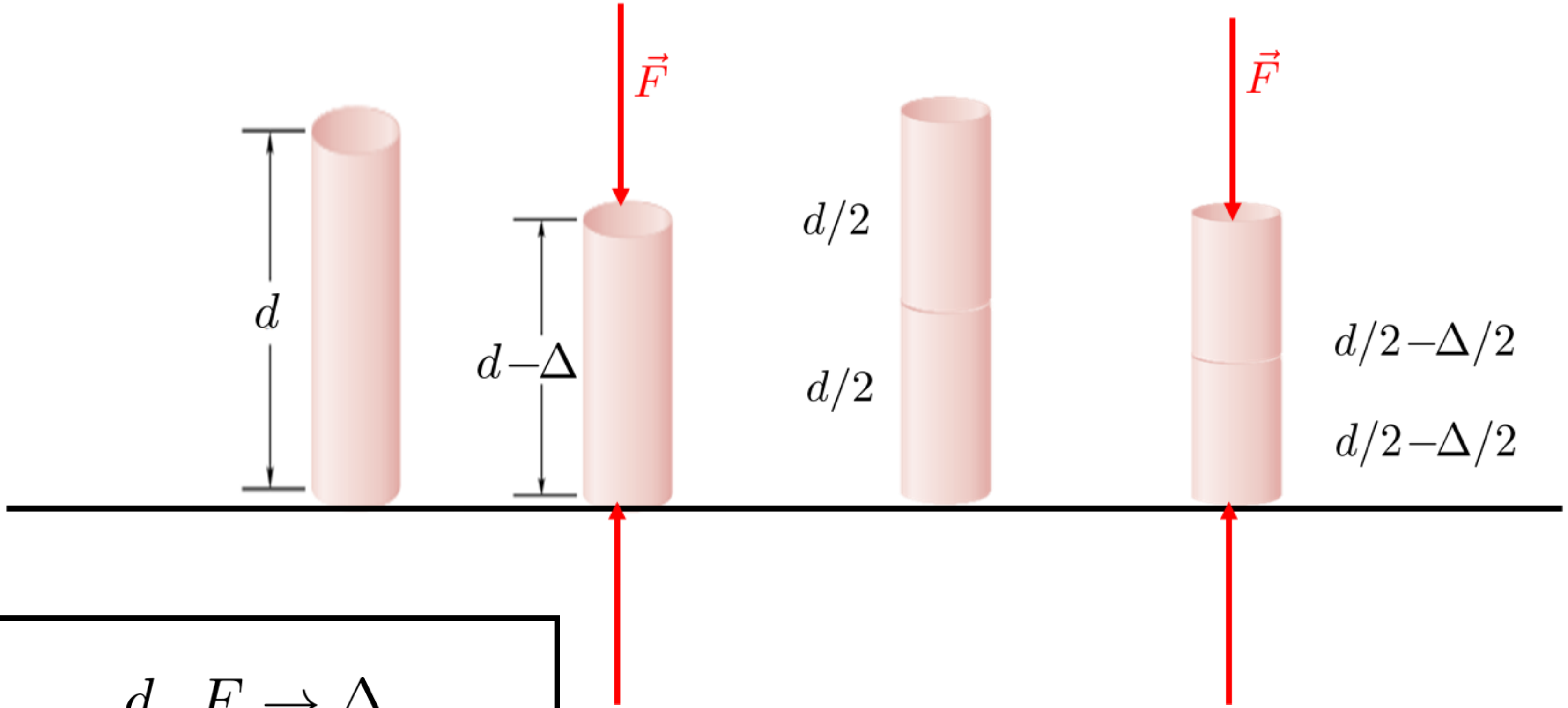
V praxi teda obvykle vystačíme pracovať s efektívnymi teóriami, ale postup poznania fyziky nám umožní vnímať napríklad „mystické konštanty" v efektívnych rovniciach ako vypočítateľné v teórii hlbšej úrovne. Tak napríklad v treťom ročníku sa naučíme vypočítať viskozitu vzduchu výpočtom na molekulovej úrovni.

Kŕčovité snaženie sa o výpočet z najhlbších princípov nemusí byť vždy dobrý nápad. Podobne ako prvoprincípový kompliment typu „Slečna, vy ste najkrajšia hrča kvarkov a elektrónov, akú som doteraz poznal!" nemusí vyvolať pozitívnu reakciu.

Pružnosť – efektívny popis deformácie tuhej látky



reakcia podložky, nosník stojí, teda reakcia podložky musí byť rovnako veľká ako zhora pôsobiaca sila



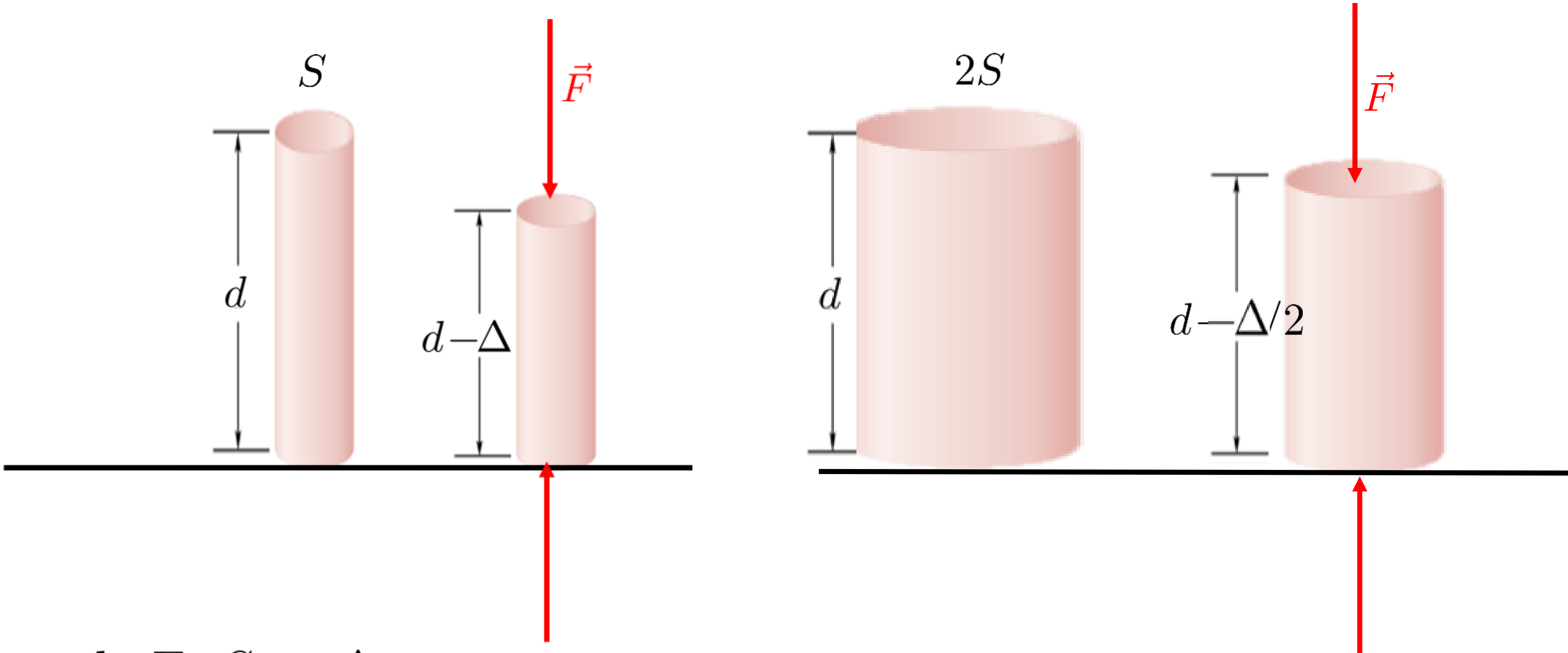
$$d,\ F \to \Delta$$

$$d/2,\ F \to \Delta/2$$

+ predpoklad linearity (lineárny vzťah medzi silou a deformáciou sa volá **Hookov zákon**):

$$\frac{\Delta}{d} \propto F$$

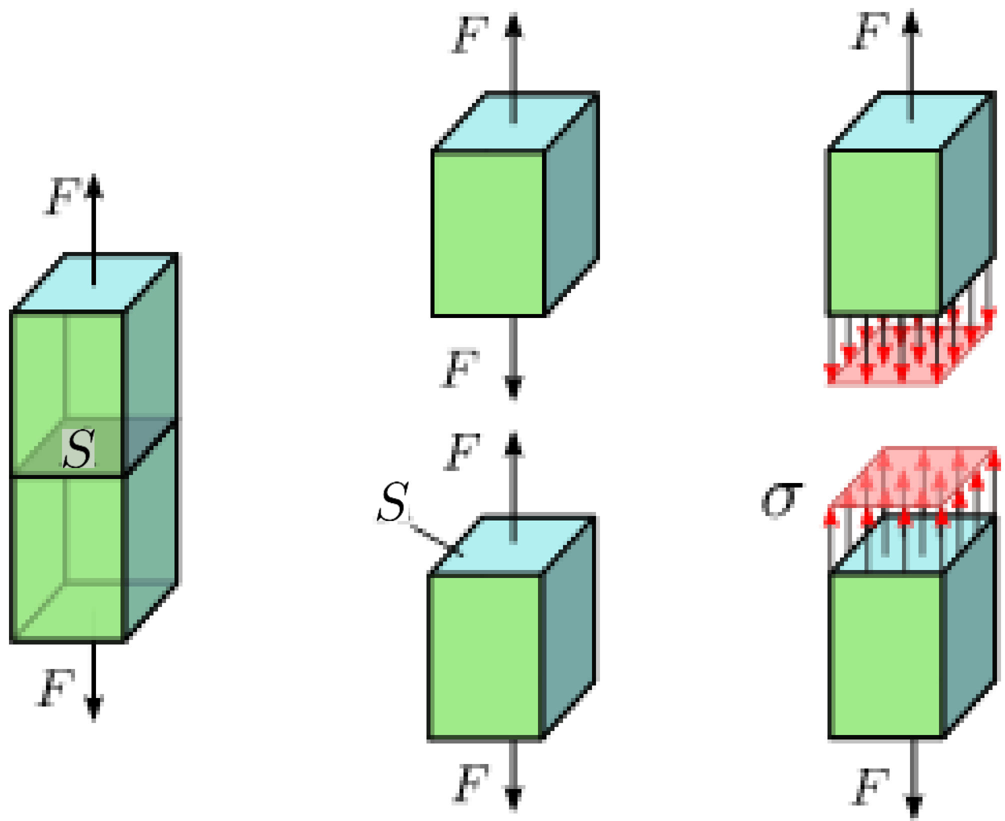
relatívna deformácia je úmerná sile



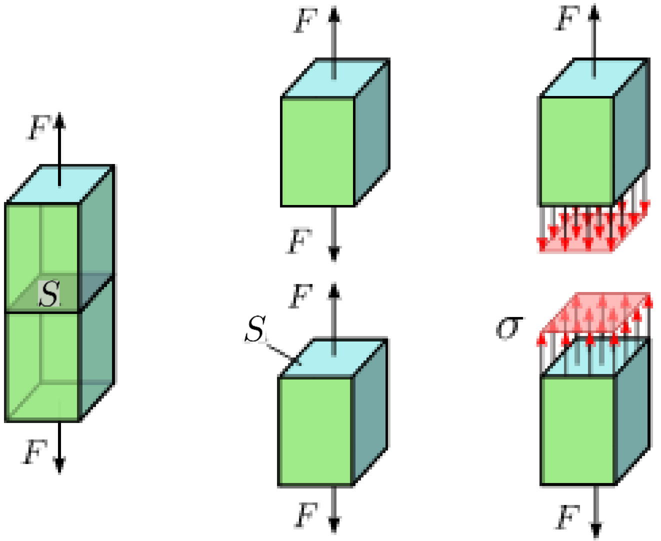
$$d,\ F,\ S \rightarrow \Delta$$
$$d,\ F,\ 2S \rightarrow \Delta/2$$

$$\frac{\Delta}{d} \propto \frac{F}{S} \equiv \sigma$$

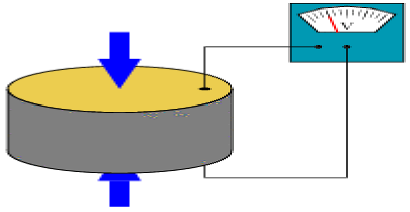
Relatívna deformácia je úmerná napätiu (sila na plochu). V tomto prípade je sila kolmá na uvažovanú plochu, takému napätiu sa hovorí tlak. Keby sila mala opačný smer, hovorili by sme ťah.

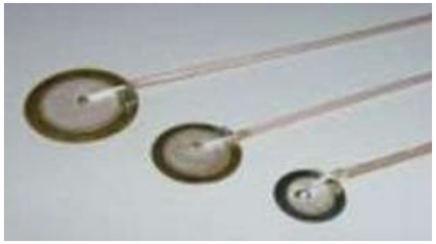


Na tom to obrázku je príklad namáhania nosníka ťahom. Napätie sa prenáša dovnútra nosníka. Ak si ho predstavíme ako zložený z dvoch častí, potom celková sila na hornú časť musí byť nulová, lebo objekt stojí, preto sa vnútorné sily ustália tak, že spodná časť pôsobí na hornú rovnakým ťahom ako je vonkajší ťah na hornú podstavu. Podľa akcie a reakcie preto aj horná časť musí pôsobiť na spodnú rovnakým ťahom, teda takým istým ako je ťah na hornú podstavu. Napätie sa teda v látke prenáša, na myslenú plochu vnútri nosníka pôsobí rovnaké napätie ako je vonkajšie napätie.



Hovoriť o napätí na vnútornej ploche v nosníku nie je len teoretická abstrakcia, to napätie sa dá naozaj merať vhodným tenziometrom.
Tenziometer môže pracovať napríklad na báze piezoelektrického javu (ale aj na iných princípoch).





Ak piezoelektrický kryštál umiestnime medzi dve kovové platne akoby dosky kondenzátora a podrobíme tlaku, na doskách môžeme namerať napätie úmerné tlakom vyvolanej relatívnej deformácii. Tenziometer teda vlastne meria deformáciu ale tá je úmerná mechanickému napätiu.
Na fotografii sú komerčné tenziometre. Taký tenziometer môžeme v princípe umiestniť vnútri nejakého objektu, napríklad zaliať do betónu a na vyvedených vodičoch merať elektrické napätie a teda relatívnu lokálnu deformáciu či mechanické napätie.

Teraz budeme vlnovú rovnicu riešiť analyticky. Pomocou Fourierovho radu.

Matematická vsuvka: Fourierov rozvoj

Veta: Každú "slušnú" funkciu $U(x)$, definovanú na intervale $\langle 0, L\rangle$ ktorá spĺňa okrajové podmienky $U(0) = U(L) = 0$ možno vyjadriť v tvare nekonečného Fourierovho radu

$$U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\frac{\pi n}{L} x)$$

Pre Fourierove sinsusovky platí

$$\int_0^L \sin(\frac{\pi n}{L} x) \sin(\frac{\pi m}{L} x) dx = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq n \\ \frac{L}{2} & \text{if } m = n \end{cases}$$

preto možno pre zadanú funkciu $U(x)$ koeficienty c_n vyjadriť v tvare

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L U(x) \sin(\frac{\pi n}{L} x) dx$$

Vlnová rovnica: analytické riešenie

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \text{ s okrajovou podmienkou } \ u(t,0) = u(t,L) = 0$$

Geniálny Fourierov nápad: hľadajme riešenie v tvare

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin(\frac{\pi n}{L} x)$$

Po dosadení do vlnovej rovnice dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{c}_n(t) \sin(\frac{\pi n}{L} x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2 n^2 c^2}{L^2} c_n(t) \sin(\frac{\pi n}{L} x)$$

Porovnaním koeficientov na ľavej a pravej strane dostaneme rovnice

$$\ddot{c}_n(t) = -\omega_n^2 c_n(t), \quad \text{kde} \ \ \omega_n = \frac{\pi n c}{L}$$

Sú to rovnice ako keby pre harmonické oscilátory

$$\ddot{c}_n(t) = -\omega_n^2 c_n(t), \quad \text{kde} \quad \omega_n = \frac{\pi n c}{L}$$

všeobecné riešenie má tvar

$$c_n(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$$

teda všeobecné riešenie vlnovej rovnice na intervale $\langle 0, L \rangle$ je

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \sin(\frac{\pi n}{L} x), \quad \text{kde} \quad \omega_n = \frac{\pi n c}{L}$$

Teraz musíme nájsť koeficienty a_n, b_n tak, aby boli splnené počiatočné podmienky

$$u(t,x)\Big|_{t=0} = U(x)$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\Bigg|_{t=0} = V(x)$$

Stačí si uvedomiť, že zadané funkcie $U(x), V(x)$ tiež môžeme vyjadriť v tvare Fourierovho radu

$$U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(\frac{\pi n}{L} x)$$

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin(\frac{\pi n}{L} x)$$

$$\alpha_n = \frac{L}{2} \int_0^L U(x) \sin(\frac{\pi n}{L} x) dx$$

$$\beta_n = \frac{L}{2} \int_0^L V(x) \sin(\frac{\pi n}{L} x) dx$$

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \sin(\frac{\pi n}{L} x), \quad \text{kde} \quad \omega_n = \frac{\pi n c}{L}$$

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(\omega_n t)+b_n\sin(\omega_n t))\sin(\frac{\pi n}{L}x),\quad \text{kde}\quad \omega_n=\frac{\pi n c}{L}$$

$$v(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n\omega_n\sin(\omega_n t)+b_n\omega_n\cos(\omega_n t))\sin(\frac{\pi n}{L}x)$$

$$U(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin(\frac{\pi n}{L}x)\qquad V(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sin(\frac{\pi n}{L}x)$$

a potom už ľahko vyjadríme riešenie vlnovej rovnice so zadanými okrajovými a počiatočnými podmienkami ako

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos(\omega_n t)+\frac{1}{\omega_n}\beta_n\sin(\omega_n t))\sin(\frac{\pi n}{L}x),\quad \text{kde}\quad \omega_n=\frac{\pi n c}{L}$$

Štandardne sa ešte zavádza označenie $\quad k_n=\frac{\pi n}{L},\quad \omega_n=ck_n$

takže dostaneme

$$\boxed{u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos(\omega_n t)+\frac{1}{\omega_n}\beta_n\sin(\omega_n t))\sin(k_n x)}$$

- Ako vyzerá Fourierov rozvoj funkcie na úsečke dĺžky L, ktorá má na konci úsečky nulové hodnoty
- Integrál zo súčinu Fourierových sinusoviek na úsečke
- Ako sa nájdu koeficient rozvoja funkcie do sinusoviek na úsečke
- Ako vyzerajú frekvencie normálnych módov vlnovej rovnice na úsečke

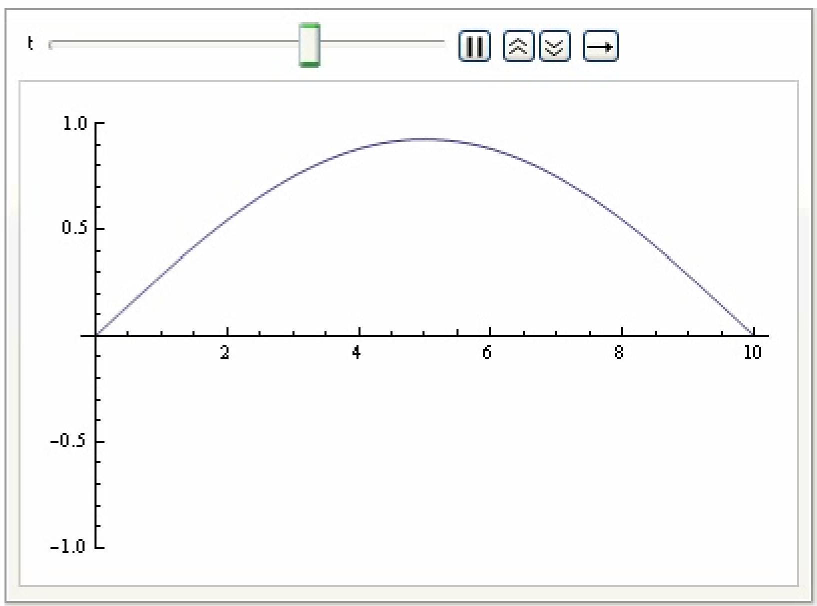
Vlnová rovnica: charakter riešení

Vyšetrime vlastnosti najjednoduchšieho riešenia

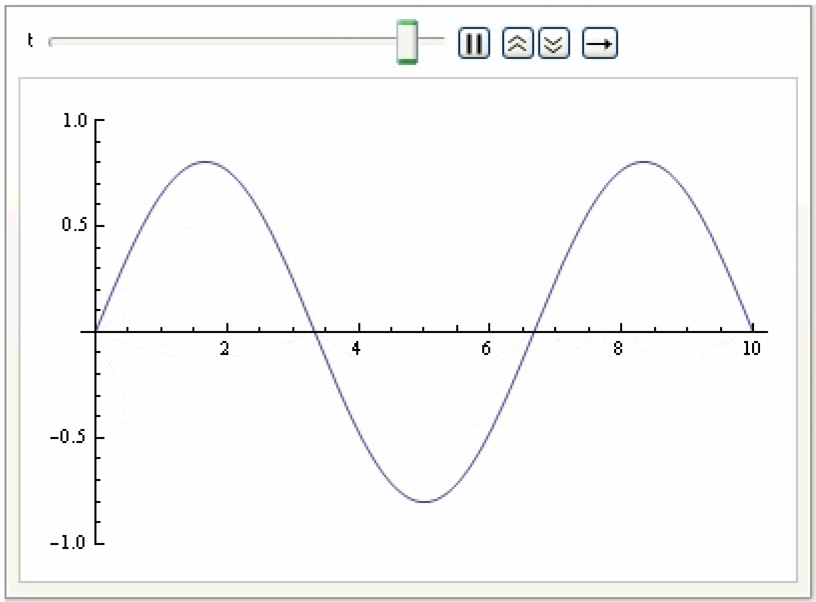
$$u(t,x) = \alpha_1 \cos(\omega_1 t) \sin(k_1 x)$$

In[9]:=
```
Animate[Plot[Sin[omega t] Sin[k x], {x, 0, L}, PlotRange → {-1., 1.}],
  {t, 0, 10}]
```

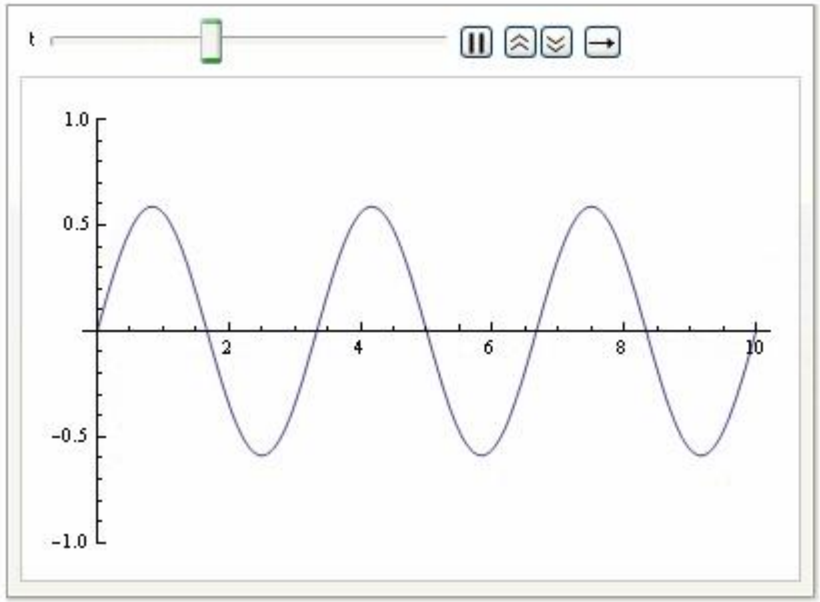
Out[9]=



```
Animate[Plot[Sin[omega3 t] Sin[k3 x], {x, 0, L}, PlotRange → {-1., 1.}],
 {t, 0, 10}]
```

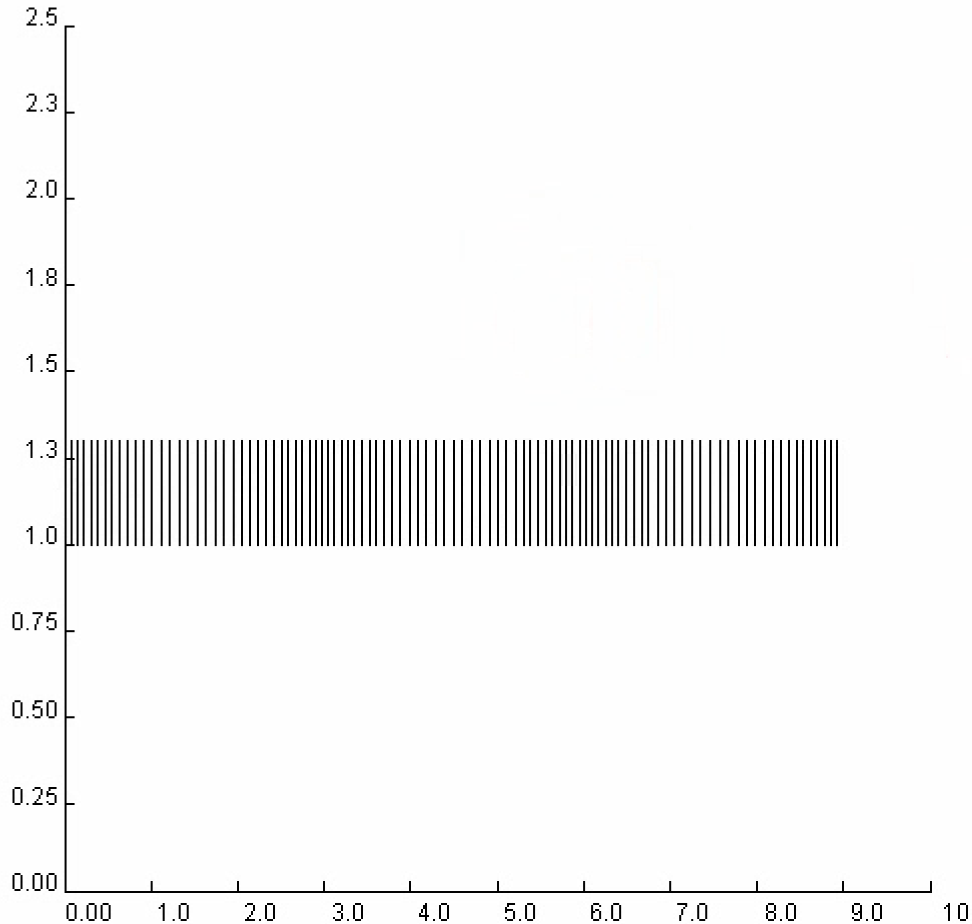


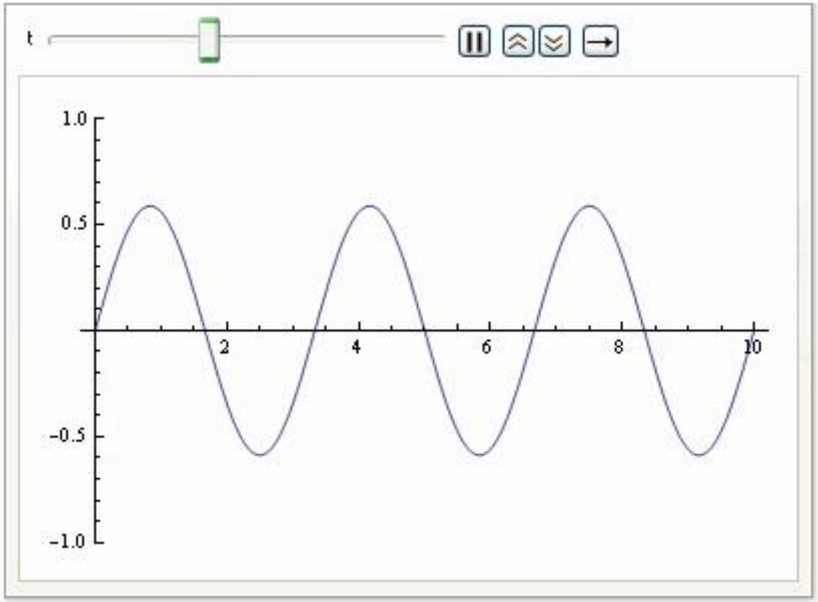
```
Animate[Plot[Sin[omega6 t] Sin[k6 x], {x, 0, L}, PlotRange → {-1., 1.}],
 {t, 0, 10}]
```



Pozor, tyč nekmitá v priečnom smere, ostáva stále rovná. Graf ukazuje veľkosť posunutia v pozdĺžnom smere miesta so súradnicou x v rozličných časoch

Toto je animácia pozdĺžnych posunutí rezov tyče



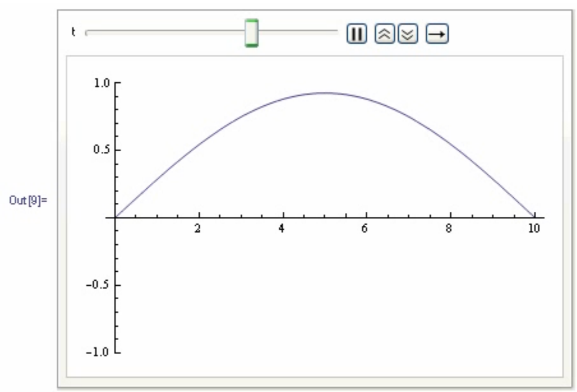


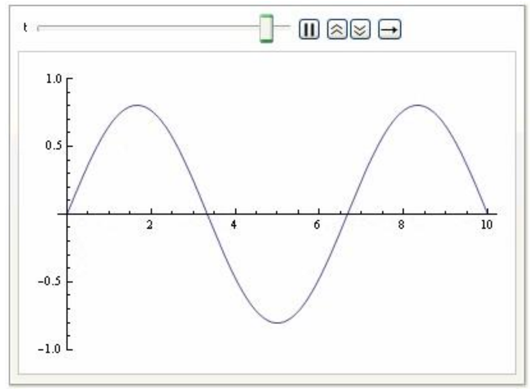
Video ukazuje, že každý rez tyče kmitá ako oscilátor, stále rovnakou frekvenciou a amplitúdou. Niektoré rezy tyče nekmitajú vôbec, to sú takzvané uzly. Riešenie

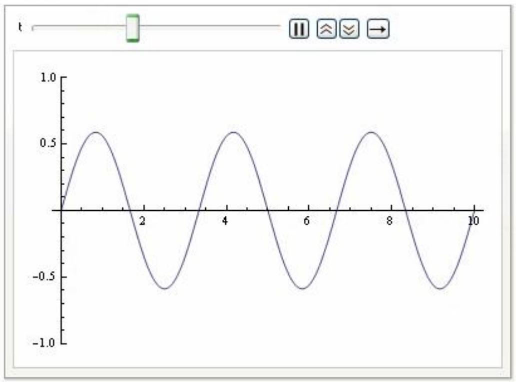
$$u(t,x) = \alpha_n \cos(\omega_n t) \sin(k_n x)$$

popisuje tzv. **stacionárne kmity tyče (stojatú vlnu).** Slovom stojatý máme na mysli to, že po tyči sa nepremiestňuje energia ani amplitúda oscilácií. Všimnime si, že stojatá vlna je monofrekvenčná, všetky body kmitajú jednou a tou istou frekvenciou

$$u(t,x) = \alpha_n \cos(\omega_n t)\sin(k_n x) \qquad\qquad k_n = \frac{\pi n}{L}, \quad \omega_n = c k_n$$







12

$$k_1 = \frac{\pi}{L},\ \lambda_1 = 2L \qquad k_3 = \frac{3\pi}{L},\ \lambda_3 = \frac{2L}{3} \qquad k_6 = \frac{6\pi}{L},\ \lambda_3 = \frac{2L}{6}$$

Index n pri $k_n = \frac{\pi n}{L}$ určuje počet priestorových polperiód kmitov, súvis s vlnovou dĺžkou je

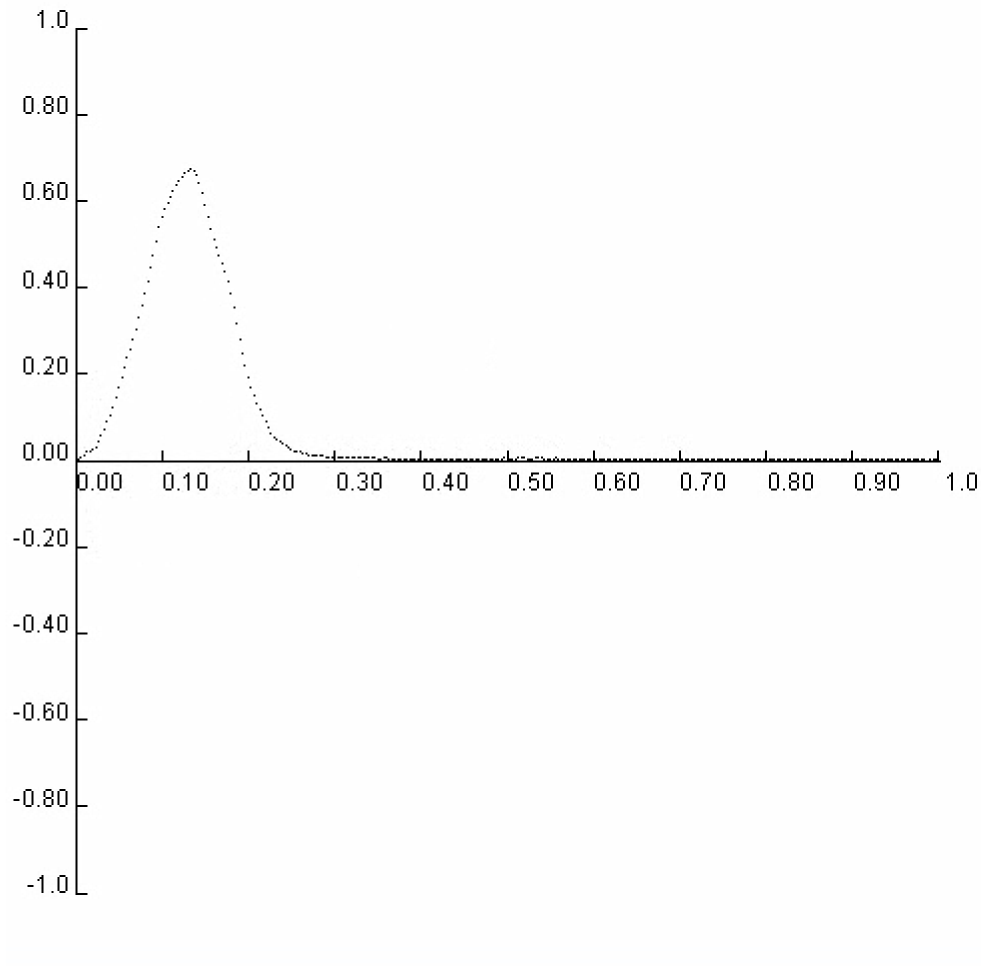
$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}$$

$$\omega_n = c k_n = c\frac{2\pi}{\lambda_n}$$

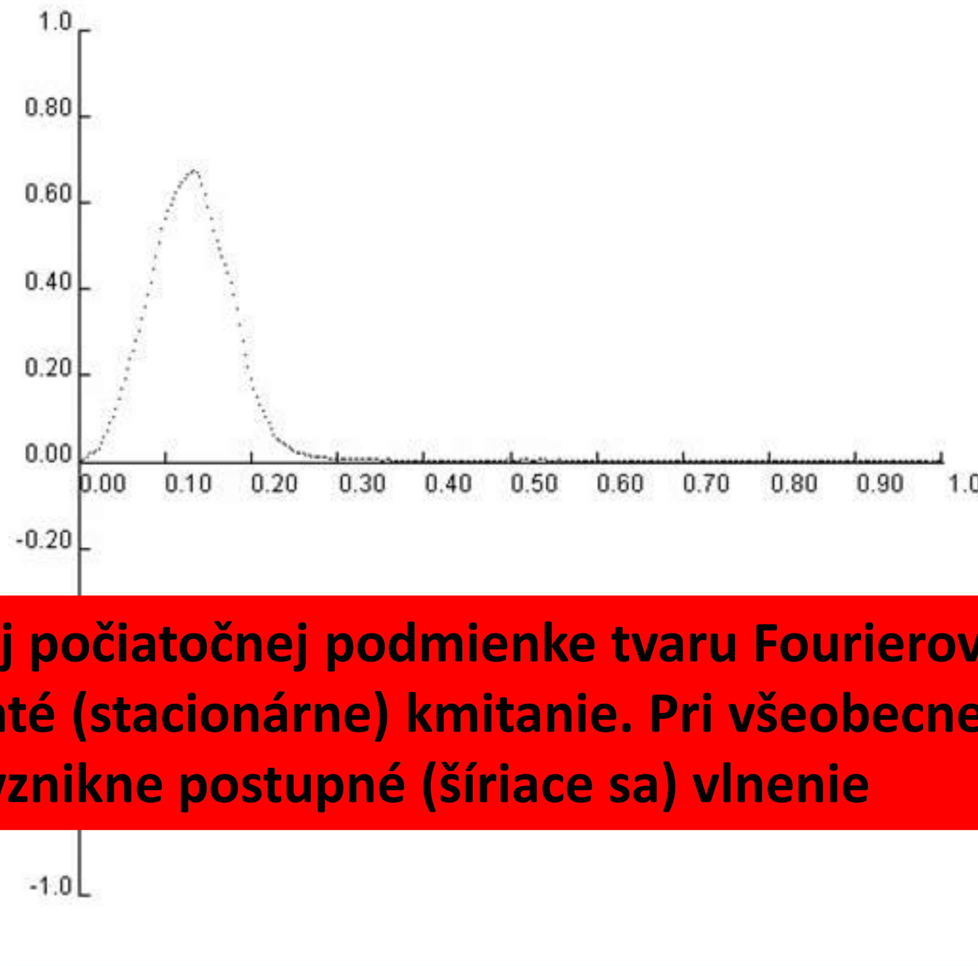
$$c = \frac{\omega_n \lambda_n}{2\pi} = \frac{2\pi}{T}\frac{\lambda_n}{2\pi} = \frac{\lambda_n}{T}$$

c má rozmer rýchlosti !

Ukážka nestacionárneho vlnenia
Na videu je pohybujúca sa vlna



Ukážka nestacionárneho vlnenia
Na videu je pohybujúca sa vlna



Pri špeciálnej počiatočnej podmienke tvaru Fourierovej sínusovky vznikne stojaté (stacionárne) kmitanie. Pri všeobecnej počiatočnej podmienke vznikne postupné (šíriace sa) vlnenie

$$\cos\theta\sin\varphi = \frac{\sin(\theta+\varphi)-\sin(\theta-\varphi)}{2}$$

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \cos(\omega_1 t)\sin(k_1 x)\\
&= \frac{1}{2}(\sin(\omega_1 t + k_1 x) - sin(\omega_1 t + k_1 x))\\
&= \frac{1}{2}(\sin(\omega_1(t+\frac{k_1}{\omega_1}x)) - \sin(\omega_1(t-\frac{k_1}{\omega_1}x)))\\
&= \frac{1}{2}(\sin(\omega_1(t+\frac{x}{c})) - \sin(\omega_1(t-\frac{x}{c})))
\end{aligned}$$

Všimnime si, že platí

$$\sin(\omega_1(t-\frac{x}{c})) = \sin(\omega_1((t+\tau)-\frac{x+c\tau}{c}))$$

Posunutie bodu x v čase t = Posunutie bodu $x + c\tau$ v čase $t + \tau$

Bod vzdialenejší vpravo o $c\tau$ má také isté posunutie v čase neskoršom o τ teda popisuje to vzruch (vlnu) šíriacu sa zľava doprava rýchlosťou c. Obdobne prvá sínusovka popisuje vlnenie šíriace sa sprava doľava.

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \cos(\omega_1 t)\sin(k_1 x) \\
&= \frac{1}{2}(\sin(\omega_1(t+\frac{x}{c})) - \sin(\omega_1(t-\frac{x}{c})))
\end{aligned}
$$

Fourierova stojatá vlna vzniká teda superpozíciou dvoch postupných vĺn, jednej šíriacej sa zľava doprava a druhej šíriacej sa sprava doľava. Tie postupné vlny majú v tomto prípade veľmi špeciálny tvar, takže sa **poskladajú na stojatú vlnu**.

Použitím identít pre súčiny trigonometrických funkcií **možno ľubovoľné riešenie vlnovej rovnice napísať ako superpozíciu dvoch postupných vĺn**, jednej šíriacej sa zľava doprava a druhej šíriacej sa sprava doľava. Tie postupné vlny ale všeobecne nemajú taký špeciálny tvar, aby sa poskladali na stojatú vlnu. Spravidla sa poskladajú na vlnenie striedavo sa pohybujúce zľava doprava, po odraze od konca sprava doľava a po ďalšom odraze zase zľava doprava ... Videli sme to na videu.

Vlnová rovnica všeobecne

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} \quad = \quad c^2 \frac{\delta^2 u(t,x)}{\delta x^2}$$

Majme ľubovoľnú funkciu jednej premennej

$$f(\xi)$$

a vyrobme z nej funkciu dvoch premenných t, x takto

$$f(t - \frac{x}{c})$$

Rovno vidím, že takáto funkcia spĺňa vlnovú rovnicu a podobne ju spĺňa aj funkcia

$$g(t + \frac{x}{c})$$

kde $g(\xi)$ je (iná) ľubovoľná funkcia jednej premennej

Nemôžem si ale myslieť, že mnou hľadanú funkciu deformácie

$$u(t,x)$$

budem písať ako

$$u(t,x) = f(t - \frac{x}{c})$$

Lebo funkcia deformácie musí okrem vlnovej funkcie spĺňať aj okrajové podmienky

$$u(t,0) = 0, \quad u(t,L) = 0, \quad \text{pre všetky časy t}$$

Skúsme ale hľadať riešenie v tvare

$$u(t,x) = f(t - \frac{x}{c}) + g(t + \frac{x}{c})$$

a nájdime, aké podmienky musia spĺňať (inak ľubovoľné) funkcie f, g, aby boli identicky splnené okrajové podmienky

Dostaneme

$$u(t,0) = f(t) + g(t) = 0$$

Takže funkcie f a g spolu súvisia takto

$$f = -g$$

máme teda

$$u(t,x) = f(t - \frac{x}{c}) - f(t + \frac{x}{c})$$

teraz podmienka

$$u(t,L) = 0, \quad \text{pre všetky časy t}$$

$$u(t,L) = f(t - \frac{L}{c}) - f(t + \frac{L}{c}) = 0 \quad \text{pre všetky t}$$

Zjavne je treba použiť periodickú funkciu s periódou $T = \dfrac{2L}{cn}$, napríklad

$$f(\xi) = \cos\left(\frac{2\pi}{\frac{2L}{nc}}\xi\right)$$

Potom dostaneme

$$\begin{aligned} u(t,x) &= f(t-\frac{x}{c}) + g(t+\frac{x}{c}) = \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{\frac{2L}{nc}}(t-\frac{x}{c})\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{\frac{2L}{nc}}(t+\frac{x}{c})\right) = \\ &= 2\sin(\frac{\pi c n}{L}t)\sin(\frac{\pi n}{L}x) \end{aligned}$$

Vo všeobecnosti môžeme použiť ľubovoľnú superpozíciu takých riešení (v časovej závislosti môže byť aj kosínus), takže dostávame inou cestou to, čo už poznáme.

Zhrňme naše poznatky o vlnovej rovnici

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\delta^2 u(t,x)}{\delta x^2}$$

s okrajovými podmienkami

$$u(t,0) = 0, \quad u(t,L) = 0, \quad \text{pre všetky časy t}$$

Všeobecné riešenie môžeme písať v tvare superpozície špeciálnych stacionárnych riešení

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \sin(\frac{\pi n}{L} x), \quad \text{kde} \quad \omega_n = \frac{\pi n}{L}$$

Stacionárne riešenia sú

- monofrekvenčné
- tvoria úplný systém, teda každé riešenie sa dá písať ako ich superpozícia
- sú „ortogonálne“, takže platí

$$\int_0^L \sin(\frac{\pi n}{L} x) \sin(\frac{\pi m}{L} x) dx = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq n \\ \frac{L}{2} & \text{if } m = n \end{cases}$$

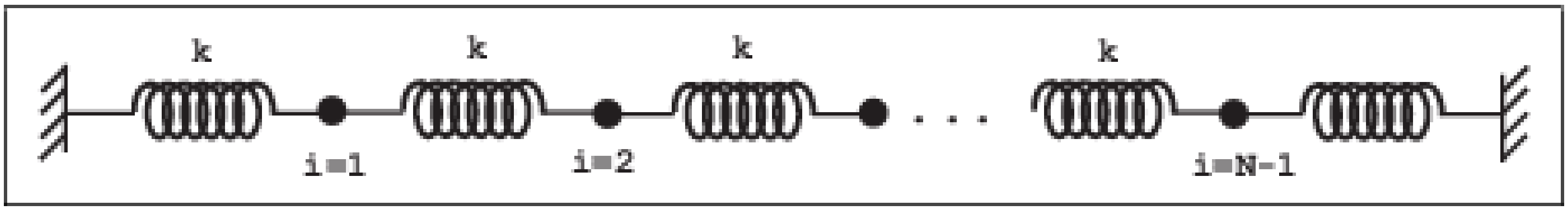
túto vlastnosť využívame pri hľadaní koeficientov rozvoja z počiatočných podmienok

- Zapíšte všeobecné riešenie vlnovej rovnice na úsečke (s nulovými okrajovými podmienkami) ako superpozíciu stacionárnych kmitov
- Uveďte charakteristiky stacionárnych kmitov

Diskrétna retiazka oscilátorov

Po tom, čo sme sa potrápili so spojitou vlnovou rovnicou, vráťme sa k diskrétnej retiazke oscilátorov

Uvažujme jednorozmerný systém $N-1$ častíc rovnakej hmotnosti m navzájom poprepájaných pružinami rovnakej tuhosti k. Krajné častice nech sú rovnakými pružinami spojené s pevnými stenami



Napíšeme teraz pohybové rovnice pre tento systém. Označme výchyľku i-tej častice z jej rovnovážnej polohy ako u_i, pre $i = 1, 2, ...(N-1)$. A zaveďme ešte pomocné konštanty $u_0 = 0$, $u_n = 0$. Potom pohybové rovnice sú (pre $i = 1, 2, ...(N-1)$)

$$m\ddot{u}_i = -k(u_i - u_{i-1}) - k(u_i - u_{i+1})$$

Je to systém $n-1$ navzájom viazaných lineárnych diferenciálnych rovníc druhého rádu pre $N-1$ neznámych funkcií $u_i(t)$.

Spojitý prípad, ktorý sme riešili bol limitou diskrétnej retiazky, takže skúsime predpokladať, že riešenia diskrétneho modelu budú v niečom podobné na riešenia spojitého modelu. Skúsme teda postupovať tak, že nájdeme najprv špeciálne monofrekvenčné stacionárne riešenia, ktoré sú navyše faktorizované, teda vyzerajú ako súčin funkcie času a funkcie priestorovej premennej, ktorej úlohu hrá index i.

Priestorová časť spojitých monofrekvenčných riešení boli sínusovky, takže skúsime čosi ako diskretizovavé sínusovky. Hľadajme teda špeciálne riešenia v tvare

$$u_i^{(n)}(t) = \exp(-\hat{i}\omega_n t)\sin(\frac{\pi n}{N} i) \quad \text{pre} \quad i = 0, 1, 2, ..., N$$

Poznamenajme že používanie komplexných čísel je len pomocný trik, aby sme nemuseli používať priveľa goniometrických vzťahov, skutočné reálne fyzikálne riešenia skonštruujeme nakoniec z komplexných funkcií vhodnými lineárnymi kombináciami.

$$m\ddot{u}_i = -k(u_i - u_{i-1}) - k(u_i - u_{i+1})$$

$$m\ddot{u}_i = -2ku_i + k(u_{i-1} + u_{i+1})$$

Vyskúšame teda riešenie v tvare (komplexnú jednotku píšeme ako $\hat{i}$, aby sa to neplietlo s indexom i.

$$u_i^{(n)}(t) = \exp(-\hat{i}\omega_n t)\sin(\frac{\pi n}{N} i)$$

Po dosadení do sústavy rovníc dostaneme

$$\begin{aligned}
-m\omega_n^2 \sin(\frac{\pi n}{N} i) &= -2k\sin(\frac{\pi n}{N} i) + \\
&\quad +k(\sin(\frac{\pi n}{N}(i-1)) + \sin(\frac{\pi n}{N}(i+1)) \\
-m\omega_n^2 \sin(\frac{\pi n}{N} i) &= -2k\sin(\frac{\pi n}{N} i) + \\
&\quad +2k\sin(\frac{\pi n}{N} i)\cos(\frac{\pi n}{N}) \\
\omega_n^2 &= 2\frac{k}{m}(1 - \cos(\frac{\pi n}{N}))
\end{aligned}$$

Teda navrhnutý tvar je naozaj riešením, ak ω_n volíme podľa práve odvodeného vzťahu.

Našli sme teda riešenia

$$u_i^n(t) = \exp(-\hat{i}\omega_n t)\sin(\frac{n\pi}{N}i); \quad \omega_n^2 = 2\frac{k}{m}(1-\cos(\frac{\pi n}{N}))$$

Pre spojitý prípad sme potrebovali takéto riešenia pre ľubovoľné celé číslo n, teda bolo nekonečne veľa takýchto špeciálnych riešení.

Vzniká otázka, či aj pre diskrétnu retiazku oscilátorov budeme využívať nájdené špeciálne riešenia pre ľubovoľné prirodzené číslo n, teda nekonečne veľa špeciálnych riešení. Navyše sme dostali vyjadrenie pre kvádráty frekvencií, otázka je, či budeme potrebovať aj „záporné omegy“.

Tieto otázky si zodpovieme, keď si dobre uvedomíme, načo tieto špeciálne riešenia potrebujeme.

Potrebujeme ich na predpovedanie budúcnosti. Pri zadaných počiatočných podmienkach

$$u_i(t=0) = U_i; \quad \dot{u}_i(t=0) = V_i$$

chceme príslušné riešenie písať ako

$$u_i(t) = \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{?}(a_n + \hat{i}b_n)u_i^{(n)}(t)$$

Zatiaľ nevieme, po aké veľké n pobeží tá suma.

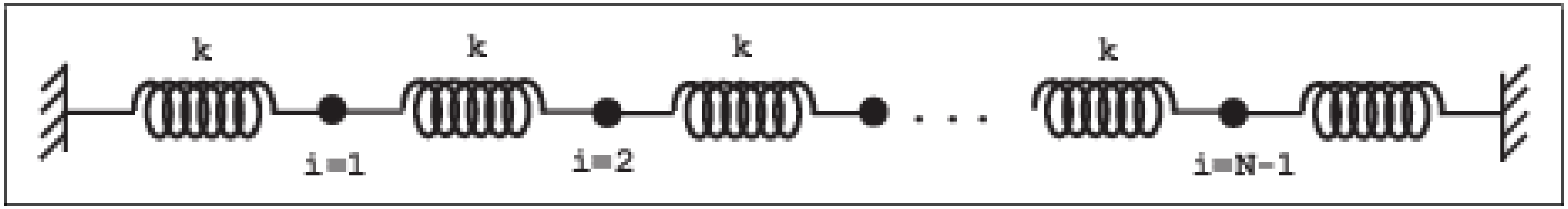
$$u_i(0) = \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{?}(a_n + \hat{i}b_n)u_i^{(n)}(0) = \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{?}(a_n + \hat{i}b_n))\sin(\frac{n\pi}{N}i)$$

$$\dot{u}_i(0) = \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{?}(a_n + \hat{i}b_n)\dot{u}_i^{(n)}(0) = \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{?}(a_n + \hat{i}b_n))(-\hat{i}\omega_n)\sin(\frac{n\pi}{N}i)$$

$$u_i(0) = \sum_{n=1}^{\tilde{N}} a_n \sin(\frac{n\pi}{N}i) = U_i$$

$$\dot{u}_i(0) = \sum_{n=1}^{\tilde{N}} b_n\omega_n \sin(\frac{n\pi}{N}i) = V_i$$

Namiesto otáznika sme ako hornú hranicu v sume písali zatiaľ neznáme číslo $\tilde{N}$. Poznamenajme, že index i v týchto rovniciach prebieha hodnoty $1,2,3, \ldots (N-1)$.



$$u_i(0) = \sum_{n=1}^{\tilde{N}} a_n \sin(\frac{n\pi}{N} i) = U_i$$

$$\dot{u}_i(0) = \sum_{n=1}^{\tilde{N}} b_n \omega_n \sin(\frac{n\pi}{N} i) = V_i$$

Máme teda $2(N-1)$ rovníc o $2\widetilde{N}$ neznámych a_n, b_n. Rovnice pre a_n a b_n sú ale nezávislé, takže máme dve sady rovníc. Prvá je $(N-1)$ rovníc o $\widetilde{N}$ neznámych a_n, druhá sada je $(N-1)$ rovníc o $\widetilde{N}$ neznámych b_n.

Sú to systémy lineárnych rovníc s pravou stranou. Koeficienty pri neznámych sú v oboch sadách rovnaké, sú to čísla

$$A_{in} = \sin(\frac{\pi n}{N} i)$$

Takže prvá sada rovníc znie

$$\sum_{n=1}^{\tilde{N}} A_{in} a_n = U_i$$

Skúsme si tipnúť, ako to celé dopadne. Vo fyzike očakávame jednoznačnú predpoveď budúcnosti, teda jednoznačné riešenie pre koeficienty a_n. Najjednoduchšie by to bolo tak, že $\widetilde{N} = N$, teda rovnaký počet rovníc ako neznámych, pričom, aby to fungovalo, tie rovnice musia byť nezávislé.

Veľmi sa to všetko podobá na spojitý prípad, kde sme robili Fourierove rozvoje a tam kľúčom k tomu, že to bolo ľahké, bol vzťah ortogonality

$$\int_0^L \sin(\frac{\pi n}{L}x)\sin(\frac{\pi m}{L}x)dx = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq n \\ \frac{L}{2} & \text{if } m = n \end{cases}$$

Integrál je suma infinitezimálnych malých čísel. Skúsme si tipnúť, že v diskrétnom prípade by sa to mohlo modifikovať na diskrétnu sumu

$$\sum_{i=0}^{N} \sin(\frac{\pi n}{N}i)\sin(\frac{\pi m}{N}i) = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq n \\ ? & \text{if } m = n \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{N} \sin(\frac{\pi n}{N}i)\sin(\frac{\pi m}{N}i) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N}\Big(\cos(\frac{\pi(n-m)}{N}i) - \cos(\frac{\pi(n+m)}{N}i)\Big) = ?$$

Nevediac ako ďalej, začal som na Wikipédii, kde som našiel elegantnú Lagrangeovu trigonometrickú identitu

$$\sum_{n=1}^{N} \cos n\theta = -\frac{1}{2} + \frac{\sin(N+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}$$

jej dôkaz som si tiež vygooglil

If $S = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$, then

$$S - zS = (1 + z + z^2 + \cdots + z^n) - (z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n+1}) = 1 - z^{n+1}.$$

Therefore, $S = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$, with $z \neq 1$. Equating both expressions of S, we have

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Substitute $z = e^{i\theta}$, with $0 < \theta < 2\pi$, into the expression, and we get

$$1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \cdots + e^{ni\theta} = \frac{1 - e^{(n+1)i\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

The real component of the left side is $1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta$. For the right side, the real component is (skipping a few steps on this one, but it is)

$$\frac{1}{2} + \frac{\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

If we equate the real components from both sides, we get

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

Múdreho toto malo napadnúť hneď, že suma tých kosínusov je v komplexných číslach geometrická postupnosť! Eulerova formula je sila!

Vrátiac sa k nášmu problému

$$\sum_{i=0}^{N} \sin(\frac{\pi n}{N} i) \sin(\frac{\pi m}{N} i) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N} \Big(\cos(\frac{\pi(n-m)}{N} i) - \cos(\frac{\pi(n+m)}{N} i) \Big) = ?$$

dostaneme

$$\boxed{\sum_{i=0}^{N} \sin(\frac{\pi n}{N} i) \sin(\frac{\pi m}{N} i) = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq n \\ \frac{N-1}{2} & \text{if } m = n \end{cases}}$$

Koeficienty riešenia z počiatočných podmienok potom dostaneme ľahko

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \sin(\frac{n\pi}{N} i) = U_i \qquad \sum_{n=0}^{N} b_n \omega_n \sin(\frac{n\pi}{N} i) = V_i$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{N-1} \sum_{i=0}^{N} U_i \sin(\frac{n\pi}{N} i) \qquad b_n = \frac{2}{\omega_n (N-1)} \sum_{i=0}^{N} V_i \sin(\frac{n\pi}{N} i)}$$

K ľubovoľným počiatočným podmienkam sme teda našli riešenie, čím sme nepriamo dostali odpoveď na otázky, ktoré sme sformulovali takto:

Vzniká otázka, či aj pre diskrétnu retiazku oscilátorov budeme využívať nájdené špeciálne riešenia pre ľubovoľné prirodzené číslo n, teda nekonečne veľa špeciálnych riešení. Navyše sme dostali vyjadrenie pre kvadráty frekvencií, otázka je, či budeme potrebovať aj „záporné omegy".

Na nájdenie riešenia nám stačilo $N-1$ špeciálnych riešení. To znamená, že tie riešenia tvoria úplný systém a všetky ostatné špeciálne riešenia, ktoré sme našli nie sú už nezávislé, dajú sa vyjadriť pomocou prvých $N-1$ špeciálnych riešení. Ako to vieme? Nuž, sú to riešenia, zodpovedajú im nejaké počiatočné podmienky a teda vieme ich zostaviť pomocou prvých $N-1$ riešení. Tento „dôkaz" nebol matematický, ale **fyzikálny**. Viera v predpovedateľnosť sveta zo znalosti počiatočného stavu žiada jednoznačnosť riešenia pohybových rovníc pri určitých počiatočných podmienkach. Je na matematikoch, aby dokázali, že Newtonove rovnice spĺňajú takú podmienku jednoznačnosti. **Fyzikálni prvolezci sa musia starať o matematický dôkaz jednoznačnosti. My, ktorí lezieme už za nimi sme uverili, že vytýčená cesta je preverená a môžeme fyzikálne technológie používať, zatĺcť fyzikálnu skobu a zveriť sa jej. Keby to náhodou s nami spadlo, znamená to, že fyzikálna cesta potrebuje korekcie. Párkrát to v histórii spadlo a noví geniálni prvolezci našli lepšie skoby, doplnili napríklad Newtonovu mechaniku o kvantovú mechaniku a teóriu relativity. Staré skoby sme nezahodili, len upresnili v akých skalách ich možno s dôverou používať a v akých skalách treba nové skoby.**

Súčasne vidíme, že nepotrebujeme ani riešenia so „zápornými omegami“. Ľubovoľné počiatočné podmienky sme dokázali splniť len pomocou riešení s kladnými omegami, teda riešenia so zápornými omegami sú vyjadriteľné pomocou riešení skladnými omegami.

Všetky tieto poznámky vyžadujú poriadne premyslenie. Keď ich čítate a rozumiete po slovensky, to ešte neznamená, že aj chápete.

Vari hlavnou úlohou prvej fyzikálnej prednášky magisterského kuru je „pochopiť, čo to znamená pochopiť. Nepodceňujte to. Odmenou je radosť z pochopenia.

Látka ako kontinuum

Objekty okolo nás sú spravidla „látkovej povahy“.

Čo presne nazývame „látka“ nie je dobre definované. V slovenskej terminológii pretrvávajú zvyklosti zavedené niekedy v rámci ideologického „newspeaku“, keď sa hovorilo, že fyzikálne objekty sú vo všeobecnosti „hmotnej povahy“, kde slovo „hmota“ sa vymedzovalo ako označenie pre „objektívnu existenciu“ v protiklade k „vedomiu“. Slovo látka sa potom používa(lo) na značenie čohosi uchopiteľného, viditeľného,.... v protiklade napríklad k „fyzikálnemu poľu“ (napríklad elektromagnetickému).

V anglickej terminológii sa používa jeden spoločný pojem „matter“ a to aj vo vyššie uvedenom význame hmota (ako filozofická kategória) aj ako látka.

Pozrite si wikipédiu, tak slovenskú ako aj anglickú verziu a trošku sa oboznámte s celý tým zmätkom. Vôbec to nie je pre „chápanie fyziky“ potrebné: terminologickí puristi sú často najmä tí, ktorí fyzike rozumejú iba na najnižších leveloch. Ale je dobré o tom počuť, lebo sa s tým určite stretnete. Tak aby ste to nebrali vážne.

Rozdiel medzí látkou a ne-látkou mi pripomína problém, ktorí sme riešili s deťmi v škôlke, keď mali vysvetliť rozdiel medzi ovocím a zeleninou. Ja som to určite nedokázal a, popravde, bolo mi to jedno. Hoci v živote sú tie dva pojmy niekedy aj užitočné. Podobne stolička je prakticky dobrý pojem, ale neviem rigorózne vysvetliť, čo všetko sa nazýva alebo naopak nenazýva stolička.

Látka ako efektívny objekt

Dnes fyzika hodne pokročila v porovnané so začiatkom 19. storočia, keď „zverinec“ fundamentálne rôznych fyzikálnych objektov bol veľmi bohatý. Objekty ako „voda“, „vzduch“, „meď“ boli osobitné „zvieratá“, ktoré spolu nijako nesúvisleli.

Úlohou fyziky ako prírodopisu bolo kvantitatívne popísať vlastnosti látok ako sú (hmotnostná) hustota, teplotná rozťažnosť, moduly pružnosti, tvrdosť, koeficient trenia, farba (spektrálna pohltivosť svetla) a podobne. Ďalej rozhodnúť, ako sa zadáva „stav v danom okamihu“. Pre kus medi to môže byť napríklad tvar objektu v nedeformovanom stave, miera deformácie v každom bode, rýchlosť zmeny tejto deformácie, teplota.
V druhom koku pristupuje „prorocká úloha fyziky“: úloha nájsť (pre daný prípad interakcie s vonkajším prostredím) pohybové rovnice a potom sa naučiť ich riešiť.

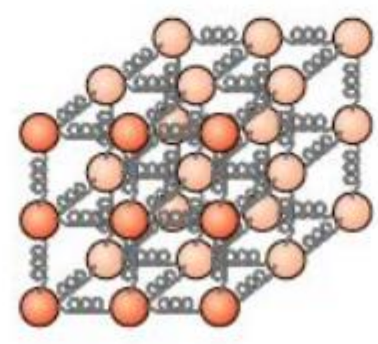
Toto boli nezávislé úlohy pre každú látku.

V 19 storočí objavili chemici atómy a molekuly a pohľad na fyzikálne zverinec sa razom zmenil. Fundametálne zvieratá boli atómy a vzniklo presvedčenie, že ak fyzikálne zvládneme prírodopis i predpovedanie budúcnosti pre atómy, budeme vedieť vypočítať i vlastnosti všetkých látok.

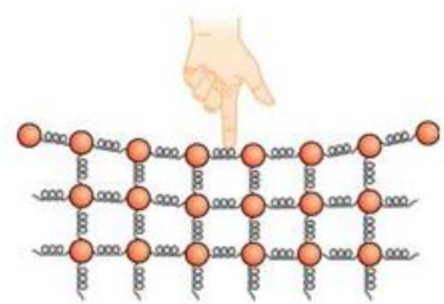
Látky sa stali iba „efektívnymi kolektívnymi zvieratami“. Pre jednoduchosť hovoríme vzduch, ale vieme, že ide o množstvo istých molekúl.

Látka ako efektívny objekt

Tuhú látku a jej vlastnosti teda vnímame ako efektívny popis objektu, ktorý mikroskopicky vyzerá nejako takto



Reakciu tuhej látky na vonkajší silový podnet potom chápeme ako efektívny výraz pre reakciu mriežky atómov na ten silový podnet, nejako takto



Látka ako efektívny objekt

V praxi ale často s vodou pracujeme stále akoby s osobitným „zvieraťom“ voda. Keď inžinier pri návrhu priehrady počíta prúdenie vody v nej, nevníma vec ako pohyb molekúl vody ale ako zmenu stavu zvieraťa „voda“. Píše rovnice „tečenia vody“, ktoré v sebe obsahujú všelijaké mystické „látkové konštanty“ ako hustota, viskozita, koeficient stlačiteľnosti. V princípe by mohol písať rovnice pre všetky molekuly vody. Tie rovnice by obsahovali zákon silového pôsobenia medzi molekulami vody. Ibaže pohybových rovníc by bolo rádovo 10^{36}, lebo toľko je molekúl vody v takej priehrade. Musel by použiť techniku štatistickej fyziky a tá by mu dala v istom priblížení zasa len efektívne rovnice tečenia nového zvieraťa „voda“.

Navyše „molekula vody“ a silové pôsobenie medzi molekulami sú iba efektívne pojmy zjednodušujúce popis správania jadier a elektrónov pomocou kvantovej mechaniky.

A ani to nie je koniec. Jadro je len efektívny pojem pre systém protónov e neutrónov, ktorý treba popísať pomocou jadrovej fyziky.

A ani to nie je koniec, lebo protón a neutrón sú len efektívne pojmy pre systémy kvarkov.

Látka ako efektívny objekt

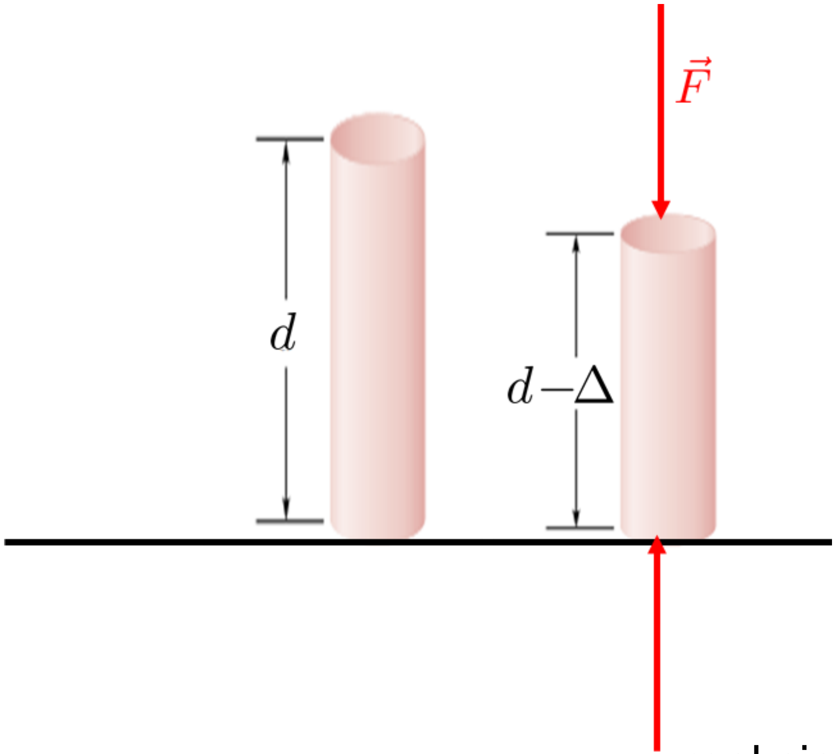
Porozumenie okolitému svetu sa nám teda hierarchizuje na viacero efektívnych úrovní, pričom na istej úrovni spravidla vystačíme s efektívnou teóriou danej úrovne.

Nie vždy a nie celkom. Efektívny popis atómu vodíka je kvantová mechanika a Coulombov zákon pôsobenie dvoch efektívnych bodových častíc (protónu a elektrónu na seba). Ale keby sme energetické hladiny atómu vodíka chceli rátať príliš presne (na mnoho desatinných miest), musíme poznať rozmery protónu, a keby sme aj tie chceli vedieť veľmi presne, nevystačíme s efektívnym pojmom „protón“ ale potrebovali by sme teóriu štruktúry protónu nižšej (kvarkovej) úrovne.

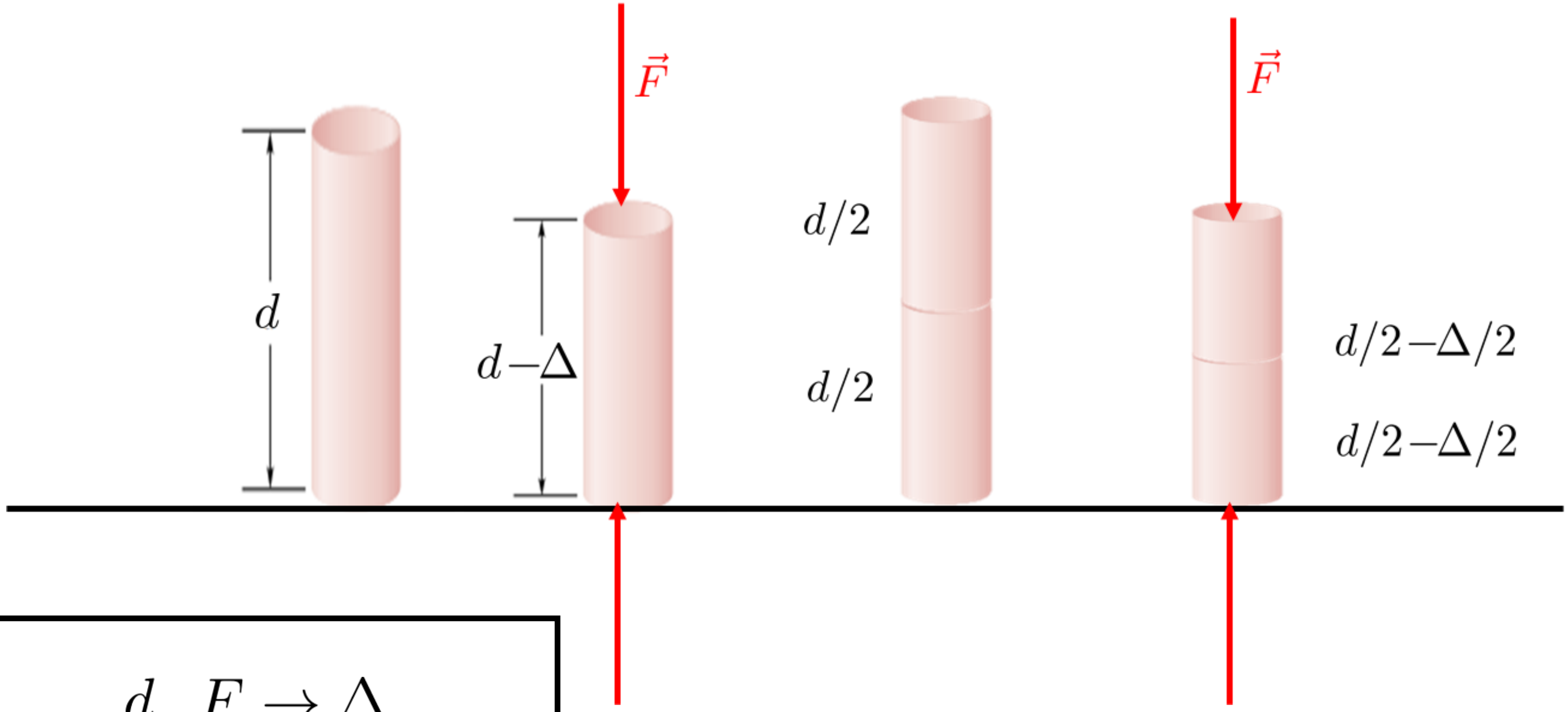
V praxi teda obvykle vystačíme pracovať s efektívnymi teóriami, ale postup poznania fyziky nám umožní vnímať napríklad „mystické konštanty“ v efektívnych rovniciach ako vypočítateľné v teórii hlbšej úrovne. Tak napríklad v treťom ročníku sa naučíme vypočítať viskozitu vzduchu výpočtom na molekulovej úrovni.

Kŕčovité snaženie sa o výpočet z najhlbších princípov nemusí byť vždy dobrý nápad. Podobne ako prvoprincípový kompliment typu „Slečna, vy ste najkrajšia hrča kvarkov a elektrónov, akú som doteraz poznal!“ nemusí vyvolať pozitívnu reakciu.

Pružnosť – efektívny popis deformácie tuhej látky



reakcia podložky, nosník stojí, teda reakcia podložky musí byť rovnako veľká ako zhora pôsobiaca sila



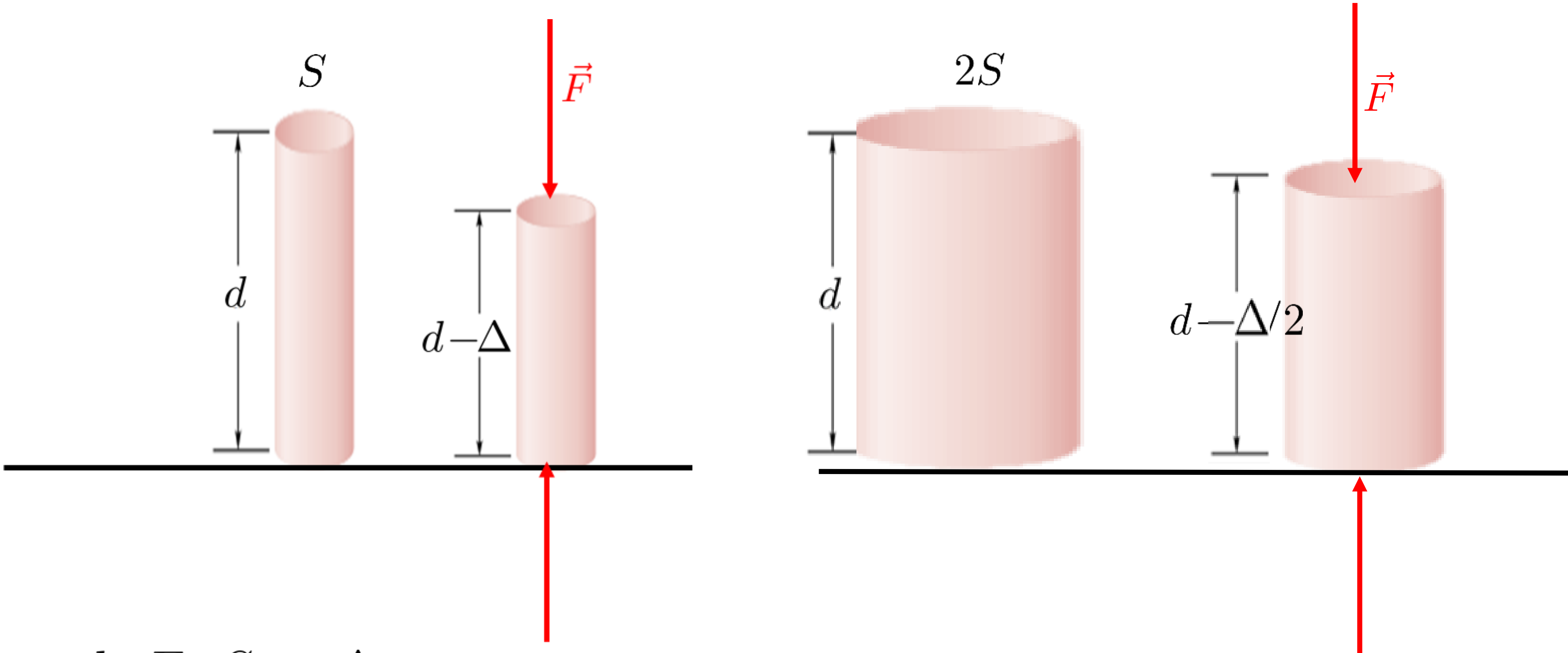
$$d,\ F \rightarrow \Delta$$

$$d/2,\ F \rightarrow \Delta/2$$

+ predpoklad linearity (lineárny vzťah medzi silou a deformáciou sa volá **Hookov zákon**):

$$\boxed{\frac{\Delta}{d} \propto F}$$

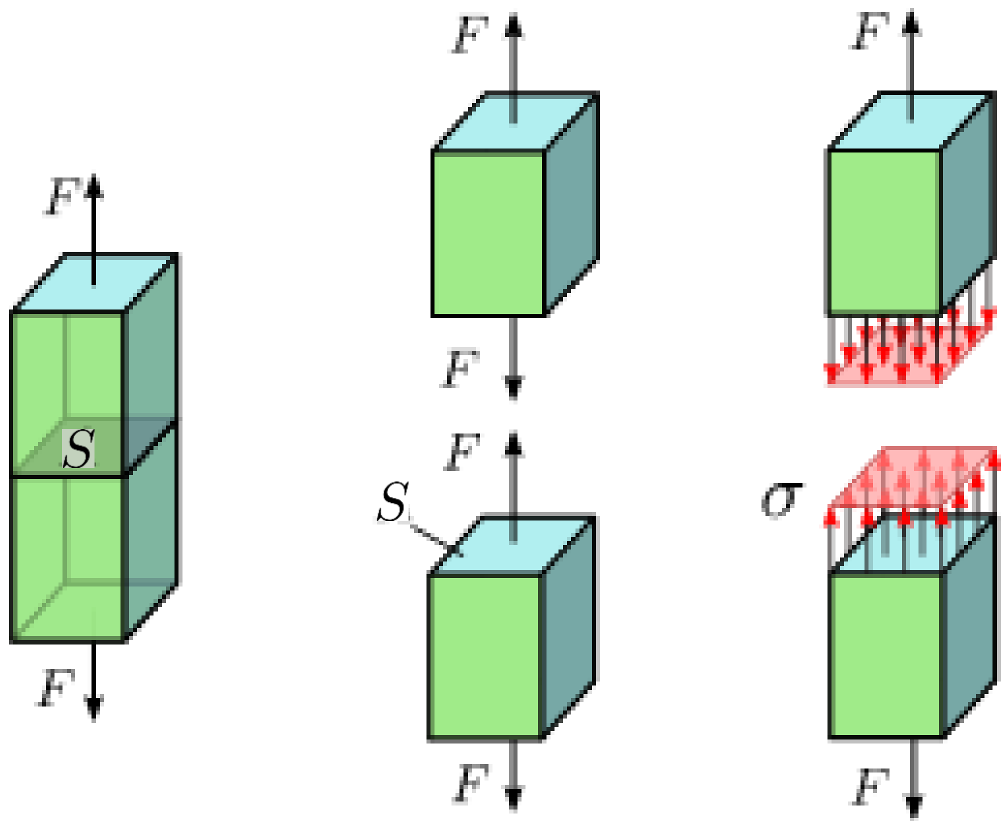
relatívna deformácia je úmerná sile



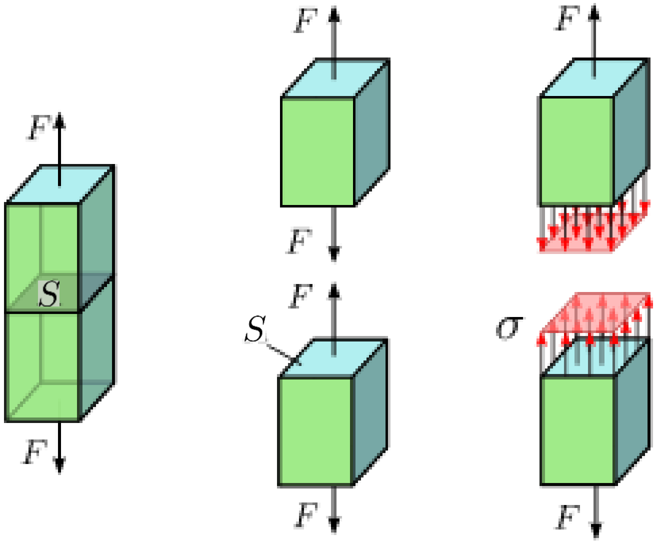
$$d,\ F,\ S \to \Delta$$
$$d,\ F,\ 2S \to \Delta/2$$

$$\frac{\Delta}{d} \propto \frac{F}{S} \equiv \sigma$$

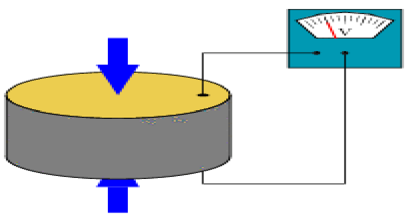
Relatívna deformácia je úmerná napätiu (sila na plochu). V tomto prípade je sila kolmá na uvažovanú plochu, takému napätiu sa hovorí tlak. Keby sila mala opačný smer, hovorili by sme ťah.

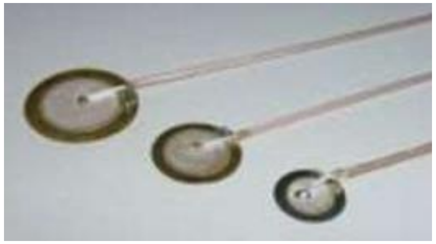


Na tom to obrázku je príklad namáhania nosníka ťahom. Napätie sa prenáša dovnútra nosníka. Ak si ho predstavíme ako zložený z dvoch častí, potom celková sila na hornú časť musí byť nulová, lebo objekt stojí, preto sa vnútorné sily ustália tak, že spodná časť pôsobí na hornú rovnakým ťahom ako je vonkajší ťah na hornú podstavu. Podľa akcie a reakcie preto aj horná časť musí pôsobiť na spodnú rovnakým ťahom, teda takým istým ako je ťah na hornú podstavu. Napätie sa teda v látke prenáša, na myslenú plochu vnútri nosníka pôsobí rovnaké napätie ako je vonkajšie napätie.



Hovoriť o napätí na vnútornej ploche v nosníku nie je len teoretická abstrakcia, to napätie sa dá naozaj merať vhodným tenziometrom.
Tenziometer môže pracovať napríklad na báze piezoelektrického javu (ale aj na iných princípoch).

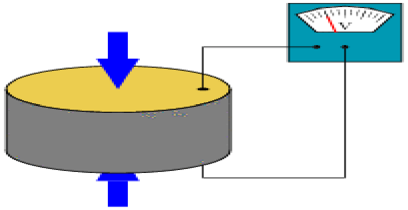




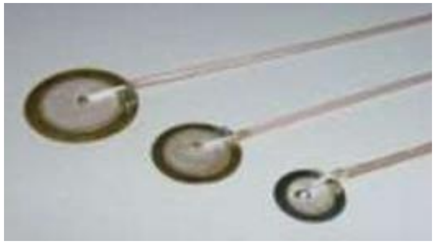
Ak piezoelektrický kryštál umiestnime medzi dve kovové platne akoby dosky kondenzátora a podrobíme tlaku, na doskách môžeme namerať napätie úmerné tlakom vyvolanej relatívnej deformácii. Tenziometer teda vlastne meria deformáciu ale tá je úmerná mechanickému napätiu.
Na fotografii sú komerčné tenziometre. Taký tenziometer môžeme v princípe umiestniť vnútri nejakého objektu, napríklad zaliať do betónu a na vyvedených vodičoch merať elektrické napätie a teda relatívnu lokálnu deformáciu či mechanické napätie.

senzor napätia pred zaliatím do železobetónovej konštrukcie

senzory napätia pred zaliatím do experimentálneho úseku diaľnice

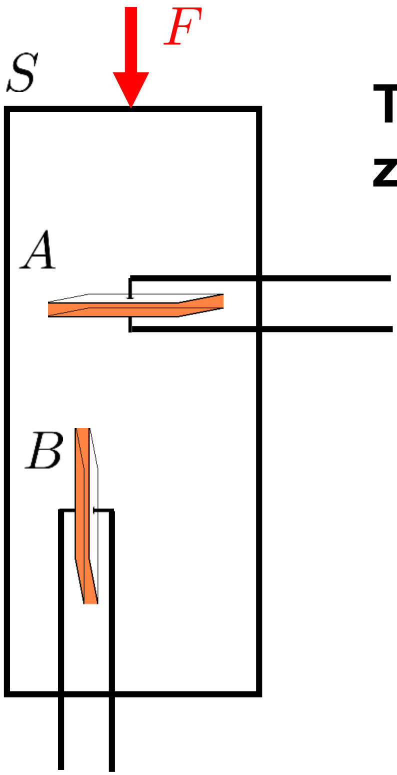


To, že spomíname možnosť merania vnútorného napätia má dôležitý význam. Ak chceme naozaj rozumieť pojmom, ktoré sa učíme, je dobré položiť si veľa kontrolných otázok, overiť si, či naozaj rozumiem, čo tie pojmy znamenajú.



Vážna otázke je takáto: ako by som to meral?

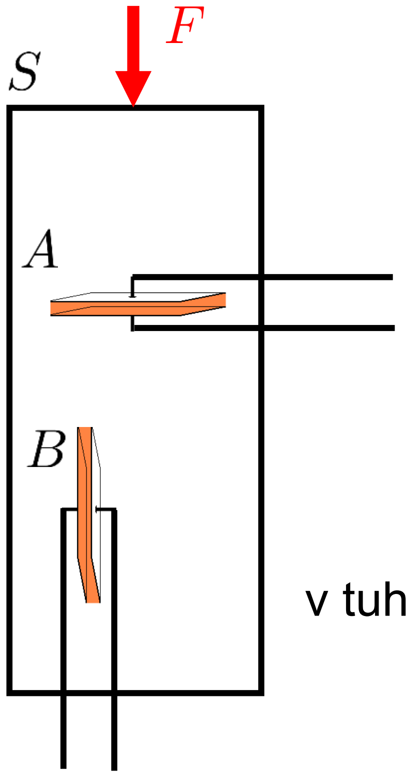
Hovorili sme, že v zaťaženom nosníku sa šíri napätie. Overme si, či rozumieme.



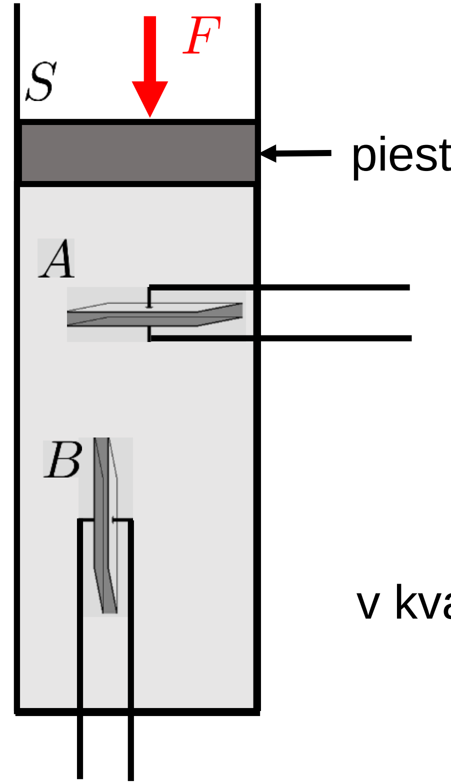
Tu je obrázok zaťaženého nosníka a v ňom zamurované dva tenziometre tlaku

Čo nameria tenziometer A a čo B?

Tenziometer A nameria napätie $\sigma = F/S$. Tenziometer B nameria nulu. Na plôšku, ktorú predstavuje tenziometer B nepôsobí žiadna sila na ňu kolmá. Toto je trošku didaktický podvod. Napätie vo vodorovnom smere je naozaj nulové, ale ako ho naozaj merať si treba lepšie premyslieť.

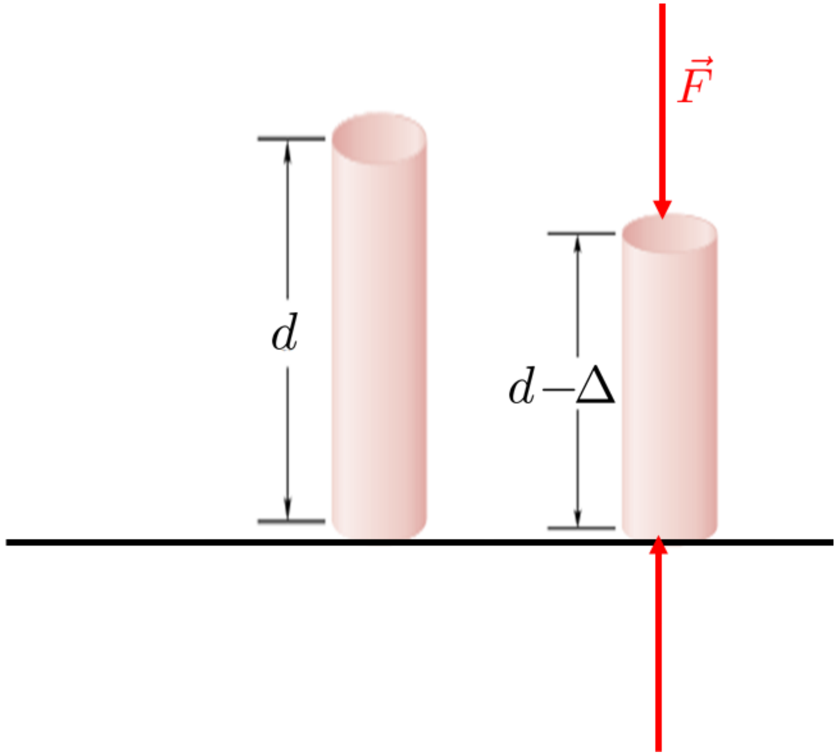


v tuhej látke



v kvapaline

Zapamätajme si rozdiel medzi pojmami „tlakové napätie na nejakej ploche v tuhej látke“ a „tlak v kvapaline". V kvapaline oba tenziometre namerajú rovnakú hodnotu $\sigma = F/S$. (Pascalov zákon!) Poriadne premyslenie toho, v čom je rozdiel dvoch situácií naznačených na obrázkoch je dosť ťažké, nebudeme sa tu do toho púšťať.

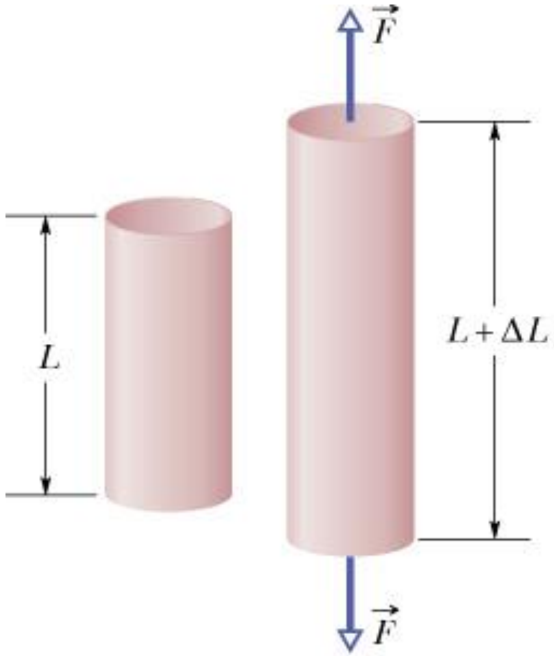


$$\varepsilon \equiv \frac{\Delta}{d} \propto \frac{F}{S} \equiv \sigma$$

Relatívna deformácia je úmerná napätiu.

Konštanta úmernosti v tomto vzťahu je dôležitá materiálová konštanta, nazýva sa Youngov modul pružnosti E (modul pružnosti v tlaku) a vo vzťahu pre súvislosť relatívnej deformácie a mechanického napätia vystupuje v tvare

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon}$$



Pre namáhanie ťahom a príslušné relatívne predĺženie platí analogický vzťah

$$\frac{F}{S} \equiv \sigma = E\varepsilon \equiv E\frac{\Delta L}{L}$$

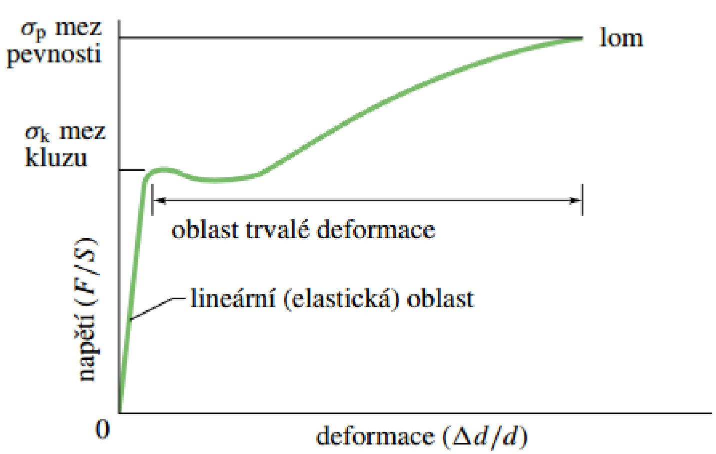
V tomto vzťahu vystupuje Youngov modul pružnosti v ťahu a obvykle býva prakticky rovnaký ako modul pružnosti v tlaku.

Všetky vzťahy sme písali tak, že relatívne deformácie i napätia v tlaku i ťahu sme považovali za kladné veličiny. V teoretickejších prístupoch sa postupuje tak, že skrátenie sa považuje za záporné predĺženie a ťah za záporný tlak a všetky definície potom treba písať starostlivejšie pre orientované plochy.

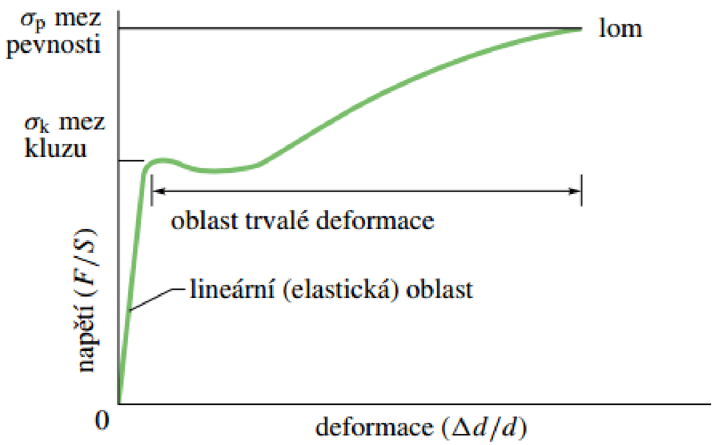
Poznámky o linearite

Vo fyzike sa často stretáme s lineárnymi závislosťami, z nich lineárna teória pružnosti a Ohmov zákon sú asi najznámejšie.
V oboch prípadoch ide o vzájomný súvis dvoch veličín, čo vo všeobecnosti je vyjadriteľné funkčnou závislosťou.

o všeobecnosti teda očakávame nejakú funkčnú závislosť medzi relatívnou deformáciou a mechanickým napätím. Predaný materiál tú závislosť môžeme experimentálne vyšetrovať: experimentálna závislosť pre namáhanie ocele ťahom



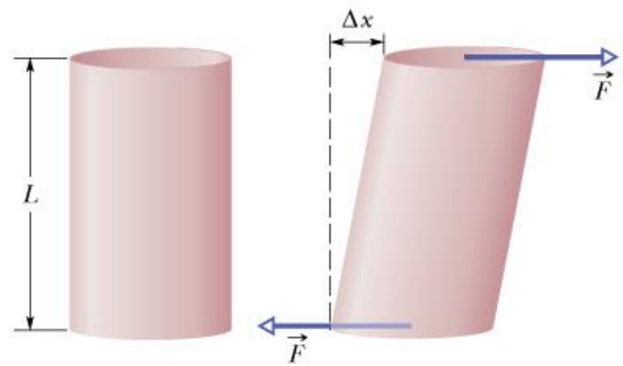
je (trochu symbolicky), znázornená na obrázku. Závislosť teda nie je lineárna v celej experimentálnej oblasti. Na druhej strane v dostatočne malej oblasti sa každá funkcia dá aproximovať priamkou a teda závislosť je vždy lineárna pre dosť malú oblasť. To je trivialita. To čo nie je triviálne je, že **niektoré závislosti sú pre dosť veľkú prakticky zaujímavú oblasť „dostatočne lineárne“**. Až tak, že sa to učí ako „zákon“.



Pre mnohé látky je závislosť dostatočne lineárna takmer v celej oblasti pružnosti (to je oblasť, v rámci ktorej sa látka vráti do pôvodného tvaru keď sa vypne deformujúca sila).

Youngov modul pružnosti v ťahu a tlaku býva v podstate rovnaký, ale charakter závislosti mechanického napätia na relatívnej oblasti môže byť deformácii za oblasťou pružnosti veľmi iný pre ťah a tlak. Typickým prípadom je betón, ktorý má podstatne inú hodnotu medze pevnosti pre tlak a ťah. Betón dobre znáša namáhanie tlakom aj pri vysokých hodnotách tlaku, ale ,má malú hodnotu medze pevnosti v ťahu. Betónové konštrukcie sa preto konštruujú ako železobetónové: železná výstuž je v betóne na to, aby odolávala namáhaniu v ťahu. Často sa používa takzvaný **predpätý betón**, keď výstuž je podrobená ťahu pred zabetónovaním. Taký betón je namáhaný tlakom od predpätej výstuže aj v „nedeformovanom“ stave. Deformácia, ktorá by normálne viedla už k ťahu vyvolá len pokles námahy tlakom od železnej výstuže a betón nie je nikdy namáhaný na ťah.

Stručne sa zmienime o ďalších druhoch deformácie a napätí. Okrem tlaku a ťahu bývajú objekty často namáhané na šmyk, keď sila pôsobí v rovine uvažovanej plochy a nie kolmo na ňu ako v prípade ťahu alebo tlaku.

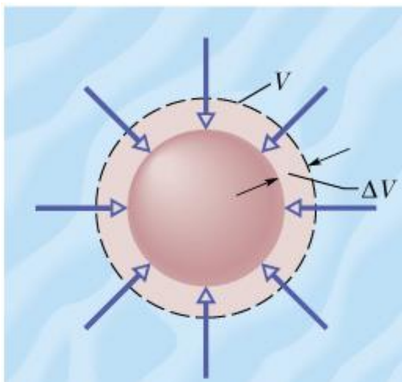


Aj v tomto prípade býva relatívna deformácia úmerná šmykovému napätiu

$$\frac{F}{S} \equiv \sigma_\tau = G\frac{\Delta x}{L}$$

V tomto prípade hovoríme o šmykovom alebo tangenciálnom napätí. Konštanta úmernosti G sa volá modul pružnosti v šmyku.

Iný dôležitý spôsob namáhania je všestranný tlak. Najľahšie sa realizuje tak, že objekt ponoríme do kvapaliny, v ktorej podľa Pascalovho zákona pôsobí tlak všetkými smermi rovnako. Všestranný tlak vyvolá zmenu objemu telesa. Relatívna deformácia je opäť úmerná všestrannému tlaku p.

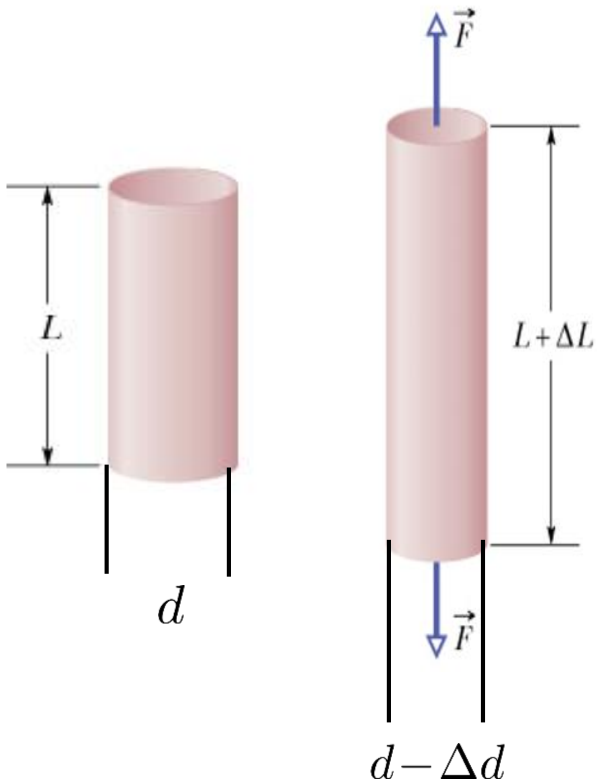


$$p = K\frac{\Delta V}{V}$$

Konštanta úmernosti K sa volá **modul objemovej pružnosti**.

Často sa opakuje taká poučka, že „kvapaliny sú málo stlačiteľné“. Preto možno niekoho prekvapí, že modul objemovej pružnosti vody je $2{,}2.10^9$ Pa, kým modul objemovej pružnosti ocele typicky 16.10^{10} Pa, takže oceľ je oveľa menej stlačiteľná ako voda. To vyvoláva otázku ak to, že oceľ sa dá dobre lisovať tlakom? Odpoveď je, že pri lisovaní sa nejedná o všestranný ale jednostranný tlak a kým oceľ sa v smere tlaku zmršťuje, v kolmom smere sa rozťahuje.

Deformácia v priečnom smere

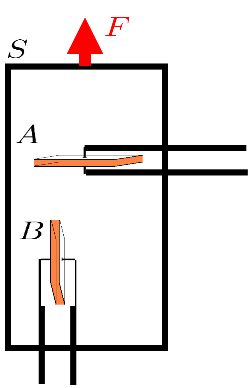


Pri namáhaní ťahom sa tyč predĺži o ΔL, ale v priečnom smere sa rozmer skráti o Δd. Relatívne skrátenie v priečnom smere súvisí s relatívnym predĺžením v smere ťahu pomocou Poissonovho koeficientu (materiálová konštanta) ν

$$\boxed{\frac{\Delta d}{d} = \nu \frac{\Delta L}{L}}$$

Upozornime, že v priečnom smere sa síce tyč skráti, ale nie pod vplyvom nejakého priečneho tlaku. Vnútri tyče je stále len pozdĺžny ťah σ, ktorý by nameral tenziometer A, ale v priečnom smere nie je žiaden tlak, tenziometer B nenameria nič. Platí teda

$$\frac{\Delta d}{d} = \nu \frac{1}{E} \sigma \equiv \nu \frac{1}{E} \frac{F}{S}$$



Pri namáhaní tlakom sa pozdĺžne tyč skráti a priečne predĺži, príslušné vzťahy sú rovnaké.

Budeme hlasovať

Diera v dutom valci sa pri stlačení

a) rozšíri
b) zúži

V texte sme spomenuli niekoľko materiálových konštánt charakterizujúcich eleasticitu: Youngov modul pružnosti v ťahu a tlaku E, modul objemovej pružnosti K, modul pružnosti v šmyku G, a Poissonov pomer ν. Teoreticky sa pre lineárnu pružnosť dá dokázať, že homogénna izotropná látka má len dva nezávislé koeficienty pružnosti, medzi štyrmi uvedenými teda platia nejaké vzťahy, ako ukazuje tabuľka (**tie vzťahy sa neučte!,** v prípade potreby si ich vyhľadáte https://en.wikipedia.org/wiki/Bulk_modulus

	$K =$	$E =$	$G =$	$\nu =$
(K, E)	K	E	$\frac{3KE}{9K-E}$	$\frac{3K-E}{6K}$
(K, G)	K	$\frac{9KG}{3K+G}$	G	$\frac{3K-2G}{2(3K+G)}$
(K, ν)	K	$3K(1-2\nu)$	$\frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$	ν

Typické hodnoty

	K [GPa]	E [GPa]	G [GPa]	ν
oceľ	160	200	80	0,3
meď	140	110	48	0,34
voda	2,2			

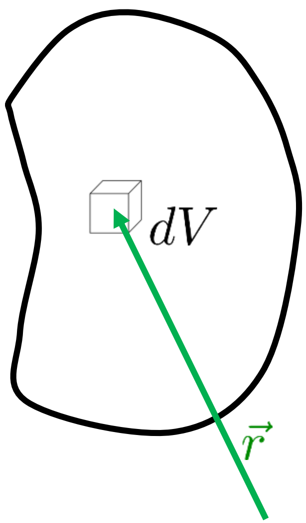
porozmýšľajte, prečo pri vode neuvádzame E, G, ν.

Moduly pružnosti sú parametre efektívnej teórie látky ako kontinua.

Keby sme úplne poznali molekulárnu štruktúru látky a mali kvantovmechanicky zrátané energetické zmeny pri deformáciách štruktúry, vedeli by sme vypočítať hodnoty modulov pružnosti „z prvých princípov".

Hustota

Ďalším dôležitým parametrom je **objemová hustota hmotnosti látky** ϱ, krátko nazývaná len hustota.

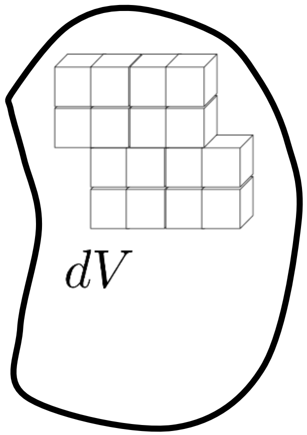


Uvažujme nejaké látkové teleso v jeho vnútri v okolí bodu $\vec{r}$ malý (infinitezimálny) priestorový objem dV. Hmotnosť látky obsiahnutej v tom objeme označme dm. Potom hustotou látky v bode $\vec{r}$ nazývame hodnotu

$$\varrho(\vec{r}) = \frac{dm}{dV}$$

Zápis nie je celkom korektný, lebo by sa mohlo zdať, že ide o deriváciu nejakej funkcie m podľa premennej V. Naozaj ide len o podiel dvoch malých hodnôt, aby sme mohli hovoriť o lokálnej hustote v danom bode a nie o priemernej hustote telesa danej ako podiel celkovej hmotnosti a celkového objemu. **Ak látke je homogénna, potom hustota nezávisí od polohy a je v celom telese rovnaká.**

Z definície je zrejmé, že jednotkou hustoty je kg m^{-3}.



Predstavme si, že poznáme lokálnu hustotu hmotnosti ako funkciu polohy $\varrho(\vec{r})$. Ako sa vypočíta celková hmotnosť telesa?

Operačný postup vyzerá takto. Predstavíme si, že objem telesa je vyplnený „infinitezimálnymi“ kockami. Poloha každej kocky môže byť identifikovaná napríklad polohou ľavého predného spodného vrcholu. Potom hmotnosť celého telesa je zjavne

$$m = \sum_{\text{kocky}} \varrho(\vec{r})dV$$

Problém pri výpočte sumy môžu robiť kocky, ktoré sú pri hranici telesa, takže nie sú celé vnútri telesa. Keď sú objemy kociek naozaj veľmi malé, matematici vedia dokázať, že ak započítame hmotnosť celej kocky, hoci trčí trochu von z telesa, celková chyba výpočtu bude zanedbateľná.

Celý výpočet môžeme robiť napríklad numericky na počítači niekoľkokrát, pričom pri každom ďalšom výpočte zmenšíme objem každej malej kocky a zväčšíme teda ich počet. Keď budeme sledovať čísla, ktoré tak budeme postupne dostávať, zistíme, že sa blížia k nejakej konkrétnej hodnote, ktorú budeme považovať za vypočítanú hmotnosť telesa. Formálne ide o limitu takých súm a voláme ju „objemovým integrálom“ a značíme

$$m = \int \varrho(\vec{r})dV$$

$$m = \int \varrho(\vec{r})dV$$

Integrál, ktorý sme napísali nie je apriórne nijakým „opakom derivácie“ je to suma nekonečného počtu nekonečne malých čísel.

Naznačili sme si, ako by sme takú sumu počítali numericky. Niekedy sa nám môže podariť vypočítať tú sumu aj analyticky. Vyžaduje to istú invenciu ako transformovať tú sumu na „niekoľko opakov derivácií“

Okrem objemovej hustoty hmotnosti sa často používa aj plošná hustota hmotnosti pri objektoch, ktoré sú z praktického hľadiska dvojrozmerné. Napríklad list papiera. Plošná hustota kancelárskeho papiera býva 80 g cm^{-3}. Celková hmotnosť plošného objektu sa ráta tak, že objekt „vyštvorčekujeme“ a zrátame integrál (dS je plôška jedného infinitezimálneho štvorca)

$$m = \int \varrho_S(\vec{r})dS$$

Používa aj dĺžková hustota hmotnosti pri objektoch, ktoré sú z praktického hľadiska jednorozmerné. Napríklad drôt. Celková hmotnosť jednorozmerného objektu sa ráta tak, že krivku popisujúcu jeho tvar „vyúsečkujeme“ a zrátame integrál (ds je dĺžka jednej infinitezimálnej úsečky na krivke)

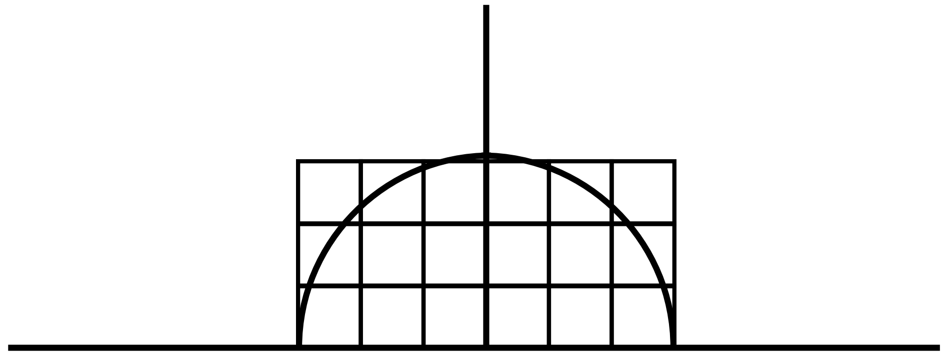
$$m = \int \varrho_s(\vec{r})ds$$

Poznamenajme, že fyzici v storočiach, keď „kontinuum“ bolo naozaj kontinuom, mohli v princípe vyhovieť matematikom a deliť priestor, plochu alebo krivku na „naozaj infinitezimálne“ kocky, štvorčeky alebo úsečky.

Ale odkedy veríme, že nejaké fyzikálne kontinuum je len „efektívne zviera“ v skutočnosti zložené z molekúl, nemôžeme s rozmermi delenia „ísť až do nuly“. Efektívna teória totiž stráca zmysel pre veľmi malé priestorové rozmery.

Ak by sme napríklad objemíky robili príliš malé, mohlo by sa stať, že sa v nich niekedy nachádza len jedna molekula a niekedy ani jedna. Pojem „objemová hmotnostná hustota látky“ potom stráca dobrý zmysel. Takže aplikácia diferenciálneho a integrálneho počtu na „fyzikálne kontinuum“ je možná iba ak pri požadovanej presnosti vystačíme s „objemíkmi“ tak malými, že napríklad hustotu látky v rámci jedného objemíku možno už považovať za prakticky konštantnú, ale objemík je pritom dosť veľký, aby stále ešte obsahoval veľmi veľký počet molekúl.

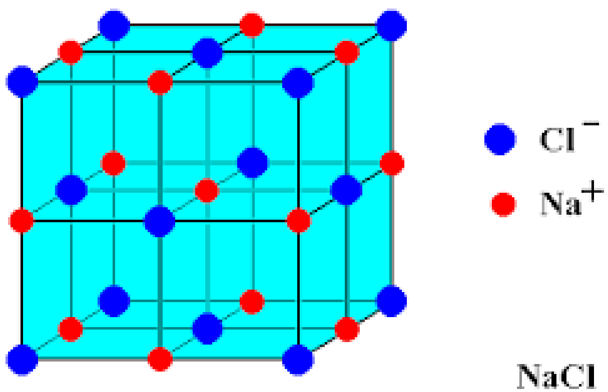
Tu je pre inšpiráciu jednoduchý program v Pythone rátajúci plochu polkruhu. Pri rátaní hmotnosti by bolo treba každú plôšku ešte vynásobiť plošnou hustotou.



```
from pylab import *
nx=200; #number of squares in x direction
ny=100; #number of squares in y direction
R = 1.  #semicircle radius
deltax=2*R/nx;   # step in x
deltay=R/ny;  #step in y
area=0;
for i in range(nx+1):
    for j in range(ny+1):
        x=-R+i*deltax;
        y=j*deltay;
        if(sqrt(x*x+y*y)<R):
            area=area+deltax*deltay; #if square inside semicircle then sum
print(area)    #prints the area of the semicircle, should be pi/2
```

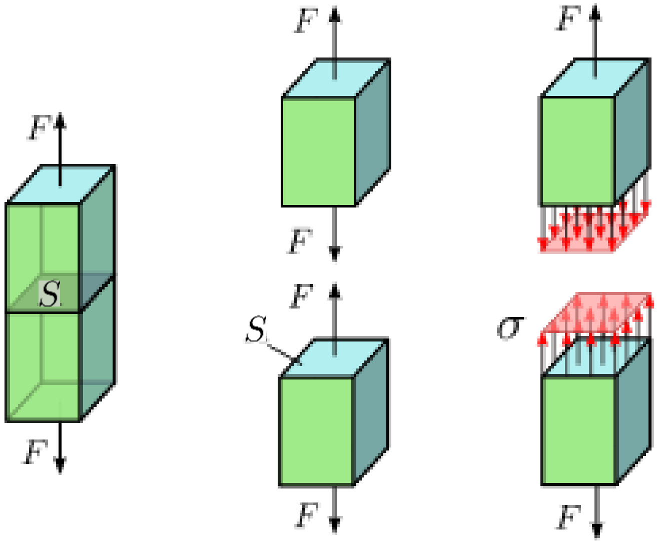
Hmotnostná hustota je parameter efektívnej teórie látky ako kontinua.

Ak by sme poznali molekulárnu štruktúru látky, mohli by sme hustotu látky vypočítať. V skutočnosti to nie je veľmi zložitá úloha. Ako ukážku vypočítame hustotu kuchynskej soli.

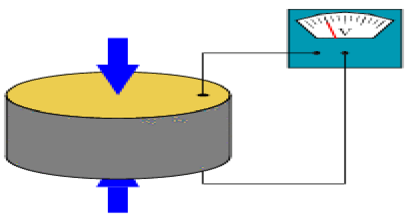


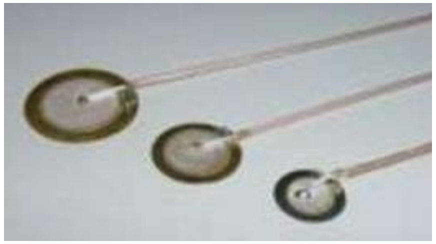
Chemické zloženie kuchynskej soli je NaCl. Molekulárna štruktúra vyzerá ako kocková mriežka. Vo vrcholoch kociek sú na striedačku atómy Na a Cl. Z röntgenovej štruktúrnej analýzy vieme, že vzdialenosť Na – Cl je 0,282 nm.
Atómová hmotnosť Na je 22,99
Atómová hmotnosť Cl je 35,45

Jeden vrchol je spoločný ôsmim kockám, takže jednej kocke pripadá ½ atómu Na a ½ atómu Cl, takže „molekulárna hmotnosť jednej kocky o objeme d^3 je (22,99+35,45)/2 = 29,22 Jedna atómová hmotnostná jednota zodpovedá 1g/(6,022.10^{23}) = 1,66.10^{-24} g. Jedna elementárna kocka soli má teda hmotnosť 29,22 x 1,66.10^{-24} g =48,51. 10^{-24} g a objem $(0{,}282\ \mathrm{nm})^3$. To dáva hustotu 2160 kg m^{-3}. Experimentálna hodnota je 2165. Rozdiel je daný zaokrúhľovaniami v údajoch a výpočtoch.



Hovoriť o napätí na vnútornej ploche v nosníku nie je len teoretická abstrakcia, to napätie sa dá naozaj merať vhodným tenziometrom.
Tenziometer môže pracovať napríklad na báze piezoelektrického javu (ale aj na iných princípoch).

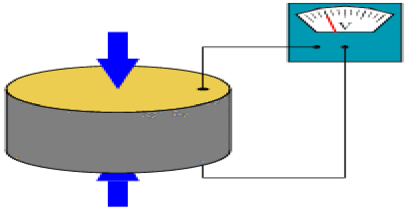




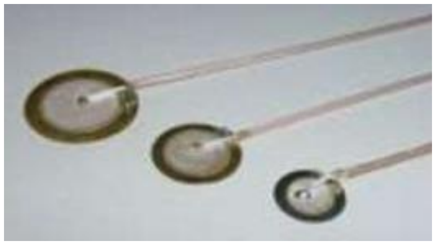
Ak piezoelektrický kryštál umiestnime medzi dve kovové platne akoby dosky kondenzátora a podrobíme tlaku, na doskách môžeme namerať napätie úmerné tlakom vyvolanej relatívnej deformácii. Tenziometer teda vlastne meria deformáciu ale tá je úmerná mechanickému napätiu.
Na fotografii sú komerčné tenziometre. Taký tenziometer môžeme v princípe umiestniť vnútri nejakého objektu, napríklad zaliať do betónu a na vyvedených vodičoch merať elektrické napätie a teda relatívnu lokálnu deformáciu či mechanické napätie.

senzor napätia pred zaliatím do železobetónovej konštrukcie

senzory napätia pred zaliatím do experimentálneho úseku diaľnice

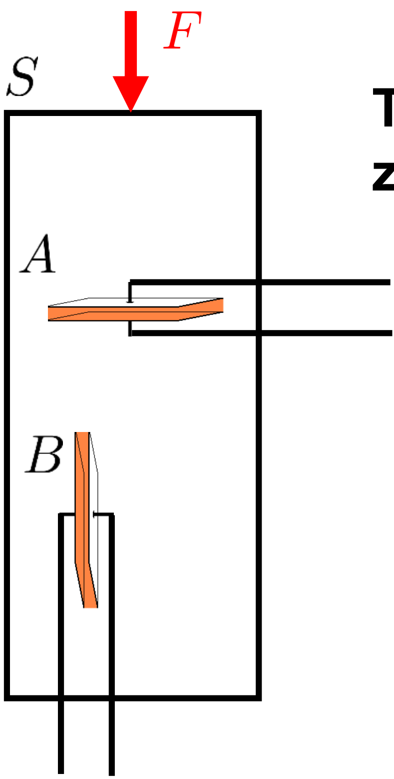


To, že spomíname možnosť merania vnútorného napätia má dôležitý význam. Ak chceme naozaj rozumieť pojmom, ktoré sa učíme, je dobré položiť si veľa kontrolných otázok, overiť si, či naozaj rozumiem, čo tie pojmy znamenajú.



Vážna otázke je takáto: ako by som to meral?

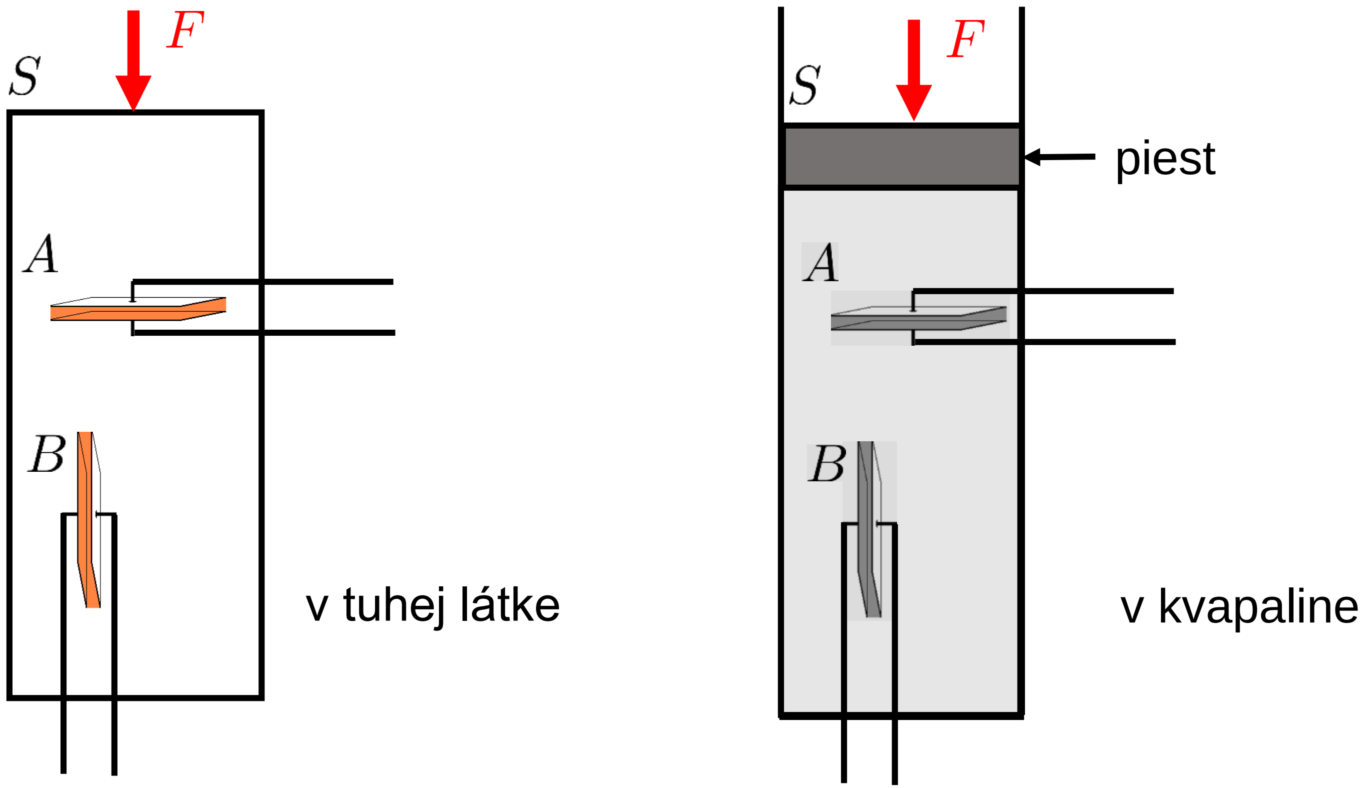
Hovorili sme, že v zaťaženom nosníku sa šíri napätie. Overme si, či rozumieme.



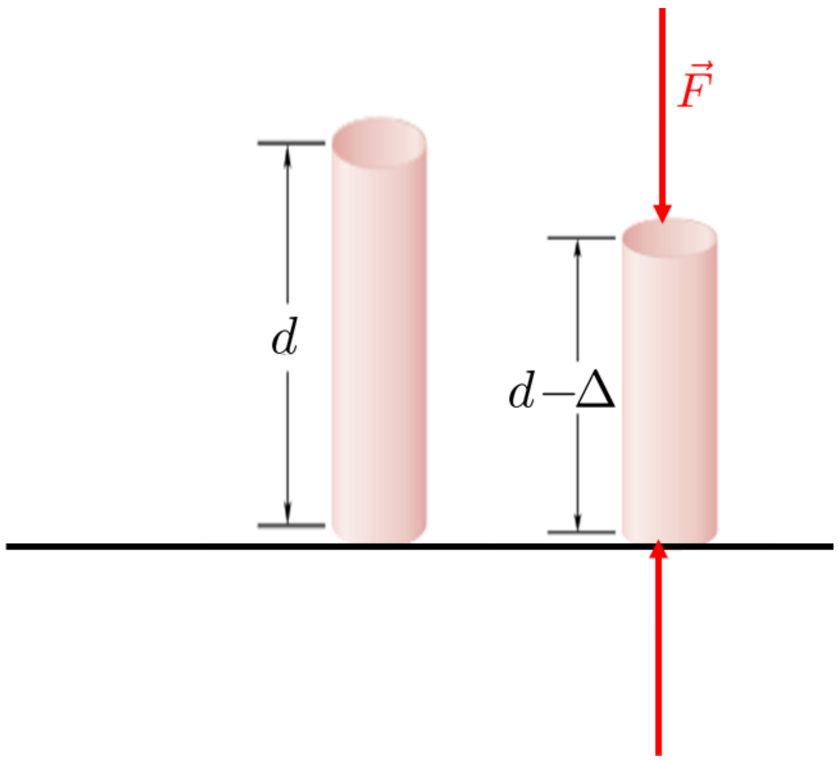
Tu je obrázok zaťaženého nosníka a v ňom zamurované dva tenziometre tlaku

Čo nameria tenziometer A a čo B?

Tenziometer A nameria napätie $\sigma = F/S$. Tenziometer B nameria nulu. Na plôšku, ktorú predstavuje tenziometer B nepôsobí žiadna sila na ňu kolmá. Toto je trošku didaktický podvod. Napätie vo vodorovnom smere je naozaj nulové, ale ako ho naozaj merať si treba lepšie premyslieť.



Zapamätajme si rozdiel medzi pojmami „tlakové napätie na nejakej ploche v tuhej látke“ a „tlak v kvapaline". V kvapaline oba tenziometre namerajú rovnakú hodnotu $\sigma = F/S$. (Pascalov zákon!) Poriadne premyslenie toho, v čom je rozdiel dvoch situácií naznačených na obrázkoch je dosť ťažké, nebudeme sa tu do toho púšťať.

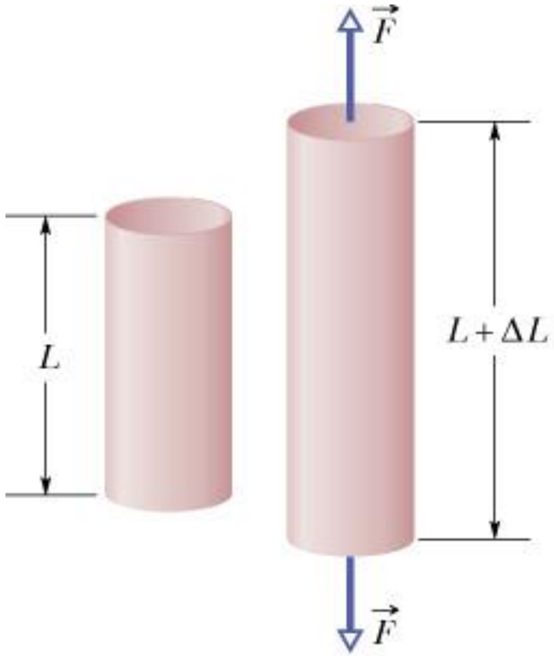


$$\varepsilon \equiv \frac{\Delta}{d} \propto \frac{F}{S} \equiv \sigma$$

Relatívna deformácia je úmerná napätiu.

Konštanta úmernosti v tomto vzťahu je dôležitá materiálová konštanta, nazýva sa Youngov modul pružnosti E (modul pružnosti v tlaku) a vo vzťahu pre súvislosť relatívnej deformácie a mechanického napätia vystupuje v tvare

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon}$$



Pre namáhanie ťahom a príslušné relatívne predĺženie platí analogický vzťah

$$\frac{F}{S} \equiv \sigma = E\varepsilon \equiv E\frac{\Delta L}{L}$$

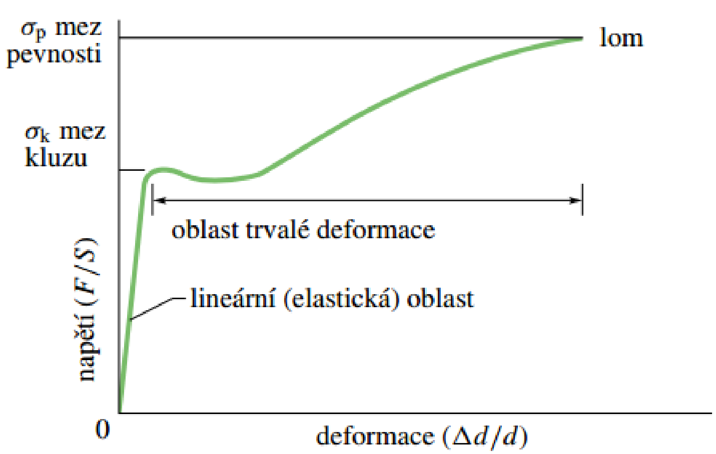
V tomto vzťahu vystupuje Youngov modul pružnosti v ťahu a obvykle býva prakticky rovnaký ako modul pružnosti v tlaku.

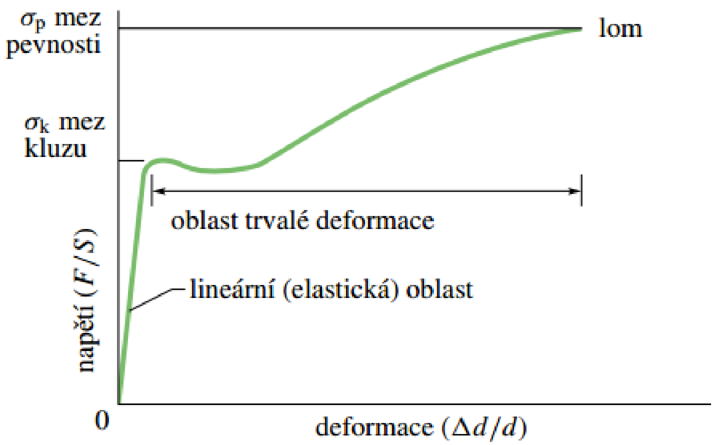
Všetky vzťahy sme písali tak, že relatívne deformácie i napätia v tlaku i ťahu sme považovali za kladné veličiny. V teoretickejších prístupoch sa postupuje tak, že skrátenie sa považuje za záporné predĺženie a ťah za záporný tlak a všetky definície potom treba písať starostlivejšie pre orientované plochy.

Poznámky o linearite

Vo fyzike sa často stretáme s lineárnymi závislosťami, z nich lineárna teória pružnosti a Ohmov zákon sú asi najznámejšie.
V oboch prípadoch ide o vzájomný súvis dvoch veličín, čo vo všeobecnosti je vyjadriteľné funkčnou závislosťou.

o všeobecnosti teda očakávame nejakú funkčnú závislosť medzi relatívnou deformáciou a mechanickým napätím. Predaný materiál tú závislosť môžeme experimentálne vyšetrovať: experimentálna závislosť pre namáhanie ocele ťahom je (trochu symbolicky), znázornená na obrázku. Závislosť teda nie je lineárna v celej experimentálnej oblasti. Na druhej strane v dostatočne malej oblasti sa každá funkcia dá aproximovať priamkou a teda závislosť je vždy lineárna pre dosť malú oblasť. To je trivialita. To čo nie je triviálne je, že **niektoré závislosti sú pre dosť veľkú prakticky zaujímavú oblasť „dostatočne lineárne“**. Až tak, že sa to učí ako „zákon“.

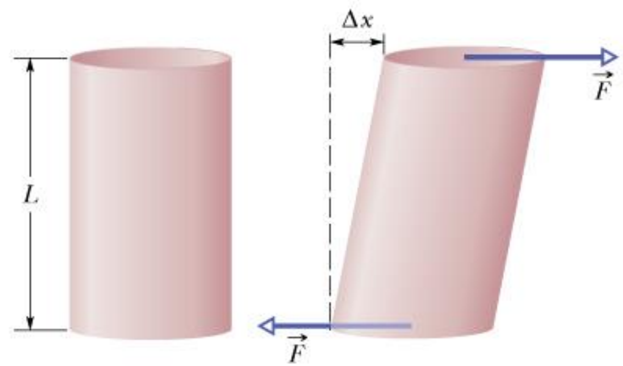




Pre mnohé látky je závislosť dostatočne lineárna takmer v celej oblasti pružnosti (to je oblasť, v rámci ktorej sa látka vráti do pôvodného tvaru keď sa vypne deformujúca sila).

Youngov modul pružnosti v ťahu a tlaku býva v podstate rovnaký, ale charakter závislosti mechanického napätia na relatívnej oblasti môže byť deformácii za oblasťou pružnosti veľmi iný pre ťah a tlak. Typickým prípadom je betón, ktorý má podstatne inú hodnotu medze pevnosti pre tlak a ťah. Betón dobre znáša namáhanie tlakom aj pri vysokých hodnotách tlaku, ale ,má malú hodnotu medze pevnosti v ťahu. Betónové konštrukcie sa preto konštruujú ako železobetónové: železná výstuž je v betóne na to, aby odolávala namáhaniu v ťahu. Často sa používa takzvaný **predpätý betón**, keď výstuž je podrobená ťahu pred zabetónovaním. Taký betón je namáhaný tlakom od predpätej výstuže aj v „nedeformovanom" stave. Deformácia, ktorá by normálne viedla už k ťahu vyvolá len pokles námahy tlakom od železnej výstuže a betón nie je nikdy namáhaný na ťah.

Stručne sa zmienime o ďalších druhoch deformácie a napätí. Okrem tlaku a ťahu bývajú objekty často namáhané na šmyk, keď sila pôsobí v rovine uvažovanej plochy a nie kolmo na ňu ako v prípade ťahu alebo tlaku.

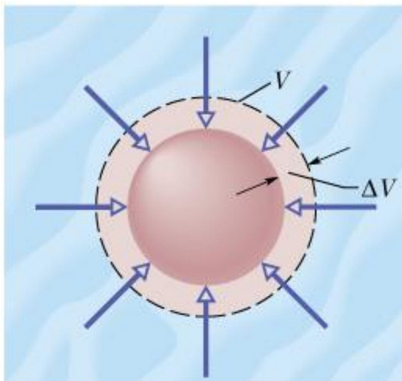


Aj v tomto prípade býva relatívna deformácia úmerná šmykovému napätiu

$$\frac{F}{S} \equiv \sigma_\tau = G\frac{\Delta x}{L}$$

V tomto prípade hovoríme o šmykovom alebo tangenciálnom napätí.
Konštanta úmernosti G sa volá modul pružnosti v šmyku.

Iný dôležitý spôsob namáhania je všestranný tlak. Najľahšie sa realizuje tak, že objekt ponoríme do kvapaliny, v ktorej podľa Pascalovho zákona pôsobí tlak všetkými smermi rovnako. Všestranný tlak vyvolá zmenu objemu telesa. Relatívna deformácia je opäť úmerná všestrannému tlaku p.

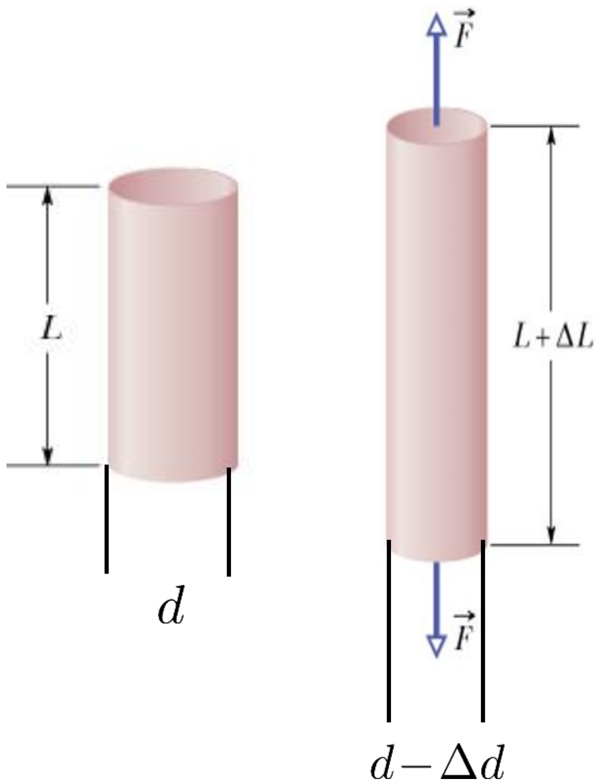


$$p = K\frac{\Delta V}{V}$$

Konštanta úmernosti K sa volá **modul objemovej pružnosti**.

Často sa opakuje taká poučka, že „kvapaliny sú málo stlačiteľné“. Preto možno niekoho prekvapí, že modul objemovej pružnosti vody je 2,2.10^{9} Pa, kým modul objemovej pružnosti ocele typicky 16.10^{10} Pa, takže oceľ je oveľa menej stlačiteľná ako voda. To vyvoláva otázku ak to, že oceľ sa dá dobre lisovať tlakom? Odpoveď je, že pri lisovaní sa nejedná o všestranný ale jednostranný tlak a kým oceľ sa v smere tlaku zmršťuje, v kolmom smere sa rozťahuje.

Deformácia v priečnom smere

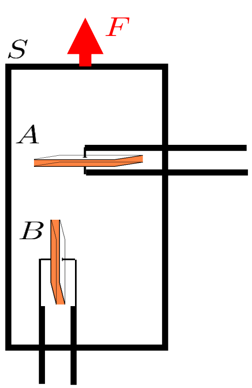


Pri namáhaní ťahom sa tyč predĺži o ΔL, ale v priečnom smere sa rozmer skráti o Δd. Relatívne skrátenie v priečnom smere súvisí s relatívnym predĺžením v smere ťahu pomocou Poissonovho koeficientu (materiálová konštanta) ν

$$\boxed{\frac{\Delta d}{d} = \nu \frac{\Delta L}{L}}$$

Upozornime, že v priečnom smere sa síce tyč skráti, ale nie pod vplyvom nejakého priečneho tlaku. Vnútri tyče je stále len pozdĺžny ťah σ, ktorý by nameral tenziometer A, ale v priečnom smere nie je žiaden tlak, tenziometer B nenameria nič. Platí teda

$$\frac{\Delta d}{d} = \nu \frac{1}{E}\sigma \equiv \nu \frac{1}{E}\frac{F}{S}$$



Pri namáhaní tlakom sa pozdĺžne tyč skráti a priečne predĺži, príslušné vzťahy sú rovnaké.

Budeme hlasovať

Diera v dutom valci sa pri stlačení

a) rozšíri
b) zúži

V texte sme spomenuli niekoľko materiálových konštánt charakterizujúcich eleasticitu: Youngov modul pružnosti v ťahu a tlaku E, modul objemovej pružnosti K, modul pružnosti v šmyku G, a Poissonov pomer ν. Teoreticky sa pre lineárnu pružnosť dá dokázať, že homogénna izotropná látka má len dva nezávislé koeficienty pružnosti, medzi štyrmi uvedenými teda platia nejaké vzťahy, ako ukazuje tabuľka (**tie vzťahy sa neučte!,** v prípade potreby si ich vyhľadáte https://en.wikipedia.org/wiki/Bulk_modulus

	$K=$	$E=$	$G=$	$\nu=$
$(K,\,E)$	K	E	$\frac{3KE}{9K-E}$	$\frac{3K-E}{6K}$
$(K,\,G)$	K	$\frac{9KG}{3K+G}$	G	$\frac{3K-2G}{2(3K+G)}$
$(K,\,\nu)$	K	$3K(1-2\nu)$	$\frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$	ν

Typické hodnoty

	K [GPa]	E [GPa]	G [GPa]	ν
oceľ	160	200	80	0,3
meď	140	110	48	0,34
voda	2,2			

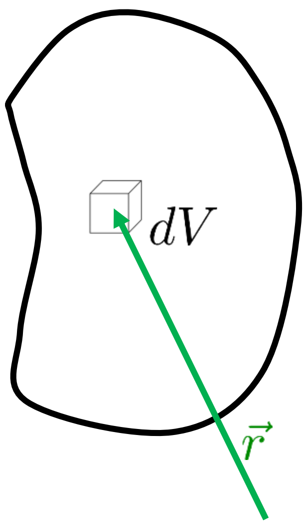
porozmýšľajte, prečo pri vode neuvádzame E, G, ν.

Moduly pružnosti sú parametre efektívnej teórie látky ako kontinua.

Keby sme úplne poznali molekulárnu štruktúru látky a mali kvantovmechanicky zrátané energetické zmeny pri deformáciách štruktúry, vedeli by sme vypočítať hodnoty modulov pružnosti „z prvých princípov“.

Hustota

Ďalším dôležitým parametrom je **objemová hustota hmotnosti látky ϱ**, krátko nazývaná len hustota.

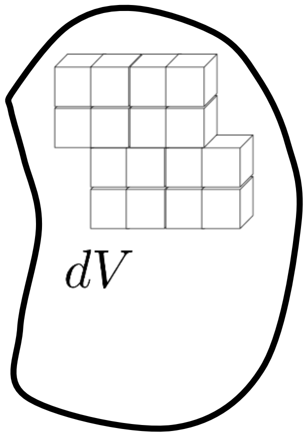


Uvažujme nejaké látkové teleso v jeho vnútri v okolí bodu $\vec{r}$ malý (infinitezimálny) priestorový objem dV. Hmotnosť látky obsiahnutej v tom objeme označme dm. Potom hustotou látky v bode $\vec{r}$ nazývame hodnotu

$$\varrho(\vec{r}) = \frac{dm}{dV}$$

Zápis nie je celkom korektný, lebo by sa mohlo zdať, že ide o deriváciu nejakej funkcie m podľa premennej V. Naozaj ide len o podiel dvoch malých hodnôt, aby sme mohli hovoriť o lokálnej hustote v danom bode a nie o priemernej hustote telesa danej ako podiel celkovej hmotnosti a celkového objemu. **Ak látke je homogénna, potom hustota nezávisí od polohy a je v celom telese rovnaká.**

Z definície je zrejmé, že jednotkou hustoty je kg m^{-3}.



Predstavme si, že poznáme lokálnu hustotu hmotnosti ako funkciu polohy $\varrho(\vec{r})$. Ako sa vypočíta celková hmotnosť telesa?

Operačný postup vyzerá takto. Predstavíme si, že objem telesa je vyplnený „infinitezimálnymi“ kockami. Poloha každej kocky môže byť identifikovaná napríklad polohou ľavého predného spodného vrcholu. Potom hmotnosť celého telesa je zjavne

$$m = \sum_{\text{kocky}} \varrho(\vec{r})dV$$

Problém pri výpočte sumy môžu robiť kocky, ktoré sú pri hranici telesa, takže nie sú celé vnútri telesa. Keď sú objemy kociek naozaj veľmi malé, matematici vedia dokázať, že ak započítame hmotnosť celej kocky, hoci trčí trochu von z telesa, celková chyba výpočtu bude zanedbateľná.

Celý výpočet môžeme robiť napríklad numericky na počítači niekoľkokrát, pričom pri každom ďalšom výpočte zmenšíme objem každej malej kocky a zväčšíme teda ich počet. Keď budeme sledovať čísla, ktoré tak budeme postupne dostávať, zistíme, že sa blížia k nejakej konkrétnej hodnote, ktorú budeme považovať za vypočítanú hmotnosť telesa. Formálne ide o limitu takých súm a voláme ju „objemovým integrálom“ a značíme

$$m = \int \varrho(\vec{r})dV$$

$$m = \int \varrho(\vec{r})dV$$

Integrál, ktorý sme napísali nie je apriórne nijakým „opakom derivácie“ je to suma nekonečného počtu nekonečne malých čísel.

Naznačili sme si, ako by sme takú sumu počítali numericky. Niekedy sa nám môže podariť vypočítať tú sumu aj analyticky. Vyžaduje to istú invenciu ako transformovať tú sumu na „niekoľko opakov derivácií“

Okrem objemovej hustoty hmotnosti sa často používa aj plošná hustota hmotnosti pri objektoch, ktoré sú z praktického hľadiska dvojrozmerné. Napríklad list papiera. Plošná hustota kancelárskeho papiera býva 80 g cm^{-3}. Celková hmotnosť plošného objektu sa ráta tak, že objekt „vyštvorčekujeme“ a zrátame integrál (dS je plôška jedného infinitezimálneho štvorca)

$$m = \int \varrho_S(\vec{r})dS$$

Používa aj dĺžková hustota hmotnosti pri objektoch, ktoré sú z praktického hľadiska jednorozmerné. Napríklad drôt. Celková hmotnosť jednorozmerného objektu sa ráta tak, že krivku popisujúcu jeho tvar „vyúsečkujeme“ a zrátame integrál (ds je dĺžka jednej infinitezimálnej úsečky na krivke)

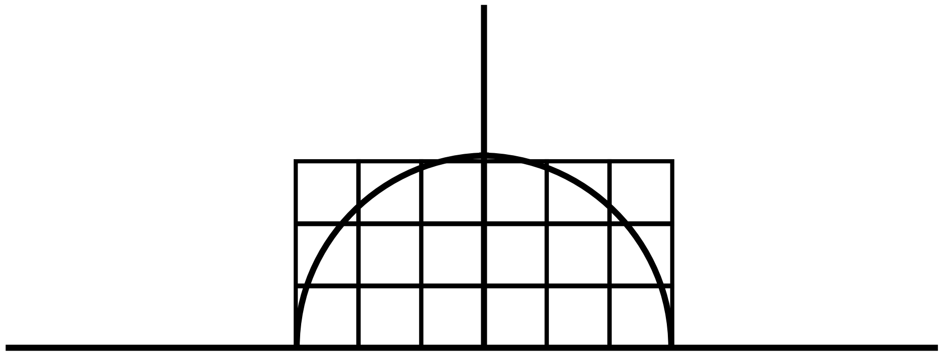
$$m = \int \varrho_s(\vec{r})ds$$

Poznamenajme, že fyzici v storočiach, keď „kontinuum“ bolo naozaj kontinuom, mohli v princípe vyhovieť matematikom a deliť priestor, plochu alebo krivku na „naozaj infinitezimálne“ kocky, štvorčeky alebo úsečky.

Ale odkedy veríme, že nejaké fyzikálne kontinuum je len „efektívne zviera“ v skutočnosti zložené z molekúl, nemôžeme s rozmermi delenia „ísť až do nuly“. Efektívna teória totiž stráca zmysel pre veľmi malé priestorové rozmery.

Ak by sme napríklad objemíky robili príliš malé, mohlo by sa stať, že sa v nich niekedy nachádza len jedna molekula a niekedy ani jedna. Pojem „objemová hmotnostná hustota látky“ potom stráca dobrý zmysel. Takže aplikácia diferenciálneho a integrálneho počtu na „fyzikálne kontinuum“ je možná iba ak pri požadovanej presnosti vystačíme s „objemíkmi“ tak malými, že napríklad hustotu látky v rámci jedného objemíku možno už považovať za prakticky konštantnú, ale objemík je pritom dosť veľký, aby stále ešte obsahoval veľmi veľký počet molekúl.

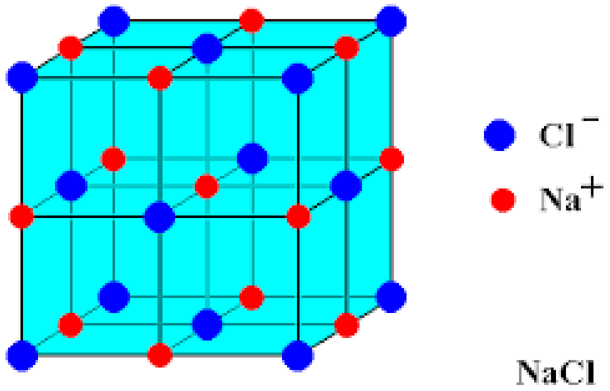
Tu je pre inšpiráciu jednoduchý program v Pythone rátajúci plochu polkruhu. Pri rátaní hmotnosti by bolo treba každú plôšku ešte vynásobiť plošnou hustotou.



```python
from pylab import *
nx=200; #number of squares in x direction
ny=100; #number of squares in y direction
R = 1.  #semicircle radius
deltax=2*R/nx;   # step in x
deltay=R/ny;  #step in y
area=0;
for i in range(nx+1):
    for j in range(ny+1):
        x=-R+i*deltax;
        y=j*deltay;
        if(sqrt(x*x+y*y)<R):
            area=area+deltax*deltay; #if square inside semicircle then sum
print(area)   #prints the area of the semicircle, should be pi/2
```

Hmotnostná hustota je parameter efektívnej teórie látky ako kontinua.

Ak by sme poznali molekulárnu štruktúru látky, mohli by sme hustotu látky vypočítať. V skutočnosti to nie je veľmi zložitá úloha. Ako ukážku vypočítame hustotu kuchynskej soli.



Chemické zloženie kuchynskej soli je NaCl. Molekulárna štruktúra vyzerá ako kocková mriežka. Vo vrcholoch kociek sú na striedačku atómy Na a Cl. Z röntgenovej štruktúrnej analýzy vieme, že vzdialenosť Na – Cl je 0,282 nm.
Atómová hmotnosť Na je 22,99
Atómová hmotnosť Cl je 35,45

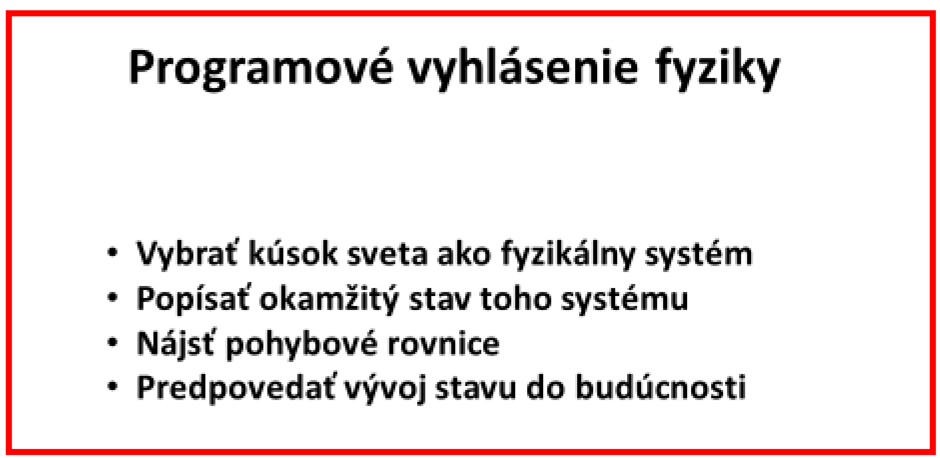
Jeden vrchol je spoločný ôsmim kockám, takže jednej kocke pripadá ½ atómu Na a ½ atómu Cl, takže „molekulárna hmotnosť jednej kocky o objeme d^3 je (22,99+35,45)/2 = 29,22 Jedna atómová hmotnostná jednota zodpovedá 1g/(6,022.10^{23}) = 1,66.10^{-24} g. Jedna elementárna kocka soli má teda hmotnosť 29,22 x 1,66.10^{-24} g =48,51. 10^{-24} g a objem (0,282 nm)^3. To dáva hustotu 2160 kg m^{-3}. Experimentálna hodnota je 2165. Rozdiel je daný zaokrúhľovaniami v údajoch a výpočtoch.

Kontinuum: stav a pohybová rovnica

Po prípravných prácach si teraz ukážeme, ako sa pracuje v rámci efektívnej teórie s kontinuom – látkovým objektom.

Ukážka bude o kovovej tyči votknutej medzi dve pevné steny vo vzdialenosti L od seba.

Pripomeňme si slajd, aká je úloha fyziky:



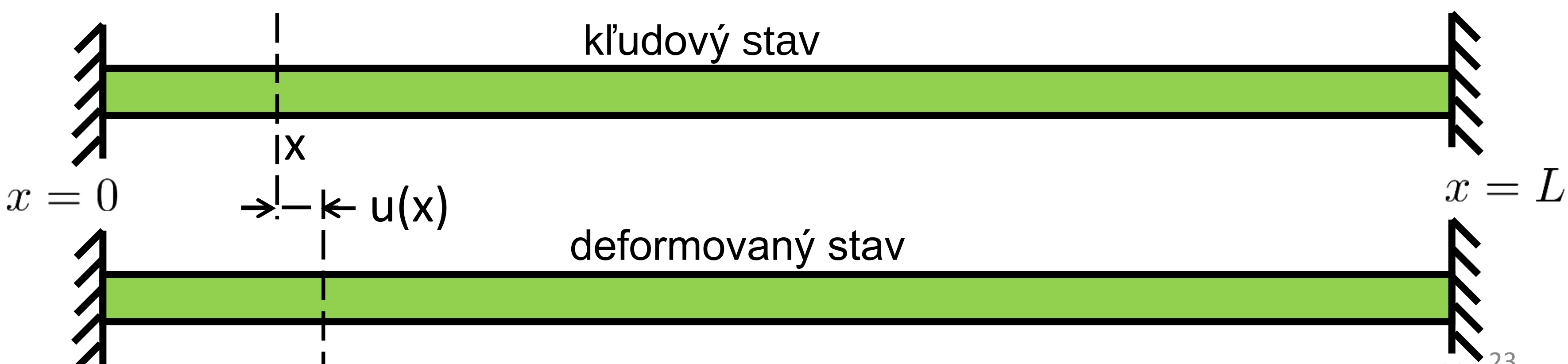
Programové vyhlásenie fyziky

- Vybrať kúsok sveta ako fyzikálny systém
- Popísať okamžitý stav toho systému
- Nájsť pohybové rovnice
- Predpovedať vývoj stavu do budúcnosti

Prvou úlohou je popísať okamžitý stav tyče.

To, čo chceme popisovať sú zmeny stavu tyče, pričom sa obmedzíme na také mechanické zmeny, ktoré ponechajú tyč rovnú, ale budeme vyšetrovať deformácie materiálu tyče v pozdĺžnom smere.

Uvažujme myslenú plochu (prierez) tyč, ktorá sa v základnom (kľudovom stave) nachádza v polohe danej súradnicou x. Pri deformácii sa tento prierez posunie do polohy so súradnicou $x + u(x)$.



23

Súčasťou zadania stavu tyče v istom okamihu bude teda zadať funkciu,

$$u(x)$$

udávajúcu posunutie prierezu tyče, ktorý sa v kľudovom stave nachádza v mieste x.
Očakávame, že stav tyče sa bude v čase meniť, takže v istom okamihu t bude stav zadaný funkciou

Pretože ide o mechanický problém a Newtonove rovnice sú druhého rádu, očakávame, že pre úplné zadanie stavu tyče je potrebné ešte zadať aj „rýchlosti“, teda pre každý prierez rýchlosť, s ktorou sa jeho posunutie mení:

$$v(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} u(t,x)$$

Záver: deformačný stav tyče je v každom okamihu zadaný dvoma funkciami

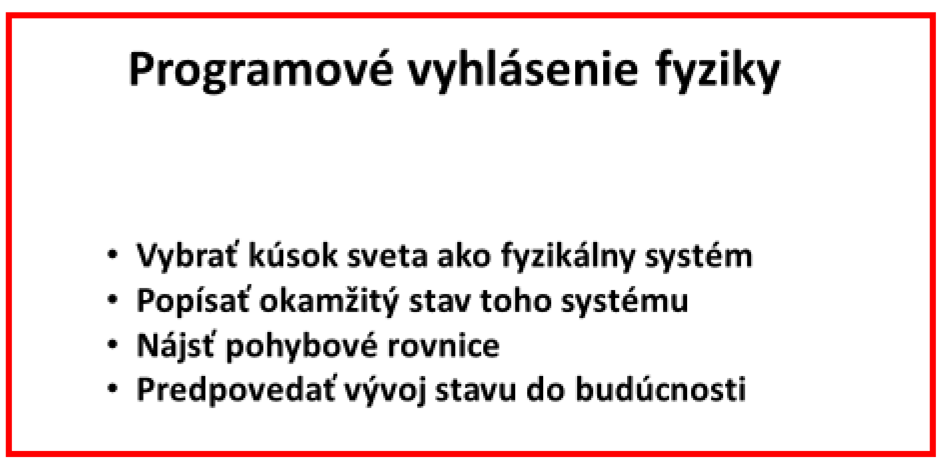
$$\boxed{u(t,x) \qquad v(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} u(t,x)}$$

Kontinuum: stav a pohybová rovnica

Po prípravných prácach si teraz ukážeme, ako sa pracuje v rámci efektívnej teórie s kontinuom – látkovým objektom.

Ukážka bude o kovovej tyči votknutej medzi dve pevné steny vo vzdialenosti L od seba.

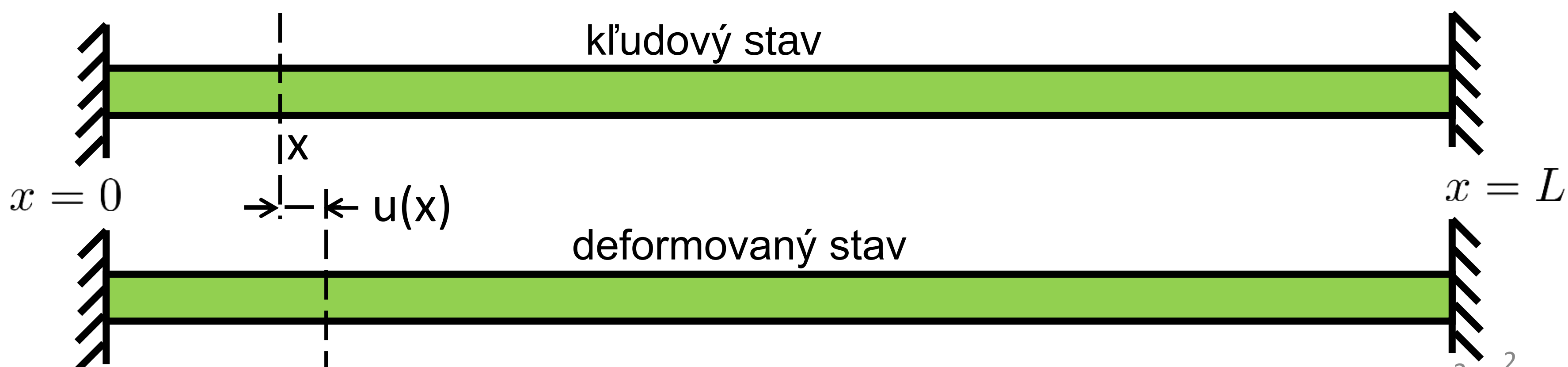
Pripomeňme si slajd, aká je úloha fyziky:



Prvou úlohou je popísať okamžitý stav tyče.

To, čo chceme popisovať sú zmeny stavu tyče, pričom sa obmedzíme na také mechanické zmeny, ktoré ponechajú tyč rovnú, ale budeme vyšetrovať deformácie materiálu tyče v pozdĺžnom smere.

Uvažujme myslenú plochu (prierez) tyč, ktorá sa v základnom (kľudovom stave) nachádza v polohe danej súradnicou x. Pri deformácii sa tento prierez posunie do polohy so súradnicou $x + u(x)$.



Súčasťou zadania stavu tyče v istom okamihu bude teda zadať funkciu,

$$u(x)$$

udávajúcu posunutie prierezu tyče, ktorý sa v kľudovom stave nachádza v mieste x.
Očakávame, že stav tyče sa bude v čase meniť, takže v istom okamihu t bude stav zadaný funkciou

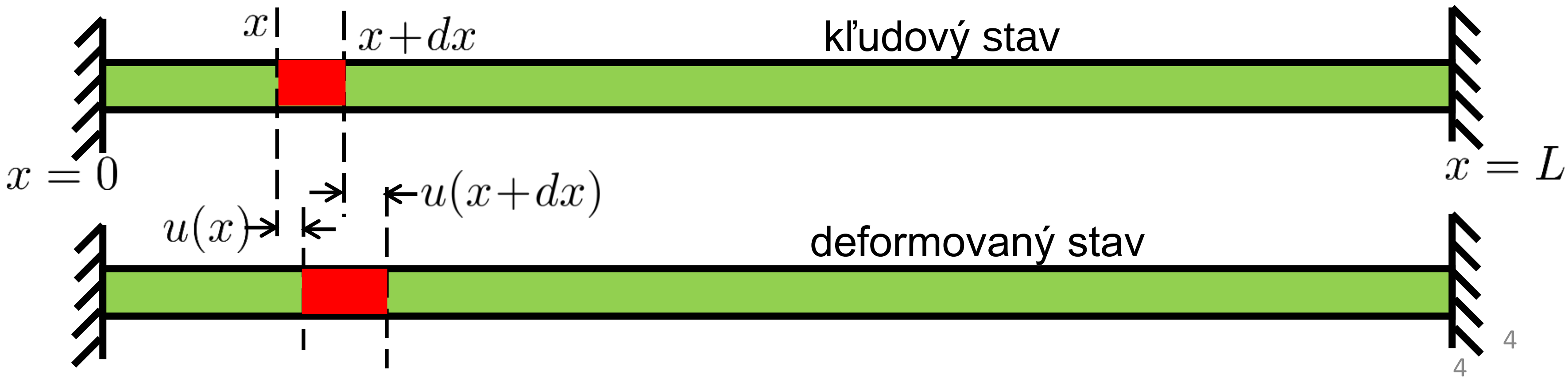
Pretože ide o mechanický problém a Newtonove rovnice sú druhého rádu, očakávame, že pre úplné zadanie stavu tyče je potrebné ešte zadať aj „rýchlosti“, teda pre každý prierez rýchlosť, s ktorou sa jeho posunutie mení:

$$v(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} u(t,x)$$

Záver: deformačný stav tyče je v každom okamihu zadaný dvoma funkciami

$$\boxed{u(t,x) \qquad v(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} u(t,x)}$$

Ďalšou úlohou je nájsť ohybovú rovnicu pozdĺžne deformovateľnej tyče.



Uvažujme malý objemový element tyče (označený červeno), ktorý sa v kľudovom stave nachádza v intervale súradníc $(x, x+dx)$. Dĺžka tohto objemového elementu v kľude je zjavne dx.

V deformovanom stave sa ľavý okraj uvažovaného elementu dostane do bodu $x+u(x)$ a pravý okraj do bodu $x+dx+u(x+dx)$. Jeho dĺžka po deformácii teda bude $\big(x+dx+u(x+dx)\big)-\big(x+u(x)\big)=dx+u(x+dx)-u(x)$. Nárast dĺžky oproti pôvodnej dĺžke dx teda bude $\Delta(\mathrm{x})=u(x+dx)-u(x)$ a relatívne predĺženie toho objemového elementu bude

$$\varepsilon(x)=\frac{\Delta(x)}{dx}=\frac{u(x+dx)-u(x)}{dx}=\frac{\partial u(x)}{\partial x}$$

deriváciu sme písali ako parciálnu, aby sme zdôraznili, že momentálne sa síce úvaha týka iba istého časového okamihu, ale všeobecne u závisí aj od času.

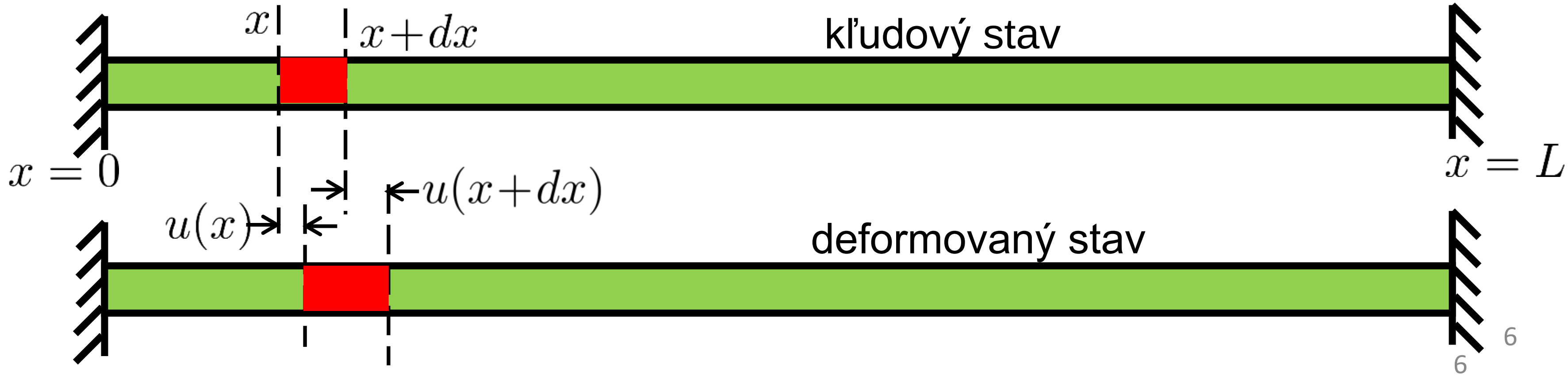
Len tak mimochodom: dá sa rozumieť, prečo relatívne predĺženie v mieste x vyšlo takto:

$$\varepsilon(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x}$$

Kvalitatívne dá. Keby posunutie $u(x)$ nezáviselo na x, potom by sa ľavý okraj a pravý okraj každého elementu tyče posúvali rovnako a vzdialenosť medzi nimi by sa pri posunutí nemenila, teda by nedošlo k predĺženiu alebo skráteniu. Vzdialenosti sa deformujú, iba keď je nenulová derivácia, v prvom priblížení teda deformácia je úmerná derivácii.

Ešte zdôraznime, že na rozdiel od nášho úvodného výkladu o pružnosti, tu sa už „hráme so znamienkami. $\varepsilon(x)$ môže byť kladné aj záporné. Ak si pozorne prezrieme odvodenie, zistíme, že kladné ε zodpovedá predĺženiu objemového elementu, záporné skráteniu. Uvedomme si teraz, čo to znamená pre znamienko deformačného napätia vnútri tyče v mieste x.

Prečítajte si nasledujúci slajd pozorne, aby ste sa nielen naučili naspamäť že „toto sa odvodzuje takto“ ale naozaj odvodeniu rozumeli a vedeli presvedčiť kolegu, ktorý prípadne nerozumie, že znamienka majú byť naozaj tak, ako sa tu píše a nie naopak.



Predpokladajme, že $\varepsilon(x) = \dfrac{\partial u(x)}{\partial x} > 0$

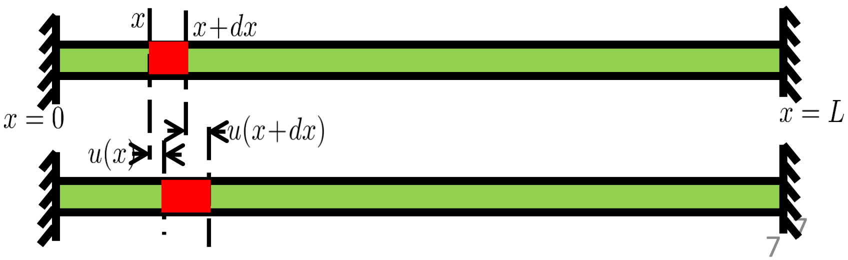
Znamená to, že červený element sa predĺžil, na mieste x je teda deformácia ťahom. Na prierez v mieste x teda červený element ťahá predchádzajúci zelený element, podobne na mieste $x + dx$ nasledujúci zelený element ťahá červený element. Teda sila, ktorá pôsobí **z pravej strany** na prierez v mieste x, je kladná a podobne aj sila, ktorá z pravej strany na prierez v mieste $x + dx$.

Napätie vnútri objektu v mieste x budeme definovať ako určené silou, ktorá pôsobí sprava na prierez v mieste x, teda silou, ktorou pôsobí nasledujúci element na predchádzajúci element. V prípade $\varepsilon(x) > 0$ táto konvencia bude hovoriť, že $\sigma(x) > 0$. Vzťah medzi napätím a deformáciou je daný Hookovým zákonom pomocou Youngovho modulu pružnosti

$$\sigma(x) = E\varepsilon(x)$$

$$\sigma(x) = E\varepsilon(x)$$

Skontrolujme ešte znamienka. Kladné znamienko deformácie znamená ťah, teda nasledujúci element musí ťahať predchádzajúci, sila má smer doprava v smere osi x, teda je kladná. Záporné znamienko deformácie znamená tlak, nasledujúci element musí tlačiť na predchádzajúci, sila má smer proti osi x, teda je záporná. Znamienka deformácie a napätia teda majú byť rovnaké, ako to hovorí aj napísaný vzorec.
Napíšeme teraz Newtonov pohybový zákon pre červený objemový element



Ak prierez tyče je S, červený element pôsobí na predchádzajúci silou $\sigma(x)S$, teda naň pôsobí zľava sila $-\sigma(x)S$. Sprava naň pôsobí sila od nasledujúceho elementu $\sigma(x+dx)S$.

Celková sila pôsobiaca na červený element je teda $\sigma(x+dx)S - \sigma(x)S = \frac{\partial \sigma}{\partial x}dx$

Ak použijeme vzťahy $\varepsilon(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x}$, $\sigma(x) = E\varepsilon(x)$, dostaneme pre celkovú silu pôsobiacu na červený element

$$ES\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2}dx$$

Hmotnosť červeného element je $\varrho S dx$ a jeho zrýchlenie je $\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}$
Newtonova rovnica teda bude

$$\varrho\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}Sdx = E\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}Sdx$$

Dostali sme teda rovnicu $\varrho\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}Sdx = E\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}Sdx$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \frac{E}{\varrho}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = c^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}}$$

Čo sme to dostali? Zistili sme že tyč s hustotou ϱ a modulom pružnosti E pri pozdĺžnych deformáciách musí spĺňať uvedenú rovnicu. To je hľadaná pohybová rovnica, umožňuje predpovedať budúcnosť. Takto:

Máme zadané v čase $t = 0$ počiatočné podmienky

$$u(t=0,x) = U(x), \quad v(t=0,x) = V(x)$$

Pripomeňme, že $v(t,x) = \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}$

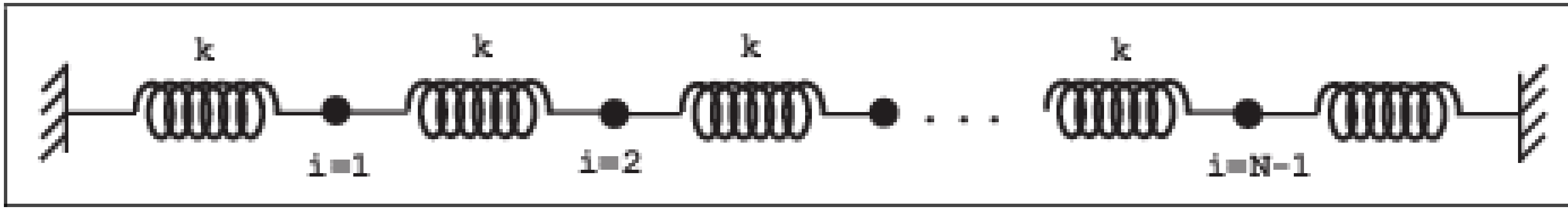
Použijeme okrajové podmienky $u(t,x=0) = u(t,x=L) = 0$
čo zodpovedá nepohyblivým koncom tyče votknutej medzi dve pevné steny. Potom vieme pohybovú rovnicu jednoznačne riešiť a teda predpovedať deformáciu v budúcnosti. Vieme? Vieme, veď je to naša známa vlnová rovnica. Práve sme teda zistili že v kontinuu sa môže šíriť zvuková vlna rýchlosťou

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}}$$

Pripomienka

Retiazka oscilátorov

Uvažujme jednorozmerný systém $N-1$ častíc rovnakej hmotnosti m navzájom poprepájaných pružinami rovnakej tuhosti k. Krajné častice nech sú rovnakými pružinami spojené s pevnými stenami



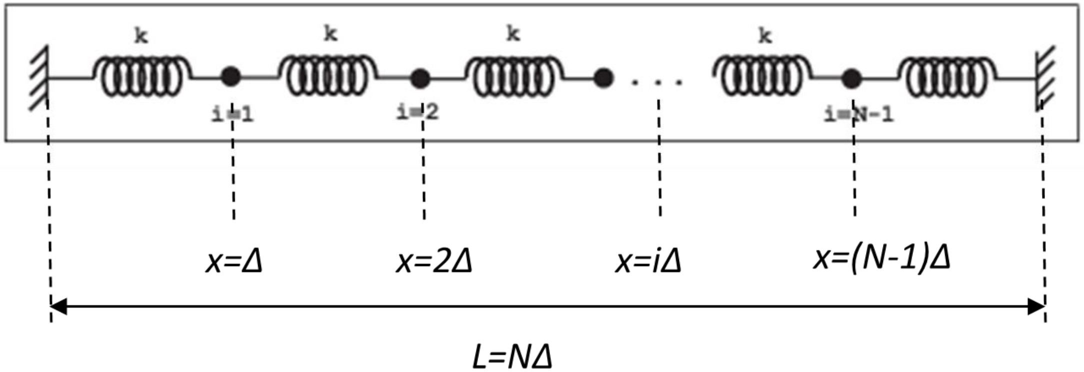
Napíšeme teraz pohybové rovnice pre tento systém. Označme výchyľku i-tej častice z jej rovnovážnej polohy ako u_i, pre $i = 1, 2, ...(N-1)$. A zaveďme ešte pomocné konštanty $u_0 = 0$, $u_n = 0$. Potom pohybové rovnice sú (pre $i = 1, 2, ...(N-1)$)

$$m\ddot{u}_i = -k(u_i - u_{i-1}) - k(u_i - u_{i+1})$$

Je to systém $n-1$ navzájom viazaných lineárnych diferenciálnych rovníc druhého rádu pre $N-1$ neznámych funkcií $u_i(t)$.

Systém pohybových rovníc pre retiazku oscilátorov sa naučíme riešiť, ale najprv budeme riešiť úlohu v spojitej limite. Riešenie je v spojitom prípade intuitívne prijateľnejšie.

Pripomienka



$$m\ddot{u}_i = -k(u_i - u_{i-1}) - k(u_i - u_{i+1})$$

Limita kontinua bola
$$\begin{aligned} N &\to \infty \\ \Delta &\to 0 \\ N\Delta &\to L \\ \frac{k\Delta^2}{m} &\to c^2 \end{aligned}$$
vyšlo:
$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$$

Chápme to ako kvazimikroskopický model kontinua. Aké budú jeho parametre ϱ, E? Ak prierez guličky je S, potom jedna gulička s hmotnosťou m pripadá na objem $S\Delta$ a bude $\varrho = m/(S\Delta)$. Ak sa pružina predĺži o u, treba na to silu $F = ku$. Dĺžka nedeformovanej pružiny je Δ, relatívne predĺženie u/Δ, napätie F/S a dostaneme

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{ku}{S} = \frac{k\Delta}{S}\frac{u}{\Delta} = \frac{k\Delta}{S}\varepsilon \equiv E\varepsilon \quad \Rightarrow \quad E = \frac{k\Delta}{S}$$

V modeli s guličkami vyšlo $c^2 = \dfrac{k\Delta^2}{m} = \dfrac{k\Delta^2}{\varrho S\Delta} = \dfrac{k\Delta}{S}\dfrac{1}{\varrho} = \dfrac{E}{\varrho}$

a **takto to vyšlo v efektívnej teórii bez odvolávania sa na „guličky“. Hurá!**

Rýchlosť zvuku v deformovateľnom médiu odvodil už Newton v Princípiách. Médium bolo chápané ako kontinuum, lebo o molekulárnej štruktúre sa ešte nič nevedelo.

V našom výklade sme si trochu naznačili ako môžu súvisieť mikroskopická molekulová a makroskopická kontinuová teória. Retiazka guličiek nie je realistický model tuhej látky, ale veľmi zjednodušený štruktúrny model. Skutočný svet je technicky oveľa ťažšie zvládnuteľný, ale náš primitívny model dostatočne naznačil ako „to funguje“.

Poznamenajme, že sme videli len pozdĺžne zvukové vlny, ktoré sú dominantné v objektoch ako dlhá úzka tyč.

V trojrozmerných objektoch sú v tuhých látkach dôležité aj **priečne zvukové vlny**, keď látka je lokálne namáhaná nie na tlak a ťah ale na šmyk. Vo vzťahu pre rýchlosť zvuku potom vystupuje modul pružnosti v šmyku. Priečne aj pozdĺžne vlny treba uvažovať napríklad pri analýze zemetrasení.

Kontinuum: stav a pohybová rovnica

Po prípravných prácach si teraz ukážeme, ako sa pracuje v rámci efektívnej teórie s kontinuom – látkovým objektom.

Ukážka bude o kovovej tyči votknutej medzi dve pevné steny vo vzdialenosti L od seba.

Pripomeňme si slajd, aká je úloha fyziky:

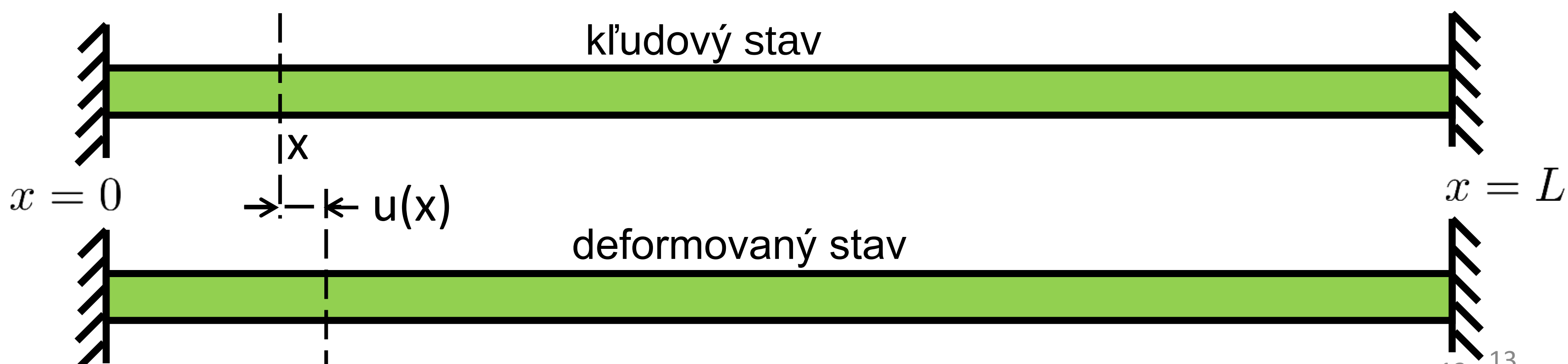
Programové vyhlásenie fyziky

- Vybrať kúsok sveta ako fyzikálny systém
- Popísať okamžitý stav toho systému
- Nájsť pohybové rovnice
- Predpovedať vývoj stavu do budúcnosti

Prvou úlohou je popísať okamžitý stav tyče.

To, čo chceme popisovať sú zmeny stavu tyče, pričom sa obmedzíme na také mechanické zmeny, ktoré ponechajú tyč rovnú, ale budeme vyšetrovať deformácie materiálu tyče v pozdĺžnom smere.

Uvažujme myslenú plochu (prierez) tyč, ktorá sa v základnom (kľudovom stave) nachádza v polohe danej súradnicou x. Pri deformácii sa tento prierez posunie do polohy so súradnicou $x + u(x)$.



13

Súčasťou zadania stavu tyče v istom okamihu bude teda zadať funkciu,

$$u(x)$$

udávajúcu posunutie prierezu tyče, ktorý sa v kľudovom stave nachádza v mieste x.
Očakávame, že stav tyče sa bude v čase meniť, takže v istom okamihu t bude stav zadaný funkciou

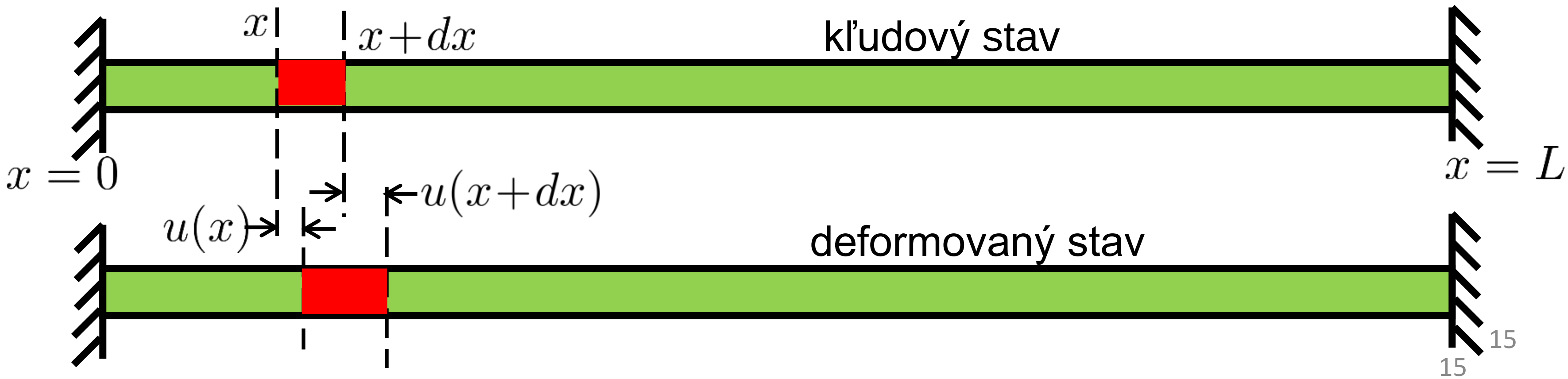
Pretože ide o mechanický problém a Newtonove rovnice sú druhého rádu, očakávame, že pre úplné zadanie stavu tyče je potrebné ešte zadať aj „rýchlosti“, teda pre každý prierez rýchlosť, s ktorou sa jeho posunutie mení:

$$v(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} u(t,x)$$

Záver: deformačný stav tyče je v každom okamihu zadaný dvoma funkciami

$$\boxed{u(t,x) \qquad v(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} u(t,x)}$$

Ďalšou úlohou je nájsť ohybovú rovnicu pozdĺžne deformovateľnej tyče.



Uvažujme malý objemový element tyče (označený červeno), ktorý sa v kľudovom stave nachádza v intervale súradníc $(x, x + dx)$. Dĺžka tohto objemového elementu v kľude je zjavne dx.
V deformovanom stave sa ľavý okraj uvažovaného elementu dostane do bodu $x + u(x)$ a pravý okraj do bodu $x + dx + u(x + dx)$. Jeho dĺžka po deformácii teda bude $\big(x + dx + u(x + dx)\big) - \big(x + u(x)\big) = dx + u(x + dx) - u(x)$. Nárast dĺžky oproti pôvodnej dĺžke dx teda bude $\Delta(\mathrm{x}) = u(x + dx) - u(x)$ a relatívne predĺženie toho objemového elementu bude

$$\varepsilon(x) = \frac{\Delta(x)}{dx} = \frac{u(x + dx) - u(x)}{dx} = \frac{\partial u(x)}{\partial x}$$

deriváciu sme písali ako parciálnu, aby sme zdôraznili, že momentálne sa síce úvaha týka iba istého časového okamihu, ale všeobecne u závisí aj od času.

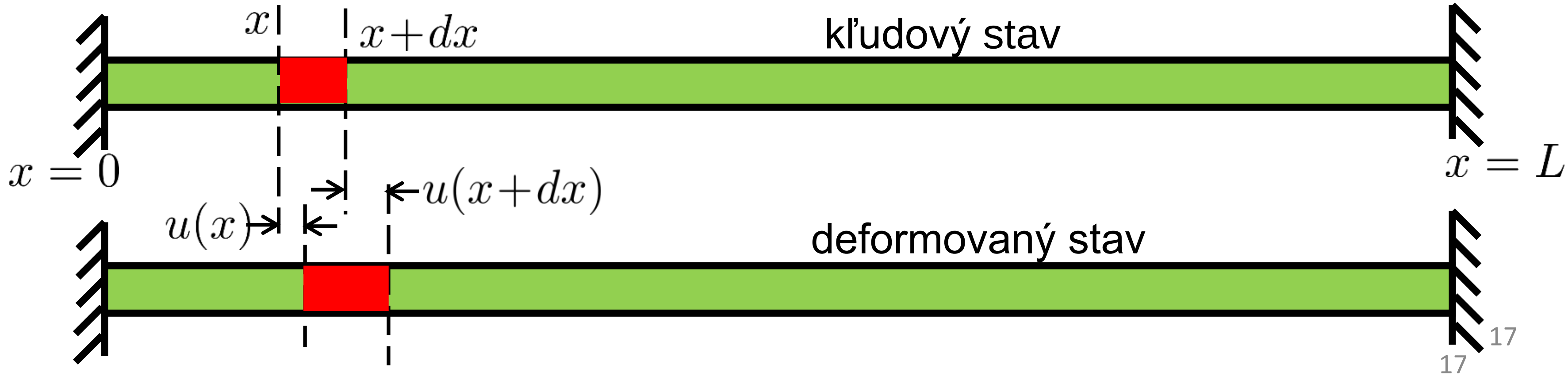
Len tak mimochodom: dá sa rozumieť, prečo relatívne predĺženie v mieste x vyšlo takto:

$$\varepsilon(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x}$$

Kvalitatívne dá. Keby posunutie $u(x)$ nezáviselo na x, potom by sa ľavý okraj a pravý okraj každého elementu tyče posúvali rovnako a vzdialenosť medzi nimi by sa pri posunutí nemenila, teda by nedošlo k predĺženiu alebo skráteniu. Vzdialenosti sa deformujú, iba keď je nenulová derivácia, v prvom priblížení teda deformácia je úmerná derivácii.

Ešte zdôraznime, že na rozdiel od nášho úvodného výkladu o pružnosti, tu sa už „hráme so znamienkami. $\varepsilon(x)$ môže byť kladné aj záporné. Ak si pozorne prezrieme odvodenie, zistíme, že kladné ε zodpovedá predĺženiu objemového elementu, záporné skráteniu. Uvedomme si teraz, čo to znamená pre znamienko deformačného napätia vnútri tyče v mieste x.

Prečítajte si nasledujúci slajd pozorne, aby ste sa nielen naučili naspamäť že „toto sa odvodzuje takto“ ale naozaj odvodeniu rozumeli a vedeli presvedčiť kolegu, ktorý prípadne nerozumie, že znamienka majú byť naozaj tak, ako sa tu píše a nie naopak.



Predpokladajme, že $$\varepsilon(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x} > 0$$

Znamená to, že červený element sa predĺžil, na mieste x je teda deformácia ťahom. Na prierez v mieste x teda červený element ťahá predchádzajúci zelený element, podobne na mieste $x + dx$ nasledujúci zelený element ťahá červený element. Teda sila, ktorá pôsobí **z pravej strany** na prierez v mieste x, je kladná a podobne aj sila, ktorá z pravej strany na prierez v mieste $x + dx$.

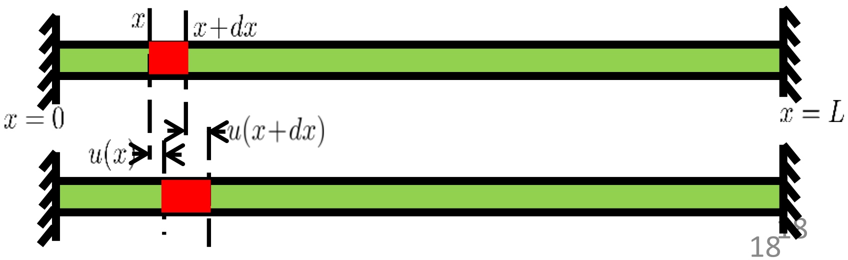
Napätie vnútri objektu v mieste x budeme definovať ako určené silou, ktorá pôsobí sprava na prierez v mieste x, teda silou, ktorou pôsobí nasledujúci element na predchádzajúci element. V prípade $\varepsilon(x) > 0$ táto konvencia bude hovoriť, že $\sigma(x) > 0$. Vzťah medzi napätím a deformáciou je daný Hookovým zákonom pomocou Youngovho modulu pružnosti

$$\sigma(x) = E\varepsilon(x)$$

$$\sigma(x) = E\varepsilon(x)$$

Skontrolujme ešte znamienka. Kladné znamienko deformácie znamená ťah, teda nasledujúci element musí ťahať predchádzajúci, sila má smer doprava v smere osi x, teda je kladná. Záporné znamienko deformácie znamená tlak, nasledujúci element musí tlačiť na predchádzajúci, sila má smer proti osi x, teda je záporná. Znamienka deformácie a napätia teda majú byť rovnaké, ako to hovorí aj napísaný vzorec.

Napíšeme teraz Newtonov pohybový zákon pre červený objemový element



Ak prierez tyče je S, červený element pôsobí na predchádzajúci silou $\sigma(x)S$, teda naň pôsobí zľava sila $-\sigma(x)S$. Sprava naň pôsobí sila od nasledujúceho elementu $\sigma(x+dx)S$.

Celková sila pôsobiaca na červený element je teda $\sigma(x+dx)S - \sigma(x)S = \dfrac{\partial\sigma}{\partial x}dx$

Ak použijeme vzťahy $\varepsilon(x) = \dfrac{\partial u(x)}{\partial x}$, $\sigma(x) = E\varepsilon(x)$, dostaneme pre celkovú silu pôsobiacu na červený element

$$ES\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2}dx$$

Hmotnosť červeného element je $\varrho S dx$ a jeho zrýchlenie je $\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}$

Newtonova rovnica teda bude

$$\varrho\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}Sdx = E\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}Sdx$$

Dostali sme teda rovnicu $\varrho \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} S dx = E \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} S dx$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \frac{E}{\varrho} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}}$$

Čo sme to dostali? Zistili sme že tyč s hustotou ϱ a modulom pružnosti E pri pozdĺžnych deformáciách musí spĺňať uvedenú rovnicu. To je hľadaná pohybová rovnica, umožňuje predpovedať budúcnosť. Takto:

Máme zadané v čase $t = 0$ počiatočné podmienky

$$u(t=0,x) = U(x), \qquad v(t=0,x) = V(x)$$

Pripomeňme, že $v(t,x) = \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}$

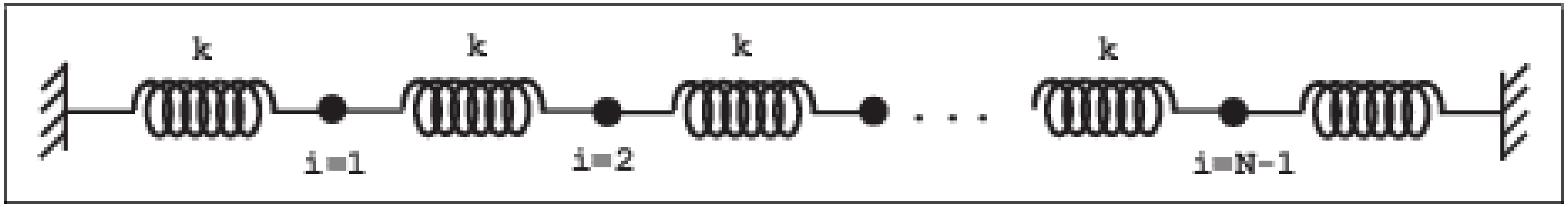
Použijeme okrajové podmienky $u(t, x=0) = u(t, x=L) = 0$
čo zodpovedá nepohyblivým koncom tyče votknutej medzi dve pevné steny. Potom vieme pohybovú rovnicu jednoznačne riešiť a teda predpovedať deformáciu v budúcnosti. Vieme? Vieme, veď je to naša známa vlnová rovnica. Práve sme teda zistili že v kontinuu sa môže šíriť zvuková vlna rýchlosťou

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}}$$

Pripomienka

Retiazka oscilátorov

Uvažujme jednorozmerný systém $N-1$ častíc rovnakej hmotnosti m navzájom poprepájaných pružinami rovnakej tuhosti k. Krajné častice nech sú rovnakými pružinami spojené s pevnými stenami



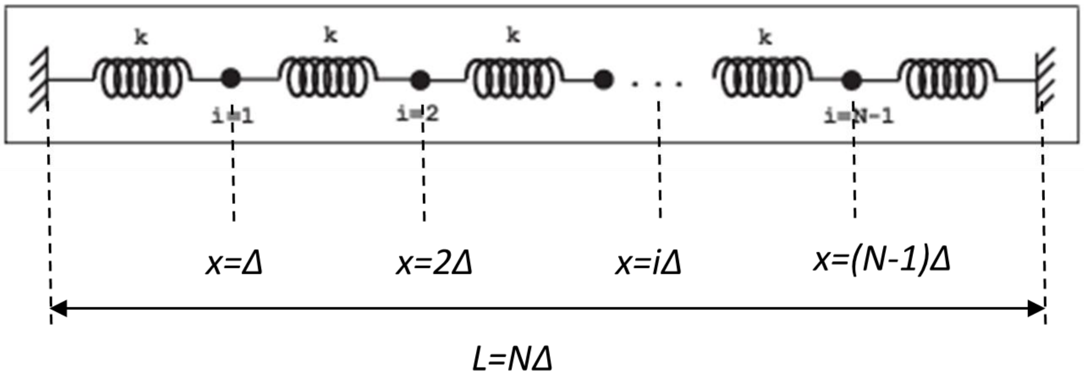
Napíšeme teraz pohybové rovnice pre tento systém. Označme výchyľku i-tej častice z jej rovnovážnej polohy ako u_i, pre $i = 1, 2, ...(N-1)$. A zaveďme ešte pomocné konštanty $u_0 = 0$, $u_n = 0$. Potom pohybové rovnice sú (pre $i = 1, 2, ...(N-1)$)

$$m\ddot{u}_i = -k(u_i - u_{i-1}) - k(u_i - u_{i+1})$$

Je to systém $n-1$ navzájom viazaných lineárnych diferenciálnych rovníc druhého rádu pre $N-1$ neznámych funkcií $u_i(t)$.

Systém pohybových rovníc pre retiazku oscilátorov sa naučíme riešiť, ale najprv budeme riešiť úlohu v spojitej limite. Riešenie je v spojitom prípade intuitívne prijateľnejšie.

Pripomienka



$$m\ddot{u}_i = -k(u_i - u_{i-1}) - k(u_i - u_{i+1})$$

Limita kontinua bola

$$\begin{aligned} N &\to \infty \\ \Delta &\to 0 \\ N\Delta &\to L \\ \frac{k\Delta^2}{m} &\to c^2 \end{aligned}$$

vyšlo:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$$

Chápme to ako kvazimikroskopický model kontinua. Aké budú jeho parametre ϱ, E? Ak prierez guličky je S, potom jedna gulička s hmotnosťou m pripadá na objem $S\Delta$ a bude $\varrho = m/(S\Delta)$. Ak sa pružina predĺži o u, treba na to silu $F = ku$. Dĺžka nedeformovanej pružiny je Δ, relatívne predĺženie u/Δ, napätie F/S a dostaneme

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{ku}{S} = \frac{k\Delta}{S}\frac{u}{\Delta} = \frac{k\Delta}{S}\varepsilon \equiv E\varepsilon \quad \Rightarrow \quad E = \frac{k\Delta}{S}$$

V modeli s guličkami vyšlo $c^2 = \dfrac{k\Delta^2}{m} = \dfrac{k\Delta^2}{\varrho S\Delta} = \dfrac{k\Delta}{S}\dfrac{1}{\varrho} = \dfrac{E}{\varrho}$

a **takto to vyšlo v efektívnej teórii bez odvolávania sa na „guličky“. Hurá!**

Rýchlosť zvuku v deformovateľnom médiu odvodil už Newton v Princípiách. Médium bolo chápané ako kontinuum, lebo o molekulárnej štruktúre sa ešte nič nevedelo.

V našom výklade sme si trochu naznačili ako môžu súvisieť mikroskopická molekulová a makroskopická kontinuová teória. Retiazka guličiek nie je realistický model tuhej látky, ale veľmi zjednodušený štruktúrny model. Skutočný svet je technicky oveľa ťažšie zvládnuteľný, ale náš primitívny model dostatočne naznačil ako „to funguje“.

Poznamenajme, že sme videli len pozdĺžne zvukové vlny, ktoré sú dominantné v objektoch ako dlhá úzka tyč.

V trojrozmerných objektoch sú v tuhých látkach dôležité aj **priečne zvukové vlny**, keď látka je lokálne namáhaná nie na tlak a ťah ale na šmyk. Vo vzťahu pre rýchlosť zvuku potom vystupuje modul pružnosti v šmyku. Priečne aj pozdĺžne vlny treba uvažovať napríklad pri analýze zemetrasení.

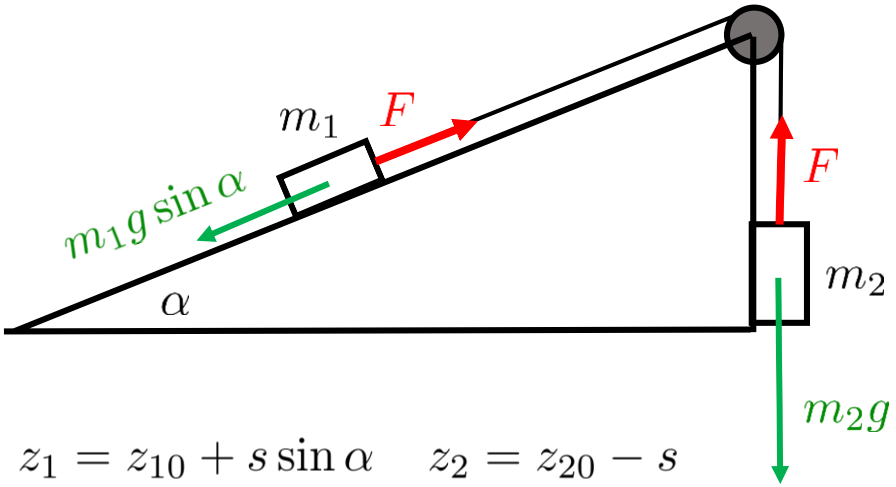
Práca a energia

Pri skúmaní pohybu častice v homogénnom gravitačnom poli (voľný pád a šikmý vrh) sme spozorovali, takmer ako „náhodnú kuriozitu“, že platí zákon

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = \mathrm{const}$$

Ukazuje sa, že to nie je len kuriózna vlastnosť pohybu v gravitačnom poli ale špeciálny prípad fundamentálneho fyzikálneho zákona o zachovaní energie. V tejto časti preskúmame viacero situácií z hľadiska toho, ako tam zákon zachovania energie funguje. Začneme dvoma telesami v gravitačnom poli a zistíme, že si naše predstavy musíme poriadnejšie upratať. Pri tom upratovaní spoznáme viacero zaujímavostí o práci, energii a ich súvise.

Energia a práca v sústave dvoch telies



Nepíšeme vektory, len veľkosti

$$m_1 a_1 = F - m_1 g \sin\alpha$$

$$m_2 a_2 = -F + m_2 g$$

Lano spôsobí, že rýchlosti a teda aj zrýchlenia sú rovnaké $a_1 = a_2 = a$

$$a = g\frac{m_2 - m_1 \sin\alpha}{m1 + m2}$$

$$v = at$$

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

$$z_1 = z_{10} + s\sin\alpha \qquad z_2 = z_{20} - s$$

$$E_1 = \frac{1}{2}m_1 v^2 + m_1 g z_1 \qquad E_2 = \frac{1}{2}m_2 v^2 + m_2 g z_2$$

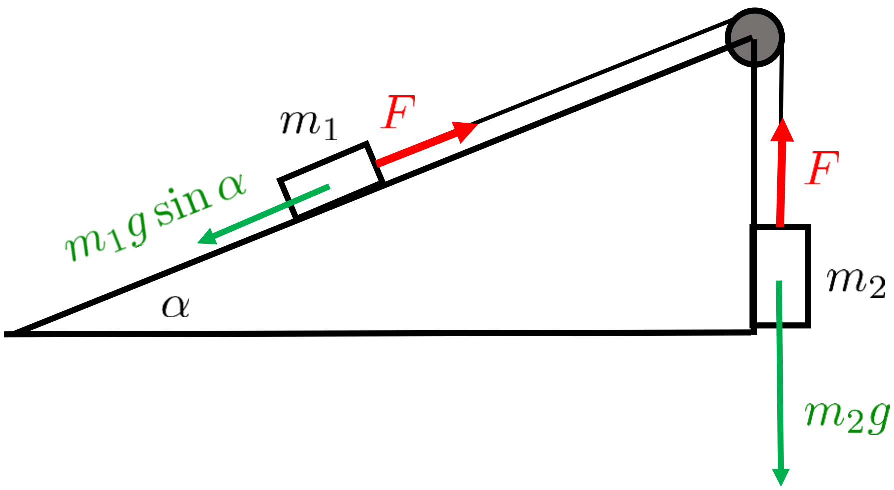
$$\frac{d}{dt}E_1 = m_1 va + m_1 gv\sin\alpha = (m_1 a + m_1 g\sin\alpha)v = Fv \neq 0$$

$$\frac{d}{dt}E_2 = m_2 va - m_2 gv = (m_2 a - m_2 g)v = -Fv \neq 0$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}E_1 + \frac{d}{dt}E_2 = Fv - Fv = 0}$$

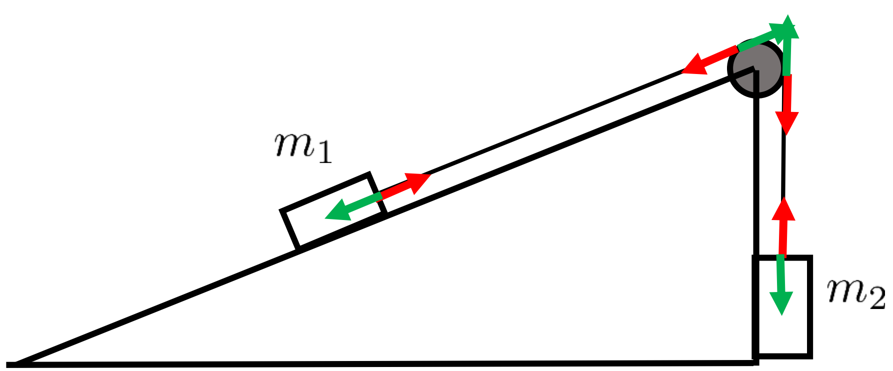
Energia každého telesa osobitne nie je konštantná. Súčet energií telies, celková energia je konštantná, zachováva sa.

Lano ako „prenášač sily“



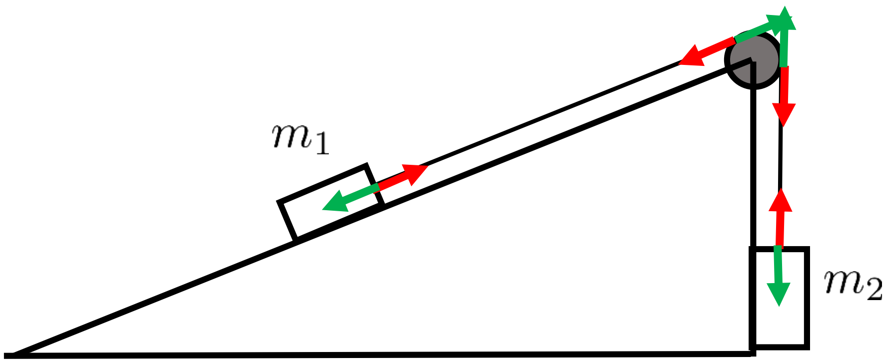
Červeno nakreslené sily, sú sily, ktorými lano pôsobí na telesá, ku ktorým je pripnuté. Pri výpočte sme použili predpoklad, že tie sily sú rovnako veľké, teda, že **„lano prenáša silu nemeniac je veľkosť, iba prípadne jej smer“**.

Tento predpoklad je správny, pokiaľ lano i kladka sú nehmotné a lano po kladke nepreklzuje. Ukážeme si argumentáciu.



Predovšetkým dokreslime nejaké chýbajúce sily, ktorými lano pôsobí na kladku a potom aj všetky reakcie k čereným silám.

Je zrejmé, že zelené sily, ktoré pôsobia na časť lana natiahnutého medzi telesom 1 a kladkou sú rovnaké. Celková sila pôsobiaca na tú časť lana je totiž nulová podľa Newtonovho zákona sily, lebo lano má nulovú hmotnosť.



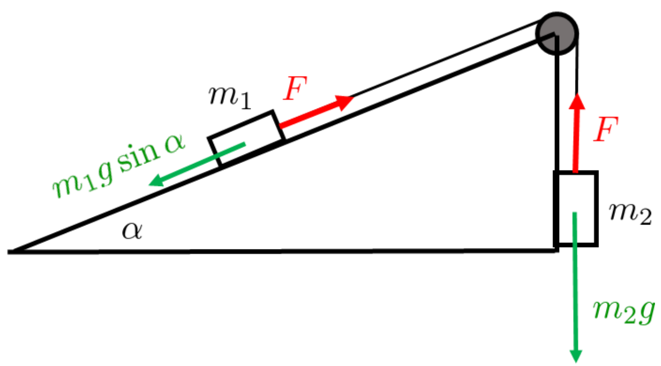
Ak zelené sily pôsobiace na šikmú časť lana sú rovnaké, potom sú rovnaké aj ich reakcie, teda príslušné červené sily. Jedna z nich pôsobí na kladku. Na kladku pôsobí ešte druhá červená sila, reakcia na zelenú silu zvislej časti lana. Dve červené sily pôsobiace na kladku musia mať rovnakú veľkosť, lebo kladka má nulový moment zotrvačnosti a podľa pohybovej rovnice pre rotujúce teleso teda na kladku pôsobí nulový moment síl voči osi rotácie. Dve zelené sily pôsobiace na zvislú časť lana musia byť rovnaké, lebo lano je nehmotné, teda podľa Newtona celková naň pôsobiaca sila je nulová. Preto sú rovnaké aj príslušné reakcie teda červené sily. Záver je taký: všetky červené aj zelené sily na obrázku majú rovnakú veľkosť.

Odporúčam: **Prečítajte a poriadne predumajte celú argumentáciu. Je dosť jemná, ale nevyhnutná, ak chcem rozumieť, že príklad bol správne vypočítaný. Nepodceňte to mávnutím ruky, že hlavne že viem, ako sa počíta ten konkrétny príklad. Argument, že každý „cíti“ že všetky tie sily sú rovnaké, neobstojí.** Aj Sam Hawkens hovorí, že cítenia majú iba staré sqaw.

Zistili sme toto:

$$\frac{d}{dt}E_1 + \frac{d}{dt}E_2 = Fv - Fv = 0$$

Energia každého telesa osobitne nie je konštantná. Súčet energií telies, celková energia je konštantná, zachováva sa.



$$a = g\frac{m_2 - m_1 \sin\alpha}{m1 + m2}$$

$$v = at$$

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

Uvažujme prípad $m_2 > m_1 \sin\alpha$, teda $a > 0$, teleso 1 stúpa, teleso 2 klesá. Začínajú z kľudu, s nulovou kinetickou energiou. Energia telesa 1 sa teda zväčšuje, lebo rastie aj jeho kinetická aj potenciálna energia. To je vyjadrené vzťahom

$$\frac{d}{dt}E_1 = Fv > 0$$

Energia telesa 2 klesá. Jeho kinetická energia síce rastie ale potenciálna klesá zrejme viac, takže sumárne

$$\frac{d}{dt}E_2 = -Fv > 0$$

Uvedomme si dôležitú vec. Energiu každého telesa osobitne vieme vypočítať v každom okamihu, ak poznáme stav toho telesa v tom okamihu. Ak poznáme polohu a rýchlosť telesa v danom okamihu, teda $\vec{r}$, $\vec{v}$ dosadíme tieto „stav určujúce veličiny“ do vzorcov pre kinetickú a potenciálnu energiu, teda

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m\vec{v}^2 \quad E_{\text{pot}} = mg(\vec{r})_z$$

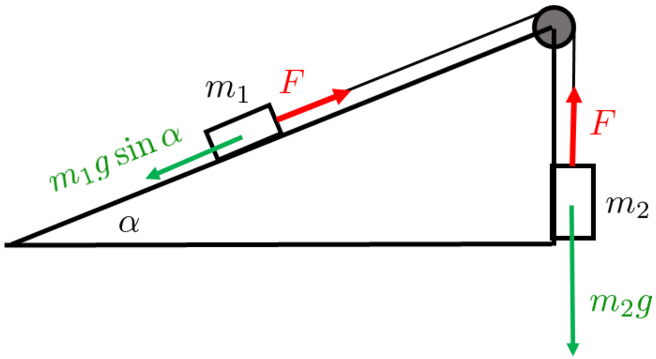
a celkovú energiu v danom stave určíme ako súčet

$$E(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{1}{2} m\vec{v}^2 + mg(\vec{r})_z$$

Ak uvažujeme zložitejší systém (v našom prípade to boli dve telesá), potom okamžitý stav je daný väčším počtom „stav určujúcich veličín“ $\vec{r}_1, \vec{v}_1, \vec{r}_2, \vec{v}_2$. Celkovú energiu v danom okamihu však vždy vieme pomocou týchto veličín vypočítať, teda

$$E(\vec{r}_1, \vec{v}_1, \vec{r}_2, \vec{v}_2) = \frac{1}{2} m\vec{v}_1^2 + mg(\vec{r}_1)_z + \frac{1}{2} m\vec{v}_2^2 + mg(\vec{r}_2)_z$$

Poučenie: energia je stavová veličina, čo znamená to, že ak poznáme okamžitý stav systému, potom hodnoty stav určujúcich veličín **dosadíme do všakových vzorcov pre energiu**, výsledky sčítame a dostaneme to, čo sa volá **energia systému v danom stave**. Výpočet energie v danom stave teda nezávisí napríklad od histórie „ako sa systém do daného stavu dostal“, energia systému je stavom úplne určená. To nás oprávňuje hovoriť, že **systém v danom stave má energiu**. Energia systému je atribútom stavu systému.



Pre tento uvažovaný systém dvoch telies sme dokázali že platí

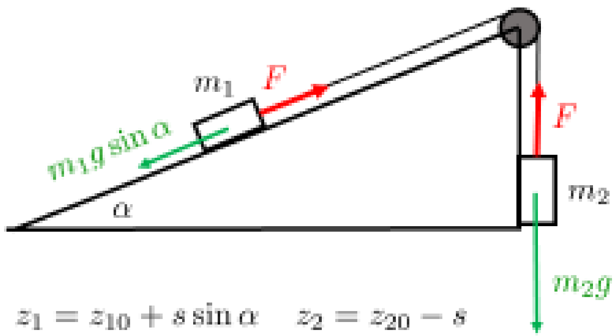
$$\frac{d}{dt}E(\vec{r}_1,\vec{v}_1,\vec{r}_2,\vec{v}_2) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}_1^2 + mg(\vec{r}_1)_z + \frac{1}{2}m\vec{v}_2^2 + mg(\vec{r}_2)_z\right) = 0$$

Energia celého systému je teda konštantná, zachováva sa. Povedané „polopatisticky" to znamená, že keď vyčíslim energiu systému v nejakom čase a potom v neskoršom čase, dostanem tú istú hodnotu. To je zákon zachovania energie.

Všetci poznáme zákon: „Energia sa zachováva". Ale táto veta je málo starostlivo sformulovaná. Takto to jednoducho neplatí. Ak chceme rozvažovať, či platí zákon zachovania energie, musíme predovšetkým špecifikovať aký fyzikálny systém máme na mysli. Ak máme na mysli systém „teleso 1", tak sme videli, že **jeho energia sa nezachováva**. Ani energia systému „teleso 2" sa nezachováva. Ale energia systému „teleso 1 plus teleso 2" sa zachováva.

Takže pozor: vo fyzike nestrieľajte od boku nejaké klišé. Rozvažujte. Presne formulujte. Aby ste aj vy aj váš poslucháč vedeli čo a o čom hovoríte.

Všimnime si, že **zákon zachovania energie „je skrytý“ už v pohybových rovniciach**. Prezrite si ešte raz odvodenie



Nepíšeme vektory, len veľkosti

$$m_1 a_1 = F - m_1 g \sin\alpha$$

$$m_2 a_2 = -F + m_2 g$$

Lano spôsobí, že rýchlosti a teda aj zrýchlenia sú rovnaké $a_1 = a_2 = a$

$$a = g\frac{m_2 - m_1 \sin\alpha}{m1 + m2}$$

$$v = at$$

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

$$z_1 = z_{10} + s\sin\alpha \qquad z_2 = z_{20} - s$$

$$E_1 = \frac{1}{2}m_1 v^2 + m_1 g z_1 \qquad E_2 = \frac{1}{2}m_2 v^2 + m_2 g z_2$$

$$\frac{d}{dt}E_1 = m_1 v a + m_1 g v \sin\alpha = (m_1 a + m_1 g \sin\alpha)v = Fv \neq 0$$

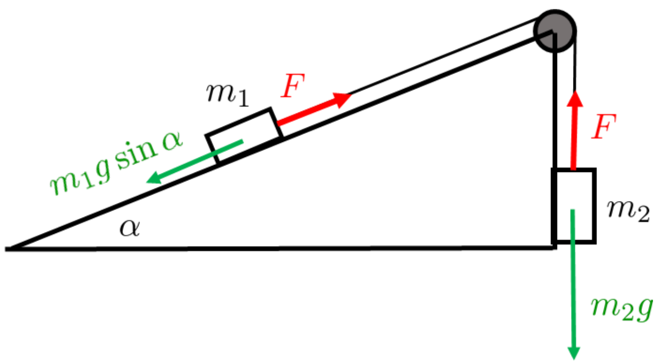
$$\frac{d}{dt}E_2 = m_2 v a - m_2 g v = (m_2 a - m_2 g)v = -Fv \neq 0$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}E_1 + \frac{d}{dt}E_2 = Fv - Fv = 0}$$

Energia každého telesa osobitne nie je konštantná. Súčet energií telies, celková energia je konštantná, zachováva sa.

Nikde sme nevyužili konkrétny tvar riešenia, teda výraz pre zrýchlenie a. Iba sme použili výraz pre silu rovno z pohybových rovníc a bolo to hotové.

Práca a energia



Uvažujme prípad $m_2 > m_1 \sin\alpha$, teda $a > 0$, teleso 1 stúpa, teleso 2 klesá. Začínajú z kľudu, s nulovou kinetickou energiou. Energia telesa 1 sa teda zväčšuje, lebo rastie aj jeho kinetická aj potenciálna energia. To je vyjadrené vzťahom

$$\frac{d}{dt}E_1 = Fv > 0$$

Pozrime sa o koľko narastie energia telesa 1 za čas dt.

$$dE_1 = Fvdt = Fds$$

Vidno, že prírastok energie telesa 1 je rovný práci, ktorú vykoná lano, keď ho ťahá po dráhe ds. Naopak, energia telesa 2 sa zmení za ten čas o

$$dE_2 = -Fvdt = -Fds$$

Lano koná nad telesom 2 zápornú prácu a energia telesa klesá.
Ak sa na lano pozeráme iba ako na „prenášač sily“, potom lano možno vynechať z hry a tvrdiť, že práce, ktoré sme uvažovali, konajú tie telesá. Teda nad telesom 1 koná kladnú prácu teleso 2, čo súčasne (podľa princípu akcie a reakcie) znamená, že nad telesom 2 koná zápornú prácu teleso 1.

Práca a energia

Povedali sme si, že energia je stavová veličina. V danom stave uvažovaný fyzikálny systém má nejakú hodnotu energie. Ako keby v danom stave bola v tom systéme „uložená“ energia o hodnote prislúchajúcej tomu stavu. Ak sa v uvažovanom procese energia zachováva, potom to v onej terminológii znamená, že „uskladnená hodnota energie“ sa nemení.

Ak energia rastie, potom to v onej terminológii znamená, že niekto do skladu prináša ďalšiu energiu. Ako sa dá uskladnená hodnota energie zvýšiť? Náš príklad hovorí, že vykonaním kladnej práce nad uvažovaným systémom. Naopak vykonaním zápornej práce sa energia systému znižuje. **Prácu, ktorá mení hodnotu energie systému, musí vykonať nejaký „vonkajší (voči systému) externý objekt“.**

Energia aj práca sa vyjadrujú v J (Joule). Ale všimnite si rozdiel: energia sa týka stavu, práca sa týka nejakého deja. Ak dej skončí, práca už neexistuje, to slovo proste nemá význam pre jeden okamih.

Na zmenu energie treba nejaký proces, v priebehu ktorého sa koná práca. Energia je charakteristika stavu, práca je charakteristika deja. Hodnota energie sa pritom zmení o hodnotu vykonanej práce, ktorá môže byť tak kladná ako aj záporná.

Práca a energia

Videli sme situáciu, že v systéme pozostávajúcom z dvoch telies sa energia zachovávala, ale nezachovávala sa separátne energia každého telesa. Energia jedného telesa sa zvyšovala, energia druhého telesa sa znižovala, súčet energií ostával konštantný.

Vyjadrujeme to aj tak, že dochádzalo k prenosu (transferu) energie medzi tými telesami.
Pritom stratená alebo získaná (teda prenesená) energia bola rovná práci, ktorú telesá konali.

Zapamätajte si tento pohľad na prácu: konaním práce dochádza k transferu energie medzi fyzikálnymi systémami. Práca je spôsob transferu energie. Práca sama nie je druh energie, hoci sa meria v jednotkách energie.

Teleso nemôže konať nad iným telesom prácu „len tak zadarmo“, ak koná kladnú prácu, stráca pritom toľko svojej energie, koľko práce vykoná. Samozrejme, jeho energia môže byť naopak dopĺňaná, ak súčasne nejaký ďalší externý objekt koná nad tým telesom kladnú prácu. Vtedy to teleso funguje ako keby bolo iba sprostredkovateľom práce. V našom príklade to bolo lano spájajúce telesá.

Práca a energia

- energia je stavová veličina, dá sa pre daný stav vypočítať, ak poznáme hodnoty „stav určujúcich veličín“
- práca nie je stavová veličina, teleso v sebe neobsahuje „skrytú prácu“. Práca sa týka nejakého deja. Práca „sprostredkuje“ transfer energie medzi dvoma objektami, ktoré jeden nad druhým konajú prácu. Práca nie je druh energie.

- Vážna poznámka, veľmi predčasná, uvádzaná bez podrobnej diskusie: Teplo nie je “druh energie“, teplo je „druh práce“. Je to práca konaná mikroskopickým (makroskopicky neviditeľným) spôsobom. Teplo nie je stavová veličina. Nie je pravda, že teleso v sebe obsahuje nejaké „teplo“. Keďže teplo „nikde nie je“, nedá sa ani prenášať. Prenášať sa dá čosi ako kufor, ktorý je najprv tu a potom tam. Teplo sa koná. V praxi sa (žiaľ) užíva veľmi často pojem „prenos tepla“, alebo „dodali sme vám teplo“ a podobne. Celá táto poznámka je len varovanie do budúcnosti.

Čo je to tá energia?

Študenti majú radi definície. Tie sa dajú zapísať a naučiť. A na skúške očakávajú otázku typu: povedzte mi definíciu energie. Takúto otázku na skúške z mechaniky nedostanete.

Nedostanete preto, lebo nepoznám žiadnu rozumnú formuláciu definície pojmu energia.

Voľakedy v škole som sa učil definíciu: „Energia je miera schopnosti telesa konať prácu“. Nebudem teraz diskutovať, čo je na tej definícii nie dosť dobré alebo dosť presné. Len zdôrazním, že v tej definícii sa pojem práca kladie hierarchicky nad pojem energia. Je pravdou, že to zodpovedá histórii fyzikálneho poznania. Už Archimedes de facto vedel, že práca je na oboch stranách páky rovnaká, hoci to tak asi nevolal. Pojem energie sa ustálil oveľa neskôr, v termodynamike, keď sa prišlo na to, že teplo „nie je energia“.

Môže vzniknúť námietka, ako môžem pracovať s pojmom energia, keď neviem, čo to je. Môžem, lebo síce nebudem vedieť, čo je energia, ale môžem sa jednoducho naučiť „pravidlá používania toho pojmu.

Ľudia dlho nevedeli „čo je to teplota“ ale ten pojem prakticky používali. Na chladničku pripínali odkazy typu „Večeru máš v chladničke, zohrej si ju!“ a manžel napodiv vedel, čo má robiť.

Čo je to tá energia?

Energia je dnes považovaná za jeden z najfundamentálnejších fyzikálnych pojmov. Naozaj nevieme, čo je to tá energia? Nuž, máloktorý prednášateľ má guráž povedať explicitne, že nevie. Feynman bol fyzikálny VIP, mohol si to dovoliť povedať bez obáv, za čo ho budú považovať. Tu je pár originálnych viet:

There is a fact, or if you wish, a law governing all natural phenomena that are known to date. There is no known exception to this law – it is exact so far as we know. The law is called the conservation of energy.

It states that there is a certain quantity, which we call "energy," that does not change in the manifold changes that nature undergoes. That is a most abstract idea, because it is a mathematical principle; it says there is a numerical quantity which does not change when something happens.

It is important to realize that in physics today, we have no knowledge of what energy *is.* We do not have a picture that energy comes in little blobs of a definite amount. It is not that way. However, there are formulas for calculating some numerical quantity, and when we add it all together it gives "28"'—always the same number. It is an abstract thing in that it does not tell us the mechanism or the *reasons* for the various formulas.

Čo je to tá energia?

Tu je stručné zhrnutie toho, čo hovorí o energii Feynman.

Energia je také oné, že máme sadu vzorcov pre energiu. Vyberieme z nich tie, ktoré sú pre daný systém a jeho daný stav relevantné. Dosadíme do nich hodnoty „stav určujúcich veličín“, čísla získané pomocou jednotlivých vzorcov sčítame a dostaneme hodnotu energie v danom stave.

V škole sme sa všetci učili, že definícia musí byť poriadna a „vedecká“ a slová „také oné“ sú už úplne zakázané. Nedajte sa tým zmiasť. Ak sa vám to nepáči, skúste vymyslieť niečo lepšie. Tromfnete Feynmana.

Zákon zachovania energie hovorí, že keď vypočítame energiu podľa relevantných vzorcov v dvoch rozličných okamihoch, dostaneme tú istú hodnotu.

Čo je to tá energia?

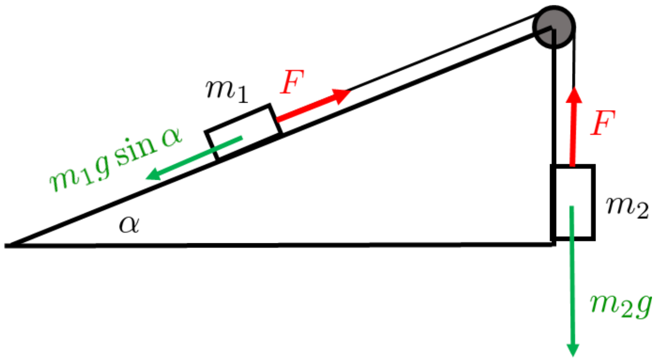
Tu je stručné zhrnutie toho, čo hovorí o energii Feynman.

Energia je také oné, že máme sadu vzorcov pre energiu. Vyberieme z nich tie, ktoré sú pre daný systém a jeho daný stav relevantné. Dosadíme do nich hodnoty „stav určujúcich veličín“, čísla získané pomocou jednotlivých vzorcov sčítame a dostaneme hodnotu energie v danom stave.

V škole sme sa všetci učili, že definícia musí byť poriadna a „vedecká“ a slová „také oné“ sú už úplne zakázané. Nedajte sa tým zmiasť. Ak sa vám to nepáči, skúste vymyslieť niečo lepšie. Tromfnete Feynmana.

Zákon zachovania energie hovorí, že keď vypočítame energiu podľa relevantných vzorcov v dvoch rozličných okamihoch, dostaneme tú istú hodnotu.

Zákon zachovania energie



V škole nás učia, a hovorí to aj vyššie uvedený citát z Feynmana, že zákon zachovania energie je fundamentálny zákon prírody, z ktorého nepoznáme výnimku.

No a my sme videli, že energia telesa 1 sa nezachováva. Tak ako to je?

Zovšeobecnený zákon zachovania energie

Pre teleso 1 sme zistili, že platí

$$\boxed{dE_1 = F ds}$$

Poučenie: zákon zachovania energie možno zovšeobecniť takto:

Každá zmena energie systému musí byť krytá prácou, konanou externým objektom, ktorý je mimo uvažovaného systému.

Čo je to tá práca?

Poznamenajme, že vo fyzike máme viac vzorcov pre prácu, nielen $F.s$.

Parafrázujúc Feynmana o energii: **Práca, to je také oné, že máme sadu vzorcov pre jej výpočet a keď pomocou nich spočítame prácu konanú vonkajšími externými objektmi nad systémom v nejakom procese, zistíme, že celková vykonaná práca kryje zmenu energie systému v uvažovanom procese**.

Poznamenajme, že „dobré vzorce" pre energiu a pre prácu nehľadáme len tak hádaním naslepo. V teoretickej mechanike sa budete učiť postupy, ako sa tie vzorce „hľadajú" resp. dokonca „odvodzujú".

Zákon zachovania energie v podstate hovorí, že **„doteraz sa nám vždy podarilo nájsť chýbajúci vzorec"** tak, že zdanlivé nezachovanie energie počítanej pomocou dovtedy známych vzorcov sa zmenilo na zachovanie po pridaní nového vzorca do zbierky „vzorcov pre energiu a prácu"

Výkon

Popri práci sa v mechanike zavádza i užitočná veličina výkon, definovaný ako práca pripadajúca na jednotku času. Ak sa za čas dt vykoná práca δA, potom výkon definujeme vzťahom

$$\boxed{P = \frac{\delta A}{dt}}$$

Výkon sily na dráhe

Ak na teleso pôsobí sila $\vec{F}$ a teleso zmení polohu o $d\vec{r}$, potom sila vykoná prácu

$$\delta A = \vec{F}.d\vec{r}$$

Výkon tej sily bude

$$P = \frac{\delta A}{dt} = \frac{\vec{F}.d\vec{r}}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$$

Vzorec $\boxed{P = \vec{F}.\vec{v}}$ si držte v pamäti rovnako ako vzorec „Fs“.

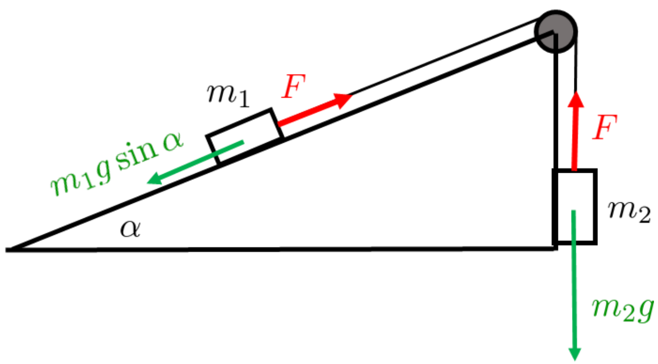
Pridajme poznámku, že malú vykonanú prácu sme zámerne značili δA a nie dA, lebo „malá práca nie je rozdiel dvoch prác“, práca všeobecne môže závisieť na ceste. Takže vzorec pre výkon

$$P = \frac{\delta A}{dt}$$

nehovorí, že výkon je derivácia práce. Napísali sme tam proste zlomok ako podiel dvoch veľmi malých čísel. Symbol δ nás na to upozorňuje

Pokúsme sa finalizovať poučenie z doterajších úvah:

Uvažujme nejaký systém. Ak nevidíme externé objekty, ktoré by konali prácu nad tým systémom, potom energia toho systému sa zachováva. Ak také externé objekty existujú, potom platí zovšeobecnený zákon, zmena energie je krytá prácou vonkajších externých objektov.



Príklad: Uvažujme systém „teleso 1". Je tam vonkajší externý objekt „lano". Energia sa nezachováva, jej zmena je ale krytá prácou externého objektu

$$dE_1 = F ds$$

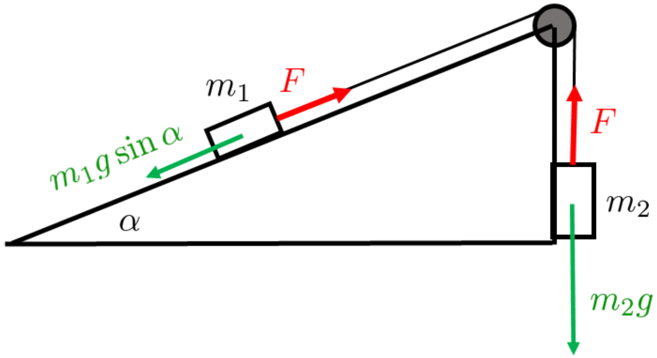
Príklad: Uvažujme systém „teleso 1 plus teleso 2". Jeho energia sa zachováva

$$d(E_1 + E_2) = 0$$

lebo nie sú vonkajšie externé objekty, ktoré by konali prácu.

ZLE !!!

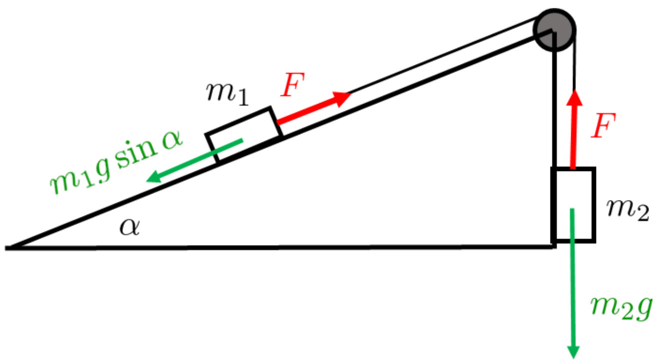
Veď tam je vonkajší externý objekt!!! Zem, ktorá koná prácu. **Nevidíte tie zelené sily?! Veď tie konajú prácu!**



Prečo sa energia zachováva, keď externé objekty konajú prácu?

Nápad : Nie je to náhodou tak, že celková práca konaná externými objektmi je nulová?

Budeme hlasovať

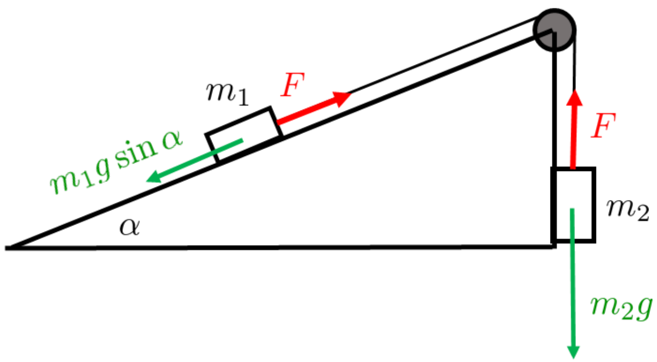


Prečo sa energia zachováva, keď externé objekty konajú prácu?

Nápad : Nie je to náhodou tak, že celková práca konaná externými objektmi je nulová?

Budeme hlasovať

a) celková práca zelených síl **je** nulová
b) celková práca zelených síl **nie je** nulová



Prečo sa energia zachováva, keď externé objekty konajú prácu?

Nápad : Nie je to náhodou tak, že celková práca konaná externými objektmi je nulová?

Celková práca konaná zelenými silami: $-m_1 g \sin\alpha \; ds + m_2 g \; ds$

To sa nerovná nule, lebo keď sčítam pohybové rovnice

$$m_1 a_1 = F - m_1 g \sin\alpha$$
$$m_2 a_2 = -F + m_2 g$$

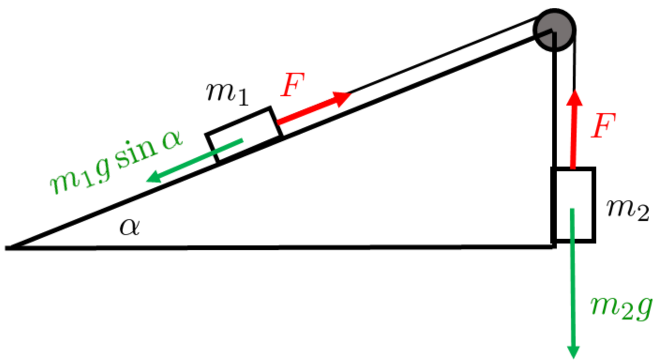
dostanem $-m_1 g \sin\alpha ds + m_2 g ds = (m_1 + m_2) a ds \neq 0$

Záver: Poučka, ktorú sme sformulovali

Ak nevidíme externé objekty, ktorá by konali prácu nad tým systémom, potom energia toho systému sa zachováva. Ak také objekty existujú, potom platí zovšeobecnený zákon, zmena energie je krytá prácou externých objektov.

JE ZLE !!!

Otázka je, prečo. Skúste najprv chvíľu podumať!



Niečo je zle. Naše poučky boli zjavne zle sformulované. Prezradíme dopredu , prečo bola naša úvaha zlá.

Pretože prácu externého objektu – Zeme, sme už zohľadnili vo vzorci pre potenciálnu energiu telesa.

Pre výpočet energie telies sme (používajúc Feynmanovu terminológiu) totiž použili „zbierku" dvoch vzorcov

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 \quad E_{\mathrm{pot}} = mgz$$

Nejako sa nám to (treba povedať, že schválne) zamotalo. Aby sme to rozmotali, začneme úvahy o energii znovu od začiatku. Musíme si ozrejmiť, ako postupne „pridávame vzorce do Feynmanovej zbierky energetických vzorcov".

Ako sa tvorí Feynmanova „zbierka vzorcov“ pre energiu?

Začnem prvým vzorcom pre energiu, kinetickou energiou.

Ako ľudstvo vyhútalo vzorec pre kinetickú energiu?

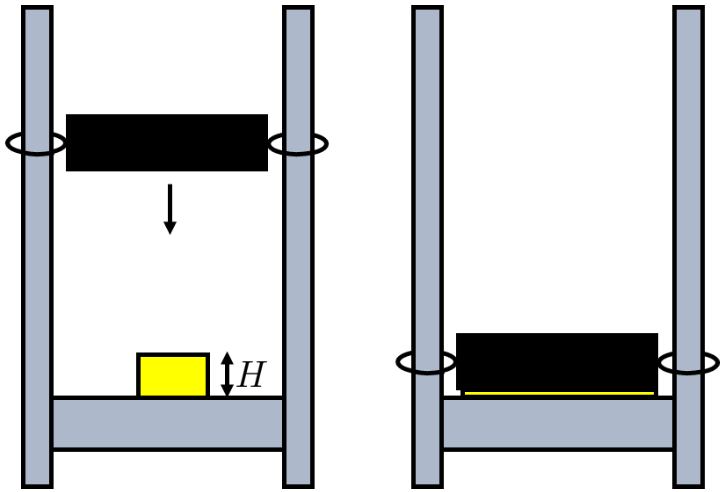
Neviem historicky verne odpovedať.

Ale viem argumentovať, ako to prípadne mohlo byť.

Ako ľudstvo mohlo vyhútať prvý a možno hlavný vzorec pre energiu, na ktorom všetko ďalšie stojí: vzorec pre kinetickú energiu

Ako ľudstvo vyhútalo vzorec pre kinetickú energiu

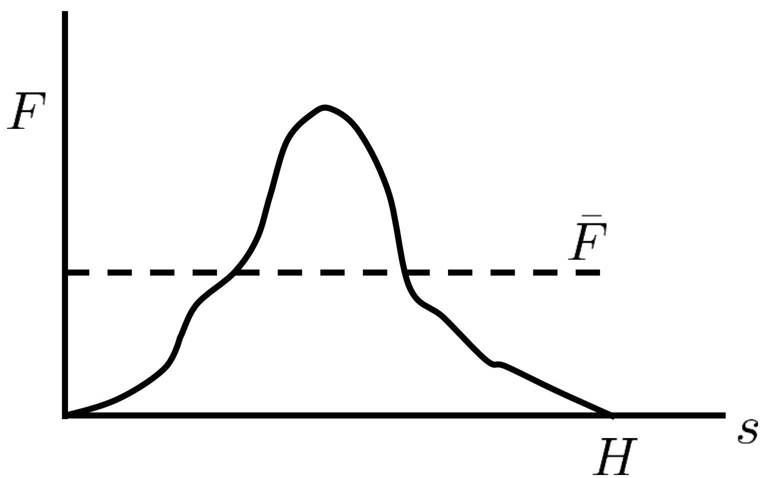
Ľudia už dávno vyhútali nástroje na dosiahnutie veľkej sily, od pästného klinu cez Dávidov prak, kladivá, baranidlá až po buchare na zatĺkanie pilót. Objavili trik: zobrať ťažké teleso, urýchliť ho na veľkú rýchlosť a potom ho **nárazom do cieľového objektu na krátkej dráhe rýchlo zastaviť** (napríklad na Goliášovej hlave).



Lis: dopad telesa hmotnosti m rýchlosťou spôsobí, že predmet pôvodne výšky H sa zlisuje na zanedbateľnú hrúbku. Odhadneme silu, ktorá to spôsobí.

Teleso sa zastaví na dráhe dĺžky $s = H$. Sila bude na dráhe premenlivá, jej graf môže vyzerať napríklad takto. Priemerná sila na dráhe H sa vypočíta takto

$$\bar{F} = \frac{1}{H}\int_0^H F ds$$



S tým výrazom sa trochu pohráme:

$$\bar{F}H = \int_0^H F ds = \int_0^T mavdt = \int_0^T m\frac{dv}{dt}vdt =$$

$$= \int_0^v mvdv = \frac{1}{2}mv^2$$

Ak chcem lisovať rôzne materiály rovnakej hrúbky, potrebujem niekedy väčšiu a inokedy menšiu silu. Mám k dispozícii voľbu m a v.

Zistili sme, že pri danej hrúbke lisovaného materiálu jej dôležitý výraz

$$\frac{1}{2}mv^2$$

V histórii fyziky nejakú dobu súťažili medzi sebou dva vzorce. Leibnizov vzorec pre „vis viva“ mv^2 a Newtonov a Descartesov pre „quantity of motion“ mv. Žiaden nevyhral, lebo oba sa týkajú zachovávajúcich sa veličín, rôznych, s rôznym významom: energie a hybnosti. Zrejme prvý, kto použil termín energia v modernom zmysle bol T.Young v roku 1807 (ten Young po ktorom je pomenovaný modul pružnosti a ten, ktorý pretláčal vlnovú teóriu svetla oproti Newtonovej korpuskulárnej).

Faktom ostáva, že lepšou mierou schopnosti urýchleného telesa rozbíjať orechy (alebo hlavy) je kinetická energia, definovaná voči Leibnizovej vis vitalis navyše s faktorom ½, aby to sedelo so vzorcom pre prácu F.s.

Takže prvý a základný vzorec do „Feynmanovej zbierky vzorcov“ pomocou ktorých sa počíta energia je

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2}$$

Jednou z techník, ako vyrobiť veľkú kinetickú energiu je postiť teleso z výšky voľným pádom.

Externé teleso, Zem, pôsobí pri páde na teleso silou mg, ktorá spôsobuje zrýchlenie g a teleso pri páde z výšky h dosiahne kinetickú energiu (spočítateľnú podľa Newtonovho zákona sily)

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

Pri vyšetrovaní pohybu telesa v homogénnom gravitačnom poli (šikmý vrh) sme si všimli, že riešenia pohybových rovníc majú „kurióznu vlastnosť", že je splnený zákon zachovania

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = \mathrm{const}$$

a nazvali sme výraz mgz potenciálnou energiou, pridajúc ho do „zbierky Feynmanových vzorcov". V amerických učebniciach býva zvykom neskočiť hneď na zákon zachovania energie ale upozorniť, že teleso pri pohybe v gravitačnom poli získava energiu (myslí sa kinetickú, lebo iný vzorec sa v danej chvíli nepozná) tým, že Zem koná prácu. (Viď napríklad odporúčaná učebnica Halliday,Resnick alebo MIT Open course na webe.) Získavanie energie konaním práce má dokonca „oficializovaný názov" work energy theorem. V tomto prístupe sa výraz mgh číta ako $mg.h = F.h$, teda ako „sila-krát-dráha", čo sa volá práca.

Takže prvé, s čím sa študent mechaniky v Amerike zoznámi nie je zákon zachovania energie ale „work energy theorem“, ktorý hovorí, že

Zmena (kinetickej) energie telesa je krytá prácou externého objektu.

V našich zemepisných šírkach sa na takúto zovšeobecnenú formu zákona zachovania energie „s prácou na pravej strane“ (presnejšie možno zákona o „bilancii energie“) často neupozorňuje.

Didakticky aj konceptuálne je tu problém, či „prvotné je vajce alebo sliepka?“. Hovorím o pojmoch energia a práca.
Často sa za prvotný pojem volí práca a potom sa energia „pseudodefinuje“ ako miera schopnosti telesa konať prácu. Alebo sa ako prvá definuje energia (kinetická, vis vitalis) a potom sa všimne, že sila-krát-dráha mení energiu a nazve sa to prácou.

Môj názor je taký, že debatovať o prvotnosti vajca je neužitočné, lebo „fyzika sa neodvodzuje“ ako matematika z nejakých primárnych axióm typu „Euklides“. Fyzika sa objavuje „po celých navzájom prepletených kusoch“ ako krajina videná z vrcholu kopca, keď sa rozptýli hmla. V prípade energie a práce je to napred hranie sa s nejasne definovanými koncepciami v rozličných situáciách, keď zrazu dostanem akýsi „aha-pocit“, že veď to všetko krásne funguje dokopy. Skúsenosťou vycizelovaný pojem energie porodí pojem práce a skúsenosťou vycizelovaný pojem práce porodí pojem energie. Teória sa neodvodzuje, ale „zrazu sa zjaví“. Najlepšie to vystihuje anglický termín „emergence“ (nepliesť s emergency!).

Spomenuli sme niekedy na začiatku našich diskusií o fyzike, že fyzika si nekladie za úlohu „všetko alebo nič“. Teda že neskúma svet v celostnosti ale je spokojná s cestou chápať svet po kúskoch.

Prakticky to znamená vyčleniť nejakú časť sveta, nazvať to „skúmaný fyzikálny systém“ a snažiť sa pochopiť, ako funguje. Taký systém spravidla nežije vo svet sám, pôsobia naň (interagujú s ním) externé objekty. Takže „pochopiť systém ako funguje“ spravidla znamená pochopiť ho v nejakom vonkajšom kontexte v interakcii s vonkajšími objektami.

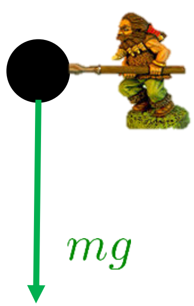
Keď teda chcem pochopiť „padajúci kameň“, potom to chápem v kontexte gravitačného pôsobenia Zeme ako vonkajšieho objektu. V tomto prípade je to značne uľahčené tým, že síce je pravda, že nielen vonkajší objekt Zem pôsobí na kameň, ale aj kameň pôsobí na Zem. Ibaže Zem je taká ťažká, „že si pôsobenie kameňa na seba ani nevšimne“, takže pri skúmaní kameňa môžem Zem považovať za statický nemenný objekt.

Pri padajúcom kameni alebo všeobecnejšie pri „šikmom vrhu“ to umožňuje **„vyčarať“** v zákone o energetickej bilancii prácu externého objektu „na pravej strane“ za vzorec pre potenciálnu energiu kameňa „na ľavej strane“ a písať

nie $\Delta(\frac{1}{2}mv^2) = \text{práca}$ ale $\Delta(\frac{1}{2}mv^2 + mgz) = 0$

V prípade gravitačného pôsobenia Zeme navyše v oblasti s homogénnym poľom je odvodenie správneho vzorca mgz ľahká vec. Sú ale situácie, kde sa ľahšie pomýlime, tak si ukážeme „odvodzovaciu techniku“, ktorá by mala triviálne omyly ustrážiť.

Ide o to, že pri pohybe skúmaného objektu sa pôsobením síl mení rýchlosť a kinetická energia tohto objektu. Preto si privoláme na pomoc „trpaslíka-brzdára“, ktorý bude silovo pôsobiť naskúmaný objekt „navyše“ a to tak, že bude strážiť, aby sa kinetická energia objektu nemenila.



Trpaslík-brzdár zapichne do nášho objektu svoju brzdiacu kopiju, pomocou ktorej bude silovo na objekt pôsobiť (silou ľubovoľnej potrebnej veľkosti aj smeru, teda nielen „v smere kopije“) a tom tak, aby sa pri pohyboch objektu nemenila jeho rýchlosť a teda ani kinetická energia. Teda ku všetkým silám pôsobiacim na objekt pridá svoju silu tak, aby celková sila bola nulová a teda zrýchlenie (ako vektor!) nulové.

Teraz do hry vstúpim ja ako „veľký šéf“, opatrne chytím objekt a môžem ho s vynaložením nulovej sily infinitezimálne pomaly premiestňovať kam chcem. Premiestnim objekt rôznymi cestami z polohy „1“ do polohy „2“ a vždy sa spýtam brzdára akú prácu musel pri mojom premiestňovaní vykonať. Ak hodnota práce, ktorú brzdár musel vykonať, nezávisí na zvolenej ceste, potom viem, že brzdárova práca sa dá vypočítať ako rozdiel dvoch hodnôt akejsi funkcie, vyčíslenej v polohe „2“ mínus hodnota v bode „1“. Ak určitý bod zvolím za referenčný, potom môžem zmeraním brzdárovej práce zmapovať hodnoty tej funkcie v ľubovoľnom bode.

V homogénnom gravitačnom poli musí brzdár pôsobiť konštantnou silou

$$\vec{F} = (0, 0, mg)$$

a pri premiestnení telesa z bodu $\vec{r}_1$ do bodu $\vec{r}_2$ vykoná prácu

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} F_z.dz = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} mg.dz = mg(z_2 - z_1)$$

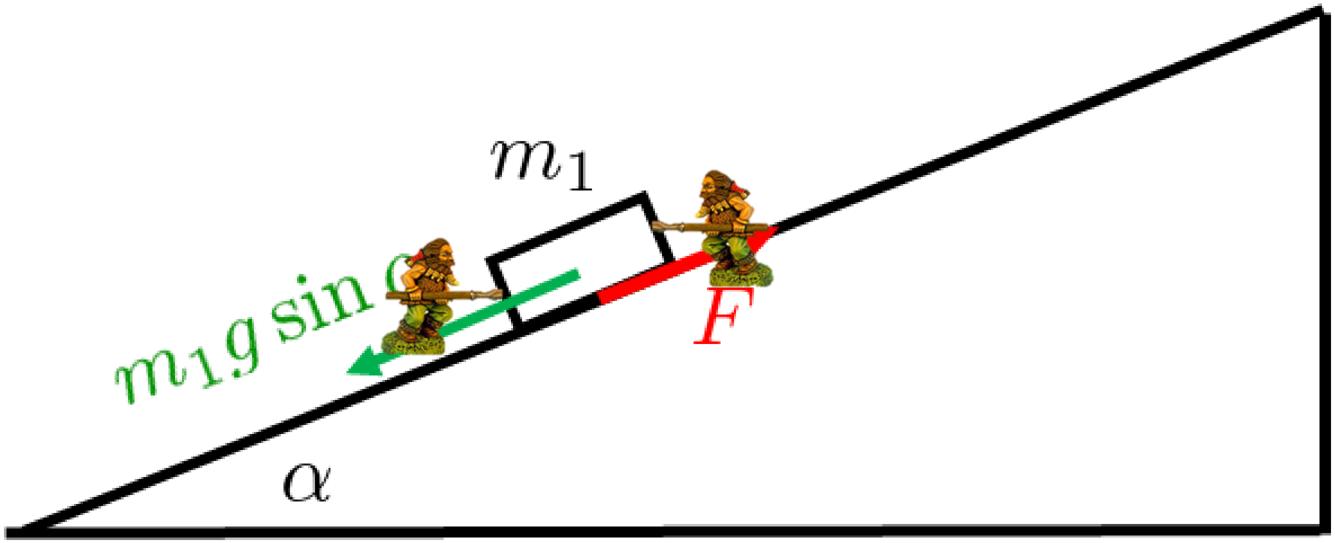
Práve som do Feynmanovej zbierky vzorcov získal vzorec mgz.

Vzniká otázka, prácu ktorého silového pôsobenia už nebudem teraz zarátavať „na pravej strane“ zovšeobecneného zákona o zachovaní energie (teda „work energy“ teorému). Odpoveď je jednoduchá: nebudem rátať prácu žiadnej sily, ktorú brzdár vykompenzoval.

Čo ak ale zistím, že brzdárova práca závisí na ceste. Jednoduché, vtedy sa nedá pridať vzorec do zbierky a musím používať zovšeobecnený zákon o zachovaní energie s prácou „nevyčaranej sily“ na pravej strane.

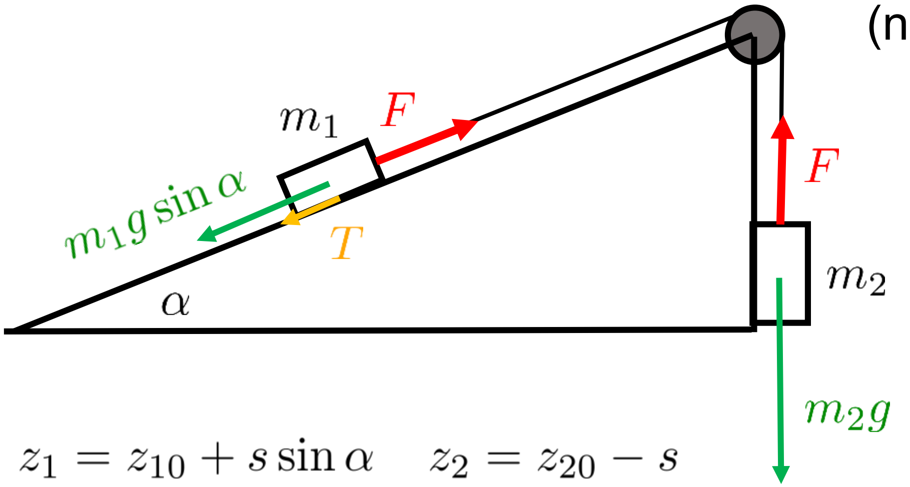
Môže to byť aj tak, že mám viacero vonkajších objektov silovo pôsobiacich na môj objekt. Vtedy môžem najať viacerých brzdárov, z ktorých každý stráži len silu jedného z vonkajších objektov.

Príklad na jednu „vyčarateľnú silu“ a jednu nevyčarateľnú silu: teleso na naklonenej rovine s trením



Nakreslil som silu trenia pre prípad, že teleso sa pohybuje nadol. Pri pohybe nahor bude mať trenie opačný smer. Ľavý brzdár kompenzuje silu Zeme, pravý silu trenia. Ak budem hýbať telesom z jedného bodu do druhého, existujú aj cesty typu najprv kúsok smerom dole, potom kúsok smerom hore, potom zase dolu až prídem do želaného cieľa. Problém s brzdárom, ktorý kompenzuje trenie, je taký, že práca, ktorú vykoná je pre rôzne cik-cakovité cesty rôzna. Preto práca ktorú on vykoná sa nedá napísať ako rozdiel dvoch hodnôt funkcie na konci a na začiatku. Práca trenia sa nedá vyčarať. Ale prácu Zeme môžem vyčarať ako predným pomocou vzorca mgz.

Do príkladu, ktorý sme riešili pridáme trenia na šikmej ploche. Pohybové rovnice budú (nepíšeme vektory, len veľkosti)



$$m_1 a_1 = F - m_1 g \sin\alpha - T$$
$$m_2 a_2 = -F + m_2 g$$

Lano spôsobí, že rýchlosti a teda aj zrýchlenia sú rovnaké $a_1 = a_2 = a$

$$a = \frac{m_2 g - m_1 g \sin\alpha - T}{m1 + m2}$$

$$z_1 = z_{10} + s \sin\alpha \qquad z_2 = z_{20} - s$$

$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 v^2 + m_1 g z_1 \qquad E_2 = \frac{1}{2} m_2 v^2 + m_2 g z_2$$

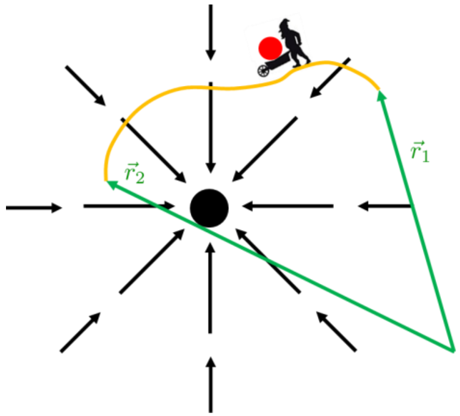
$$\frac{d}{dt} E_1 = m_1 v a + m_1 g v \sin\alpha = (m_1 a + m_1 g \sin\alpha) v = F v - T v$$
$$\frac{d}{dt} E_2 = m_2 v a - m_2 g v = (m_2 a - m_2 g) v = -F v$$

$$\boxed{d(E_1 + E_2) = (F v - T v - F v) dt = -T v\, dt = -T ds}$$

Súčet energií dvoch telies nie je (na rozdiel od prípadu bez trenia) konštantný, na pravej strane je práca sily trenia**. Pridajme, že „energia sveta“ sa neničí, iba sme nezarátali energiu tepelného pohybu molekúl, ktorá primerane narastie.**

OPAKOVANIE: nezávislosť práce trpaslíka na ceste sme už skúmali pri gravitačnom zákone

Potenciálna energia



Uvažujme trpaslíka, ktorý v gravitačnom poli bodovej častice premiestňuje časticu s hmotnosťou m z miesta $\vec{r}_1$ na miesto $\vec{r}_2$. Vypočítali sme prácu na to potrebnú

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} mG\frac{M}{r^2}\frac{\vec{r}.d\vec{r}}{r} = -mGM\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

Pozrime sa teraz na tento vzorec z iného pohľadu. Práca, ktorú musí vykonať trpaslík, aby premiestnil teleso o hmotnosti m z bodu $\vec{r}$ hocikam do nekonečnej vzdialenosti je

$$A(\vec{r} \to \infty) = -U(\vec{r}) = mGM\frac{1}{|\vec{r}|}$$

Zaviedli sme tak veľmi užitočnú funkciu $U(\vec{r})$, pomocou ktorej vieme vypočítať prácu trpaslíka medzi dvoma ľubovoľnými bodmi

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} mG\frac{M}{r^2}\frac{\vec{r}.d\vec{r}}{r} = U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)$$

Toto je práca, ktorú musí vykonať trpaslík ako konateľ práce.

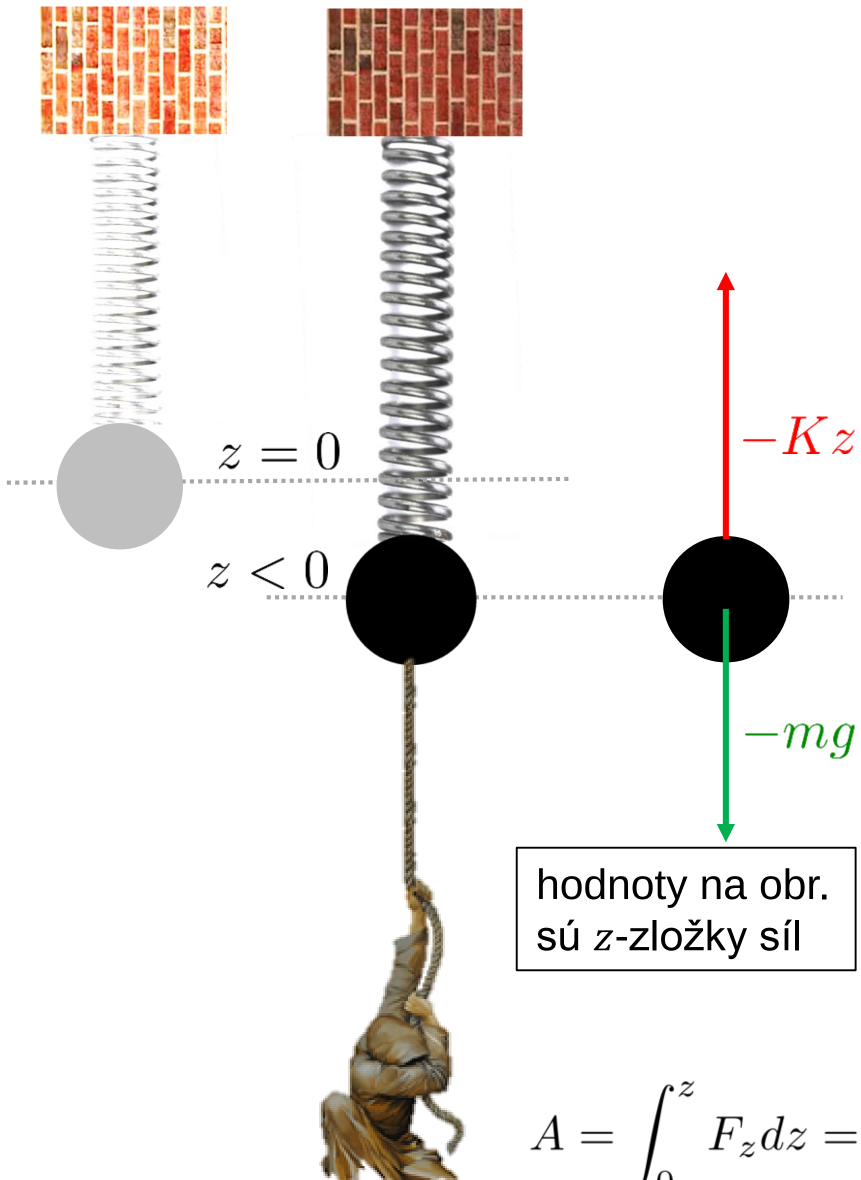
Potenciálna energia
Niekoľko „prípadových štúdií“

Odvodiť správny vzorec pre potenciálnu energiu môže myť niekedy dosť ťažké, najmä ak ešte nemáme poznatky z abstraktnejšej teoretickej mechaniky (naučí vás to kolega Fecko).

Preto sa tu nepokúsim sformulovať nejaké rigorózne postupy „ako vyrábať Feynmanovu zbierku vzorcov pre energiu“

Namiesto toho rozoberiem niekoľko špeciálnych prípadov, možno to prinesie nejaké poučenie.

Potenciálna energia na pružine



Poloha $z = 0$ je poloha nedeformovanej pružiny. To nie je rovnovážna poloha guličky, lebo pružina sa predĺžia pod vplyvom tiaže guličky. Gulička môže ostať v kľude v bode, keď sila pružiny vyrovná silu tiaže, teda keď $-Kz = mg$

Rovnovážna poloha guličky má teda súradnicu $z_0 = -mg/K$

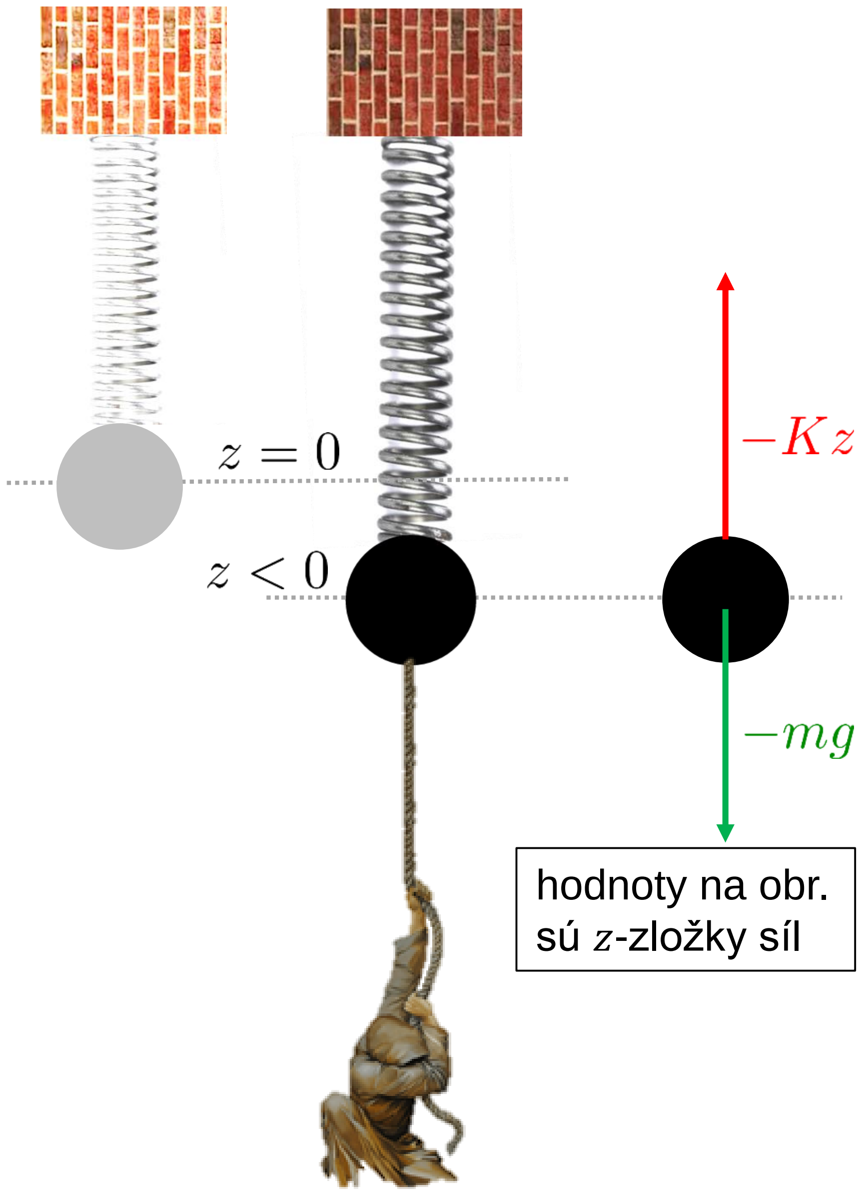
Voľme bod z_0 za referenčný bod a vypočítajme prácu, ktorú vykoná trpaslík, keď guličku potiahne za lano tak, aby sa prakticky nulovou rýchlosťou presunula do ľubovoľného bodu $z < z_0$. V bode z teda musí pôsobiť silou, ktorej z-zložka bude

$$F_z = mg + Kz$$

lebo práve vtedy celková sila na guličku bude nulová a gulička nebude zrýchľovať.

$$A = \int_0^z F_z dz = \int_0^z (mg + Kz) dz = mgz + \frac{1}{2} K z^2$$

Potenciálna energia na pružine



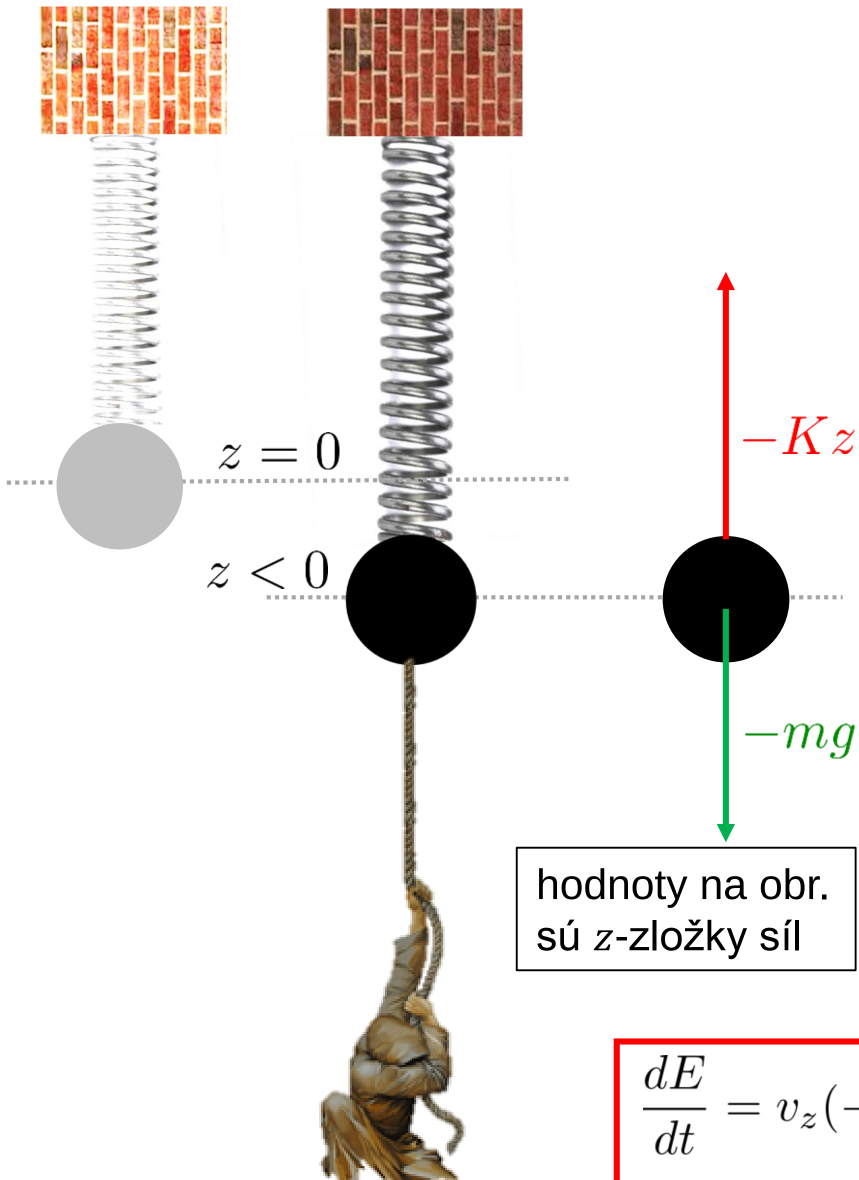
$$A = mgz + \frac{1}{2}Kz^2$$

Všimnime si, že na skúmaný fyzikálny systém, guličku, pôsobia dva externé objekty. Zem tiažovou silou a pružina silou z deformácie. Trpaslík, ktorého sme použili, je vlastne náš známy trpaslík-brzdár, tentokrát nepoužívajúci kopiju ale lano. Vypočítame jeho prácu a dostaneme súhrnnú potenciálnu energiu, v našom prípade

$$E_{\text{pot}} = mgz + \frac{1}{2}Kz^2$$

Výraz mgz poznáme. Výraz $\frac{1}{2}Kz^2$ je nový vzrec do „Feynmanovej zbierky“, potenciálna energia pružnosti.

Potenciálna energia na pružine



$$E_{\text{pot}} = mgz + \frac{1}{2}Kz^2$$

Analýzou práce jedného trpaslíka sme vyčarali prácu dvoch externých objektov za dve zložky potenciálnej energie častice. Celková energia guličky teda bude

$$E = \frac{1}{2}mv_z^2 + mgz + \frac{1}{2}Kz^2$$

Pohybová rovnica guličky je

$$ma_z = -mg - Kz$$

Overme, že celková energia guličky sa zachováva

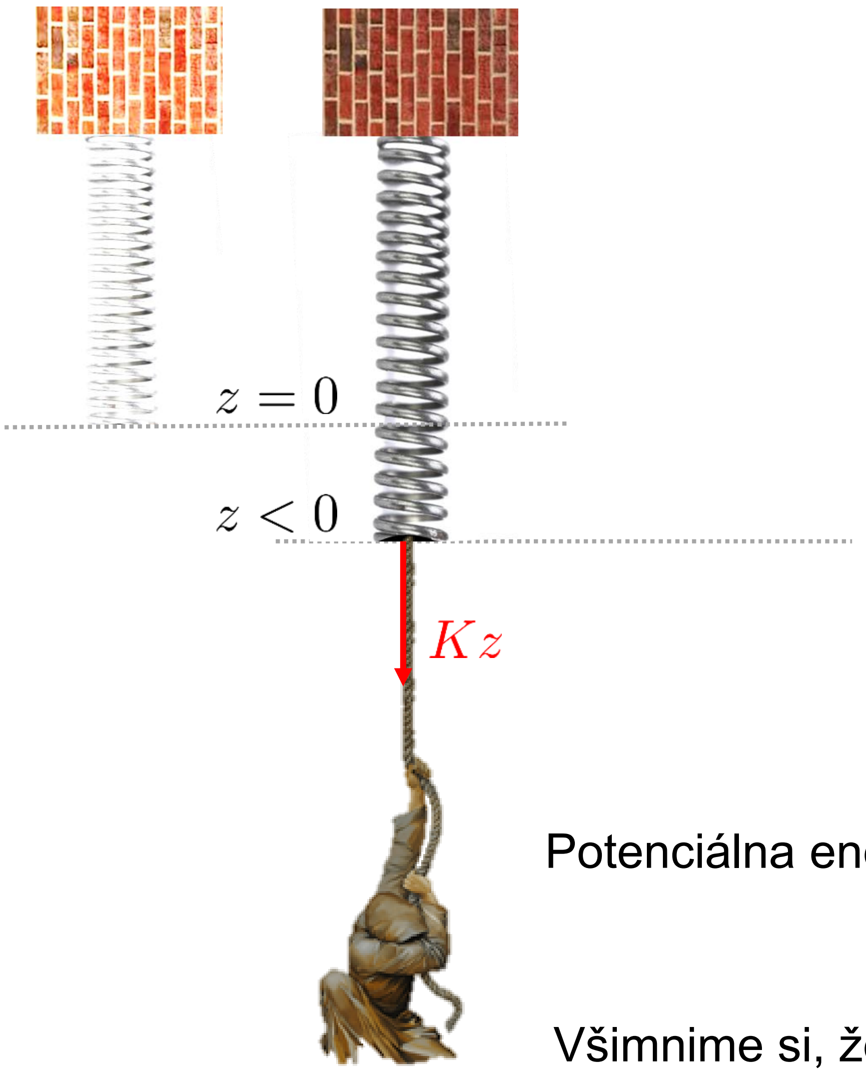
$$\frac{dE}{dt} = mv_z a_z + mgv_z + Kzv_z$$

Po dosadení za ma_z z pohybovej rovnice dostaneme

$$\frac{dE}{dt} = v_z(-mg - Kz) + mgv_z + Kzv_z = 0$$

Energia je konštantná, zachováva sa.

Potenciálna energia pružiny



Pozrime sa teraz na situáciu z iného uhla pohľadu. Za fyzikálny systém, ktorý študujeme budeme považovať pružinu, ktorá nech má zanedbateľnú hmotnosť. Teda nemá ani kinetickú energiu, i keď sa prípadne bude hýbať (deformovať).

Súradnica $z = 0$ znamená nedeformovanú pružinu. Trpaslík, keď chce pružinu deformovať, musí pôsobiť silou $\mathrm{F_z} = Kz$ a vykoná pritom prácu (štartujúc z referenčného bodu $z = 0$)

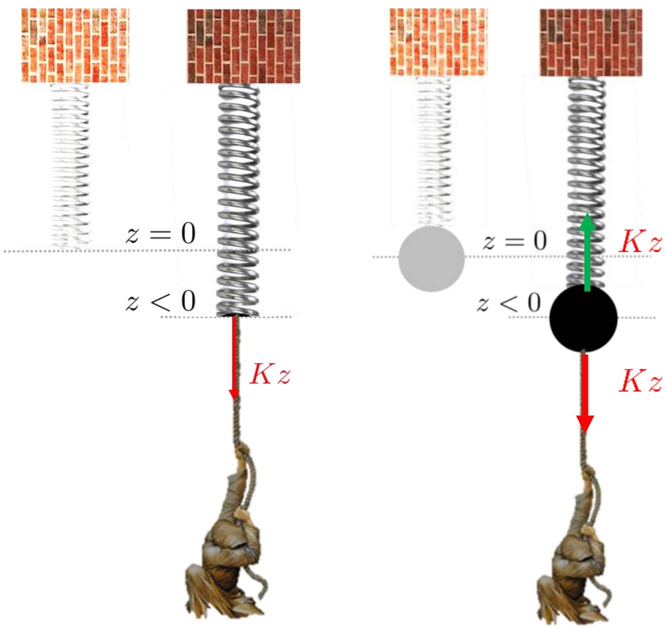
$$A = \int_0^z Kz dz = \frac{1}{2}Kz^2$$

Potenciálna energia deformovanej pružiny teda je

$$E_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2}Kz^2$$

Všimnime si, že tu sme „nečarali“ prácu nejakého externého objektu za potenciálnu energiu pružiny. Táto energia pružnosti je „naozaj obsiahnutá vnútri“ pružiny.

Potenciálna energia pružiny
verzus
potenciálna energia guličky na pružine



Všimnime si, že keď sme ako systém uvažovali guličku a pružina bol len externý objekt, tiež sme odvodili výraz

$$E_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2} K z^2$$

Aj ten výraz sme odvodzovali pomocou trpaslíka, ale bol tu výrazný rozdiel oproti „čistej pružine". Pri guličke sme potenciálnou energiou nahradili (vyčarali) prácu externého objektu, pružiny. A potom sme povedali, že do energetickej bilancie už nebudeme rátať prácu pružiny, hoci „zelená sila" stále pri pohybe guličky pracuje.

Energia pružnosti „čistej pružiny" je v akomsi zmysle „poctivejšia energia" než potenciálna energia „guličky od pružnosti", ktorá je len „vyčaraná práca".

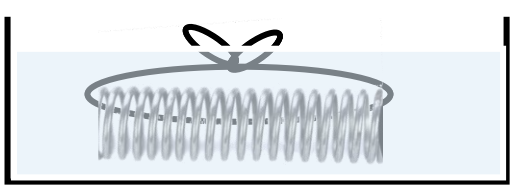
Celé to zdĺhavo popisujeme najmä preto, že Feynmanovu zbierku energetických vzorcov nemôžme používať bez rozmýšľania, musíme vedieť, ktorý z tých vzorcov je „len vyčaraná práca", a potom prácu „vyčaraných objektov" už nezarátavať do energetickej bilancie.

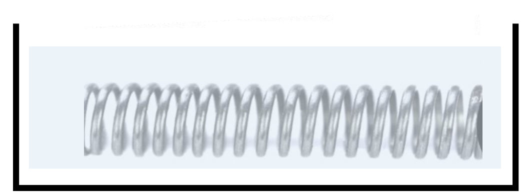
Vyčaraná energia verzus nevyčaraná energia

Vo Feynmanovej zbierke energetických vzorcov teda môžeme mať vzorce dvoch typov: vyčarané vzorce a nevyčarané vzorce. Medzi nimi je rozdiel.

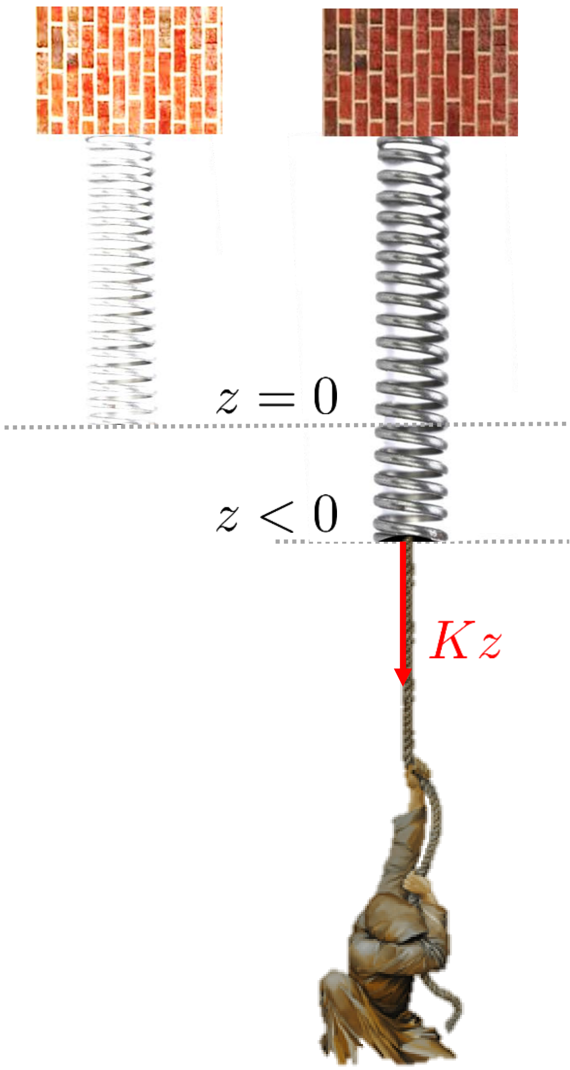
- **hociktorý vyčaraný vzorec môžem zo zbierky vynechať**, ale potom musím do energetickej bilancie zarátať (na pravú stranu) prácu príslušného externého objektu. Zákon zachovania energie bude fungovať v zovšeobecnej forme s prácou na pravej strane.
- **nevyčaraný vzorec nemôžem zo zbierky vynechať**, prestal by fungovať zákon zachovania energie. Nevyčaraný vzorec sa nedá rozumne nahradiť „prácou čohosi na pravej strane“. Lebo príslušnú prácu nekonajú externé objekty ale vnútorné komponenty, napríklad molekuly, v pružine.

Nevyčaraná energia pružnosti pružiny sa prejaví aj tak, že v istom zmysle sa dá identifikovať, „kde sa tá energia nachádza (miestne), teda že „v tej pružine“. Dalo by sa to overiť aj takým pokusom. Stlačím pružinu a fixujem jej deformáciu nejakým špagátom. Potom ju stlačenú hodím do kyseliny, špagát sa rozpustí. Aký bude rozdiel oproti pokusu, keď do kyseliny hodím nestlačenú pružinu? Teplota kyseliny, v ktorej sa rozpustila stlačená pružina sa zvýši oproti pokusu s nestlačenou pružinou.





Potenciálna energia pružiny



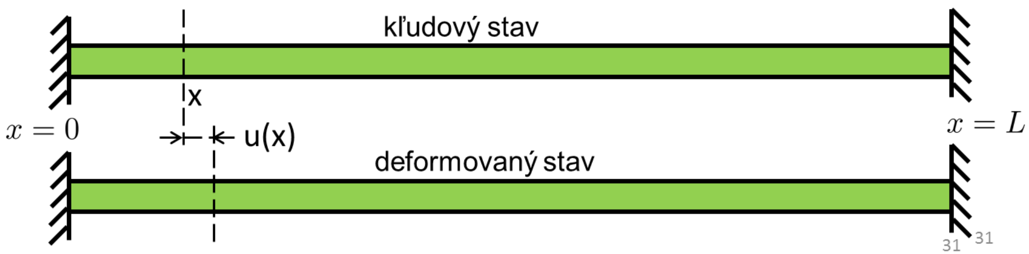
Pre nehmotnú pružinu neviem rozumne napísať pohybovú rovnicu, takže neviem skontrolovať či sa zachováva v čase jej energia. Ale odvodený výraz

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}Kz^2$$

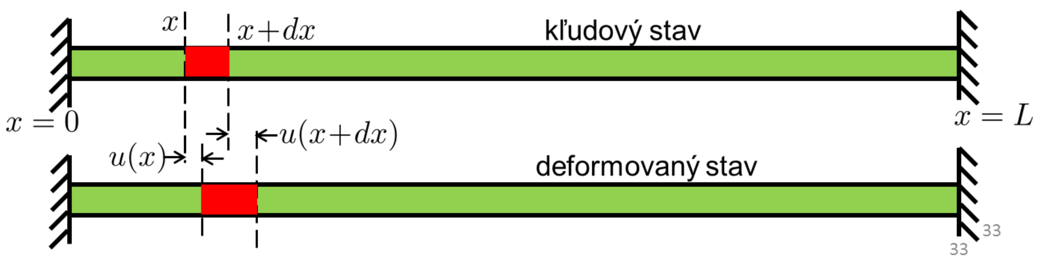
je zjavne energiou, lebo ak zavesím na deformovanú pružinu teleso a uvoľním ho, vie ho pružina vytiahnuť vyššie a vykonať prácu a keď tú prácu spočítam, zjavne to bude sedieť s nájdeným vzorcom pre jej energiu.

Priateľskejší objekt na skúmanie zachovania energie, ktorej časťou je energia pružnosti je kmitajúca tyč, s ktorou sme sa už zoznámili, takže v ďalšom budeme skúmať energetickú bilanciu kmitajúcej tyče ako „iného fyzikálneho zvieraťa“.

Opakovanie: pozdĺžna deformácia pružnej tyče



Deformácia tyče v nejakom okamihu je zadaná funkciou $u(x)$, ktorá udáva posunutie prierezu tyče, ktorý sa pôvodne nachádzal v mieste x.



Malý objemový element tyče dĺžky dx pri deformácii zmení svoju dĺzku, jeho nová dĺžka bude

$$(x+dx+u(x+dx))-(x+u(x))$$

Takže relatívne predĺženie voči pôvodnej dĺžke dx bude

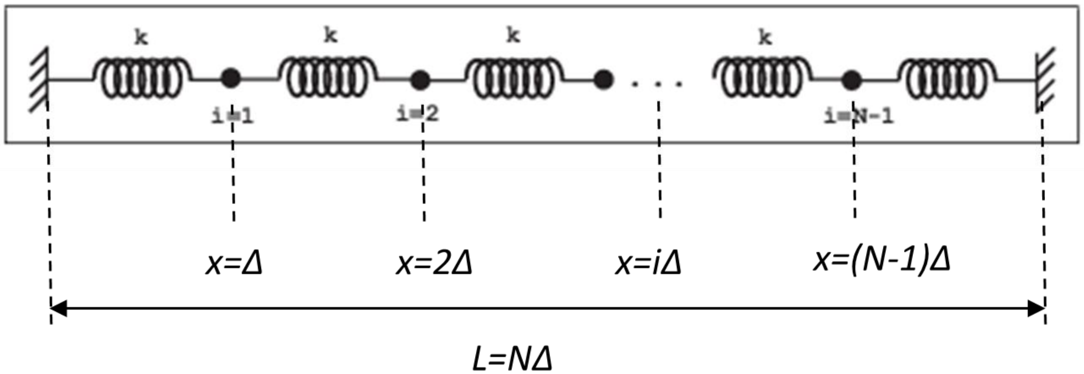
$$\varepsilon(x)=\frac{\Delta(x)}{dx}=\frac{u(x+dx)-u(x)}{dx}=\frac{\partial u(x)}{\partial x}$$

Funkcia $\varepsilon(x)$ udáva relatívne predĺženie tyče v mieste x. Ak Na prierez tyče v mieste x pôsobí napätie $\sigma(x)$ (napätie je sila/plocha), potom platí Hookov zákon

$$\sigma(x)=E\varepsilon(x)$$

Predstavme si teraz, že máme zadanú deformáciu tyče ako funkciu $u(x)$ a chceme vypočítať potenciálnu energiu tyče v dôsledku tej deformácie. Ľahšie sa „to odvodí“ v diskrétnom modeli pružiniek, lebo deformačnú energiu jednej pružinky poznáme.

Pripomienka



$$m\ddot{u}_i = -k(u_i - u_{i-1}) - k(u_i - u_{i+1})$$

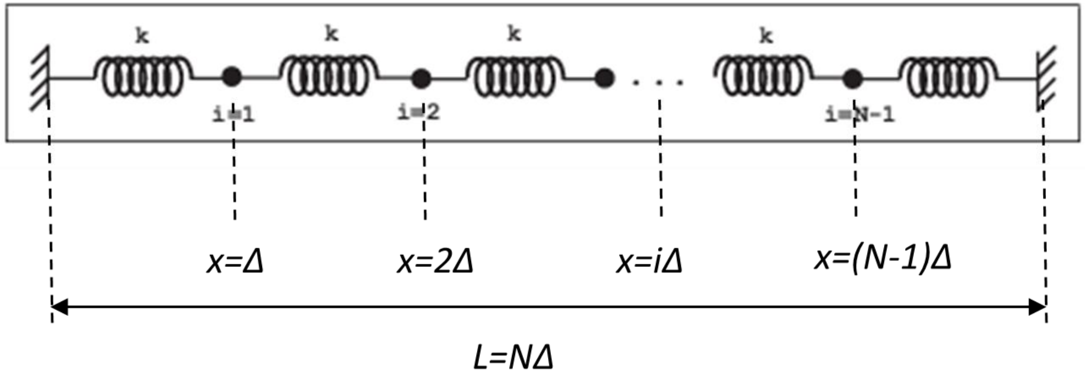
Limita kontinua bola
$$\begin{aligned} N &\to \infty \\ \Delta &\to 0 \\ N\Delta &\to L \\ \frac{k\Delta^2}{m} &\to c^2 \end{aligned}$$
vyšlo: $$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$$

Chápme to ako kvazimikroskopický model kontinua. Aké budú jeho parametre ϱ, E? Ak prierez guličky je S, potom jedna gulička s hmotnosťou m pripadá na objem $S\Delta$ a bude $\varrho = m/(S\Delta)$. Ak sa pružina predĺži o u, treba na to silu $F = ku$. Dĺžka nedeformovanej pružiny je Δ, relatívne predĺženie u/Δ, napätie F/S a dostaneme

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{ku}{S} = \frac{k\Delta}{S}\frac{u}{\Delta} = \frac{k\Delta}{S}\varepsilon \equiv E\varepsilon \quad \Rightarrow \quad E = \frac{k\Delta}{S}$$

V modeli s guličkami vyšlo $$c^2 = \frac{k\Delta^2}{m} = \frac{k\Delta^2}{\varrho S\Delta} = \frac{k\Delta}{S}\frac{1}{\varrho} = \frac{E}{\varrho}$$

a **takto to vyšlo v efektívnej teórii bez odvolávania sa na „guličky“. Hurá!**



Posunutia koncov i-tej pružiny sú $u(x_{i-1})$ a $u(x_i)$, pôvodná dĺžka tej pružinky bola Δ, deformovaná dĺžka je $\Delta + u(x_i) - u(x_{i-1})$, predĺženie pružinky teda je

$$u(x_i) - u(x_{i-1})$$

Potenciálna energia i-tej pružinky teda je

$$\frac{1}{2}k(u(x_i) - u(x_{i-1}))^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x}\right)^2 \Delta^2$$

Vzťah konštánt E spojitého modelu a k diskrétneho modelu je $E = \frac{k\Delta}{S}$ a teda energia pružnosti celej tyče je

$$E_{\text{pot}} = \sum_i \frac{1}{2} ES \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x}\right)^2 \Delta$$

Vzorec
$$E_{\mathrm{pot}} = \sum_i \frac{1}{2} ES \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x} \right)^2 \Delta$$

prejde v spojitom modeli na integrál $$E_{\mathrm{pot}} = \int \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x} \right)^2 S dx$$

Potenciálnej energie pružnosti v pozdĺžne deformovanej tyči je teda

$$E_{\mathrm{pot}} = \int \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \right)^2 dV$$

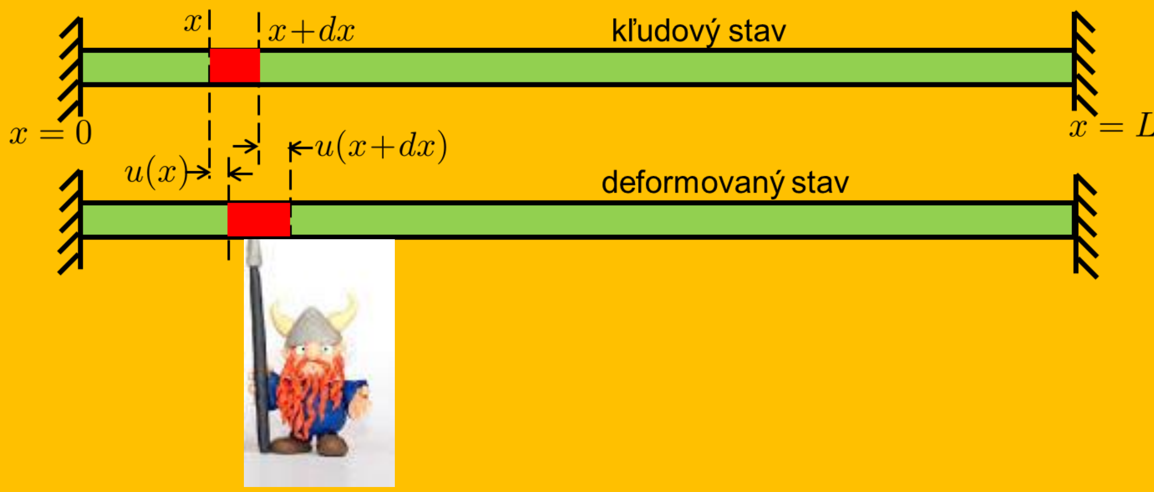
kde E je Youngov modul pružnosti a uviedli sme explicitne aj časový okamih t. Kinetickú energiu tyče nájdeme ľahko. Hmotnosť objemového elementy tyče je ϱdV, jeho okamžitá rýchlosť je $\partial u(t,x)/\partial t$ a teda

$$E_{\mathrm{kin}} = \int \frac{1}{2} \varrho \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \right)^2 dV$$

Celková energia tyče teda je

$$\boxed{E = \int \left(\frac{1}{2} \varrho \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \right)^2 \right) dV}$$

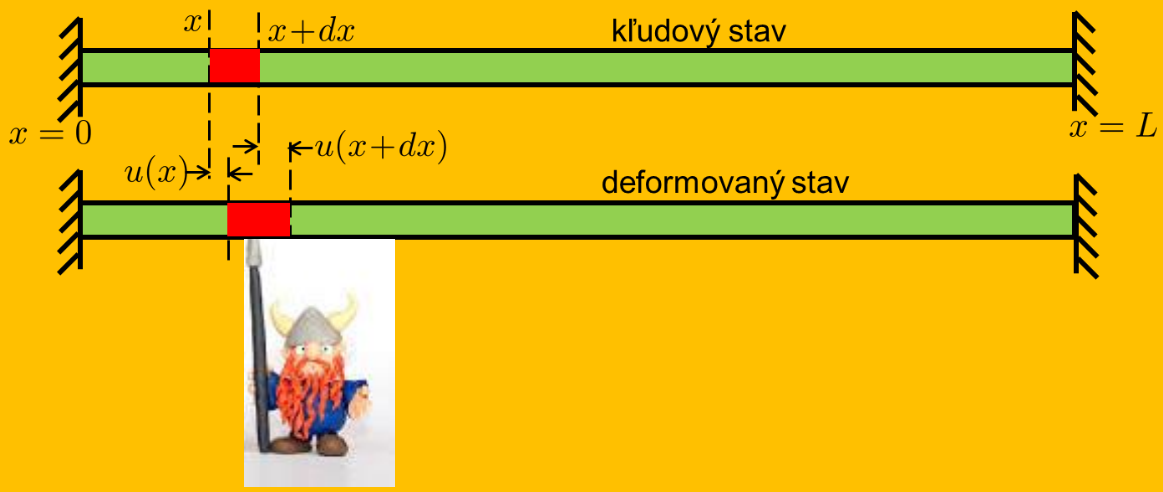
Energia deformácie tyče bez aproximácie diskrétnymi pružinami



Chceme zistiť deformačnú energiu tyče. Tyč rozdelíme na elementy dĺžky dx, jeden taký element je nakreslený červeno. Zavoláme na pomoc trpaslíkov – brzdárov, každý dostane na starosť jeden element tyče. Zapichne si do toho elementu svoju brzdiacu kopiju a dáva pozor, aby zrýchlenie elementu počas nasledujúcich manipulácií bolo stále nulové. Preto sleduje sily, ktorými okolité elementy pôsobia na jemu zverený element a neustále ich vyrovnáva, aby celková sila pôsobiaca na element a teda aj jeho zrýchlenie bolo nulové.

$$\sigma(x) = E\frac{\partial u}{\partial x}$$

Energia deformácie tyče bez aproximácie diskrétnymi pružinami



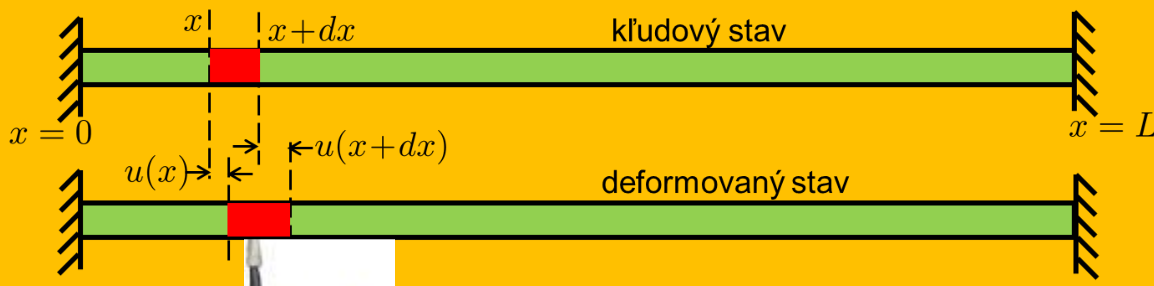
Element susediaci s červeným elementom zľava naň pôsobí silou $S\sigma(x) = -SE\dfrac{\partial u}{\partial x}$

element susediaci sprava silou $S\sigma(x+dx) = SE\dfrac{\partial u(x+dx)}{\partial x}$

Trpaslík – brzdár teda musí vyvíjať silu

$$F(x) = -SE\left(\frac{\partial u(x+dx)}{\partial x} - \frac{\partial u(x)}{\partial x}\right) = -SE\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2}dx$$

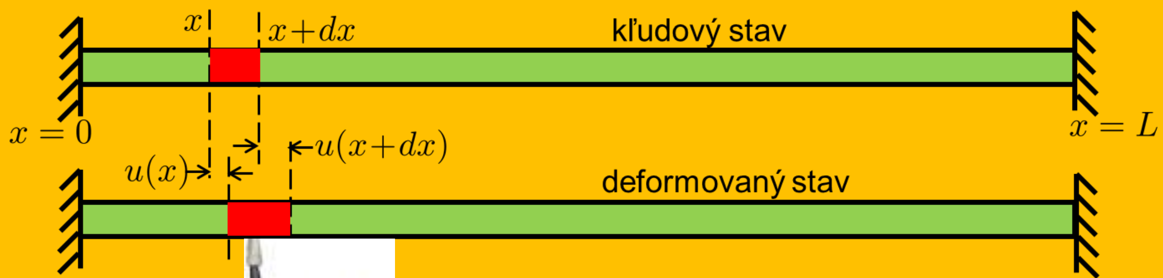
Energia deformácie tyče bez aproximácie diskrétnymi pružinami



Mám rozostavených trpaslíkov. Nech aktuálny stav deformácie tyče je daný funkciou $\tilde{u}(x)$. Konečná deformácia, ktorú chcem dosiahnuť je $u(x)$. Dosiahnem to tak, že ako „veľký šéf“ postupne posúvam trpaslíkov o malé kúsky $\delta\tilde{u}(x)$. Tieto malé pridávané deformácie sú pri rôznych x navzájom nezávislé, rôznej veľkosti a vykonávané v ľubovoľnom poradí. Všetko kvôli tomu, aby som sa presvedčil, že výsledná deformačná energia „nezávisí na ceste“, teda na detailnom postupe ako som z referenčného stavu $u(x)=0$, prišiel k stavu $u(x)$. Keďže trpaslíci vyrovnávajú všetky sily na nulu, ja ako veľký šéf nekonám pri manipuláciách žiadnu prácu, ale zato trpaslíci pri malom posunutí $\delta\tilde{u}(x)$ vykonajú prácu

$$d\delta\tilde{A}(x) = -\delta\tilde{u}(x)SE\frac{\partial^2\tilde{u}(x)}{\partial x^2}dx$$

Energia deformácie tyče bez aproximácie diskrétnymi pružinami



Celková práca, ktorú vykonajú pri mojich manipuláciách trpaslíci pri zmene

$$\tilde{u}(x) \to \tilde{u}(x) + \delta\tilde{u}(x)$$

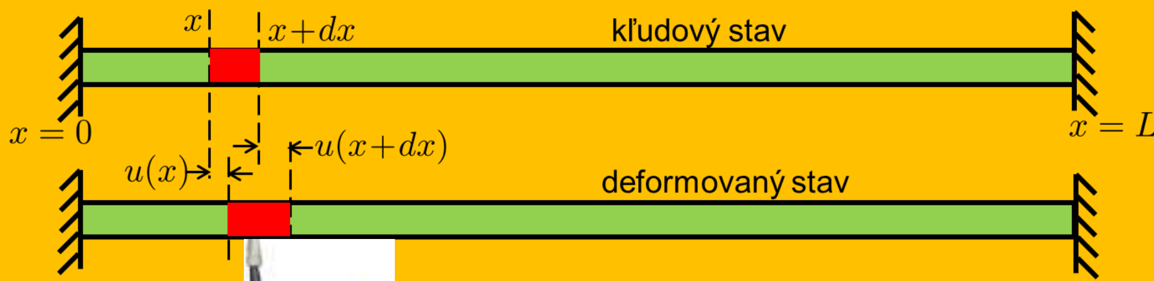
bude

$$\delta\tilde{A} = \int_0^L d\delta\tilde{A}(x) = -\int_0^L dx\delta\tilde{u}(x)SE\frac{\partial^2\tilde{u}(x)}{\partial x^2}$$

Použijem per partes, uvedomím si, že okraje neprispejú, lebo tam sú všetky deformácie stále nulové a dostanem

$$\delta\tilde{A} = \int_0^L dx\delta\left(\frac{\partial\tilde{u}(x)}{\partial x}\right)SE\frac{\partial\tilde{u}(x)}{\partial x}$$

Energia deformácie tyče bez aproximácie diskrétnymi pružinami



$$\delta\tilde{A} = \int_0^L dx\, \delta\left(\frac{\partial \tilde{u}(x)}{\partial x}\right) SE \frac{\partial \tilde{u}(x)}{\partial x}$$

Teraz sčítam cez všetky malé prídavky deformácií $\delta\tilde{u}(x)$ a dostanem pre celkovú prácu trpaslíkov

$$A = \int_0^L dx \frac{1}{2} SE \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x}\right)^2$$

A toto je presne deformačná energia pružnej tyče.

Vlnenie tyče – zachovanie energie

Pohybová rovnica tyče je vlnová rovnica

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \frac{E}{\varrho}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$$

Dokážeme, že ak deformácia $u(t,x)$ spĺňa pohybovú rovnica, energia sa zachováva.
Počítajme časovú deriváciu energie

$$\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}\int\left(\frac{1}{2}\varrho\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2\right)dV =$$

$$= \int\left(\varrho\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + E\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t\partial x}\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)dV =$$

$$= \int\left(E\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + E\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t\partial x}\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)S dx$$

keď sme dosadili za druhú časovú deriváciu pravú stranu pohybovej rovnice

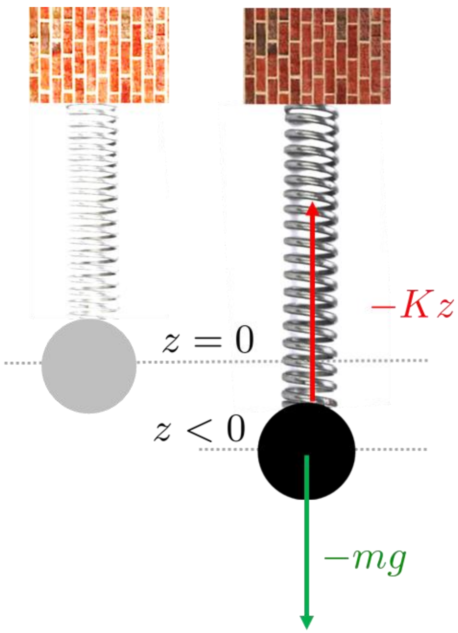
Máme zatiaľ $$\frac{d}{dt}E = \int_0^L \left(E\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + E\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x}\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right) S dx$$

Na prvý člen použijeme per partes (podľa premennej integrovania, teda x) a dostaneme

$$\frac{d}{dt}E = \int_0^L \left(E\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + E\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x}\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right) S dx =$$
$$= \left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right]_0^L + \int_0^L \left(-E\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x \partial t} + E\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x}\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right) S dx =$$
$$= 0$$

Člen v hranatých zátvorkách je nulový, lebo na hraniciach je deformácia nulová. Sčítance v integráli sú rovnaké ale s opačným znamienkom, takže celkovo dostávame nulu.
Časová derivácia energie je teda nulová, energia je konštantná, zachováva sa.

Pre naše „nové fyzikálne zviera“, pružnú tyč, sme našli výraz pre energiu (do Feynmanovej zbierky vzorcov) a ukázali sme, že aj pre toto zviera platí zákon zachovania energie.



Keď sme vyšetrovali guličku na pružine z energetického hľadiska, za fyzikálny systém sme považovali guličku a pružina bola vonkajší objekt. Prácu sily od pružiny sme „vyčarali“ za potenciálnu energiu guličky

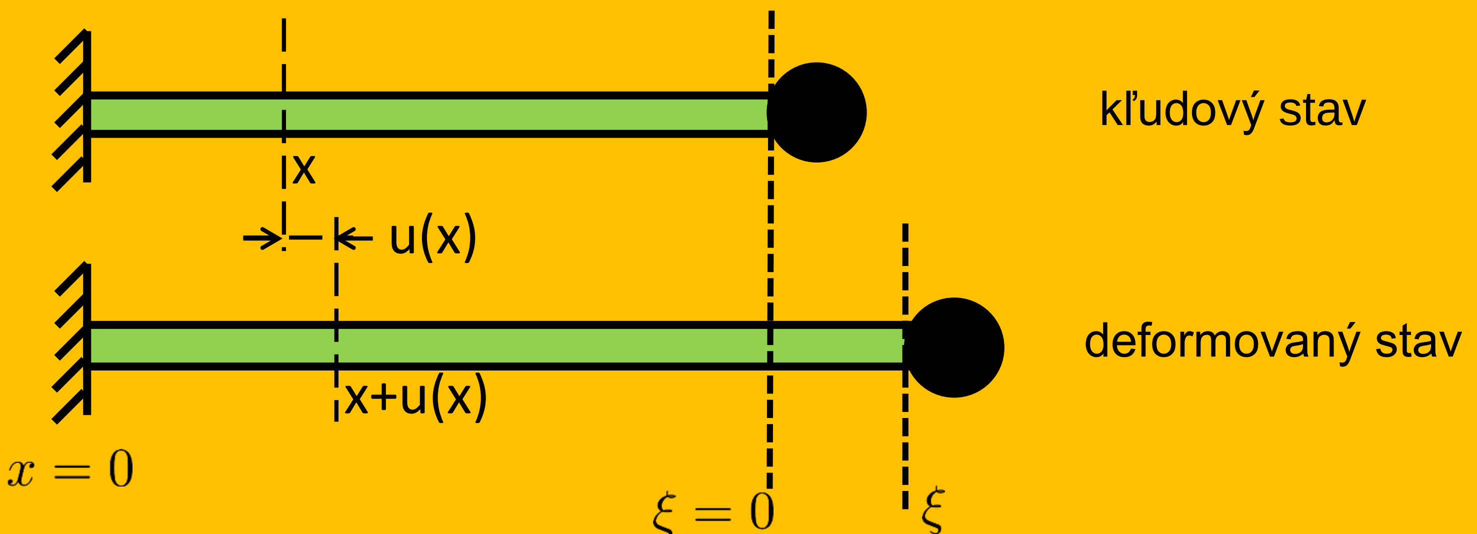
$$E_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2} K z^2$$

Potom sme vyšetrovali samostatne pružinu ako fyzikálny objekt a našli sme, že jej potenciálna energia (nič „vyčaraného“!) je

$$E_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2} K z^2$$

To, čo by sme radi videli je vyšetrovať „spojený fyzikálny systém „pružina plus gulička“ z hľadiska zákona zachovania energie. Neurobili sme to, lebo sme nemali pohybovú rovnicu pre pružinu (nemali sme ani vzorec pre kinetickú energiu pružiny). Nahradíme teraz pružinu pružnou tyčou, o ktorej vieme všetko a vyšetríme pohyb a zákon zachovania energie pre systém „gulička nalepená na tyči“

Gulička na pružnej tyči

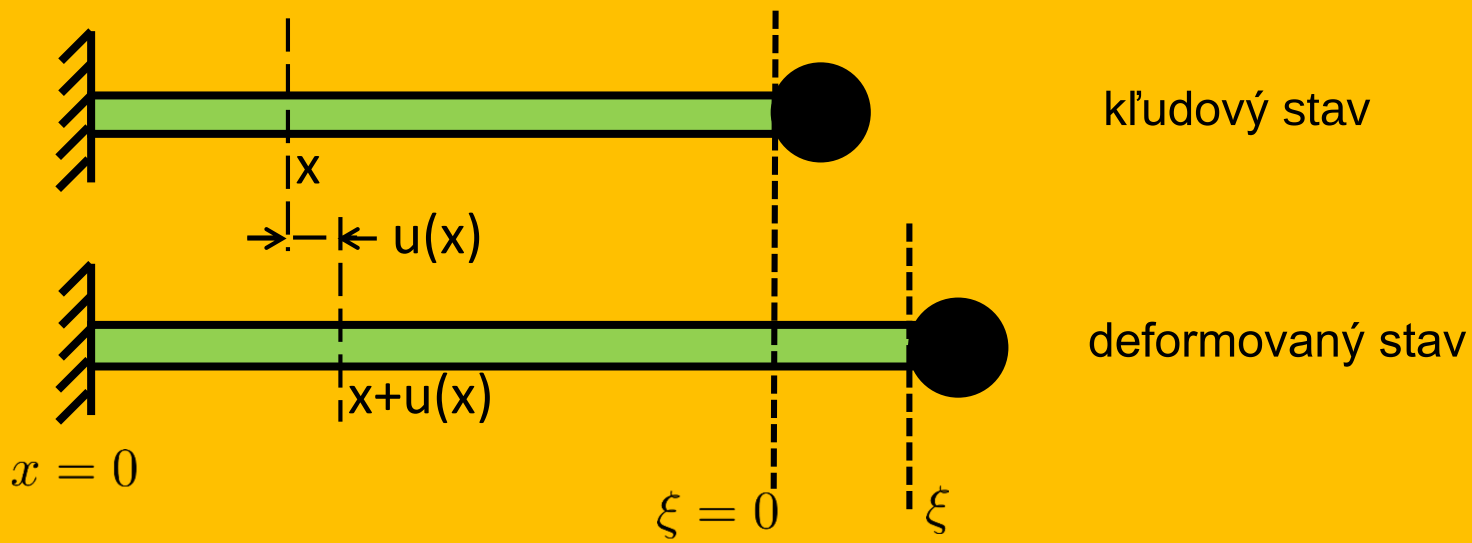


ξ súradnica guličky, meraná od konca nedeformovanej tyče. Tyč (nedeformovaná) má dĺžku L. x identifikuje prierezy tyče (je to vzdialenosť prierezu od začiatku tyče v nedeformovanom stave). x je vlastne „meno" prierezu tyče. ξ-súradnica prierezu tyče s menom x v deformovanom stave je $\xi(x) = -L + x + u(x)$. Koniec tyče má súradnicu $\xi(L) = \xi$, lebo to je súčasne súradnica guličky, teda $u(L) = \xi$.
Napätie na konci tyče je

$$\sigma(L) = E \frac{\partial u(x)}{\partial x}\bigg|_{x=L} \equiv E \frac{\partial u(x = L)}{\partial x}$$

Sila, ktorou gulička pôsobí na tyč je $F = \sigma(L)S$, tyč na guličku silou $-\sigma(L)S$.

Gulička na pružnej tyči



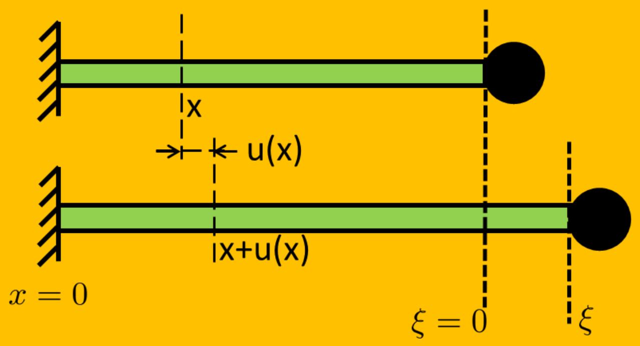
Pohybové rovnice teda budú

$$\frac{d^2\xi(t)}{dt^2} = -\frac{1}{m}E\frac{\partial u(t, x = L)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \frac{E}{\varrho}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$$

$$u(t, x = 0) = 0, \quad u(t, L) = \xi(t)$$

Energetická bilancia samotnej pružnej tyče



$$\frac{d^2\xi(t)}{dt^2} = -\frac{1}{m}E\frac{\partial u(t,x=L)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \frac{E}{\varrho}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$$

$$u(t,x=0)=0, \quad u(t,L)=\xi(t)$$

$$E_{\text{tyč}} = \int \left(\frac{1}{2}\varrho\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2\right)dV$$

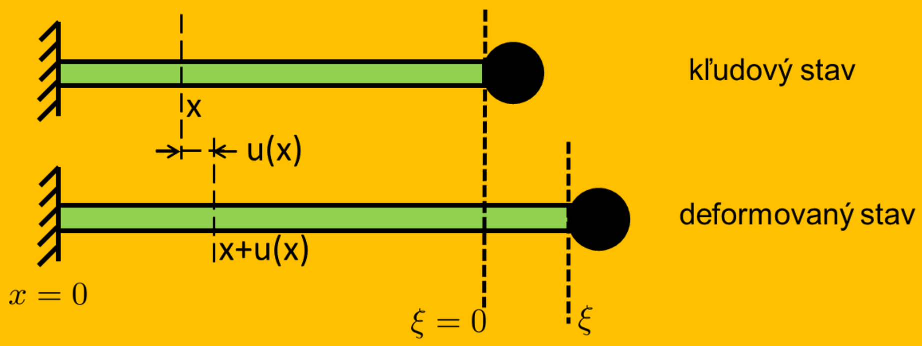
$$\frac{d}{dt}E_{\text{tyč}} = \int\left(\varrho\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + E\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t\partial x}\right)dV =$$

$$= \int\left(E\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + E\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t\partial x}\right)dV = \text{per partes}$$

$$= \left[E\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right]_0^L = F\frac{d\xi}{dt}$$

Napravo je výkon sily, ktorou externý objekt, gulička, pôsobí na tyč, takže energetická bilancia tyče je v poriadku. Energia samotnej tyče sa nezachováva, ale jej zmena je krytá prácou externého objektu guličky. **Super!**

Energetická bilancia samotnej guličky



$$\frac{d^2\xi(t)}{dt^2} = -\frac{1}{m} E \frac{\partial u(t, x = L)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \frac{E}{\varrho} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$$

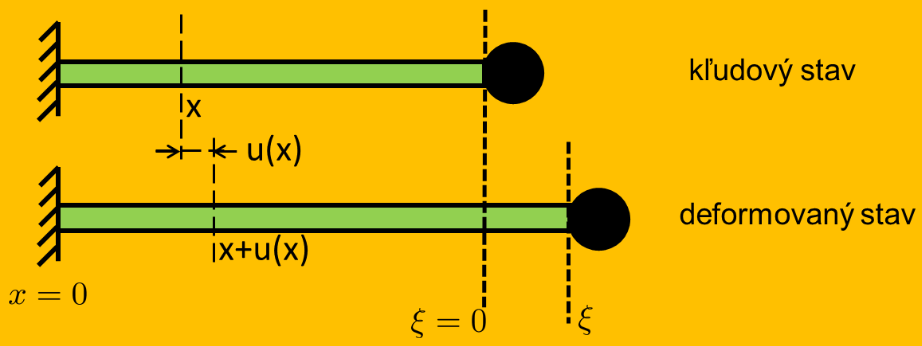
$$u(t, x = 0) = 0, \quad u(t, L) = \xi(t)$$

$$E_{\mathrm{gul}} = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2$$

$$\frac{d}{dt} E_{\mathrm{gul}} = m \frac{d\xi}{dt} \frac{d^2\xi}{dt^2} = -F \frac{d\xi}{dt}$$

$-F$ je sila, ktorou tyč pôsobí na guličku, $d\xi/dt$ je rýchlosť konca tyče a aj guličky), takže napravo máme výkon sily, ktorou tyč pôsobí na guličku. Takže zmena energie guličky je krytá prácou externého objektu, tyče. **Super!** Všimnime si, že za energiu guličky sme považovali len jej kinetickú energiu. Nemali sme žiadnu „potenciálnu energiu pružnosti“ ako pri guličke na pružine. **Práca tyče sa totiž „nedá vyčarať“ za akúsi efektívnu potenciálnu energiu guličky**. Práca tyče totiž nie je daná len začiatočným a koncovým stavom guličky, lebo medzitým vnútorné vlnenie tyče mohlo vyzerať od prípadu k prípadu všelijako, takže práca vykonaná vonkajším objektom „závisí na ceste“.

Energetická bilancia sústavy tyč plus gulička



$$\frac{d^2\xi(t)}{dt^2} = -\frac{1}{m} E \frac{\partial u(t, x=L)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \frac{E}{\varrho} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$$

$$u(t, x=0) = 0, \quad u(t, L) = \xi(t)$$

$$E_{\text{celk}} = E_{\text{gul}} + E_{\text{tyč}}$$

Dajúc dokopy výsledky získané pre samotnú tyč a pre samotnú guličku dostaneme

$$\frac{d}{dt} E_{\text{celk}} = \frac{d}{dt} E_{\text{gul}} + \frac{d}{dt} E_{\text{tyč}} = -F \frac{d\xi}{dt} + F \frac{d\xi}{dt} = 0$$

Celková energia sústavy tyč plus gulička sa teda zachováva!

Môže vzniknúť otázka, prečo sa to pri pružine dá vyčarať a pri tyči nie. V čom sú tyč a pružina odlišné?

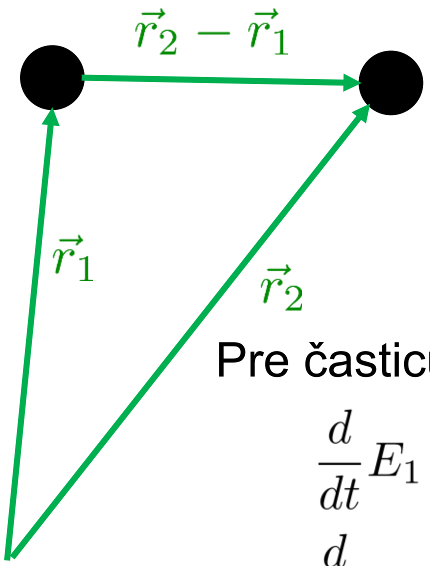
Nuž, musí to byť tak, že pri pružine sme švindľovali. Vedeckejšie povedané, dačo sme zanedbávali. Zanedbávali sme dynamiku pružiny. Pre pružinu sme nepísali žiadnu pohybovú rovnicu!

Pritom aj po pružine sa zjavne môže šíriť akési vlnenie, čo sme neuvažovali. Pružina instantne reagovala na pohyb guličky rovnomerným roztiahnutím.

Rigoróznejšou analýzou, čo a ako sme pri pružine zanedbávali, sa pre istotu zaoberať nebudeme.

Výsledkom zanedbaní bolo, že práca pružiny nad guličkou nezávisela na ceste a mohli sme prácu vyčarať za efektívnu potenciálnu energiu guličky.

Energia a interakcia na diaľku



Uvažujme dve častice pôsobiace na seba gravitačne. Pohybové rovnice sú

$$m_1 \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_1 = \frac{Gm_1m_2}{((\vec{r}_2 - \vec{r}_1).(\vec{r}_2 - \vec{r}_1))^{3/2}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{F}_{12}$$

$$m_2 \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_2 = -\frac{Gm_1m_2}{((\vec{r}_2 - \vec{r}_1).(\vec{r}_2 - \vec{r}_1))^{3/2}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -\vec{F}_{12}$$

Pre časticu majme zatiaľ len jeden vzorec v zbierke: kinetickú energiu

$$\frac{d}{dt}E_1 = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 = m_1\vec{v}_1.\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{12}.\vec{v}_1$$

$$\frac{d}{dt}E_2 = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 = m_2\vec{v}_2.\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -\vec{F}_{12}.\vec{v}_2$$

Separátne pre každú časticu je to ok, lebo zmena energie prvej častice je krytá výkonom sily, ktorou druhá častica pôsobí na prvú a podobne zmena energie druhej častice je krytá výkonom sily, ktorou na ňu pôsobí prvá častica.

Problém nastane, pre systém oboch častíc: sumárna energia sa nezachováva, ako to bolo pri kontaktnej interakci. Podľa zákona akcie a reakcie majú síce sily opačné znamienko, ibaže častice nemusia mať rovnakú rýchlosť, ako mali objekty v prípade kontaktnej interakcie (ktoré sa dotýkali), takže suma pravých strán sa nevynuluje. Pritom žiadny ďalší vonkajší objekt nepôsobí!

Záver: buď sa energia nezachováva, alebo sme na niečo zabudli.

Energia a interakcia na diaľku

Vyšetrime podrobnejšie, ako je to z energiou sústavy dvoch častíc

$$\frac{d}{dt}(E_1 + E_2) = \vec{F}_{12}.(\vec{v}_1 - v_2) = \frac{Gm_1m_2}{((\vec{r}_2 - \vec{r}_1).(\vec{r}_2 - \vec{r}_1))^{3/2}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1).(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

Všimnime si ale, že výraz na pravej strane sa dá písať ako časová derivácia akejsi funkcie polôh dvoch častíc. (Geniálne sa pozriem na ten vzťah a vidím !)

$$\frac{d}{dt}(E_1 + E_2) = \vec{F}_{12}.(\vec{v}_1 - v_2) = \frac{d}{dt}\frac{Gm_1m_2}{((\vec{r}_2 - \vec{r}_1).(\vec{r}_2 - \vec{r}_1))^{1/2}}$$

Takže platí $$\frac{d}{dt}\left(E_1 + E_2 - \frac{Gm_1m_2}{((\vec{r}_2 - \vec{r}_1).(\vec{r}_2 - \vec{r}_1))^{1/2}}\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(E_1 + E_2 - \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}\right) = 0}$$

Našli sme nový vzorec do Feynmanovej zbierky! Ale pozor. Náš systém sa skladá z dvoch častíc, ale **nepribudol vzorec aplikovateľný na každú časticu zvlášť**! **Pribudol vzorec pre „dvojčastičie“.** Až dve častice chápané ako jeden systém majú nový vzorec.

Energia a interakcia na diaľku

$$\frac{d}{dt}\left(E_1 + E_2 - \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}\right) = 0$$

Zákon zachovania energie pre dve gravitujúce častice teda zachránil nový vzorec

$$\boxed{E_{\rm int}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}}$$

Hovoríme tomu interakčná energia dvoch gravitujúcich častíc, nachádzajúcich sa v polohách $\vec{r}_1, \vec{r}_2$.

Máme ale problém s interpretáciou práce ako spôsobu transferu energie. Pre energiu prvej častice platí $\frac{d}{dt}E_1 = \vec{F}_{12}.\vec{v}_1$

čo hovorí, že energia častice narastá (uvažujeme teraz približujúce sa častice) „pritekaním“ energie, ako hovorí výkon na pravej strane. Ibaže energia druhej častice neklesá, ale tiež narastá. Kto to platí? Formálna odpoveď je jednoduchá, kinetické energie oboch častíc narastajú na úkor ich interakčnej energie, ktorá klesá (stáva sa viac zápornou). Ibaže akosi necítime, že by interakčná energia bol fyzikálny objekt, z ktorého „odteká energia“ tak, že by konal prácu nad časticami. Viac by sa nám páčilo, keby sme energetické náklady mohli „zosobniť“, ako keď firma hodí na krk stratu konkrétnemu zamestnancovi. Čo keby tak existoval tretí objekt, ktorý by tú prácu „naozaj konal“?

Pole ako spôsob interakcie nablízko a jeho energia

Slajdy o energii gravitačného poľa presahujú úroveň úvodného kurzu, ale uvádzame ich tu pre úplnosť, aby sa dalo k tomu prípadne neskôr vrátiť.

Trik je v tom, že vhodný tretí objekt si môžeme vyšpekulovať: volá sa **gravitačné pole**. Silové pôsobenie dvoch telies navzájom na diaľku popíšeme alternatívne tak, že častice vytvárajú v priestore gravitačné pole, popísané v každom bode vektorovou **intenzitou poľa** $\vec{g}(\vec{r})$ tak, že sila pôsobiaca na bodovú (testovaciu) časticu s hmotnosťou m v bode $\vec{r}$ bude $\vec{F} = m\vec{g}(\vec{r})$

Teraz budeme trochu čarovať, lebo bodová častica vytvára v mieste, kde sa nachádza formálne nekonečnú intenzitu a vzniká problém so self-energiou. Preto bodové častice nahradíme spojitým rozložením hmotnosti v priestore s hustotou $\varrho(\vec{r})$. Potom intenzita poľa bude

$$\vec{g}(\vec{r}) = \int \frac{G\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')d^3\vec{r}'$$

a vzorec pre interakčnú energiu nábojov $E_{\text{int}}(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = -\dfrac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}$

zovšeobecníme takto

$$E_{\text{int}} = -\int \frac{G\varrho(\vec{r}')\varrho(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'$$

Pole ako spôsob interakcie nablízko a jeho energia

Vzorec pre interakčnú energiu rozloženia hmotnosti prepíšeme s použitím gravitačného potenciálu budeného tým rozložením hmotnosti

$$\varphi(\vec{r}) = -\int \frac{G\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}'$$

$$E_{\rm int} = \int \varrho(\vec{r})\varphi(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

teraz si uvedomíme, že pre potenciál poľa platia tieto dva vzťahy

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = 4\pi G\varrho(\vec{r}) \qquad \vec{g}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r})$$

$$E_{\rm int} = \int \frac{1}{4\pi G}\Delta\varphi(\vec{r})\varphi(\vec{r})d^3\vec{r} = \text{per partes} = -\int \frac{1}{4\pi G}\nabla\varphi(\vec{r}).\nabla\varphi(\vec{r})d^3\vec{r} =$$
$$= -\int \frac{1}{4\pi G}\vec{g}^2(\vec{r})d^3\vec{r}$$

Všimnime si, že interakčnú energiu častíc (látky) sme prepísali ako objemový integrál z kvadrátu intenzity gravitačného poľa. Častice (látka) zo vzorca zmizla, je tam len pole. Preto je prirodzenejšie nazvať ten nový vzorec nie interakčná energia látky ale energia poľa.

Energia poľa

Zmeníme preto aj označenie a píšeme

$$E_{\text{pole}} = -\int \frac{1}{4\pi G}\vec{g}^2(\vec{r})d^3\vec{r}$$

Zákon zachovanie energie, ktorý sme pre dve gravitujúce častice písali v tvare

$$\frac{d}{dt}\left(E_1 + E_2 - \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}\right) = 0$$

Môžeme teraz zapísať v tvare

$$\frac{d}{dt}(E_{\text{kinet.látky}} + E_{\text{pole}}) = 0$$

Vytvorenie nového objektu „pole“ reštauruje aj význam spojenia „práca ako spôsob transferu energie“. Kinetická energia častíc (látky) sa mení, lebo pole nad nimi koná prácu a tým energia prechádza z poľa do látky alebo naopak. Energia zavedením poľa „niekde je“. Vzorec pre energiu poľa evokuje predstavu, že pole a jeho energia sú rozložené v priestore, pričom hustota energie poľa pripadajúca na objemovú jednotku priestoru je

$$\boxed{w_{\text{pole}} = -\frac{1}{4\pi G}\vec{g}^2(\vec{r})}$$

Elektrické pole a jeho hustota energie

Poslednú prípadovú štúdiu ponechávame na usilovnosť čitateľa. Uvažujme čosi ako nabitý kondenzátor, dve veľké paralelné nabité kovové dosky v malej vzdialenosti od seba, ale neupevnené, takže sa môžu hýbať. Medzi doskami je elektrické pole. Dosky na seba pôsobia silou. Ak napíšem pohybové rovnice pre dosky, zistím, že kinetická energia dosiek sa nezachováva. Zákon zachovania energie zachránim, ak zavediem pojem interakčná energia dosiek. Alternatívna záchrana je také, že poviem, že kinetická energia dosiek sa mení, lebo sa mení energia „uskladnená“ v elektrickom poli medzi doskami a zistím, že správny vzorec pre objemovú hustotu energie elektrického poľa je

$$w_{\mathrm{pole}} = \varepsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r})$$

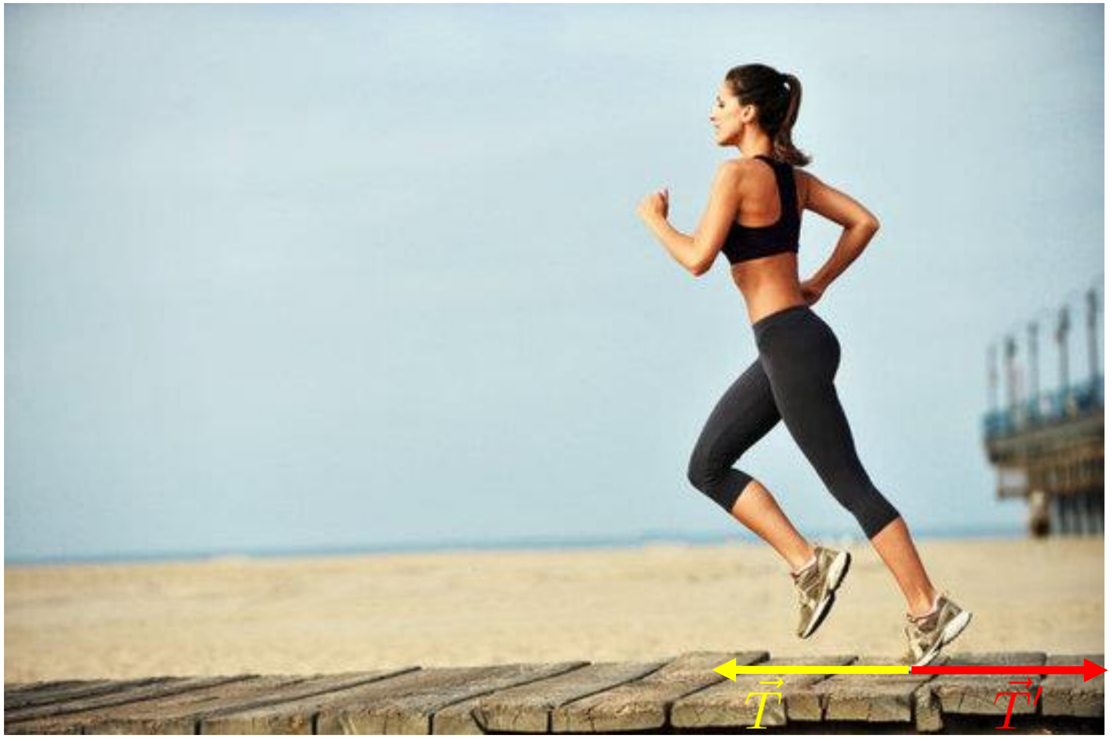
Odvodenie v tomto špeciálnom prípade je oveľa menej matematicky náročné ako pre prípad gravitačného poľa.

Bonbónik na záver

Chôdzu umožňuje trenie, ktoré udeľuje chodcovi hybnosť dopredu.
Koná pri tom trenie prácu?

OPAKOVANIE

Kto poháňa chodca? Trenie.



Chodec tlačí na topánku smerom dozadu, ako keby chcel, aby sa topánka šmýkala dozadu. Trenie tomu bráni silou, **ktorá smeruje dopredu**. Na chodca nepôsobí vo vodorovnom smere žiadna vonkajšia sila okrem trenia. Trenie teda poháňa chodca dopredu. Nie je teda pravdou, že trenie vždy pôsobí proti pohybu. Na obrázku červená sila je trecia sila, ktorou teniska pôsobí na podložku, žltá sila je reakcia podložky, trecia sila, ktorou podložka pôsobí na tenisku a „poháňa“ chodca dopredu.

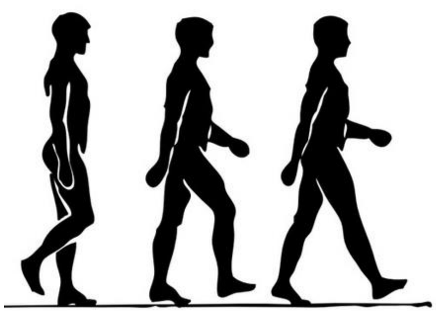
Kto poháňa chodca? Trenie.

Vieme, že platí veta o ťažisku: ak nepôsobí vonkajšia sila, ťažisko sa nemôže zrýchľovať. Pre zrýchlenie ťažiska platí Newtonova rovnica

$$\frac{d^2\vec{R}^*}{dt^2} = \frac{1}{m}\vec{F}$$

kde $\vec{F}$ je celková vonkajšia sila.

Ak bežec zrýchľuje (napríklad dáva so zo stoja do pohybu), potrebuje na to, aby niekto zvonku pôsobil vodorovnou silou dopredu. Zvonku ale nik nepôsobí, iba podložka pod nohami, a to len trením medzi podošvami tenisiek a podložkou. Ibaže to nie podložka si „zmyslí“, že potlačím chodca dopredu. Trenie v smere dopredu je len reakcia podložky na chodcovu nohu tlačiacu dozadu. Všimnime si to rozfázované na obrázku.



Chodec odľahčil pravú nohu a zaťažil ľavú. Potom začal na ľavú nohu tlačiť aj vodorovne dozadu, akoby ju chcel šmýkať po podložke. Trenie ale nedovolí nohe prešmyknúť, vyvinie protisilu dopredu, tá dopredná sila je vonkajšia sila, ktorá chodca posunie dopredu. Pravá noha vpredu dokročí , chodec ju zaťaží aby sa nešmýkala (toto už nie je na siluetovom obrázku), odľahčí dovtedy zaťaženú ľavú nohu a prisunie ju dopredu. Práve dokončil jeden krok.

Kto poháňa chodca? Trenie.

Práve sme sa presvedčili, že chodca posúva dopredu trenie. Ale ak chodec pritom zrýchľuje alebo kráča do kopca, rastie jeho energia. Musí sa teda niekde konať práca. Prirodzené by bolo povedať, že trenie nielen udeľuje chodcovi zrýchlenie, ale aj koná prácu a tým chodec získava energiu.

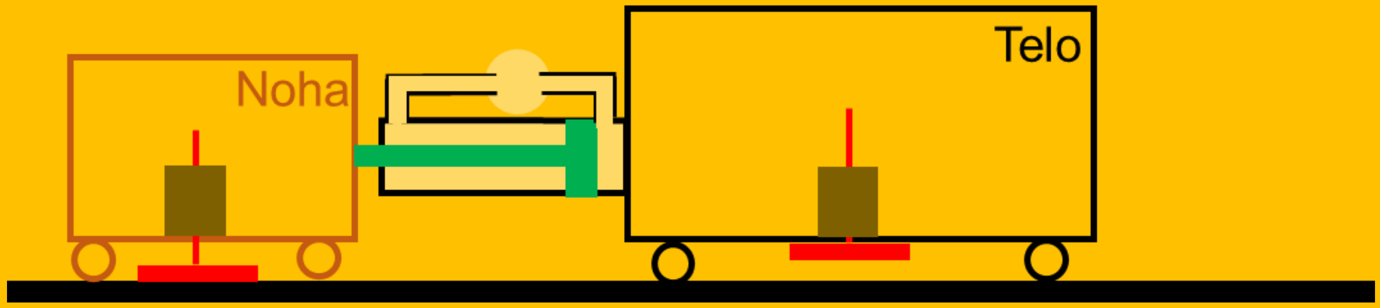
Ale to asi nie je pravda, tu sú dva argumenty:

- odkiaľ by na to podložka brala energiu. Navyše všetci vieme, že ak chceme kráčať, potrebujeme na to zjesť nejaké tie sendviče. Chemickú energiu v jedle v tele nejako premeníme na mechanickú. Ale asi sotva tak, že premenenú energiu nejako napumpujeme do podložky a tá ju potom použije na prácu a zvýšenie našej mechanickej energie
- Dopredná sila trenia zjavne nekoná žiadnu prácu, lebo pôsobí na tenisku vtedy, keď tá sa nehýbe, neposúva sa po nejakej dráhe. Teda práca, sila krát dráha, je nulová.

Záver: je to nejako tak, že pomocou vnútorných síl systém nemôže zvýšiť svoju hybnosť, potrebuje na to pomoc vonkajšej sily. Ale zrejme konaním práce vnútorných síl vnútri objektu, môže zvýšiť svoju (napríklad) kinetickú energiu, vonkajšie sily pritom nemusia konať prácu. Ukážeme si to na jednoduchom modeli „robotického jednorozmerného chodca“.

Jednorozmerný robotický chodec, popis konštrukcie.

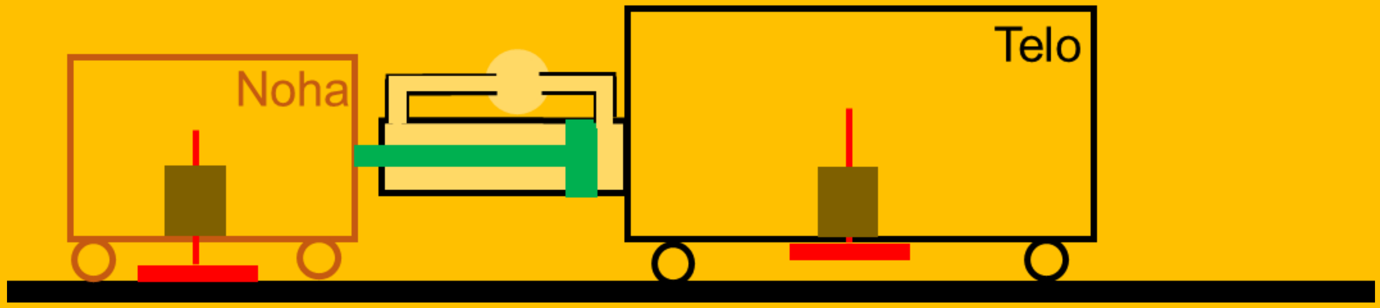
Toto je originálna konštrukcia vytvorená pre túto prezentáciu.



Základom sú dva od seba oddelené vozíky „Telo“ a „Noha“, ktoré sa na kolieskach pohybujú po podložke bez trenia. Oba vozíky majú na sebe namontovaný „mechanizmus trecej podošvy“. Ovládaný je elektromagnetom (hnedá kocka), ktorý „podošvu“ buď nadvihne nad podložku, alebo naopak pritlačí na podložku. Podložka má veľký koeficient trenia, takže ak je pritlačená, daný vozík sa nemôže hýbať, bráni mu v tom trecia sila medzi podložkou a „podošvou“
Na „Tele“ je nalepený hydraulický valec, v ňom sa pohybuje piest s piestovou tyčou, ktorej vonkajší koniec je nalepený na „nohe“. Na hydraulike je olejové čerpadlo, ktoré môže pumpovať olej sprava doľava a naopak a tlačiť tak na piest raz zľava a inokedy sprava.

Takýto robot vie „kráčať“, odstrkávať sa nohou dopredu. Jeden krok je zložený zo štyroch fáz, ukážeme si ich.

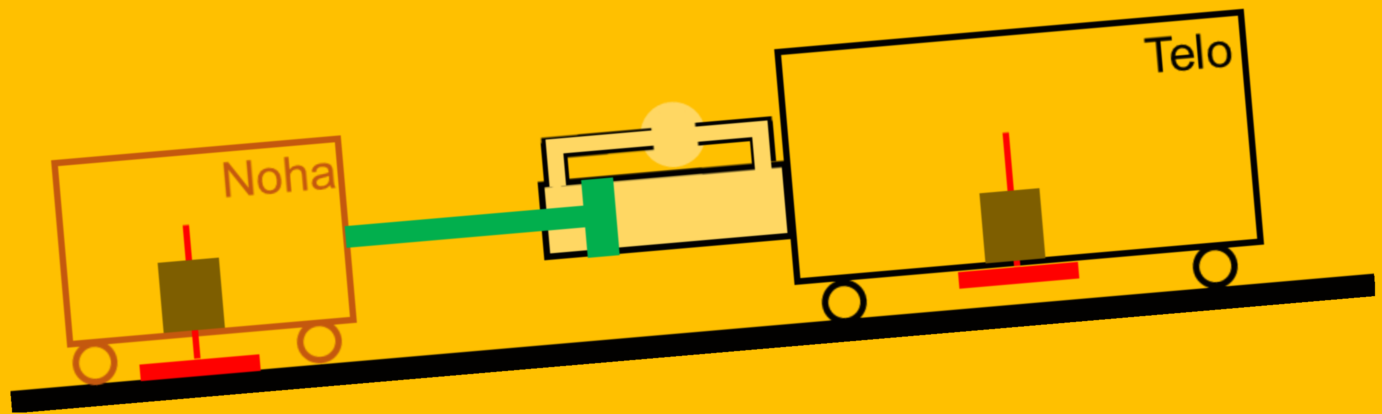
Jednorozmerný robotický chodec, stav 0



„Podošva“ na Nohe je pritlačená na podložku. Noha sa nemôže hýbať, bráni jej v tom trenie. Telo sa môže hýbať bez trenia. Piest je v ľavej krajnej polohe.

V tomto stave spustíme hydraulické čerpadlo, ktoré bude prečerpávať olej z ľavej strany valca na prvú, posúvať piest doľava, vysúvať piestnu tyč, ktorá sa zaprie do nohy, ale keďže tá je nehybná, musí hydraulický valec odtlačiť telo doprava.

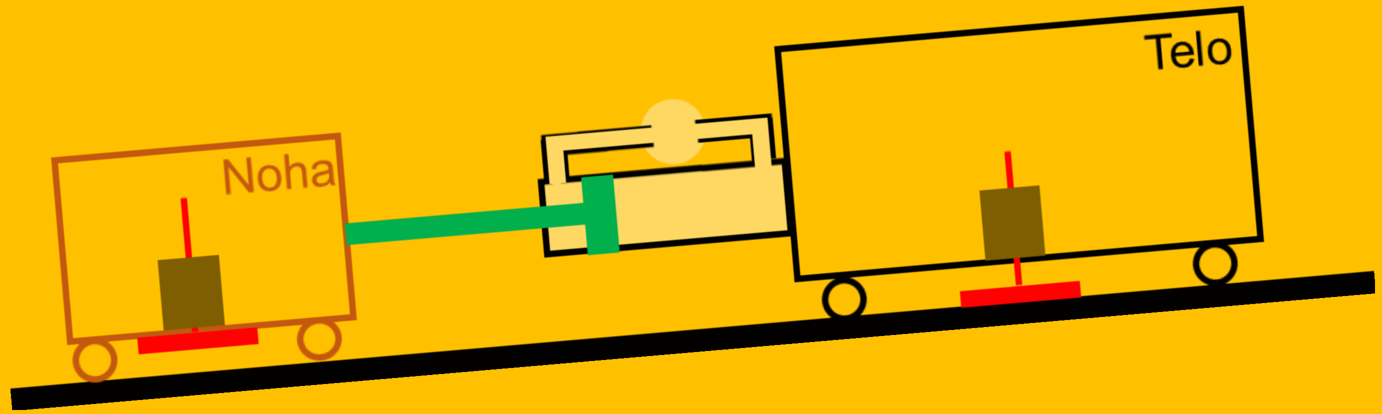
Jednorozmerný robotický chodec, stav 1



Skončilo prečerpávanie oleja, Telo sa posunulo oproti pôvodnej polohe dopredu, Noha ostala na pôvodnom mieste, vzdialenosť Nohy od Tela sa teda zväčšila. Ťažisko systému Telo+Noha sa posunulo akoby pod vplyvom sily piesta, ale posun ťažiska zabezpečila podložka trecou silou pôsobiacou dopredu na podošvu Nohy. Ak cesta smeruje do kopca, potom Telo získalo potenciálnu energiu prácou hydraulického čerpadla. Trenie nekonalo žiadnu prácu.

V tomto stave „prenesieme váhu“ z Nohy na Telo, teda odľahčíme podošvu nohy a pritlačíme podošvu Tela

Jednorozmerný robotický chodec, stav 2



Pritlačila sa podošva Tela, odľahčila sa podošva Nohy. Noha sa môže hýbať voľne. Telo sa nemôže hýbať, bráni mu v tom trenie.

Teraz spustíme hydraulické čerpadlo, bude prečerpávať olej sprava doľava, piest sa bude posúvať smerom k telu a ťahať za sebou nohu smerom k telu.

Jednorozmerný robotický chodec, stav 3

Skončilo sa prečerpávanie oleja, Noha sa prisunula k Telu. Ťažisko systému Noha+Telo sa zase posunulo dopredu, umožnilo to trenie podošvy Tela. Predumajte ako vzniká. Olej tlačí na piest v smere dopredu ale aj na ľavé veko hydraulického valca smerom dozadu. Valec je prilepený na Telo a snaží sa ho ťahať dozadu. Tomu bráni trenie podošvy Tela, podložka vyvinie silu smerom dopredu! (Aby zabránila posunu Tela dozadu.) Ak to bolo do kopca, hydraulické čerpadlo vykonalo prácu na zvýšenie potenciálnej energie nohy, trenie žiadnu prácu nekonalo!

V tomto stave „prenesieme váhu“ z Tela na Nohu, teda odľahčíme podošvu Tela a pritlačíme podošvu Nohy.

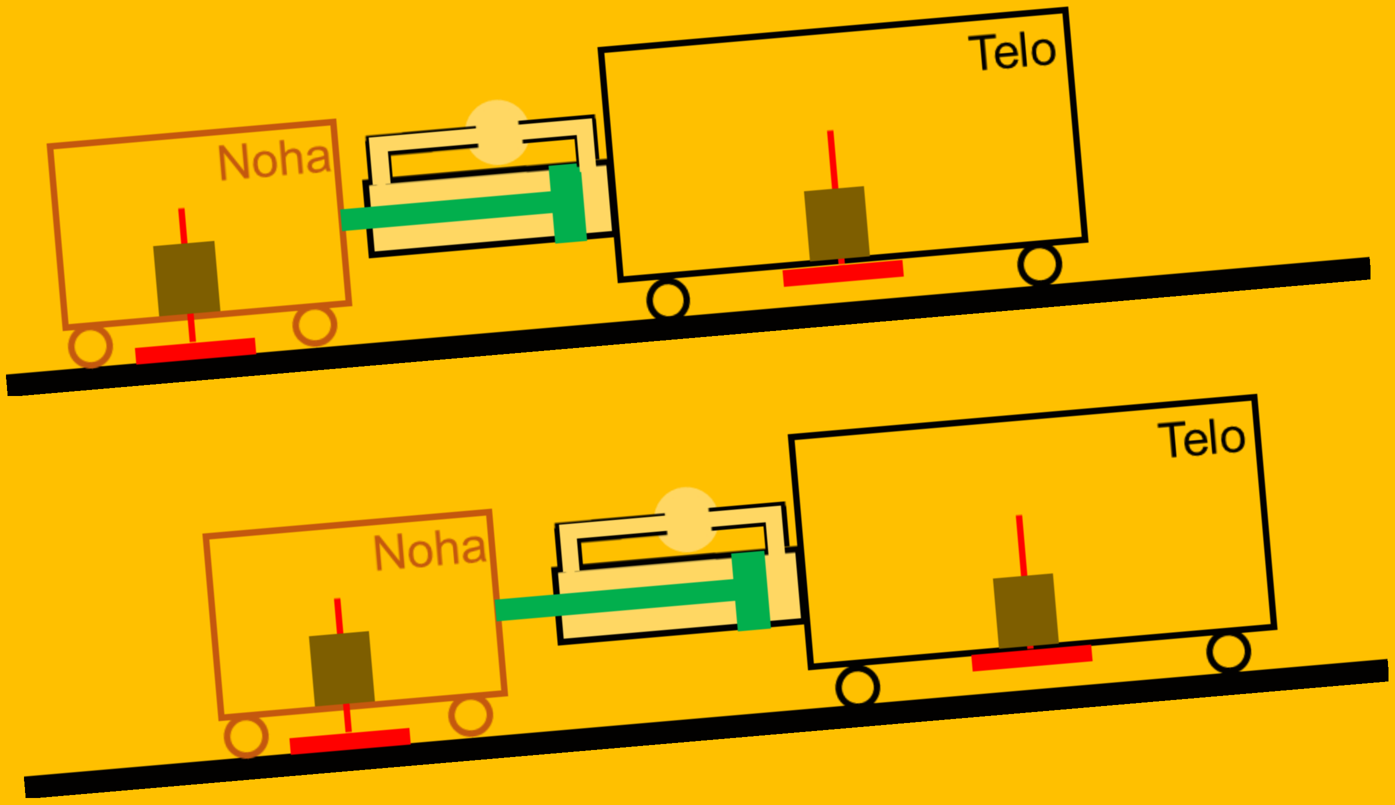
Jednorozmerný robotický chodec, stav 4

Zaťažená je podošva Nohy. Noha je !prisunutá k Telu. Celý systém je v rovnakom vnútornom stave ako bol v stave 0, ibaže je posunutý dopredu ako celok, urobil krok! Ak to bolo do kopca, potrebnú prácu dodalo v dvoch fázach vnútorné hydraulické čerpadlo. Silu potrebnú na posunutie ťažiska „dodala“ podložka ako trenie.

Na ďalšom slajde sú pre porovnanie ukázané oba stavy, 0 aj 4

Jednorozmerný robotický chodec, stavy 0 a 4

Robot urobil krok dopredu!



Poznámka: Ak podložka je príliš klzká, magnety by namiesto pritláčania trecích podošiev mohli ovládať vysúvacie ihly, ktoré sa zabodnú do položky a znehybnia Nohu alebo Telo. Takto v podstate funguje chodec na ľade, kde je malé trenie. Obuje si mačky.

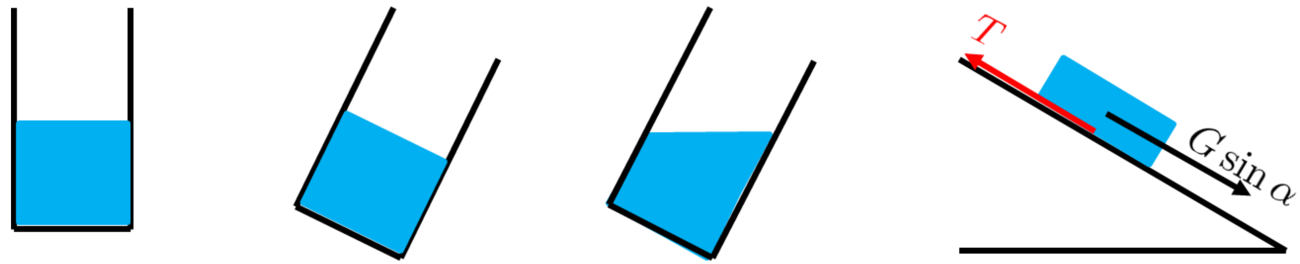
- Zdôvodnite, prečo kladivo vyvinie väčšiu silu pri zatlčení klinca o rovnakú hĺbku, ak bude mať väčšiu kinetickú energiu.
- Ukážte, že nemožnosť zostrojiť perpetuum mobile vyžaduje, aby práca potrebná na zdvihnutie telesa po naklonenej rovine bola rovnaká akol práca pri jeho zdvihnutí kolmo hore.
- Prečo, keď už do energetickej bilancie zahrniem potenciálnu gravitačťnú energiu telesa typu mgh, tak už nesmiem do bilancie zahrnúť aj prácu gravitačnej sily.
- Odvoďte potenciálnu energiu guličky na pružine pri výchylke x.
- Vysvetlite, čo je to potenciálna energia interakcie na príklade dvoch telies pôsobiacich na seba gravitačne.
- Dokážte, že pri šikmom vrhu bez trenia sa energia zachováva
- Ako sa modifikuje zákon zachovania mechanickej energie ak teleso, ktoré sa šmýka pod vplyvom gravitácie dolu po naklonenej rovine pôsobí aj šmykové trenie.

Tekutiny

Tekutiny (anglicky fluids) sú látky, ktoré tečú. Ale vieme, čo o znamená tiecť?
Najprv príklady

- voda tečie
- med tečie (trochu „horšie“ ale tečie)
- kus železa netečie
- plyn tečie: toto treba trošku priblížiť. Ak napríklad praskne termoska s tekutým argónom, robí sa na zemi mláka tekutého argónu. Ten sa rýchlo vyparí a vznikne na tom mieste plyn v zásade pri zemi, lebo argón je ťažký. A ten plyn sa bude ďalej „roztekať do strán“, ako keby to bola dajaká kvapalina. Pravda po čase sa bude aj miešať do vyšších vrstiev vzduchu ale v „prvej aproximácii“ sa môžme tváriť, že sa rozteká viac-menej pri zemi.

Teraz čo odlišuje tekutiny od iných látok. Keď nakloním nádobu s tekutinou, bola v nej pôvodne vodorovná hladina. Prudkým naklonením vznikne najprv šikmá hladina ale tekutina sa roztečie tak sa roztečie tak, že sa znovu vytvorí vodorovná hladina ale v šikmej nádobe



Keby vrchná vrstva kvapaliny mala ostať nie vodorovná ale šikmá, musela by vrstva tesne pod ňou kompenzovať silu tiaže, ktorá sa snaží vrchnú vrstvu šmýkať po vrstve pod ňou sťaby po naklonenej rovine. Preto nižšia vrstva by musela pôsobiť na vyššiu tangenciálnou silu na rozhraní tých dvoch vrstiev podobne ako trenia na naklonenej rovine bráni hranolu šmýkať sa dolu po naklonenej rovine. Keďže vrstva tekutiny „neustojí“ byť šikmo na spodnej vrstve, znamená to, že tekutina nevie na styku dvoch vrstiev vyvinúť tangenciálnu silu, prinajmenej keď je už všetku v kľude. Vieme ale, že med „stečie“ pomaly, kým voda rýchlo. Takže v mede sa vie vyvinúť tangenciálna brzdiaca sila, ale len keď sa vrstvy navzájom pohybujú. Ten jav sa volá viskozita: vznik tangenciálnej sily na rozhraní navzájom sa pohybujúcich vrstiev. Tekutina však nevie vyvinúť tangenciálnu silu na rozhraní dvoch navzájom sa nepohybujúcich vrstiev.

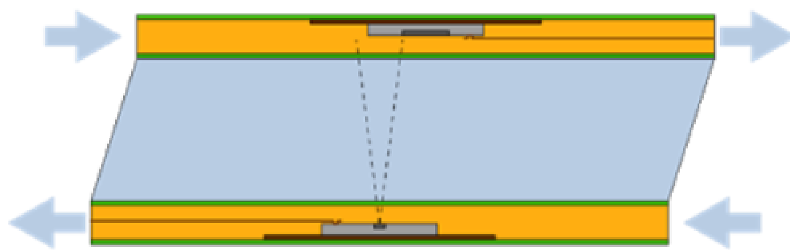
Môže sa zdať divné, prečo dávame „do jedného vreca“ plyny a kvapaliny. Majú síce vlastnosť tekutosti spoločnú, ale zdajú sa nám tak rozdielne ako sú rozdielne napríklad kvapaliny a tuhé látky.

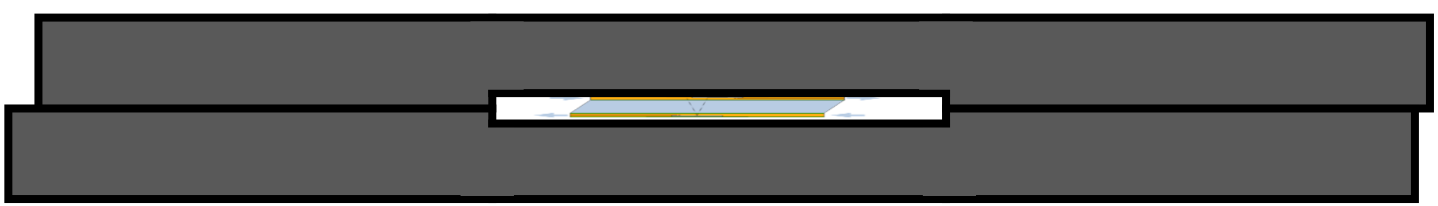
Nie je to pravda. Niet principiálneho rozdielu, ktorý by umožňoval v absolútnom zmysle rozoznať, či ide o plyn alebo kvapalinu. Len ak máme naraz „pri sebe“ dve fázy vo vzájomnej tepelnej rovnováhe, panuje všeobecná dohoda, ktorú z nich nazveme kvapalinou a ktorú plynom. Kvapalinou nazveme tú, ktorá za rovnakých podmienok je napríklad hustejšia alebo menej stlačiteľná. To sú rozdiely, ktoré učí deti už pani učiteľka v škôlke. Ale učí to ako rozdiely, používajúc „porovnávacie“ prídavné mená. Treba si ale uvedomiť, že „porovnávacie prídavné meno“ sa nedá použiť na jeden objekt, musím ho vzťahovať na objekty dva. Povedať že „kvapalina je málo stlačiteľná“ v snahe zrušiť porovnávací charakter vlastnosti kvapaliny je rovnaký nezmysel ako povedať že číslo 1 je „malé“. Isto je malé voči miliónu ale nie voči milióntine.

Odlíšiť tuhú látku od kvapaliny sa dá v absolútnom (neporovnávacom) zmysle. Z hľadiska štruktúry sú tuhé látky na molekulárnej úrovni usporiadané: polohy jednotlivých atómov či molekúl sú navzájom korelované na makroskopických vzdialenostiach (teda oveľa väčších ako sú nanometre). Je to v dôsledku kryštalickej štruktúry tuhých látok. Námietka, že kus železa nevyzerá ako kryštál neobstojí. Na mikroskopickej úrovni tisícov nanometrov je tuhá látka kryštalická, ibaže jednotlivé kryštalické zrná nie sú viditeľné na úrovni milimetrov. Pravda existujú „amorfné tuhé látky“, ktoré dlhodosahové usporiadanie nemajú, ale tie nazývame aj „podchladené kvapaliny“. Striktne vzaté ide o nerovnovážny stav získaný prudkým zmrazením.

Meranie lokálneho šmykového napätia

Naznačíme jeden možný princíp merania šmykového napätia. Meracia sonda vlastne meria lokálnu deformáciu v šmyku, ktorú zo znalosti modulov pružnosti možno prepočítať na šmykové napätie. Principiálna schéma sondy je na obrázku. Ide o dve paralelné plochy na jednej je zdroj svetla, na druhej svetlocitlivý chip. Medzi plochami je priehľadný elastomérový („ako guma“) materiál. Keď sa plochy voči sebe posunú, svetelný signál registrovaný chipom sa zmení a zmenu možno prepočítať na posunutie.





Viem si predstaviť, že ak je tenká sonda „vlepená“ medzi dve vrstvy vzájomne namáhané šmykom v dutine zaoberajúcej malú plochu veľkých „klzných“ plôch, potom by sa tým malo dať efektívne odmerať šmykové napätie

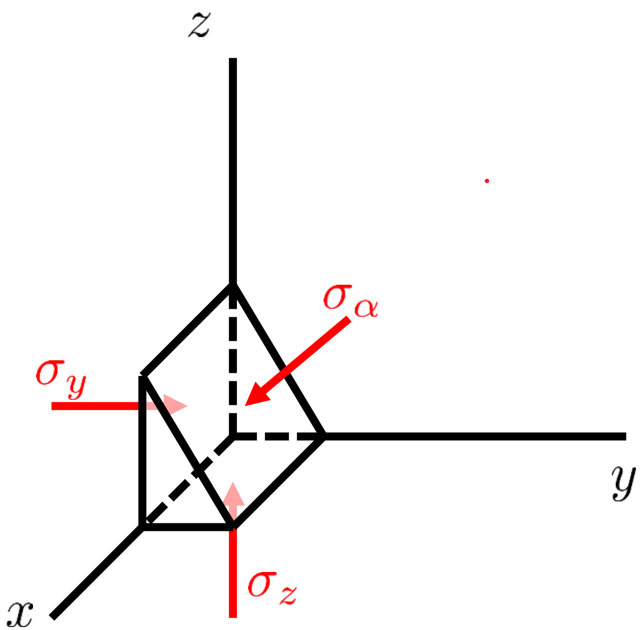
Tekutiny

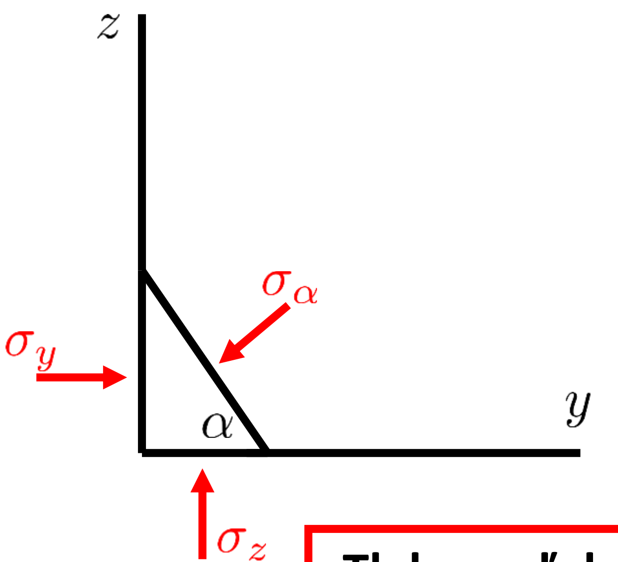
Záver: tekutina je látka, ktorá na rozhraní navzájom sa nepohybujúcich vrstiev má nulové tangenciálne sily.

V praxi skôr používame vyjadrenia o tangenciálnom napätí, čo je tangenciálna sila pôsobiaca na jednotku plochy rozhrania.

V stojacej tekutine teda na ľubovoľnú myslenú plochu môže pôsobiť len normálový tlak (krátko sa hovorí len tlak). Platí pritom, že na danom mieste v kvapaline je tlak na ľubovoľnú myslenú plochu nezávislý na orientácii tej plochy: „tlak je vo všetkých smeroch rovnaký“ (toto je jedno z dvoch tvrdení Pascalovho zákona).

Dôkaz Pascalovho zákona (o smeroch tlaku)





Uvažujme malý objemový element kvapaliny v rovnováhe (nehýbucej sa) tvaru trojbokého hranola. Na obrázku sú naznačené tri kolmé tlaky na tri zo stien. Kvapalina sa nehýbe, preto všetky zložky celkovej sily pôsobiacej na objemový element musia byť nulové. Zdôraznime, že výrazy $\sigma_y, \sigma_z, \sigma_\alpha$ nie sú vektory ale veľkosti kolmých tlakov. Veľkosť príslušných síl je potom „tlak krát plocha".

Plochu ľavej steny označme S. Potom plocha šikmej steny je zjavne $S/\sin\alpha$ a plocha spodnej steny je priemet šikmej plochy, teda $S\cos\alpha/\sin\alpha$.

Zložka y celkovej sily preto bude

$$\sigma_y S - (\sigma_\alpha \sin\alpha)S/\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_\alpha = \sigma_y$$

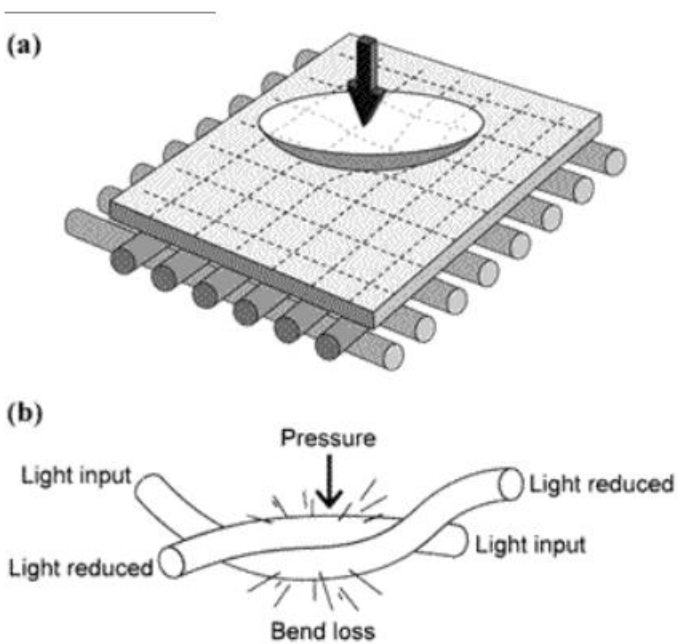
Zložka z celkovej sily bude

$$\sigma_z S\cos\alpha/\sin\alpha - (\sigma_\alpha \cos\alpha)S/\sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_\alpha = \sigma_z$$

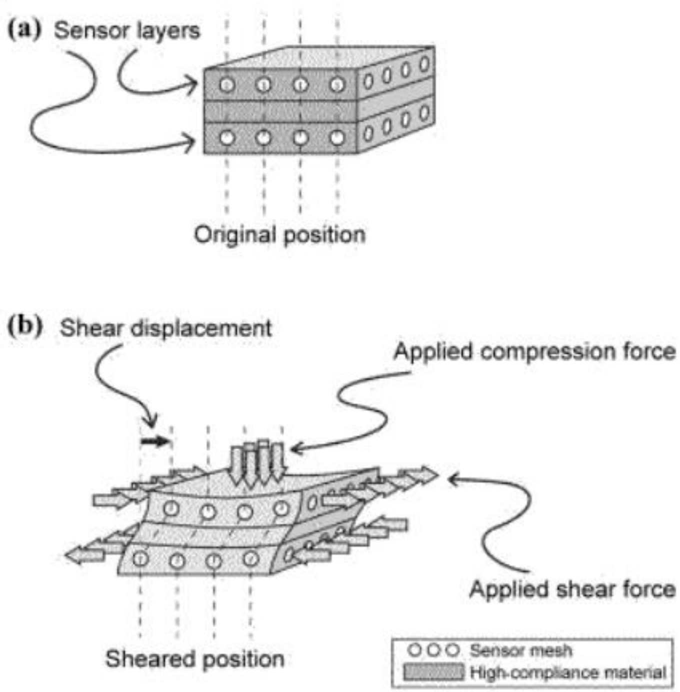
Tlaky na ľubovoľne orientované plochy na danom mieste v tekutine sú teda rovnaké (lebo uhol α bol ľubovoľný).

The basic configuration of the fiber-optic sensor system incorporates a mesh. (Note that pressure sensors typically measure a force over a known area and pressure is subsequently calculated. As such, our sensor measures force as well; thus, all our data are in Newtons.) This mesh comprises two sets of parallel fiber planes (**Figure 1**). The two fiber planes are configured so that the parallel rows of fibers of the top and bottom planes are perpendicular to one another. The planes are sandwiched together, creating one sensing sheet. Information from the orthogonal fibers corresponds to information on a set of orthogonal axes. This information creates a two-dimensional (2-D) plot of the pressure distribution on the mesh. For bend loss, both sets of fibers are illuminated. We can determine 2-D information by measuring the loss of light from each fiber. Knowing which fiber along the *x*-axis dims and which one along the *y*-axis dims, one can determine the *x*- and *y*-coordinates of the pressure point.



http://www.rehab.research.va.gov/jour/05/42/3/wang.html

The shear sensor is constructed of two layers of bend-loss mesh sensors (**Figure 2**). The basic design is a multilayered sensor in which the top and bottom layers are composed of a sensor mesh embedded in a high-shear-compliant shoe insole. The coordinates of the pressure points are taken from the top and bottom mesh sensors. With this method of determining shear, we assume that the pressure points are originally directly above and beneath one another. The pressure points will be shifted out of alignment because of shearing forces, and the amount of misalignment determines the amount of shear.



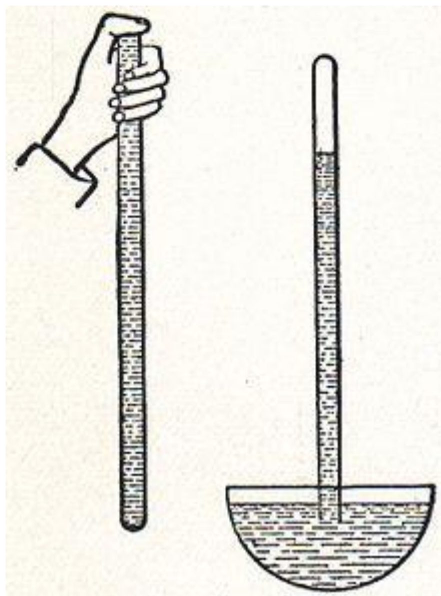
Atmosférický tlak

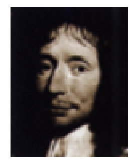
Prečo sa voda nedá vysať do výšky viac ako 10m?

1 torr = 1 mm Hg =1/760 atm = 133.3 Pa

1 Pa = 1 N/m^2

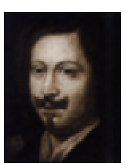
Evangelista Torricelli by Lorenzo





1648 Blaise Pascal, French philosophei physicist and mathematician, heard about the experiments of Torricelli and was searching for the reasons of Galileo's and Torricelli's findings. He came to the conviction that the force, which keeps the column at 760 mm, is the weight of the air above.

Hustota vzduchu 1.23 mg/cm^3
Hustota ortuti 13.6 g/cm^3
Výška vzduchu, ktorá vyváži 760 mm ortuti, teda má byť rádovo 10 km, čo nie je zlý rádový odhad výšky atmosféry



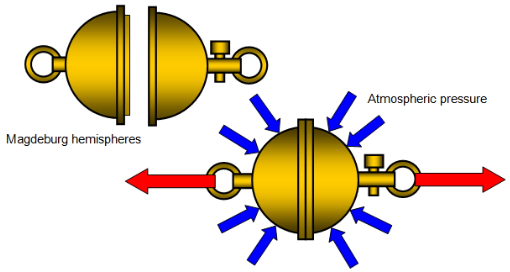
1644 Evangelista Torricelli (rorr). Italian physicist, filled a tube 1 meter long, hermetically closed at one end, with mercury and set it vertically with the open end in a basin of mercury. The column of mercury invariably fell to about 760 mm, leaving an empty space above its level. Torricelli attributed the cause of the phenomenon to a force on the surface of the earth, without knowing, where it came from. He also concluded that the space on top of the tube is empty, that nothing is in there and called it a "vacuum".

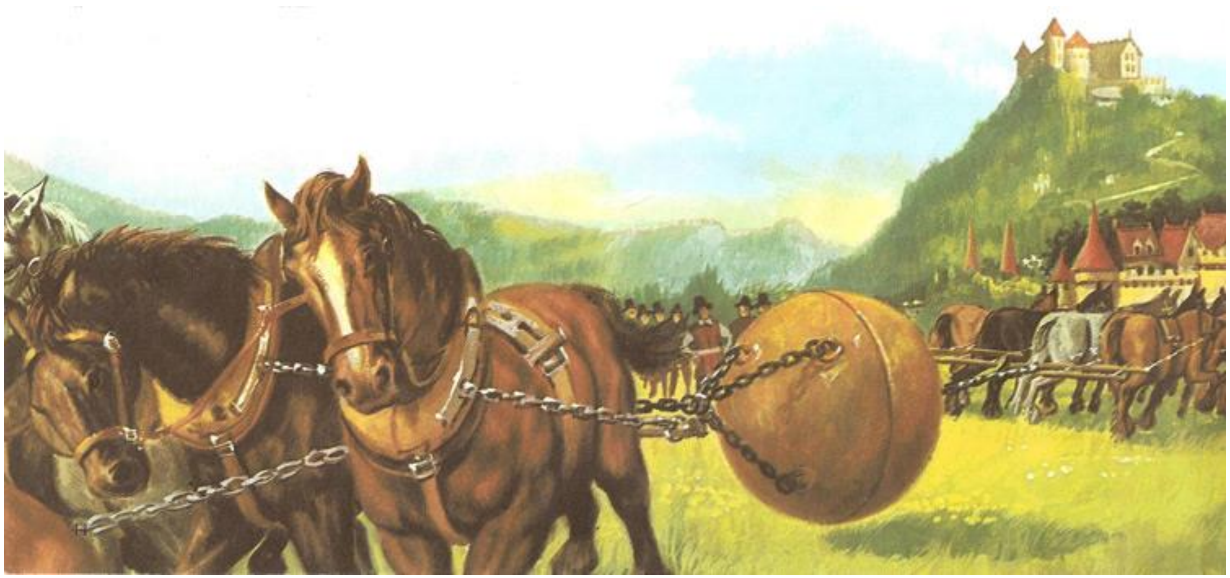
Budeme hlasovať

Toricelli vykonal pokus s ortuťou. Hustota ortuti 13.6 g/cm^3
Akú dlhú trubicou (približne) by bol potreboval, keby chcel vykonať ten pokus s vodou

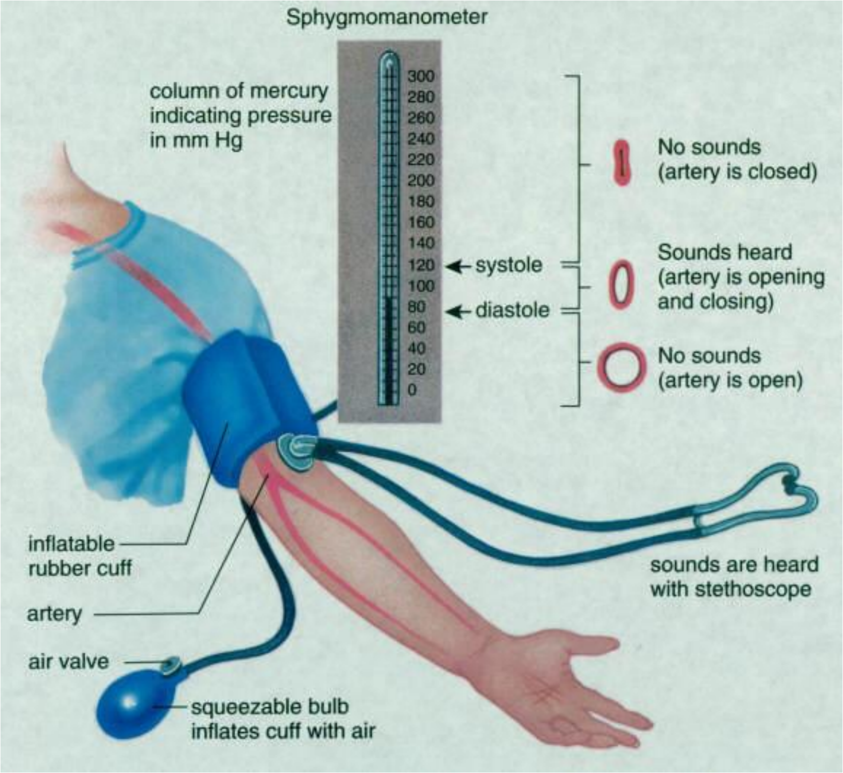
a)3 m
b)5 m
c)10 m
d)30 m

Magdeburské pologule





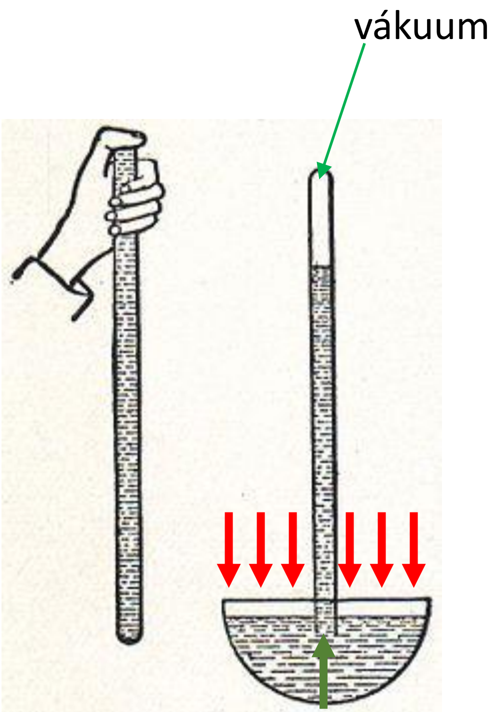
Krvný tlak



Krvný tlak 120/80 je udávaný v torroch.

Toricelli a Pascal

Interpretácia Toricelliho pokusu ako dôsledku atmosférického tlaku invokuje Pascalov zákon: Tlak sa prenáša do každého miesta v kvapaline rovnako. Váha stĺpca vzduchu, ktorú „drží hladina ortuti“ v miske je rovnaká ako váha stĺpca ortuti od úrovne hladiny až po hranicu vákua



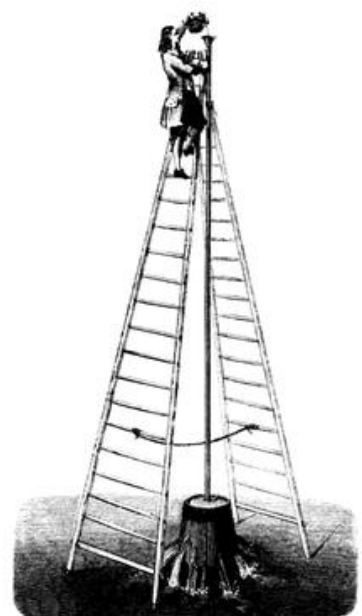
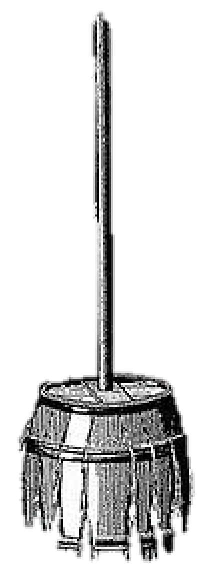


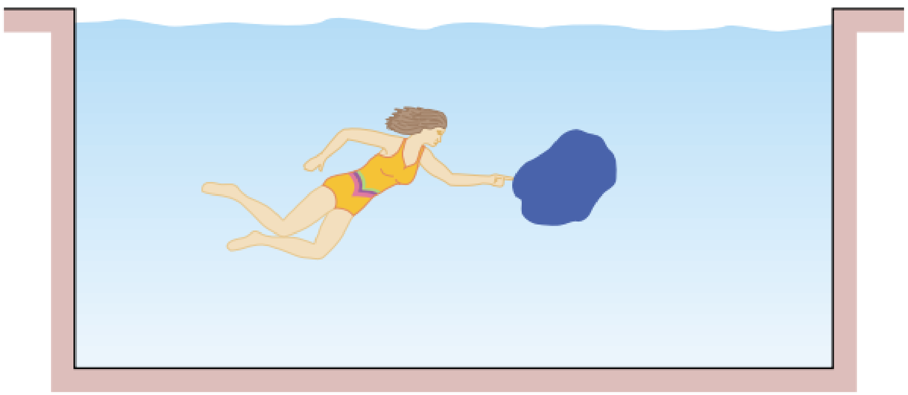
Fig. 45.—Hydrostatic paradox. Pascal's experiment.

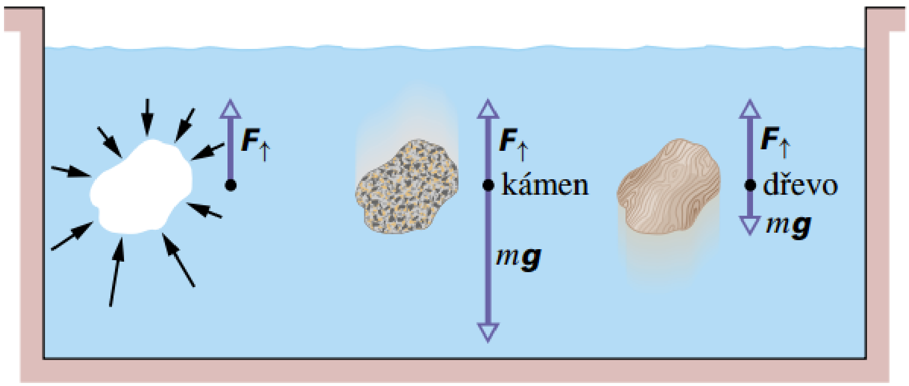


Demonštrácia Pascalovho zákona: tlak vody vo vysokej trubici roztrhne sud

Teoretický dôkaz Pascalovho zákona si uvedieme neskôr.

Archimedov zákon

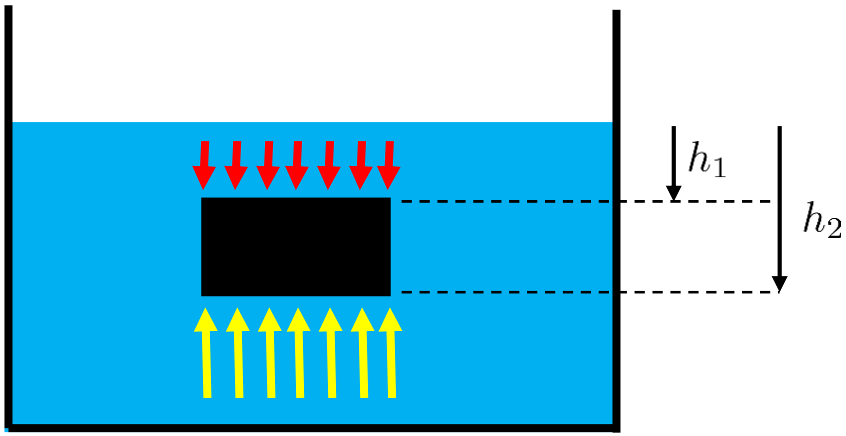




Tenučké polyetylénové vrecko plné vody sa dá pod hladinou presúvať pomocou infinitezimálnej sily. Vznáša sa (stojí) pod hladinou, Newton teda hovorí, že súčet síl od okolitej kvapaliny na povrch vrecka (alebo mysleného objemu vody) musí byť rovný (vektorovo) váhe uvažovaného objemu kvapaliny. Ak objem kvapaliny nahradíme nejakým telesom, dá sa predpokladať, že tlakové sily na povrch od okolitej kvapaliny sa nezmenia:

Teleso ponorené do kvapaliny je nadľahčované silou, ktorá sa rovná váhe kvapaliny telesom vytlačenej.

Archimedov zákon ako dôsledok hydrostatického tlaku



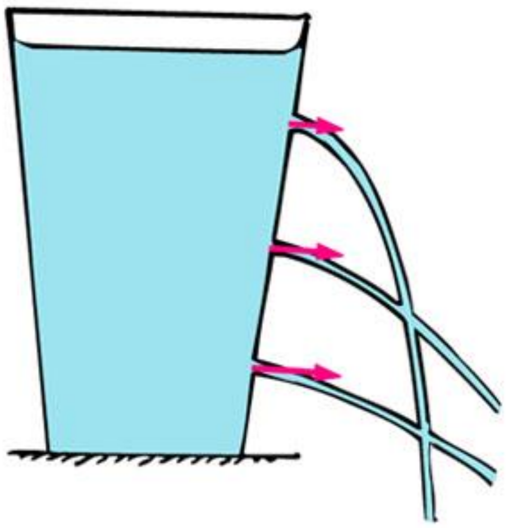
Podľa Archimeda platí:

$$F = p_2 S - p_1 S = \varrho V g = \varrho S (h_2 - h_1) g$$

$$p_2 - p_1 = \varrho g (h_2 - h_1)$$

$$\boxed{p = h \varrho g}$$

hydrostatický tlak



Dynamika ideálnej kvapaliny

Ideálna kvapalina:

- nestlačiteľná (hustota hmotnosti kvapaliny je vo všetkých bodoch rovnaká)
- neviskózna (nulové tangenciálne napätia nielen v kľude ale i pri pohybe)

Reálne kvapaliny sú málo stlačiteľné a majú nenulovú viskozitu

Nenulová viskozita znamená, že dve vrstvy kvapaliny, ktoré sa navzájom pohybujú na seba pôsobia tangenciálnou silou: pomalšia vrstva „sa snaží“ rýchlejšiu vrstvu spomaliť, naopak rýchlejšia vrstva „sa snaží“ pomalšiu vrstvu urýchliť.

Žltou šípkou je znázornené tangenciálne napätie ktorým vo viskóznej kvapaline pôsobí vrstva „1“ na vrstvu „2“, zelenou šípkou tangenciálne napätie, ktorou vrstva „2“ pôsobí na vrstvu „1“. Experimentálne poznatky hovoria, že veľkosť „žltého“ napätia je úmerná gradientu rýchlosti (η sa volá koeficient viskozity)

$$\boxed{\sigma_x = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}}$$

Chaotická a driftová rýchlosť molekúl v objemovom elemente

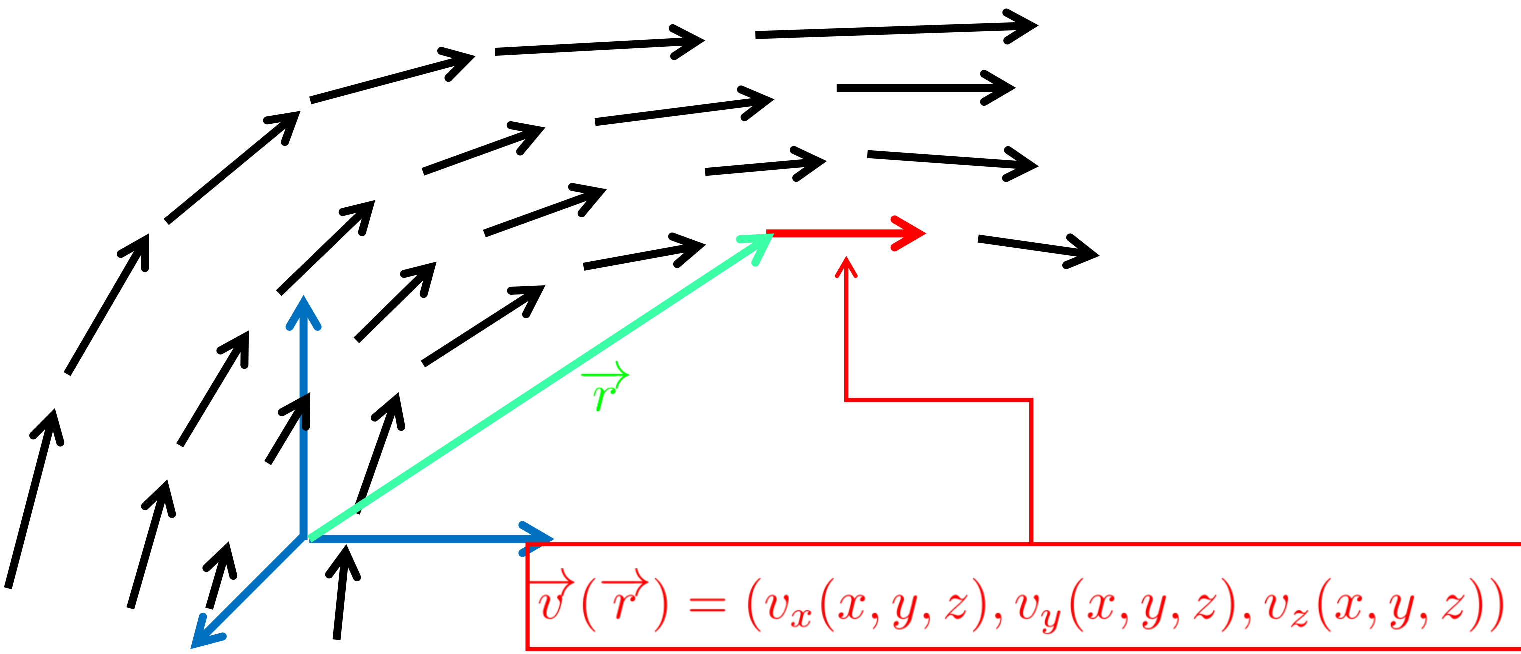
V našom kurze sme sa už stretli s pojmom „vektorové pole“ a ako príklad sme uvádzali pole rýchlostí prúdiacej tekutiny. Ak hovoríme o rýchlosti tekutiny „v nejakom bode“ nemáme na mysli ideálny matematický bod a ani nie jednu molekulu tekutiny. Máme na mysli „malú LEGO-kocku“ kvapaliny. Teda malý objem (tzv. objemový element), ktorý je zanedbateľne malý voči rozmerom napríklad potrubia, v ktorom tekutina prúdi ale stále dosť veľký, takže obsahuje veľké množstvo molekúl tekutiny. Jednotlivé molekuly v objemovom elemente sa pohybujú chaoticky všetkými smermi, ale tento mikroskopický pohyb nevnímame. Nám sa pohyb elementu javí tak, ako by sa „ako celok“ pohyboval nejakou „rýchlosťou prúdenia“. Z mikroskopického hľadiska ide o strednú rýchlosť mikroskopického chaotického pohybu molekúl, tzv. driftovú rýchlosť. Ak tekutina neprúdi (teda makroskopicky sa nehýbe) potom stredná driftová rýchlosť molekúl je nulová“ molekuly sa hýbu náhodne všetkými smermi s rovnakou pravdepodobnosťou, čo v strednom dá nulu. Ak tekutina prúdi, teda napríklad ak „fúka vietor“, znamená to, že molekuly sa pravdepodobnejšie pohybujú v jednom smere oproti smeru opačnému, priemerná driftová rýchlosť je nenulová. Pre názornosť: typická náhodná chaotická rýchlosť molekúl vzduchu za obvyklých podmienok býva rádovo 500 m/s, kým driftová rýchlosť (teda rýchlosť vetra) býva rádovo 10 m/s.

opakovanie

Vektorové pole

V každom bode priestoru je definovaný vektor, máme teda vektorovú funkciu polohy (a prípadne aj času)

$$\vec{v}(\vec{r}) \quad \text{resp.} \quad \vec{v}(t, \vec{r})$$



Predstavme si prúdiacu vodu a **rýchlosť prúdenia v každom bode**

opakovanie

Pole rýchlosti merajú napríklad hydrológovia

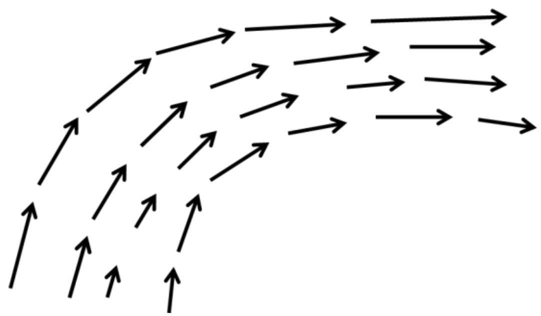
Zmerajú profil rýchlosti v rieke, tvar riečneho profilu (hĺbka, šírka) a potom určia prietok vody.
Napríklad typický prietok vody v Dunaji v Bratislave je 2000 $m^3/s = 2.10^6$ kg/s

Hustota prúdu vody v jednotkách $kgm^{-2}s^{-1}$ je daná vzorcom

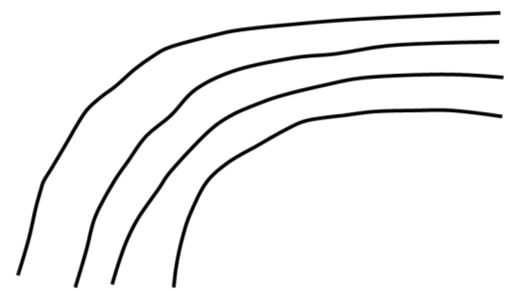
$$\vec{j} = \varrho \vec{v}$$

Ak ma zaujímajú prietoky, môžem namiesto vektorového poľa rýchlosti uvažovať rovno vektorové pole hustoty prúdu $\vec{j}(\vec{r})$.

Laminárne a turbulentné prúdenie



vektorové pole rýchlostí

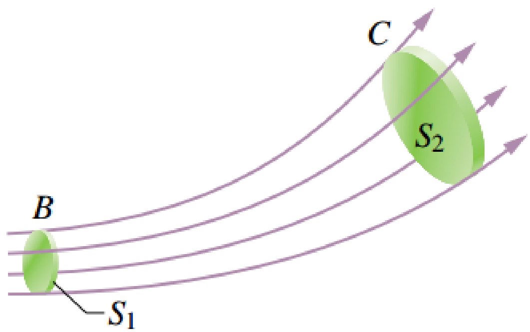


prúdnice poľa rýchlostí

Prúdnice sú trajektórie, ktoré opisujú objemové elementy tekutiny pri svojom pohybe driftovou rýchlosťou. Ľavý obrázok predstavuje „snímku“ poľa rýchlostí v jednom časovom okamihu. Na pravom obrázku nie je zachytený jeden časový okamih: jednotlivé úseky prúdnice opisuje objemový element v rozličných po sebe nasledujúcich časoch. Na našom obrázku sa však zdá, že prúdnice ako keby kopírovali smery rýchlostí rozličných objemových elementov v rovnakom čase. Prúdnice, ktoré má takýto „pekný tvar“ vznikajú vtedy, ak rýchlosti dvoch objemových elementov na tom istom mieste v rozličných časoch nie sú od seba príliš odlišné a ani rýchlosti objemových elementov v tom istom čase v blízkych miestach nie sú príliš odlišné. Ak to tak nie je, hovoríme o turbulentnom prúdení, ktoré intuitívne vnímame ako prúdenie „plné lokálnych nestabilných vírov“.

Laminárne a turbulentné prúdenie

Prúdová trubica, rovnica kontinuity

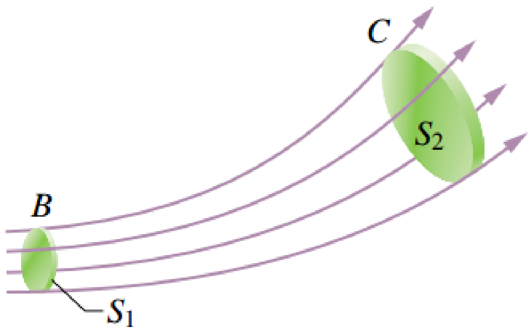


Predstavím si myslenú plochu (S_1) a všetky prúdnice, ktoré ňou prechádzajú. Objemové elementy ideálnej kvapaliny, ktoré sa pohybujú po tých prúdniciach po nejakom čase prechádzajú plochou S_2. Všetky tieto prúdnice vytvárajú objekt, ktorý sa volá prúdová trubica.

Z konštrukcie prúdovej trubice je jasné, že žiadny objemový element z nej nevyteká „obvodovými stenami“, elementy, ktoré do trubice vtiekli cez plochu S_1 zase vytiekli cez plochu S_2.

Uvažujme teraz stacionárne prúdenie, teda také, keď sa vektorové pole rýchlostí objemových elementov nemení z časom. Na tom istom mieste v priestore je teda rýchlosť objemového elementu, ktorý sa na tom mieste práve nachádza, stále rovnaká. Prúdová trubica je potom v čase konštantná a dá sa predstaviť akoby to bol **kus pevného potrubia**, cez steny ktorého kvapalina netečie. Keďže uvažujeme nestlačiteľnú kvapalinu, potom celkové množstvo kvapaliny, ktoré sa v nejakom čase v tomto „potrubí“ nachádza, nezávisí na čase. Preto množstvo kvapaliny, ktoré za nejaký čas do „potrubia“ vtečie cez plochu S_1 musí byť rovné množstvu kvapaliny, ktoré za ten istý čas vytečie cez plochu S_2.

Prúdová trubica, rovnica kontinuity



Predpokladajme, že rýchlosť všetkých objemových elementov na ploche S_1 je rovnaká a podobne, že aj rýchlosť všetkých objemových elementov na ploche S_2 je rovnaká (ale vo všeobecnosti iná než na ploche S_1). Uvažujme ešte, že obe plochy sú kolmé na prúdnice, ktoré nimi prechádzajú.

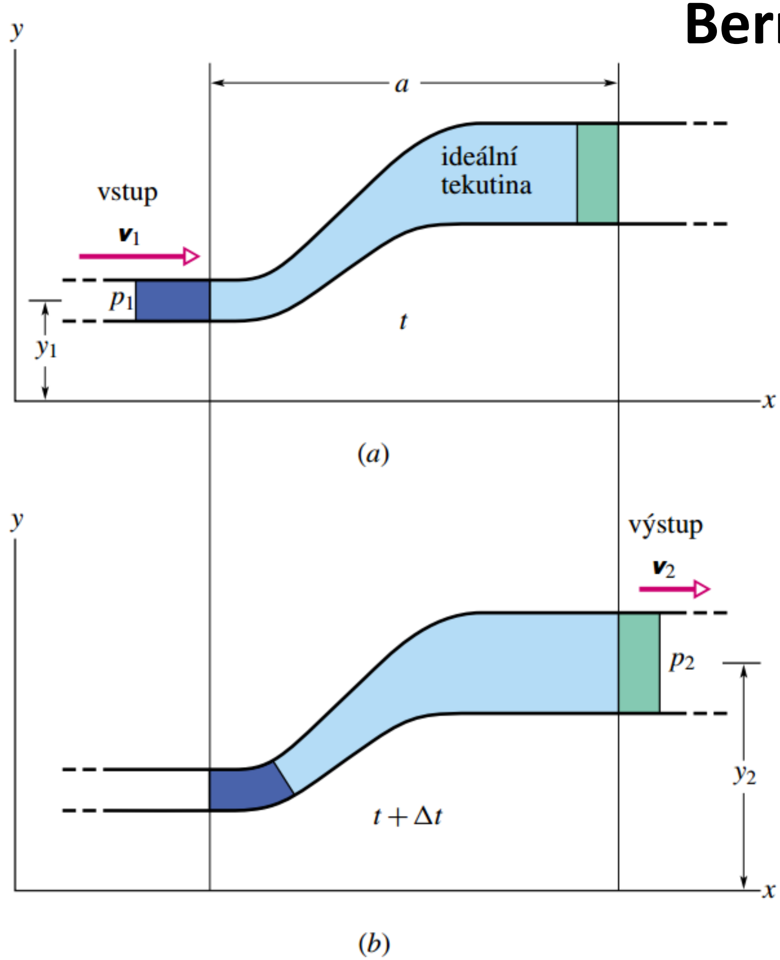
Všetko to môže byť pravda aj pre dosť veľké plochy. Ak to tak nie je, môžeme vždy uvažovať iba prúdové trubice vymedzené veľmi malými priečnymi plochami. Na dostatočne malej ploche už možno považovať rýchlosti za rovnaké a plochu voliť kolmo na prúdnice. Pre nestlačiteľnú kvapalinu potom platí

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

Uvedená rovnica sa volá rovnica kontinuity, presnejšie jej špeciálny tvar za daných podmienok. Všeobecnejšie možno pre ľubovoľnú myslenú uzavretú plochu v prúdovom poli rýchlostí vyjadriť pre nestlačiteľnú kvapalinu rovnicu kontinuity v tvare: **výtok nestlačiteľnej kvapaliny z uzavretej plochy je nulový**, teda

$$\oint \vec{v}.\overrightarrow{dS} = 0$$

Bernouliho rovnica



Uvažujme stacionárne prúdenie ideálnej kvapaliny v prúdovej trubici na obr. Sú tam znázornené dva okamihy oddelené časovým intervalom Δt. Za ten čas do trubice natiekla tmavomodro označené množstvo kvapaliny a vytieklo zeleno označené množstvo kvapaliny. Objemy tmavomodrého a zeleného množstva kvapaliny sú rovnaké (nestlačiteľnosť). Uvažujme infinitezimálne úzku trubicu, potom všetka modrá kvapalina má rovnakú súradnicu y_1 a rovnakú rýchlosť $\vec{v}_1$ a analogicky to platí aj o zelenej kvapaline. Kvapalina uzavretá v trubici v intervale označenom ako a je v rovnakom stave na oboch obrázkoch. Pri zvažovaní zachovania energie treba teda kalkulovať len s energiou tmavomodrej a zelenej kvapaliny. Do energie zarátame kinetickú energiu a potenciálnu energiu gravitácie.

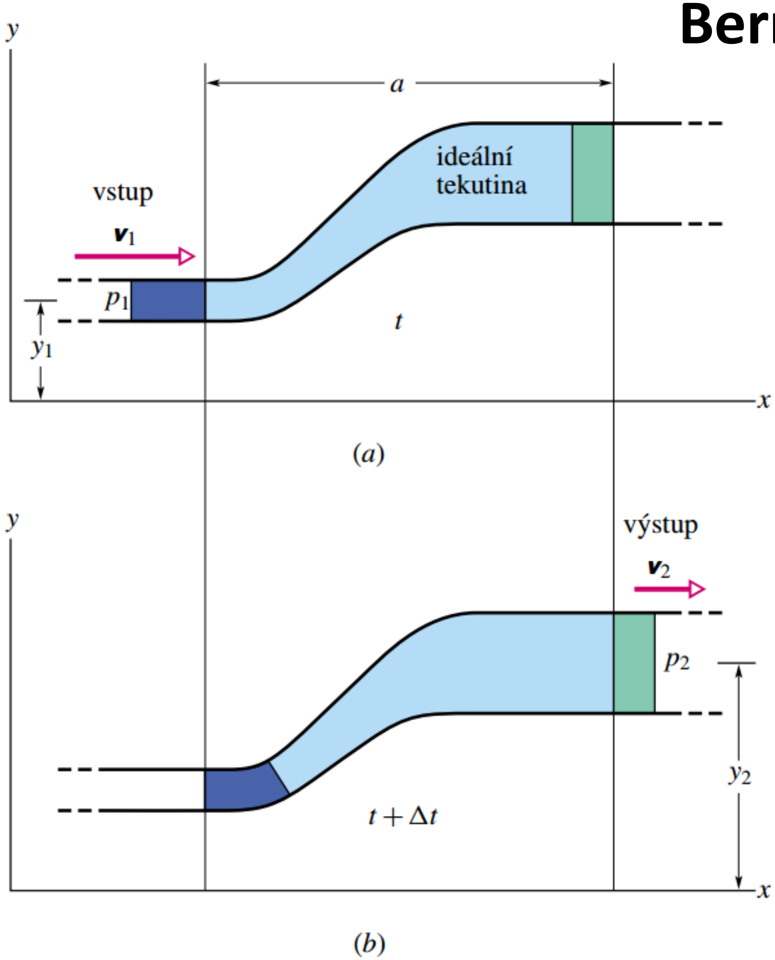
Energia tmavomodrej kvapaliny bude

$$E_1 = \frac{1}{2}\varrho \Delta V v_1^2 + \varrho \Delta V g y_1$$

energia zelenej kvapaliny bude

$$E_2 = \frac{1}{2}\varrho \Delta V v_2^2 + \varrho \Delta V g y_2$$

Bernouliho rovnica



Zákon zachovania energie hovorí

$$E_2 = E_1 + \delta A$$

kde δA je práca vykonaná kvapalinou vľavo od tmavomodrej kvapaliny a kvapalinou vpravo od zelenej kvapaliny

Kvapalina vľavo od tmavomodrej **tlačí** silou $p_1 S_1$ a vykoná kladnú prácu

$$\delta A_1 = p_1 S_1 v_1 \Delta t$$

Kvapalina vpravo od zelenej **je tlačená** silou $p_2 S_2$ a vykoná teda zápornú prácu

$$\delta A_2 = -p_2 S_2 v_2 \Delta t$$

Celková vykonaná práca „vonkajšou kvapalinou“ teda bude

$$\delta A = \delta A_1 + \delta A_2 = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t$$

Po dosadení do zákona zachovania energie dostaneme

$$\frac{1}{2}\varrho \Delta V v_2^2 + \varrho \Delta V g y_2 - \frac{1}{2}\varrho \Delta V v_1^2 - \varrho \Delta V g y_1 = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t$$

pre nestlačiteľnú kvapalinu dostávame (rovnica kontinuity) $S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t = \Delta V$

a výsledkom bude vzťah

$$\boxed{\frac{1}{2}\varrho v_2^2 + \varrho g y_2 + p_2 = \frac{1}{2}\varrho v_1^2 + \varrho g y_1 + p_1}$$

Bernouliho rovnica

Pre stacionárne prúdenie sme dostali Bernouliho rovnicu, ktorá hovorí, že pozdĺž prúdnice platí

$$\frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho g y + p = \mathrm{const}$$

Všimnime si, že sme vlastne získali nový vzorec do „Feynmanovej zbierky" vzorcov pre energiu, a to „vyčaraním" za vonkajšiu prácu tlakových síl. Vzorec hovorí, že objem nestlačiteľnej kvapaliny ΔV, vystavený tlaku p má potenciálnu tlakovú energiu $W_p = p\Delta V$. Bernouliho rovnica je potom vlastne zákonom zachovania energie a hovorí, že **súčet kinetickej, gravitačnej potenciálnej a tlakovej potenciálnej energie objemového elementu kvapaliny pozdĺž prúdnice je konštantný**.

Doplňme bez dôkazu, že v prípade tzv. **bezvírového prúdenia** ideálnej kvapaliny platí Bernouliho rovnica **nielen pozdĺž prúdnice ale v celom objeme**. Rovnica sa dá zovšeobecniť v istých prípadoch aj pre stlačiteľnú kvapalinu, potom v nej nevystupuje priamo tlak ale tzv. tlaková funkcia. **Záujemcom od podrobnosti odporúčam napríklad Ilkovičovu učebnicu**.

Bernouliho rovnica v nehomogénnom poli

Bernouliho rovnicu $$\frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho g y + p = \mathrm{const}$$

sme odvodili pre kvapalinu v homogénnom gravitačnom poli. V podstate rovnaké odvodenie sa dá aplikovať aj pre prípad nehomogénneho poľa ak ide o potenciálové pole. Pre kvapalinu v gravitačnom poli s potenciálom $\varphi(\vec{r})$ bude platiť

$$\frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho \varphi(\vec{r}) + p = \mathrm{const}$$

Bernouliho rovnica pre neprúdiacu kvapalinu

V statickom prípade keď kvapalina neprúdi, ide automaticky o „bezvírové prúdenie“, takže v celom objeme kvapaliny platí

$$\varrho\varphi(\vec{r}) + p = \mathrm{const}$$

Z uvedenej rovnice okamžite vyplýva aj rovnica pre hydrostatický tlak $p = h\varrho g$.

Ak rozdiely v hodnotách gravitačného potenciálu sú voči hodnotám tlaku zanedbateľné potom dostaneme zjednodušenú formu Pacalovho zákona

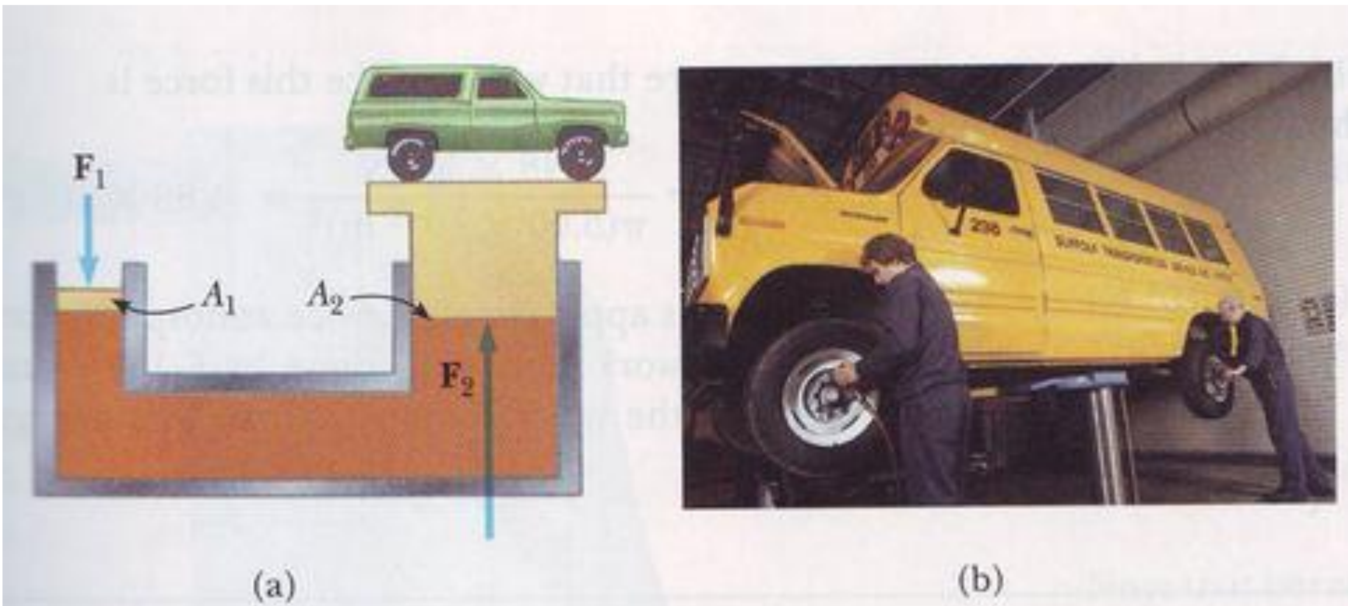
$$p = \mathrm{const}$$

teda **pri zanedbaní gravitácie je tlak v celom objeme stojacej ideálnej kvapaliny rovnaký**.

Ak hydrostatický tlak je nezanedbateľný, potom dostaneme Pascalov zákon v tvare: **navýšenie tlaku nad hodnotu hydrostatického tlaku je v celom objeme stojacej ideálnej kvapaliny rovnaké**.

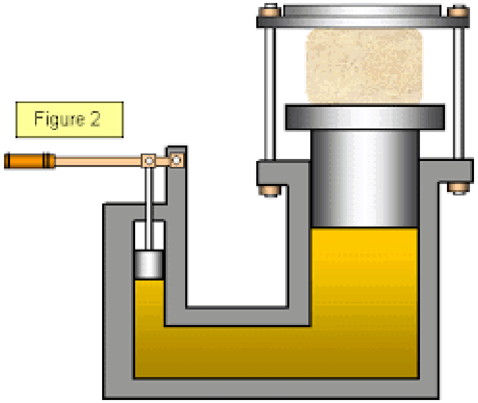
Pascalov zákon, hydraulika

Tlak v nestlačiteľnej kvapaline v uzavretom priestore sa šíri do všetkých miest a vo všetkých smeroch rovnako

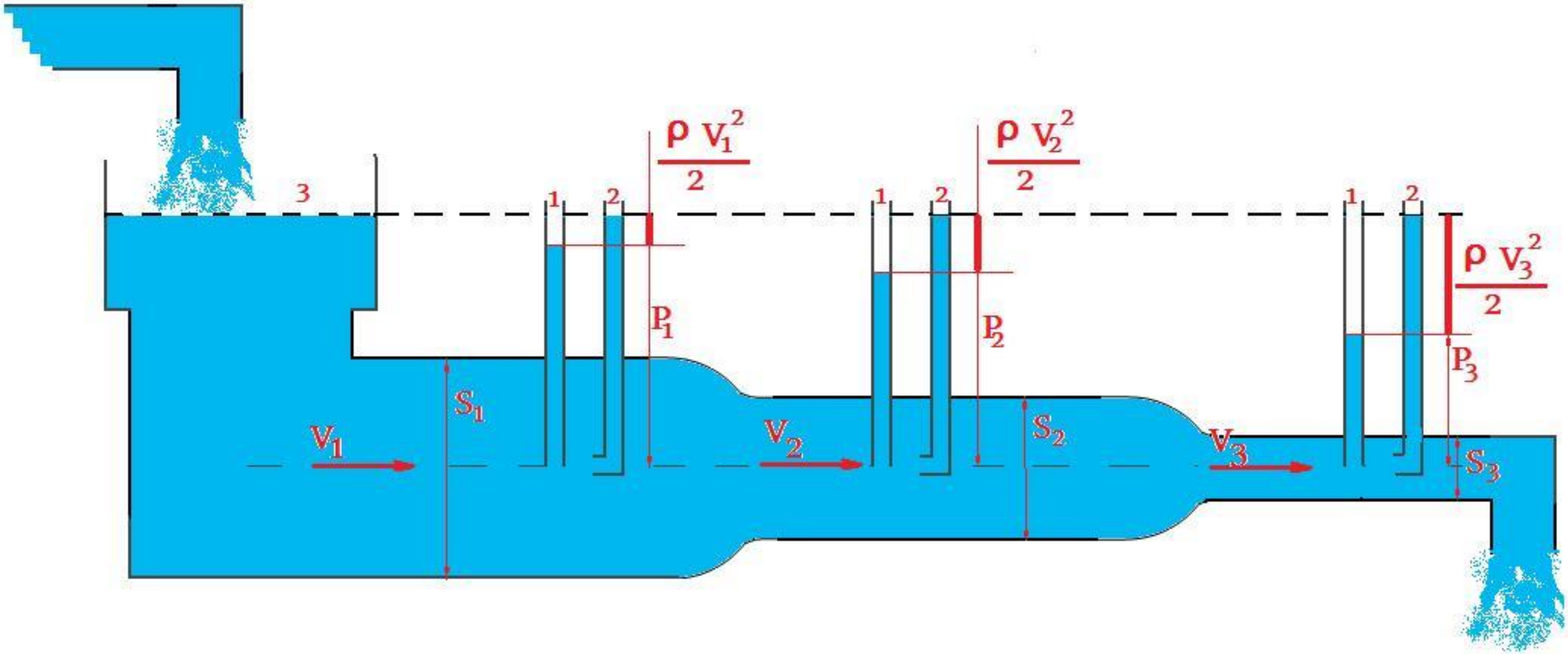


$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \implies F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}$$

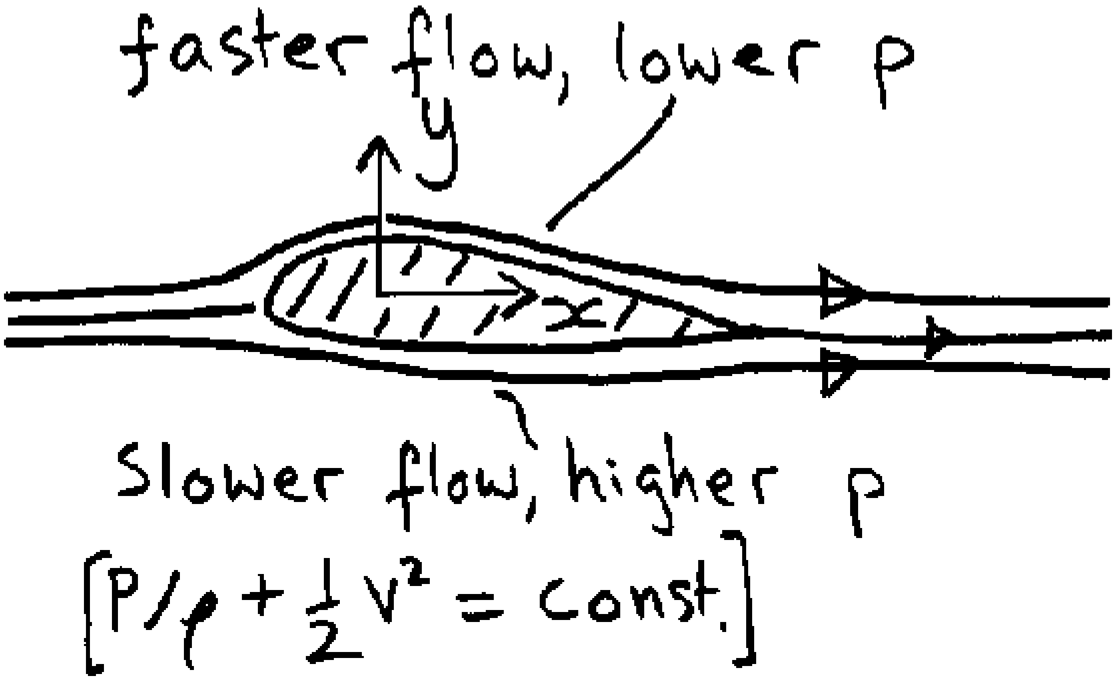
Pascalov zákon, hydraulika



Bernouliho rovnica



Chybné vysvetlenie!!!



- Čo je to vektorové pole
- Dokážte ľubovoľným spôsobom Archimedov zákon
- Vzorec pre tangenciálne napätie v prúdiacej viskóznej kvapaline
- Ako znie Pascalov zákon (obe jeho časti)
- Súvis Pascalovho zákona a hydraulických strojov
- Napíšte Bernouliho rovnicu
- Ako sa meria rýchlosť prúdiacej tekutiny využijúc Bernouliho rovnicu
- Čo je to laminárne a turbulentné prúdenie

Ako sme objavili, že svet sa skladá z atómov a molekúl

Prerod alchýmie na chémiu

Intuitívne vnímanie sveta okolo nás hovorí, že svet okolo nás je „látkovej povahy“. Objekty okolo nás sa skladajú z rozličných látok. Účelné využívanie okolitých objektov ako nástrojov alebo surovín vyžadovalo zhromažďovať poznatky o štruktúre, vlastnostiach a premenách látok.

Poznatky tohto typu sa zhromažďovali nie celkom systematickým (dnes by sme povedali nevedeckým) spôsobom najmä medzi alchymistami.

Nedostatok vedeckých postupov viedol k tomu, že poznatky o rozličných alchymistických procedúrach boli často nereprodukovateľné, obsahovali veľa nepodstatného balastu a mystiky.

Vedecká metodológia sa vo všeobecnosti začala formovať okolo roku 1600, ako prvý pokus o systematický výklad vedeckej metodológie sa uvádza spis René Descartes: Discours de la méthode z roku 1637.

Premena alchýmie na chémiu bola postupná a zdĺhavá. So systematickým uplatňovaním vedeckých postupov sa spomína najmä meno Robert Boyle (1627–1691, objavil napríklad zákon izotermických dejov v plynoch $pV = const$). Ak sa má pomenovať jeden otec modernej chémie, uvádza sa Antoine-Laurent de Lavoisier. Je dobré si ho časovo zaradiť do obdobia francúzskej revolúcie, ktorej neskôr padol za obeť pod gilotínou. Jeho hlavná zásluha je zavedenie presných kvantitatívnych meraní pri rozličných „chemických receptúrach“.

Chemické receptúry

Kvantitatívne údaje o hmotnostiach a objemoch látok vstupujúcich do alebo vystupujúcich z chemických reakcií umožnili sformulovať významné kvalitatívne zákonitosti chemických reakcií.

- Zákon stálych zlučovacích pomerov (Proustov zákon), hovorí, že chemická zlúčenina obsahuje vždy presne rovnaký podiel prvkov látok vstupujúcich do reakcie. Toto tvrdenie prvýkrát vyslovil Joseph Proust, na základe niekoľkých experimentov vykonaných v rokoch 1798 a 1804.
- Daltonov zákon (1808) o násobných zlučovacích pomeroch potom bezprostredne viedol k formulovaniu atómovej hypotézy o mechanizme chemických reakcií: **Ak dva prvky tvoria viac ako jednu zlúčeninu, potom pomery hmotností druhého prvku, ktoré sa kombinujú s rovnakou hmotnosťou prvého prvku, budú pomery malých celých čísel**.
- Všimnime si najmä výrazný rozdiel medzi "chemickými receptami" a „kuchárskymi receptami“. Ak chemický recept hovorí „vezmi 1g vodíka + 7,94 g kyslíka a horením dostaneš vodu“, potom nie je možné „vziať 1g vodíka + 10 g kyslíka“ a dúfať, že dostanem napríklad "hustejšiu voda". Vznikne toľko „štandardnej vody“ ako predtým a 2,06 g kyslíka ostane nevyužitých. Oproti tomu ak kuchársky recept hovorí „vezmi 4 vajcia a 200 g múky a urob palacinky“, môžeš omylom vziať 220 g múky a stále urobiť zo všetkého palacinky, ibaže budú trochu tvrdšie.

Atomic hypotéza rieši záhadu, prečo "**Zákon stálych zlučovacích pomerov**" (prečo chemické recepty sú tak prísne v porovnaní s kuchynskými). Ak "chemická varenie", je len zlučovanie (kombinovanie) diskrétnych nedeliteľných atómov, potom je možné, že sa 2 atómy vodíka zlúčia s 1 atómom kyslíka, ale to nie je možné, aby sa 1 atóm vodíka zlúčil s 2,12 atómami kyslíka. Tým sa automaticky tiež rieši aj záhada, prečo "**zákon množných zlučovacích pomerov**“. Ak všetky atómy určitého prvku sú identické, majú teda rovnakú hmotnosť ale atómy rozličných prvkov nemajú rovnakú hmotnosť, potom pre „výrobu vody“ dostaneme stále pomery (škálovanie receptúr)

experiment:
1g vodík + 7.94 g kyslík = 8.94 g voda
5g vodík + 39.68 g kyslík = 44.68 g voda

$$\frac{1}{7.94} = \frac{5}{39.68}$$

toto nie je celočíselný pomer

a pre výrobu peroxidu v porovnaní s vodou

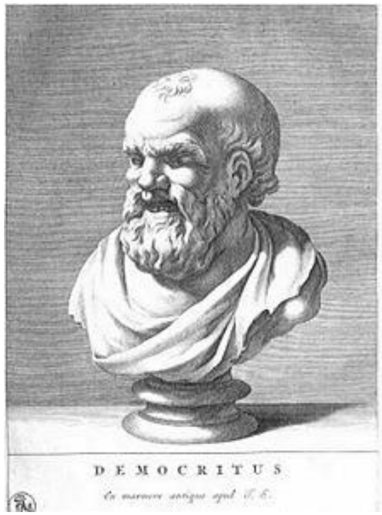
Experiment:
1g vodík + 15.87 g kyslík = 16.87 g peroxid

$$\frac{\frac{1}{7.94}}{\frac{1}{15.87}} = \frac{2}{1}$$

toto je celočíselný pomer

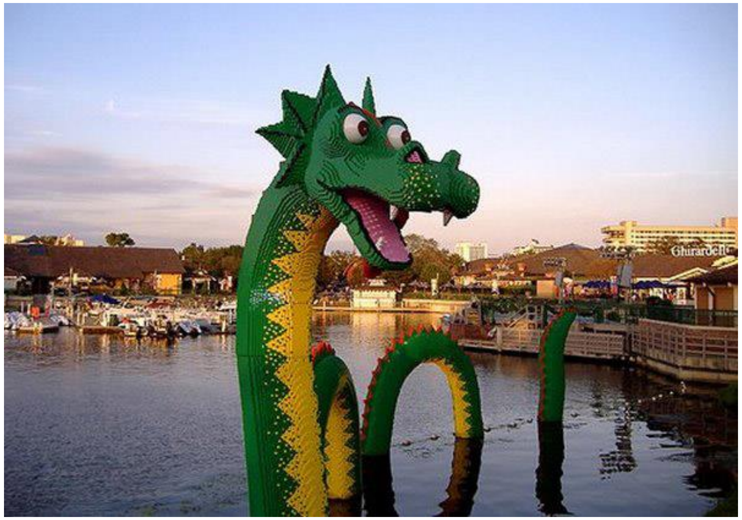
Všimnime si, že **pomery hmotností pre jednu reakciu nie sú presne celočíselné, ale pomery pomerov hmotností pre dve reakcie sú presne celočíselné**. Predumajte si tento fakt a jeho súvis s chápaním reakcií ako kombinovania diskrétnych atómov.

Atómová hypotéza bola schopná vysvetliť pozorované charakteristiky chemických receptúr. V období francúzskej revolúcie teda atómový hypotéza dostala konkrétne „vedecké“ črty. Hypotéza sama, ako „nie dosť vedecká špekulácia“ je staršieho dáta, spomínajú sa starí Gréci, najmä Demokritos.



Na starogrécku atómovú hypotézu sa niekedy dívame trochu s úškľabkom. Bertrand Russell to komentoval, že to bola len šťastná nepodložená hypotéza.
Myslím, že to je trochu priprísne hodnotenie. To, čo motivovalo starých Grékov bol „filozofický“ predpoklad že svet by mal byť založený na jednoduchých princípoch. A to bolo v prinajmenej zdanlivom protiklade s pozorovanou rôznorodosťou okolitého sveta. Nápad, ako skonzistentniť tieto dva protichodné aspekty, bol v podstate LEGO-nápad: kombinatorický „výbuch“. Trik je v tom, že niekoľko málo typov základných stavebných kameňov (reprezentujúcich základné princípy) v dostatočnom množstve umožňuje bohatstvom kombinácií vytvoriť obrovské množstvo veľmi rôznorodých konštrukcií. To nebol ani hlúpy ani úplne lacný nápad.

LEGO: kombinatorický princíp



Atómová hypotéza objasnila princípy „kombinatorickej stavby“ látok z atómov, ale bezprostredne nezodpovedala ako konkrétne vyzerajú „registrované partnerstvá“ atómov v rozličných látkach, teda či je to „jeden z jedným“, „jeden s dvoma“, „dva s tromi“ alebo ako. Súčasne nepovedala priamo aký je pomer hmotností rozličných typov atómov, teda vlastne ani aká je absolútna hmotnosť jedného konkrétneho atómu.

Netrúfam si presne zrekonštruovať historickú cestu, ako sa postupne nachádzali odpovede na tieto otázky. Ale principiálne sa to dá odhadnúť. Určite to nie je jednoznačné riešenie nejakých rovníc. Viac sa to podobá na „puzzle“ o mnohých neznámych a skúšanie rozličných hypotéz. Treba totiž uhádnuť chemické stechiometrické vzorce tak, aby to bolo konzistentné s hmotnosťami chemických receptov. Napríklad recept na výrobu vody hovorí

experiment:
1g vodík + 7.99 g kyslík = 8.99 g voda

Môžem skúsiť najjednoduchšiu hypotézu „jeden s jedným“, teda že stechiometrický vzorec vody je HO. Hmotnosti v chemickom recepte potom i tak neumožňujú určiť absolútne hmotnosti atómov vodíka a kyslíka, ale relatívny pomer hmotností atómu vodíka a atómu kyslíka áno. Pri predpoklade „HO“ recept zjavne hovorí

$$m_O = 7.99 \times m_H$$

(Pre istotu pripomeňme, že dnes vieme, že toto je zle, ale starí chemici to pôvodne takto vyhútali.)

Experiment:
100 g železo + 28.65 g kyslík = 128.65 g oxidu (dnes nazývaného železnatý)
100 g železo + 42.98 g kyslík = 142.98 g oxidu (dnes nazývaného železitý)

$$\frac{\frac{100}{28.65}}{\frac{100}{42.98}} = 1.50 = \frac{3}{2}$$

Preto najjednoduchšia stechiometrická hypotéza je
oxid železnatý je FeO, oxid železitý Fe_2O_3. Keďže už máme hypotézu, že

$$m_O = 7.99 \times m_H$$

potom jednoduchá trojčlenka povie, že

$$m_{Fe} = 100 \times \frac{7.94}{28.65} m_H = 27.89 \times m_H$$

Postupne skúšam skladačku dopĺňať o ďalšie prvky a stále to dopadá tak, že atóm vodíka je najľahší. Preto neprekvapí nápad, že keďže nemôžem z receptov určiť absolútne hmotnosti atómov (v jednotkách kg), zvoliť si pre atómový svet **inú nezávislú jednotku: hmotnosť jedného atómu vodíka** a relatívne k tejto jednotke vyjadrovať všetky atómové hmotnosti.

Experiment:
10g kyslík + 7.50 g uhlík = 17.50 g oxid uhlíka, ktorý dnes voláme oxid uhoľnatý
10g kyslík + 3.75 g uhlík = 14.75 g oxid uhlíka ktorý dnes voláme oxid uhličitý

Najjednoduchšia stechiometrická interpretácia: oxid uhoľnatý CO, oxid uhličitý CO_2

Odtiaľ dostaneme

$$m_C = 7.55 \times \frac{7.99}{10} \times m_H = 6.03 \times m_H$$

Experiment:
10g vodík + 30 g uhlík = 40 g metán

Keďže atómovú hmotnosť uhlíka sme už stanovili na 6 potom pre metán vychádza vzorec CH_2.

Experiment:
10g metán + 40.0 g kyslík = 27.5 g oxid uhličitý + 22.5 g voda

Pri tejto chemickej reakcii už nemáme čo robiť žiadne hypotézy. Už „poznáme“ všetky relevantné chemické vzorce aj atómové hmotnosti všetkých zúčastnených atómov. Teraz prichádza kľúčový moment, otestovať, či doteraz urobené hypotézy sú konzistentné s dátami o horení metánu, ktoré sme pri tvorbe hypotéz nepoužili. **Tak sa robí veda. Nameriam nejaké dáta, urobím hypotézu ako ich vysvetliť a potom aplikujem tú hypotézu na niečo, čo som doteraz nemeral, urobím na základe mojej hypotézy predpoveď a musím overiť, či všetko sedí.**

Zhromaždime teda relevantné vzorce:
voda: HO, metán: CH2, oxid uhličitý: CO2
Atómové váhy v jednotkách m_H:
H: 1, C: 6, O: 8

Teraz chcem urobiť predpoveď, ako horí metán, konkrétne 10 g metánu na základe toho, aké hypotézy už mám

Najprv stechiometrické rovnica: hypotetické vzorce hovoria, že takto:
CH2 + 4O = CO2 + 2HO
Vypočítam hmotnosti reagentov v jednotkách m_H na základe už určených atómových hmotností
8 + 32 = 18 + 20
Nesedí celková hmotnosť, už to je zle. Navyše, keď použijem trojčlenku a celú rovnicu vynásobím pomerom 10g/$8m_H$, dostanem
10g metán + 40 g kyslík = 22.5 g oxid uhličitý + 25 g voda
podľa experimentu ale platí
10g metán + 40.0 g kyslík = 27.5 g oxid uhličitý + 22.5 g voda

Je zle. Nefunguje to. Museli sme niekde urobiť zlú hypotézu!

Celé trápenie pri hľadaní správnych vzorcov a atómových hmotností trvalo prvým chemikom dosť dlho. Nebudeme to tu rekonštruovať. Hlavná chyba bola v zlom určení atómovej hmotnosti kyslíka.

Vlastne chyba bola v predpoklade, že jednoduché chemikálie, ktoré dnes voláme prvky, sú zložené z nedeliteľných atómov. Bližšia logická analýza povie, že predpoklad o absolútnej nedeliteľnosti je prisilný. Chemické receptúry zakazujú len nekonečnú deliteľnosť na infinitezimálne kúsky, deliteľnosť na malý počet čiastočiek je v poriadku. No a v tom to bolo, že plyny ako vodík a kyslík a ďalšie sú „zlúčeniny", presnejšie skladajú sa z dvojatómových molekúl z rovnakých atómov.

Cestu k riešeniu otvorili kvantitatívne chemické receptúry pre plyny, vyjadrené nie v hmotnostiach reagentov ale v objemoch reagentov. Presnejšie v objemoch meraných za rovnakých tlakových a teplotových podmienok. A tu čakalo prekvapenie.
Kým pomery hmotností v receptoch na konkrétne chemikálie nie sú celočíselné, až pomery pomerov hmotností sú celočíselné, ukázalo sa, že pre objemové receptúry už pomery objemov plynných reagentov v jednej reakcii sú celočíselné.

Pomery hmotností neboli celočíselné, lebo hmotnosti rôznych atómov nie sú rovnaké. Celočíselnosť pomerov objemov ako keby hovorila, že objemy atómov sú rovnaké. Ale je i iné riešenie záhady: celočíselnosť pomerov dostaneme aj vtedy, ak **vlastné objemy všetkých atómov sú zanedbateľné, objemy plynov sú väčšinou tvorené prázdnym priestorom, pričom objem prázdneho priestoru pripadajúci na jeden atóm plynu je pre rôzne atómy rovnaký**.

Analýza objemových receptov teda viedla k formulácii

Avogadrov zákon (1811)

Rovnaké objemy rôznych plynov za rovnakého tlaku a teploty obsahujú rovnaký počet častíc (atómov alebo molekúl)

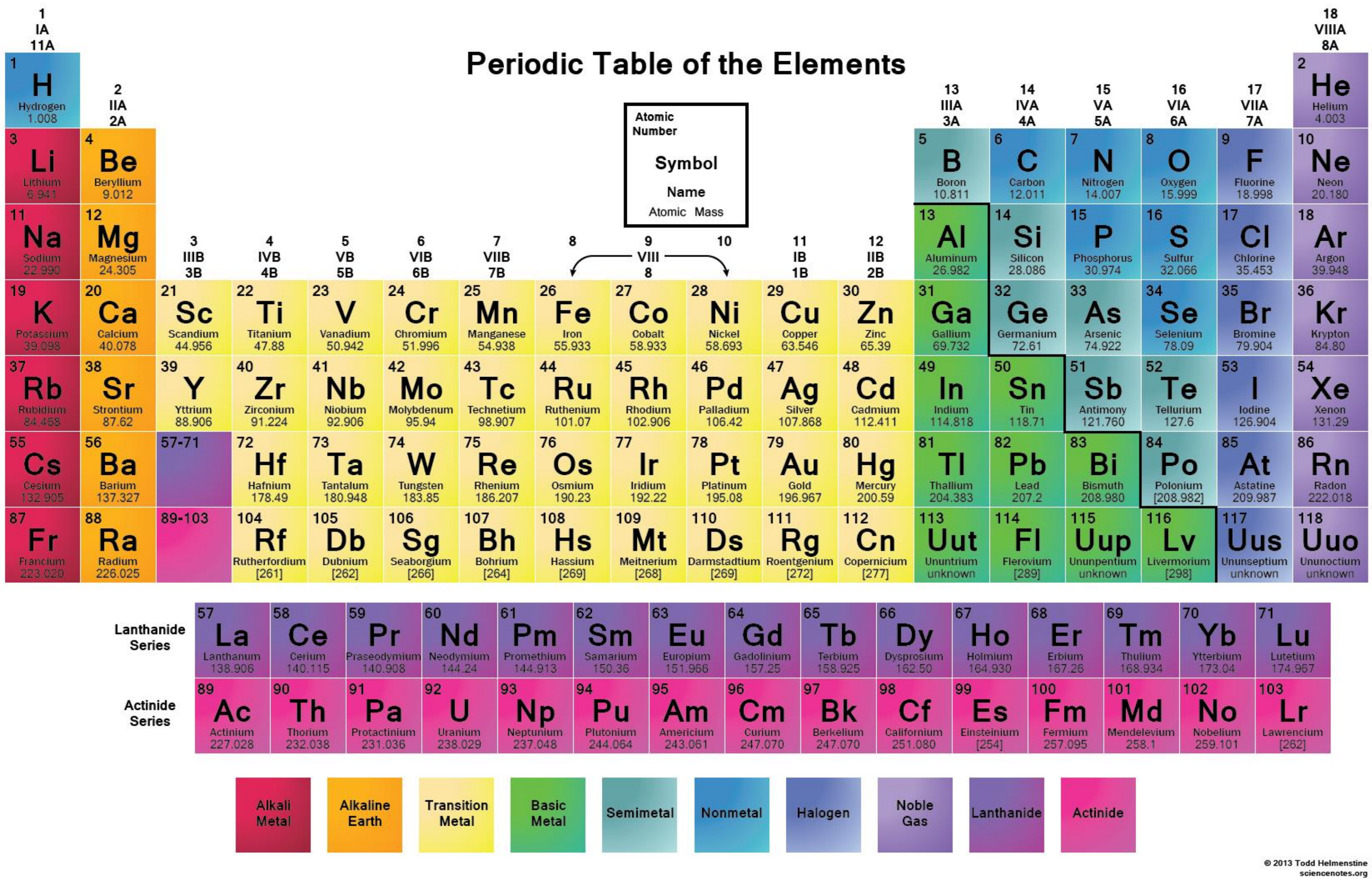
Experimentálna objemová receptúra pre „uvarenie vody“ hovorí

1 liter of vodíka + 0.5 liter kyslíka dáva 1 liter vodných pár

Podľa Avogadra výsledný počet častíc v parách vody je rovnaký ako bol počet častíc vodíka. Preto každá častica (molekula) vody spotrebuje jednu časticu vodíka. Ale v polovičnom objeme kyslíka je len polovičný počet častíc kyslíka. Každá molekula vody teda nemôže zožrať celú časticu kyslíka, kyslíkov je primálo. Preto musíme pridať hypotézu, že kyslíkové častice sú v reakcii roztrhané a každá molekula vody zožerie iba polovicu pôvodnej častice kyslíka. Odtiaľ hypotéza, že plyny sú dvojatómové a správna stechiometrická rovnica bude

$$2H_2 + O_2 = 2H_2O$$

Správna stechiometrická rovnica pre vznik vody z vodíka a kyslíka potom už vedie k správnej interpretácii hmotnostného receptu a dá pre atóm kyslíka atópmovú hmotnosť 16. Prehodnotenie všetkých receptov potom dá správne atómové hmotnosti ako ich poznáme z Mendelejevovej tabuľky



V Mendelejevovej tabuľke na predchádzajúcom slajde sú už použité dnešné jednotky pre atómové hmotnosti. Pôvodná voľba starých chemikov bola, že jednotkou atómovej hmotnosti bude hmotnosť atómu vodíka. Dnešná voľba je, že jednotkou atómovej hmotnosti je 1/12 hmotnosti atómu uhlíka, presnejšie izotopu C_6^{12}.

V týchto jednotkách je potom atómová hmotnosť „bežného atómu vodíka“ (o chvíľu prezradíme, čo tým myslíme) 1.008.

Hmotnostné pomery v chemický receptúrach nie sú celočíselné, kým pomery hmotnostných pomerov sú presne celočíselné.

Ale bližší pohľad ukáže, že aj samotné hmotnostné pomery sú „takmer celočíselné“.
Napríklad receptúra pre vodu
1g vodík + 7.94 g kyslík = 8.94 g voda
to je takmer
1g vodík + 8 g kyslík = 9 g voda

To vedie k tomu, že atómové hmotnosti veľa atómov v tabuľke sú „takmer celé čísla“.
Čo by sme usúdili, keby platilo, že atómové hmotnosti sú „presne celé čísla“, hoci niekedy aj dosť veľké? Prirodzená interpretácia by bola taká, že atómy sú tiež zložené objekty, skladajúce sa z LEGO-tehličiek rovnakej hmotnosti

Až v 20.storočí sa ukázalo, že atómy sú naozaj zložené z elementárnejších častíc, z protónov, neutrónov a elektrónov. Protóny a neutróny sú v atómovom jadre, elektróny tvoria „elektrónový obal“. Pôvodná predstava o elektrónoch bola, že elektróny „obiehajú okolo jadra“, čosi ako malá slnečná sústava. Táto predstava sa ukázala byť chybná, správnu teóriu stavby atómu objasnila až kvantová mechanika, presne sformulovaná v dvadsiatych rokoch 20.storočia. Ukázala, že pre častice mikrosveta neplatí mechanika založená na Newtonových zákonoch ale konceptuálne úplne nový typ zákonitostí, ktoré na tejto úrovni nemôžeme ani len priblížiť.

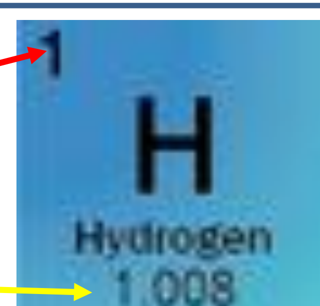
Pojmy hmotnosti častice a elektrického náboja však ostávajú zachované aj v kvantovej mechanike a to je momentálne jediné, čo potrebujeme. Takže zhrňme (ako fakty bez ukázania, ako sme sa k nim dopracovali) potrebné hodnoty pre protóny, elektróny a neutróny.

Elektrón má záporný elektrický náboj o veľkosti $\mathbf{-1.602 \times 10^{-19}}$ **C** (**náboj elektrónu má fyzik vedieť naspamäť**). Elektrón voči protónu má zanedbateľnú hmotnosť (približne 2000-krát menšiu). Protón má kladný náboj v absolútnej hodnote rovnaký ako náboj elektrónu. Neutrón má nulový elektrický náboj, má hmotnosť málo väčšiu ako protón Atómy sú elektricky neutrálne, takže musia mať rovnaký počet elektrónov ako protónov. Počet protónov v jadre atómu sa volá **atómové číslo** atómu

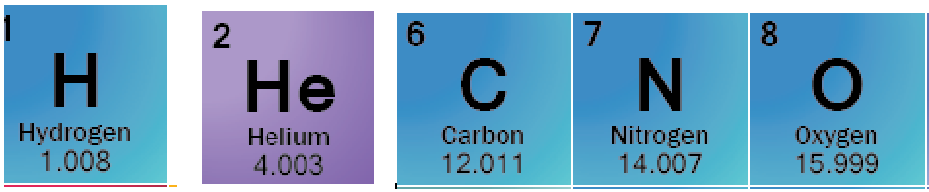
V Mendelejevovej tabuľke:

atómové číslo

atómová hmotnosť



Patrí sa, aby fyzik vedel naspamäť atómové a atómové hmotnosti (niekedy nazývané aj hmotnostné čísla) s presnosťou na celé číslo aspoň vodíka, hélia, uhlíka, dusíka a kyslíka



Najjednoduchší atóm je atóm vodíka, ktorý sa skladá z jedného protónu a jedného elektrónu. Okrem toho existuje v prírode aj ťažký vodík (deutérium) ktorý má rovnaké atómové číslo (je to teda vodík) ale v jadre má okrem protónu aj neutrón. Hmotnostné číslo deutéria je približne 2.

Atóm s rovnakým chemickým menom (chemické vlastnosti atómu sú dané počtom elektrónov, teda atómovým číslom) ale rôznym počtom neutrónov sa volajú **izotopy** (toho istého prvku).

Hlavný izotop uhlíka má 6 protónov a 6 neutrónov, teda atómové číslo 6 a atómovú hmotnosť (z definície !!!) presne 12. Fakt, že pri značke uhlíka je v tabuľke uvedená atómová hmotnosť 12.011 odráža skutočnosť, že v prírode sa vyskytujú aj izotopy uhlíka s väčším počtom neutrónov a necelé číslo odráža relatívne zastúpenie rôznych izotopov v prírode.

Obyčajný vodík s jedným protónom a jedným neutrónom má dosť presne atómovú hmotnosť 1, hodnota 1.008 v tabuľke odráža relatívne prírodné zastúpenie deutéria.

Prečo atómové hmotnosti nie sú celé čísla

- tabuľkové hmotnostné čísla odrážajú priemerné zastúpenie izotopov v prírode
- neutrón a protón nemajú rovnakú hmotnosť
- väzbová energia jadra sa prejaví úbytkom hmotnosti voči sume hmotností protónov a neutrónov
- hmotnosť elektrónu nie je celkom zanedbateľná

Mól

Chemické receptúry sme kvantitatívne vyjadrovali v jednotkách hmotnosti alebo objemu. Najprirodzenejšie by bolo vyjadrovať ich v celých číslach, v počtoch atómov alebo molekúl, tak ako sa to píše v stechiometrických vzorcoch, napríklad

$$2H_2 + O_2 = 2H_2O$$

sotva však môžeme laborantovi povedať zober 2 molekuly vodíka a 1 molekulu kyslíka a urob z nich vodu.

V praxi musíme experimentálne pracovať s makroskopickými množstvami molekúl, teda s veľmi veľkými počtami molekúl. Sme zvyknutí, že veľké čísla majú osobitné mená ako milión, miliarda, bilión. To sú stále primalé čísla na narábanie s počtami molekúl, ktorých prichádza do úvahy rádovo 10^{23}.
Možná cesta by bola nazvať číslo 10^{23} ako “chem” a recept na vodu by znel „zober dva chemy molekúl vodíka a jeden chem molekúl kyslíka a urob z nich vodu. Problém je v tom, že „chem“ je pekná číslovka s ostrou hodnotou ale pre laboranta nepríjemná, lebo sotva môže rátať molekuly štýlom jedna, dve, tri, štyri,...,chem.

Ani predavač v železiarstve neráta klince po jednom, keď zákazník povie potrebujem 2500 klincov. Naráta 100 klincov, odváži ich a potom odváži 25-krát väčšiu hmotnosť. Pri často predávanom počte klincov má už pripravenú tabuľku prepočtu hmotnosti na počet klincov. Takže aj chemici majú pripravenú tabuľku na taký prepopčet. Kľúčom je slovo mól.

Mól

Mól je jednotka látkového množstva, de facto je to číslovka definovaná takto:

1 mol častíc je taký počet častíc koľko je atómov v 12 g uhlíka ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$.

Často potrebujeme vyjadriť hodnotu „číslovky“ mol aj numericky, zaviedol sa preto pojem Avogadrova konštanta (Avogadrovo číslo) ako počet častíc v jednom móle, experimentálna hodnota je

$$6.022140857(74)\times10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$$

Dve cifry v zátvorke je obvyklý spôsob ako uvádzať neurčitosť merania (jednu štandardnú odchýlku) na dve platné cifry na posledných uvedených desatinných miestach.

Všimnite si „fyzikálny rozmer“ mol^{-1}. Je užitočné používať takýto rozmer, aby sme nestratili zo zreteľa, že „bezrozmerný výsledok“ nie je obyčajné číslo ale číslo vyjadrené v „jednotkách“ mol. Zdrojom chyby môže byť často fakt, že niekto používa väčšiu jednotku kmol (kilomol) a keď pomiešam v jednom vzorci mol a kmol, dostanem rádovo zlú hodnotu na konci.

Dobrý zdroj informácií o tom, ako sa Avogadrova konštanta prakticky meria je Perrinova nobelovská prednáška
http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1926/perrin-lecture.html

- Aký je rozdiel medzi receptami pre pečenie a chemickými receptami, pokiaľ ide o nedodržanie presných hmotnostných pomerov
- Čo hovorí zákon o stálych zlučovacích pomeroch
- Čo hovorí zákon o množných zlučovacích pomeroch
- Avogadrov zákon
- Čo platí o pomeroch hmotnostných pomerov v chemických receptoch
- Prečo atómové hmotnosti nie sú celé čísla
- Čo je to mól
- Čo je to Avogadrovo číslo a akú má veľkosť
- Aký je typický rozmer jednej molekluly
- Uveďte atómové hmotnosti aspoň piatich prvkov
- Čo to je atómové číslo
- Uveďte atómové čísla aspoň piatich prvkov

Elementy teórie pravdepodobnosti

Náhodná udalosť

V bežnom živote ale aj vo fyzike používame slovo „udalosť" na označenie „čohosi čo sa stalo v dobre definovanom čase a spravidla aj mieste", o čom noviny môžu doniesť správu že „včera o 15:30 sa na križovatke Tomášikova Ružinovská zrazili dve autá". Takéto „správy o udalostiach" sú zaznamenávané aj vo fyzikálnych databázach ako „podľa včerajších pozorovaní konštatujeme, že v galaxii XY pred 5 milión rokmi (určené podľa vzdialenosti) vybuchla supernova. Alebo !na urýchľovači LHC sa bola v rune 243897 zaznamenaná produkcia 4-leptónového eventu (anglické slovo event znamená udalosť) svedčiaca o produkcii Higgsovej častice.

Obe spomínané fyzikálne udalosti sú (alebo sa nám prakticky javia) ako „náhodné", pretože sú „naozaj náhodné" (Pánboh asi naozaj hrá kocky, hoci sa to Einsteinovi nezdá uveriteľné), alebo ich nemáme dostatočne pod kontrolou.

V každom prípade pre prácu s takými udalosťami prakticky potrebujeme matematický aparát teórie pravdepodobnosti.

Náhodná udalosť a náhodná veličina

Predovšetkým každú náhodnú fyzikálnu udalosť potrebujeme jednoznačne identifikovať, **pomenovať**, aby sme ju vedeli rozlíšiť od iných podobných udalostí. Okrem toho u každej fyzikálnej náhodnej udalosti spravidla vieme zistiť (odmerať) viacero hodnôt rôznych fyzikálnych veličín, ktoré ju charakterizujú. Hodnoty tých veličín nemusia byť jednoznačné, teda môže existovať viac rôznych náhodných udalostí s rovnakou hodnotou nejakej fyzikálnej veličiny.
V dôsledku náhodnosti udalosti majú hodnoty s ňou spojených fyzikálnych veličín tiež náhodný charakter, hovoríme preto o **náhodných veličin**ách.

V prípade, že hodnota nejakej náhodná veličina je jednoznačná, teda že jednoznačne identifikuje náhodnú udalosť, môžeme hodnotu tej veličiny použiť na **pomenovanie (identifikáciu)** náhodnej udalosti. Vo fyzike to aj spravidla tak robíme a preto v mnohých textoch sa nerozlišuje medzi pojmom „náhodná udalosť“ a „náhodná veličina“.

Príklad náhodných udalostí

Je dobré predstavovať si abstraktne popísané veci aj na konkrétnych príkladoch, tu sú dva typické:

Náhodná udalosť:
hod hracou kockou

Náhodná udalosť:
hod šípkou

Diskrétne a spojité udalosti a veličiny

Dva uvedené príklady sa v niečom fundamenálne líšia:

- pre hod kockou existuje len 6 spôsbov ako môže hod dopadnúť, teda existuje len 6 rozličných náhodných udalostí. Nepokúšame sa o úplnú rigoróznosť textu, takže naraz sa nám tu objavilo čosi také ako pre opakované hádzanie kockou „dve rovnaké udalosti , ktoré sa stali v rozličných časoch“ (padla 2-x 6-ka v rozličných časoch). Kľúčový nie je ani tak konečný počet rôznych udalostí ako fakt ich diskrétnosti, čo prakticky znamená **pomenovateľnost (identifikovateľnost) pomocou celých čísel**.
- pre hod šípkou na terč, ak má šípka nekonečne ostrý hrot, existuje „spojite nekonečne veľa výsledkov“ teda „spojite nekonečne veľa náhodných udalostí“.
- To neznamená, že udalosti sa nedajú jednoznačne pomenovať, ibaže sa to **nedá pomocou diskrétnej množiny celých čísel**. Musíme použiť nejakú „spojitú“ množinu reálnych čísel. Napríklad šípkovým terčom v hostinci v jednorozmernom svete je úsečka, udalosťou je ideálny geometrický bod dopadu na úsečke a menom udalosti napríklad súradnica bodu dopadu na úsečke (určená ako vzdialenosť bodu dopadu od ľavého krajného bodu terča)

Diskrétne a spojité udalosti a veličiny

Diskrétne udalosti sú pomenovateľné ale aj vymenovateľné, teda môžem pripraviť, aspoň v princípe, úplný zoznam možných udalostí, pričom zoznam môže byť aj nekonečný.
Spojité udalosti sú pomenovateľné ale nie vymenovateľné.
S tým súvisí ďalšia vec: spojité udalosti sú neopakovateľné. Každý hod nekonečne ostrou šípkou vedie na udalsoť pomenovanú konkrétnym reálnym číslom, ale žiadne dva hody nevedú na to isté reálne číslo (s teoretickou presnosťou na nekonečný počet desatinných miest).

Intuitívny pojem pravdepodobnosti diskrétnych udalostí

Nebudeme sa pokúšať o rigoróznu definíciu pojmu „pravdepodobnosť nejakej udalosti“. Pre diskrétne udalosti je to intuitívne zrejmý pojem. Diskrétne udalosti sú opakovateľné. Môžem si teda predstaviť situáciu, že opakujem „hody“ veľmi-veľa-krát (teoreticky nekonečne-veľa-krát) a spočítam koľko bolo všetkých hodov a koľkorát som pozoroval udalosť, ktorej pravdepodobnosť zisťujem

Povedzme pri hode kockou počítam koľkokrát padla 5-ka. Nech celkový počet hodov bol N=12000 a z toho 5-ka padla N_5=1852-krát. Povieme, že sme pozorovali, že pravdepodobnosť, že padne 5-ka bola

$$p_5 = \frac{1852}{12000} \approx 0.154$$

Ibaže, ak my alebo niekto druhý zopakuje „rovnaký experiment“, možno spozoruje, že 5-ka padla iný-počet-krát, napríklad 2046-krát, čo sa vyhodnotí ako

$$p_5 = \frac{2046}{12000} \approx 0.171$$

Rozličné získané hodnoty interpretujeme tak, že ide o **štatistické fluktuácie**. Veríme pritom, že vplyv štatistických fluktuácií na výsledok klesá s rastúcim počtom „hodov“, takže existuje čosi ako „**skutočná pravdepodobnosť**“, ku ktorej získané čísla „konvergujú“ pri zvyšujúcom sa počte „hodov“. Toto považujeme za čosi ako „prírodný zákon“. Podobne ako pri iných prírodných zákonov, ani tu nevieme dokázať že „je to pravda“, ale zákonu iba „veríme“.

Teoretické určenie pravdepodobnosti diskrétnych udalostí

Niekedy sme presvedčení („veríme“), že poznáme čosi ako „teóriu fyzikálneho procesu“ vedúceho k skúmaným náhodným udalostiam. Potom sa v rámci tej teórie môžeme pokúsiť „určiť teoreticky“ relevantné pravdepodobnosti. Povedzme ak pre danú hraciu kocku „veríme, že kocka nie je falošná“, potom tým vyjadrujeme, že „veríme, že pravdepodobnosť všetkých 6 možných udalostí je rovnaká“. Odtiaľ ale rovno vyplýva že teoretická pravdepodobnosť bude

$$p_5 = \frac{1}{6} = 0.16666....$$

Pravdepodobnosť spojitých udalostí

Spojité udalosti sú neopakovateľné, preto sa intuitívny model pravdepodobnosti založený na opakovaných „hodoch“ nedá použiť pre spojité udalosti. V skutočnosti nie je možné rozumne definovať pravdepodobnosť pere konkrétnu udalosť z množiny spojitých udalostí. To ale nevadí, lebo ani meraním sa nemožno presvedčiť, ktorá konkrétna udalosť nastala. Akýmkoľvek meraním nejakej veličiny môžeme určiť len niekoľko platných cifier z jej hodnoty a teda neidentifikujeme konkrétnu spojitú udalosť presne.

Použitie teórie pravdepodobnosti v priestore spojitých udalostí sa zakladá na vhodnej diskretizácii. Nemôžeme sa spýtať na pravdepodobnosť toho, že nastane nejaká konkrétna udalosť ξ, ale môžeme sa spýtať, či nastane nejaká udalosť z istého intervalu $\xi \in (a, b)$. To, či nejaká udalosť „padla“ do intervalu je experimentálne testovateľné a opakovateľné, preto sa dá, aspoň principiálne, určiť pravdepodobnosť $p(\xi \in (a, b))$.

Probability technology:
Discrete random variables

Matematický formalizmus pre diskrétne udalosti

Diskrétne udalosti je možné vymenovať, preto hodnoty pravdepodobností jednotlivých udalostí je možno jednoducho tiež vymenovať napríklad v tvare postupnosti (hoci v princípe nekonečnej). Ak teda jednotlivé udalosti identifikujeme pomocou celých čísel i, potom ich pravdepodobnosti zadávame ako členy postupnosti $p(i)$, pričom

$$p(i) \geq 0 \quad \sum_i p(i) = 1$$

Suma (normalizácia „na jednotku“) vyjadruje fakt, že „pravdepodobnosť, že nastane hocičo“ musí byť rovná jednej.

Ak nás zaujímajú nielen udalosti ale aj hodnota nejakej veličiny x charakterizujúca udalosť, potom označíme hodnotu tej veličiny v prípade, že nastala udalosť i ako x_i. Špecifikovanie pravdepodobnostného modelu potom vyžaduje, že okrem postupnosti pravdepodobností $p(i)$ musíme zadať i postupnosť hodnôt x_i, prípadne podobných postupností pre ďalšie veličiny.

Kompresia pravdepodobnostnej informácie

Predstavme si jednoduchý pravdepodobnostný model: predajňu topánok pre náhodných (nezazmluvnených) zákazníkov. Do predajne môže v princípe prísť ľubovoľný obyvateľ Zeme, to je náhodná udalosť. Náhodných udalostí je niečo okolo 6 miliárd. To, čo zaujíma majiteľa, je veľkosť potrebnej topánky pre konkrétneho zákazníka.

Men's Shoes Size Conversion Chart											
Korea (mm)	240	245	250	255	260	265	270	275	280	285	290
Japan (cm)	24	24.5	25	25.5	26	26.5	27	27.5	28	28.5	29
US	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5	10	10.5	11
Europe	38	38.5	39	40	40.5	41	42	42.5	43	44	44.5
UK	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5	10
Korea (mm)	295	300	305	310	315	320	325	330	335	340	345
Japan (cm)	29.5	30	30.5	31	31.5	32	32.5	33	33.5	34	34.5
US	11.5	12	12.5	13	13.5	14	14.5	15	15.5	16	17
Europe	45	46	46.5	47	48	48.5	49	50	50.5	51	52
UK	10.5	11	11.5	12	12.5	13	13.5	14	14.5	15	16

Majiteľ nemôže mať z každého vzoru všetky veľkosti, to by bol príliš veľký umŕtvený kapitál. Musí mať takú zbierku veľkostí, aby s vysokou pravdepodobnosťou obslúžil náhodného zákazníka. Nie je praktické, aby chcel mať zoznam všetkých ľudí na Zemi, k nim hodnotu pravdepodobnosti, že sa objavia v jeho obchode a ku každému veľkosť jeho topánok. To je 12 miliárd čísel, priveľa na zostavenie rýchlej objednávky u výrobcu. Potrebuje vhodne komprimovanú informáciu, ktorú si vie „v hlave“ predstaviť a dobre sa rozhodovať.

Kompresia pravdepodobnostnej informácie

V praxi sa osvedčilo niekoľko spôsobov kompresie informácie. Ak chcem maximálnu a pritom stále orientačne užitočnú informáciu, spravidla sa pýtam na jediné číslo

stredná hodnota veľkosti topánky náhodného zákazníka

Matematici vyhútali takúto definíciu strednej hodnoty

$$\bar{x} = \sum_i x_i p(i)$$

Toto číslo hovorí dosť málo pre praktického predajcu, ale niečo hej. Napríklad predajca v Taliansku, kam chodia väčšinou Taliani vie, že toto číslo je menšie ako podobné číslo, ktoré zaujíma predajcu na Slovensku, lebo Slováci majú v strednom väčšie nohy. Takže v talianskom obchode sú topánky v strednom o čosi menšie ako v slovenskom obchode. Preto nápad prvých podnikateľov „po revolúcii“ objednávať „moderné talianske kolekcie“ nebol najlepší nápad.

Zaujímať sa iba o strednú hodnotu, podľa toho sa nedajú objednávať topánky. Treba aj odhad „rozumného intervalu“ veľkostí okolo strednej hodnoty.

Kompresia pravdepodobnostnej informácie, rozptyl hodnôt okolo strednej

Matematici vyhútali takúto charakteristiku

$$\Delta x = \sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 p(i)}$$

Prečo taký komplikovaný výraz s odmocninou a kvadrátom. Lebo nefungoval „prvý nápad“ vypočítať strednú odchýlku

$$\overline{x - \bar{x}} = \sum_i (x_i - \bar{x}) p(i)$$

Vyjde totiž nula, lebo kladné a záporné odchýlky sa vyrušia na nulu.

Matematici vyhútali aj názvy

$\bar{x} = \sum_i x_i p(i)$	sa volá stredná hodnota
$\sigma_x^2 = \sum_i (x_i - \bar{x})^2 p(i)$	sa volá variancia alebo stredný kvadrát odchýlky
$\Delta x = \sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 p(i)}$	sa volá stredná kvadratická odchýlka alebo štandardná odchýlka

Kompresia pravdepodobnostnej informácie, rozptyl hodnôt okolo strednej

Matematici vyhútali takúto charakteristiku

$$\Delta x = \sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 p(i)}$$

Prečo taký komplikovaný výraz s odmocninou a kvadrátom. Lebo nefungoval „prvý nápad“ vypočítať strednú odchýlku

$$\overline{x - \bar{x}} = \sum_i (x_i - \bar{x}) p(i)$$

Vyjde totiž nula, lebo kladné a záporné odchýlky sa vyrušia na nulu.

Matematici vyhútali aj názvy

$$\bar{x} = \sum_i x_i p(i)$$ sa volá stredná hodnota

$$\sigma_x^2 = \sum_i (x_i - \bar{x})^2 p(i)$$ sa volá variancia alebo stredný kvadrát odchýlky

$$\Delta x = \sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 p(i)}$$ sa volá stredná kvadratická odchýlka alebo štandardná odchýlka

Všimnime si, že ak využijeme naivnú „experimentálnu definíciu pravdepodobnosti“, dostaneme pre strednú hodnotu výraz

$$\overline{x} = \sum_i x_i p(i) = \sum_i \frac{x_i N_i}{N}$$

Toto je presne to, čo sme sa naučili počítať v škole ako „priemernú známku“: ak máš 3 “jednotky” and 4 “dvojky“ tvoj priemer je

$$\frac{1 \times 3 + 2 \times 4}{7}$$

Uvedomme si ale, že neexistuje žiaden „prírodný zákon“ ktorý by hovoril, že „takto treba rátať strednú hodnotu“. Príroda nič netuší, že sme si vymysleli definovať akúsi strednú hodnotu. To je čistý folklór, ale veľmi všeobecne akceptovaný a „všetci podľa neho tancujú“. Hoci je pravda, že v niektorých komunitách (folklórnych skupinách) uprednostňujú medián pred strednou hodnotou.

Nie celkom rigorózna (a preto nejednoznačná ale dostatočne názorná) **definícia mediánu** je, že je to hodnota, ktorá všetky udalosti delí na dve množiny: hodnota veličiny u udalostí v prvej množine je menšia a v druhej množine väčšia ako medián.

Stredná hodnota a stredná kvadratická odchýlka v predajni obuvi

Ak sa vrátime k nášmu príkladu o predávaní obuvi, potom znalosť strednej hodnoty a strednej kvadratickej odchýlky veľkosti obuvi u očakávaných náhodných zákazníkov je už celkom dostatočná informácia o tom, ako objednať veľkostný sortiment obuvi.

Jednoduché riešenie je objednať kolekciu s veľkosťami v intervale

$$(\bar{x} - \Delta x, \bar{x} + \Delta x)$$

Starostlivejší podnikateľ, ktorý si to môže dovoliť zafinancovať objedná asi aj čosi menej obuvi v intervaloch až po odchýlku $2\Delta x$.

Matematický formalizmus pre spojité udalosti

Použitie teórie pravdepodobnosti v priestore spojitých udalostí sa zakladá na vhodnej diskretizácii. Nemôžeme sa spýtať na pravdepodobnosť toho, že nastane nejaká konkrétna udalosť ξ, ale môžeme sa spýtať, či nastane nejaká udalosť z istého intervalu $\xi \in (a, b)$. To, či nejaká udalosť „padla“ do intervalu je experimentálne testovateľné a opakovateľné, preto sa dá, aspoň principiálne, určiť pravdepodobnosť $p(\xi \in (a, b))$.

Nie je však praktické napríklad tabelovať hodnoty pravdepodobnosti pre rôzne intervaly (a, b). Nie je to ani potrebné, ak si všimneme, že existuje čosi ako zákon skladania pravdepodobností pre nadväzujúce intervaly

$$p(\xi \in (a, b)) + p(\xi \in (b, c)) = p(\xi \in (a, c))$$

Potom stačí, ak tabelujeme (alebo vyhútame vzorec) pre funkciu jednej premennej

$$F(x) = p(\xi \in (-\infty, x))$$

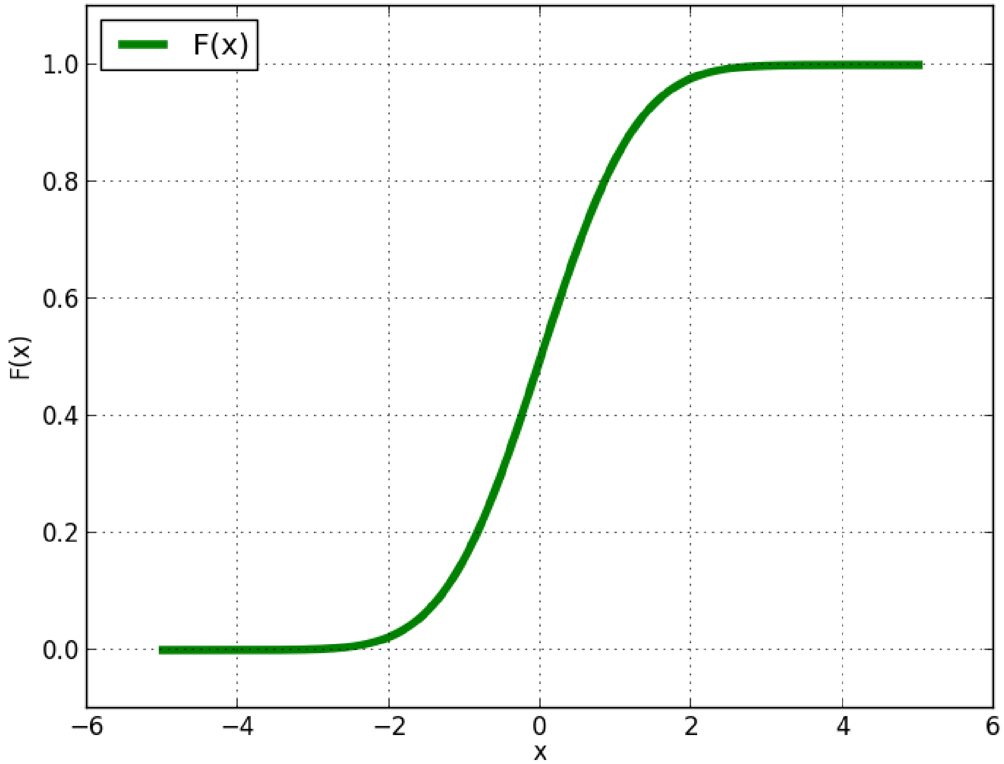
Funkcia $F(x)$ sa volá (kumulatívna) distribučná funkcia pravdepodobnosti. Hodnotu pravdepodobnosti pre ľubovoľný interval z nej ľahko vypočítame,

$$\boxed{p(\xi \in (a, b)) = F(b) - F(a)}$$

takže celá informácia o pravdepodobnostiach spojitých udalostí je zakódovaná do distribučnej funkcie.

Function $F(x) = p(-\infty < \xi < x)$

is called cumulative distribution function (CDF). Other names like probability distribution function, cumulative probability distribution function are also used. Typically it looks like a “sigmoid curve”



For discrete events we could approximately determine the event probabilities experimentally. We perform N experiments and observe how many times (N_i) the event i happens. Then

$$p(i) \approx \frac{N_i}{N}$$

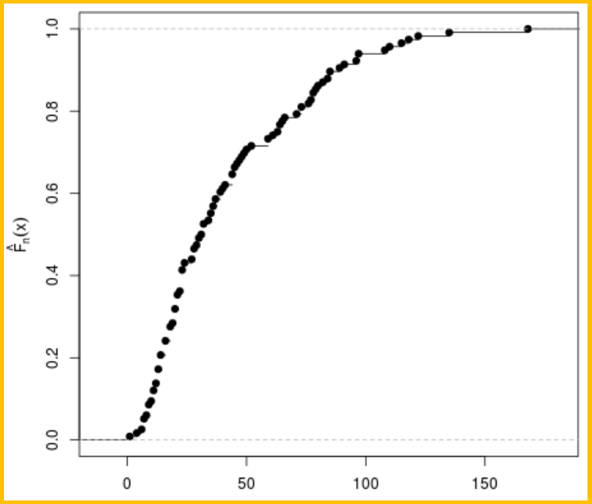
How we can determine the distribution function experimentally? We have to discretize the space x of the "event names". Typically we define n discrete values

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

We perform N "dart throws", recording the coordinates of individual hits and calculate the numbers N_i **defined as the number of hits with coordinates less than x_i**. Than

$$F(x_i) \approx \frac{N_i}{N}$$

Experimentally we get something like this



The true (theoretical) distribution function should somehow “smoothly interpolate: the experimental points. In the particular case represented by the figure the smooth interpolation is not easy to be drawn, due to experimental errors.
The error to our formula

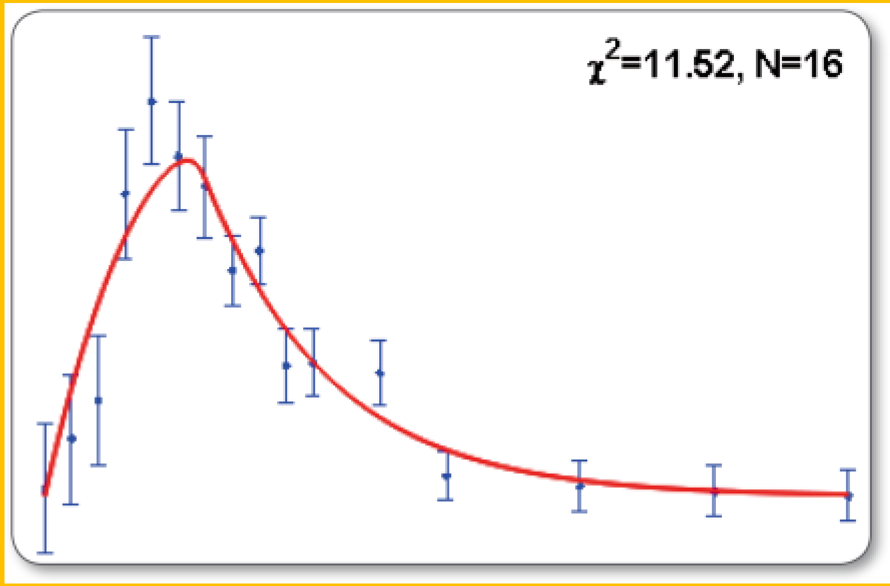
$$F(x_i) \approx \frac{N_i}{N}$$

is easy to estimate from binomial distribution and can be symbolically written as (see also http://en.wikipedia.org/wiki/Empirical_distribution_function)

$$F(x_i) \approx \frac{N_i}{N} \pm \frac{\sqrt{N_i(N-N_i)}}{\sqrt{N^3}}$$

Having data values and errors we can do “curve fitting” described on the next slide.

Supplement: curve fitting



Suppose we have some experimental data, a set of triplets $(x_i, y_i, \varepsilon_i)$ where ε_i are experimental errors of y_i, so that the measured values are

$$y_i \pm \varepsilon_i$$

Now we have a hypothesis, that the data points are to be described by a smooth curve

$$y = \mathrm{f}(x, \alpha)$$

where α is a set of parameters to be determined so that the data is optimally described. We do it like this. For any given value of α we calculate the test value

$$\chi^2(\alpha) = \sum_i \frac{(y_i - \mathrm{f}(x_i, \alpha))^2}{\varepsilon_i^2}$$

and we let the computer find optimal set of parameter values so that $\chi^2(\alpha)$ is minimal. Without going into the theory, the rule of thumb is that the fit is good when

$$\chi^2(\alpha) < N = n - p$$

where n is the number of experimental points and p is the number of fitting parameters α.

Pravdepodobnosť v úzkom intervale: hustota pravdepodobnosti

Uvažujme úzky interval udalostí, potom

$$p(\xi \in (x, x + dx)) = F(x + dx) - F(x)$$

Fyzikálne spravidla veľmi plauzibilný je predpoklad, že distribučná funkcia je diferencovateľná a existuje jej derivácia

$$\varrho(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

Potom platí pre dostatočne malý interval dx:

$$p(\xi \in (x, x + dx)) = F(x + dx) - F(x) = \varrho(x) dx$$

$$\boxed{p(\xi \in (a, b)) = F(b) - F(a) = \int_a^b \varrho(x) dx}$$

Funkcia $\varrho(x)$ sa volá **hustota pravdepodobnosti**. Názov je odvodený z analógie s hustotou hmotnosti (alebo s akoukoľvek inou hustotou): pravdepodobnosť sa počíta ako integrál z hustoty podobne, ako hmotnosť sa počíta ako integrál z hustoty. Keďže nejaká udalosť musí nastať, je hustota pravdepodobnosti normalizovaná na jednotku

$$p(\xi \in (-\infty, +\infty)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varrho(x) dx = 1$$

Stredná hodnota a variancia

V diskrétnom prípade sme definovali strednú hodnotu

$$\overline{x} = \sum_i x_i p(i)$$

Preto strednú hodnotu ľubovoľnej veličiny $f(x)$ (závislej na náhodnej udalosti x definujeme

$$\overline{f} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho(x)dx$$

pre veličinu x (ktorú využívame na pomenovanie udalosti) to znamená

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)dx$$

Variancia veličiny f je potom

$$\sigma_f^2 = \overline{(f - \overline{f})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - \overline{f})^2 \rho(x)dx$$

a variancia x

$$\sigma^2 = \sigma_x^2 = \overline{(x - \overline{x})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{x})^2 \rho(x)dx$$

Matematický formalizmus pre spojité udalosti

Pred spojitý prípad máme teda dva ekvivalentné spôsoby „kódovania“ pravdepodobnostnej informácie

- pomocou kumulatívnej distribučnej funkcie
- pomocou hustoty pravdepodobnosti

Príklad: rovnomerné rozdelenie

Dá sa definovať iba na konečnom intervale (a, b):

$$\rho(x) = \frac{1}{b-a} \qquad \int_a^b \rho(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}dx = 1$$

Používame ho, ak chceme vyjadriť fakt, že žiadna z hodnôt nie je preferovaná (angl.: no bias). Treba byť opatrný. Pre diskrétne udalosti je zrejmé, ako vyjadriť nepreferovanosť

$$p_i = \text{const}$$

Naivne by sme sa mohli domnievať, že zovšeobecnenie na spojitý prípad znie

$$\rho(x) = \text{const}$$

Ale treba byť veľmi opatrný. Spravidla nemáme dôvod na nejaké kanonickú „voľbu mena“ pre spojitú udalosť. V princípe môžeme ako meno použiť ľubovoľnú veličinu. Ibaže hustota pravdepodobnosti, ktorá by bola rovnomerná voči jednej premennej, nebude vo všeobecnosti rovnomerná voči inej premennej.
Povedané obrazne: matka môže spravodlivo rozdeliť cukríky medzi svoje diskrétne deti, dá každému rovnako. Ale cukríky sa nedajú apriórne spravodlivo rozdeliť medzi „spojité deti“, ibaže by sme mali dôvod na nejakú kanonickú voľbu ich mien.

Supplement: probability density, change of variables

Suppose we have same probability density function $\rho(x)$ defined with respect to a variable x. Let us define a new variable y by the transformation formula.

$$y = f(x)$$

Since we are going to use the new variable y as a new "name" for the event x, the transformation should be one-to-one. Let us assume it is a rising function. Our task is to find the probability density with respect to the variable y, which we denote as $\tilde{\rho}(y)$. It is easy, by definition:

$$p(a < y < b) = \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} \rho(x)dx$$

Now we make a substitution in the integral $x = f^{-1}(y)$ and get

$$p(a < y < b) = \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} \rho(x)dx = \int_a^b \rho(f^{-1}(y)) \frac{1}{f'(f-1(y))} dy$$

we should get, however

$$p(a < y < b) = \int_a^b \tilde{\rho}(y)dy$$

Supplement: probability density, change of variables

Comparing the two formulas, we get

$$\tilde{\rho}(y) = \rho(f^{-1}(y))\frac{1}{f'(f^{-1}(y)}$$

So the "new" probability density is not obtained just by inserting the inverse transformation as an argument to the "old" probability density: the Jacobian of the transformation plays a role as well!

So even if the original probability density was a constant function, the Jacobian need not be constant and so the "new" probability density will not be constant in general.

Conclusion:

"No-bias probability density" cannot be canonically defined for a general case of continuous random events

Príklad: Gaussovo (normálne) rozdelenie

Je definované vzorcom

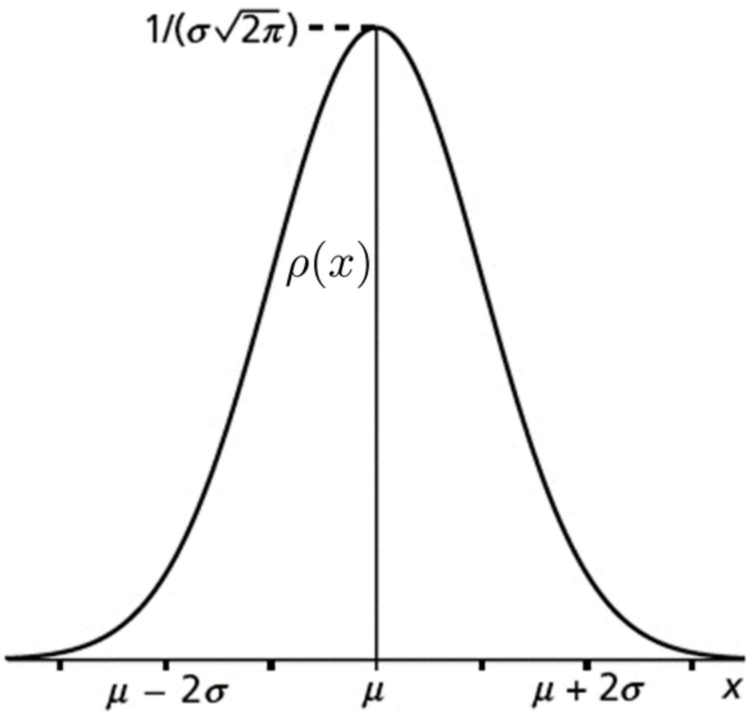
$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$$

Ide vlastne o celú „rodinu hustôt pravdepodobnosti“, líšiacich sa špecifikáciou dvoch parametrov μ and σ. Ich význam je takýto:

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)dx = \mu$$

$$\overline{(x-\overline{x})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\overline{x})^2\rho(x)dx = \sigma^2$$

Typický tvar je na obrázku



Gaussovské integrály

Overme, že pre Gaussovo rozdelenie pravdepodobnosti

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$$

naozaj platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)dx = 1 \qquad \overline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)dx = \mu \qquad \overline{(x-\overline{x})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\overline{x})^2\rho(x)dx = \sigma^2$$

Najprv treba dokázať pomocné tvrdenie (tzv. Laplaceov integrál)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$$

Škôlkarsky vtip hovoril, že jeden lev sa dá chytiť tak, že sa chytia dva a jeden sa pustí. Jeden taký integrál nevie zrátať nik, ale dva každý. V dvoch rozmeroch. Naozaj:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2)dy = \int_{0}^{\infty} \exp(-r^2)2\pi r dr = \pi$$

Po vhodných substitúciách je už ľahko overiť správnosť normalizácie

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)dx = 1$$

Gaussovské integrály

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$$

Overiť správnosť vzťahu

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)dx = \mu$$

je triviálne, po substitúcii to prejde na integrál typu $\int_{-\infty}^{\infty} \xi \exp(-\xi^2)d\xi$,

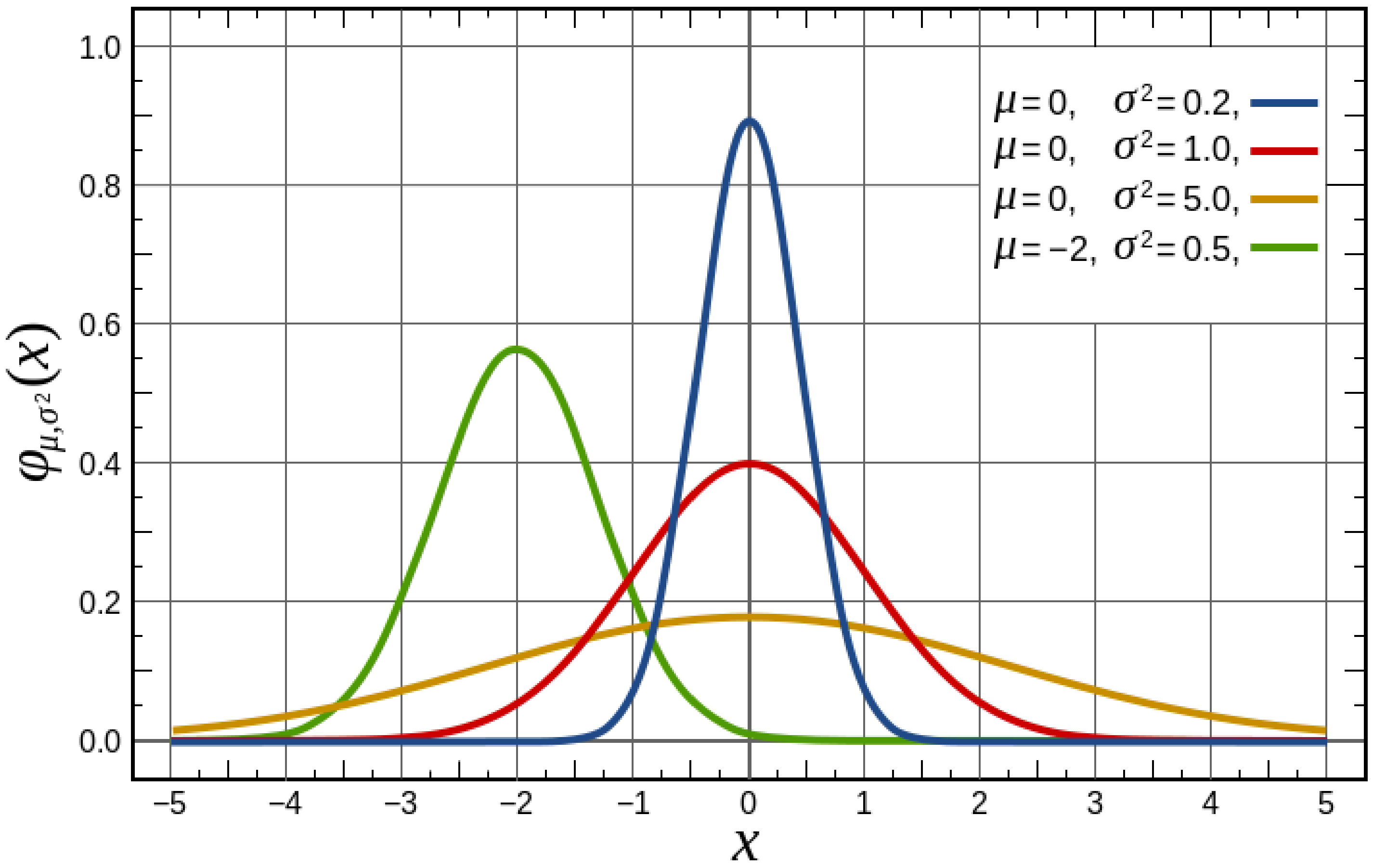
ktorý sa triviálne spočíta substitúciou $\xi^2 = \eta$.

Overovanie vzťahu $\overline{(x-\overline{x})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\overline{x})^2 \rho(x)dx = \sigma^2$ vedie na integrál typu

$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \exp(-\xi^2)d\xi$. Počíta sa pomocou „per partes“

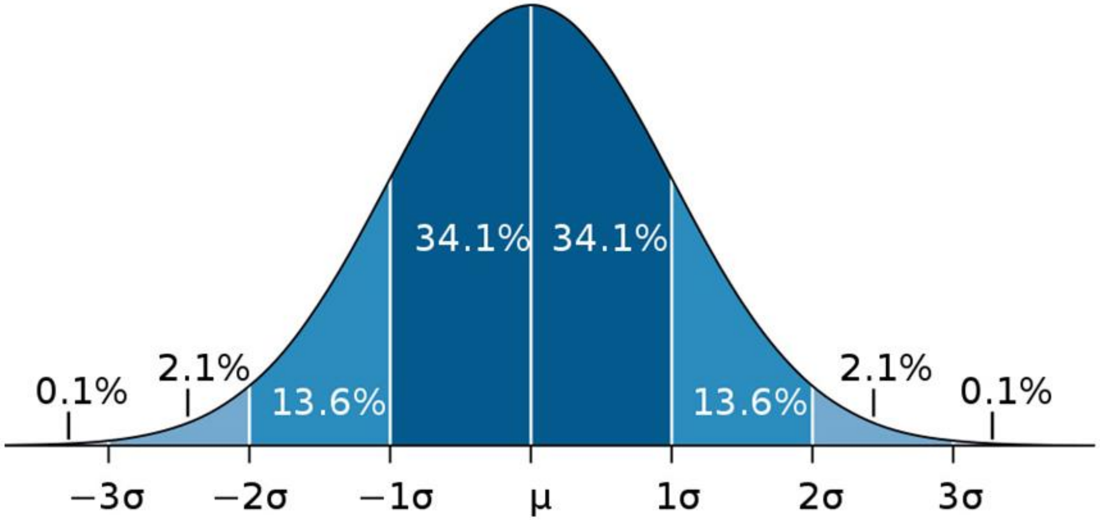
$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \exp(-\xi^2)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\xi(2\xi \exp(-\xi^2))d\xi = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\xi^2)d\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Gaussove krivky pre rozličné hodnoty parameterov μ, σ.



Príklad: Gaussovo (normálne) rozdelenie

Je dobré „mať v oku“ pravdepodobnosti niekoľkých štandardných odchýliek od strednej hodnoty



$$\pm 1\sigma \ldots 68.2\%$$

$$\pm 2\sigma \ldots 95.4\%$$

$$\pm 3\sigma \ldots 99.6\%$$

Examples: Gauss distribution

Gauss (normal) distribution is frequently used in physics and generally in any science discipline.

- Sometimes we use Gauss distribution because we have good theoretical reasons that the probability density describing the random process we consider is a Gauss distribution
- Sometimes we use Gauss distribution because of a lack of any theoretical reasons. We just have a rough feeling about the mean and variance and the Gauss probability density is a nice bell-like shape corresponding to a simple analytical formula. Moreover, it is practically the only elementary formula known to a good high school student corresponding to a bell-like curve. Moreover, it is **fully specified by just two parameters: mean and variance**. So we use it having nothing better in the pocket.

Probability density: experimental determination

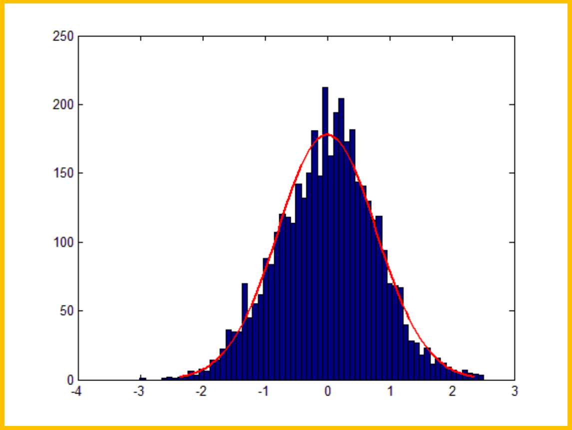
We have already discussed how to estimate experimentally the cumulative distribution function. We can estimate directly the probability density using essentially the same technique.

- discretize the space defining "bins" (intervals)

$$(-\infty, x_0), (x_0, x_1)(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, \infty)$$

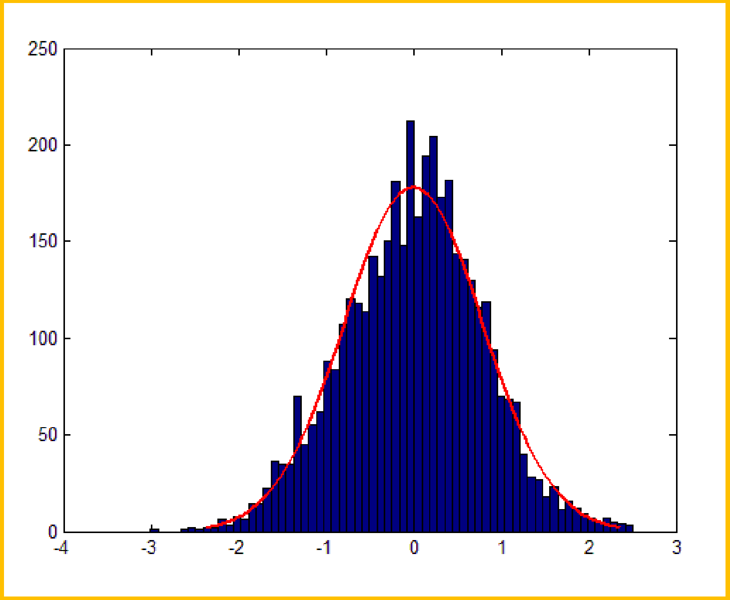
The bins $(-\infty, x_0), (x_n, \infty)$ are usually called "underflow bin" and "overflow bin", the bins in-between are usually (but not necessarily) chosen as equal-sized.

- Perform N experiments to obtain N random events and record the numbers N_i of how many times the event falls int the bin (x_{i-1}, x_i). (For simplicity we neglect underflows and overflows.)
- You can visualize the results in the form of a histogram



- Then let the computer to find a smooth curve describing the histogram

Probability density: experimental determination



- Then let the computer to find a smooth curve describing the histogram. To do this properly, wee need experimental errors of the number of hits in every bin.
- **If the bins are reasonably small**, we can estimate the errors as

$$N_i \pm \sqrt{N_i}$$

and the expected values are

$$N_i = N\rho(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})(x_i - x_{i-1})$$

Assuming some formula for the probability density having a few free parameters α,

$$\rho(x,\alpha)$$

we write the test function (to be minimalized) as

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(N\rho(\frac{x_{i-1}+x_i}{2},\alpha)(x_i - x_{i-1}) - N_i)^2}{N_i}$$

and find the optimal parameters α, thus estimating the probability density.

Continuous random events: more dimensions

Quite often the events from the event space considered cannot be properly named using just one real number. The event space might have more dimensions. We do not want to discuss here what is exactly meant by the dimensionality of the space considered. An intuitive feeling is enough to accept, that a good naming scheme requires n-tuples of real numbers like

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Those who want to know more about dimensionality and related things should read some textbook on manifolds, for example
M.Fecko, Differential Geometry and Lie Groups for Physicists,
http://www.amazon.com/Differential-Geometry-Lie-Groups-Physicists/dp/0521187966

The generalization of the probability machinery for more dimensions is straightforward. We use many-dimensional probability density function in the event space

$$\rho(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

and the probability to observe a random event within a subset S of the whole space is

$$p(S) = \int_S \rho(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

In some cases the volume element in the event space might be given by a more complicated formula instead of a simple $dx_1 dx_2 \ldots dx_n$.

Continuous random events: more dimensions Example

A typical example e is a multidimensional Gauss distribution as one finds, for example, in Maxwell distribution of the velocities of molecules in gas.

If I randomly select a molecule in gas and ask: “What is currently your velocity” I get an answer containing three numbers: projects of the velocity vector on three orthogonal axes.

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

So I have a three-dimensional random variable: a velocity vector. Maxwell has derived a simple formula for the probability density in three-dimensional velocity space

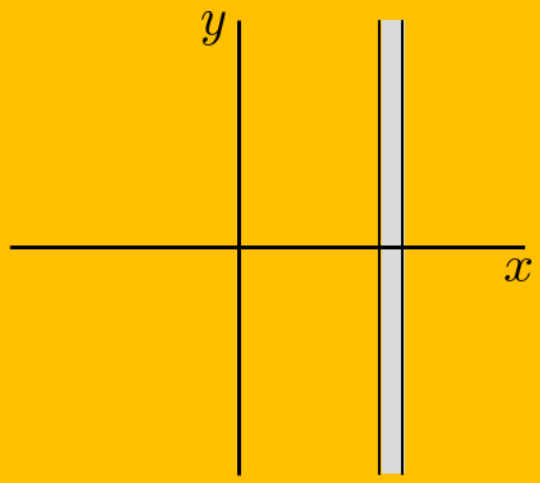
$$\rho(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\right)$$

Continuous random events: more dimensions
Marginal distribution

Sometimes I have a many-dimensional probability distribution and I am interested just for a subset of events having smaller dimension. For example having a two-dimensional probability density

$$\rho(x,y)$$

I want to now only how the variable x is distributed, so I need to find, what is the probability $p(x, x+dx)$ to find the coordinate x in the interval $(x, x+dx)$ irrespective of what is the value of y. Graphically it means, that the two-dimensional event hits the shadowed area below.



$$p(x,x+dx) = \int_{x}^{x+dx} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \rho(x,y) = dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \rho(x,y)$$

We are searching for the probability density $\tilde{\rho}(x)$ defined as

$$p(x,x+dx) = \tilde{\rho}(x)dx$$

Comparing the two expressions we get

$$\tilde{\rho}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \rho(x,y)$$

$\tilde{\rho}(x)$ is called a **marginal distribution** derived from the more-dimensional distribution $\rho(x,y)$.

Continuous random events: more dimensions
Conditional probability

Suppose we have a two-dimensional distribution $\rho(x, y)$
Suppose we have an interval X on the axis x, and an interval Y on the axis y.
Then the joint probability to find $x \in X$ and $y \in Y$ is

$$p(x \in X, y \in Y) = \int_X dx \int_Y dy \rho(x, y)$$

The probability to find $y \in Y$ with x being anywhere is

$$p(y \in Y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_Y dy \rho(x, y)$$

The **conditional probability** to find $x \in X$ given that $y \in Y$ is defined as

$$p(x \in X | y \in Y) = \frac{p(x \in X, y \in Y)}{p(y \in Y)}$$

Experimentally what we speak about is to observe (x, y) events but record only those values of x which were accompanied by $y \in Y$. Then we analyze the probability distribution of the recorded values of x. What we get is the conditional probability.

Continuous random events: more dimensions
Independent variables

Variable x **is independent of** y if the conditional probability

$$p(x \in X | y \in Y)$$

does not depend on Y for any X. It means that knowing information about y does not change our expectation about x. We shall prove that x is independent of y if and only if the **two dimensional probability density factorizes**, that is if it can be written as

$$\rho(x, y) = \rho_x(x)\rho_y(y)$$

where on the right side we have the **marginal distributions**. First we prove the sufficient condition. Suppose $\rho(x, y)$ factorizes. Then

$$p(x \in X | y \in Y) = \frac{p(x \in X, y \in Y)}{p(y \in Y)} = \frac{\int\limits_X dx \int\limits_Y dy \rho(x, y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_Y dy \rho(x, y)} = \frac{\int\limits_X dx \int\limits_Y dy \rho_x(x)\rho_y(y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_Y dy \rho_x(x)\rho_y(y)}$$

$$= \frac{\int\limits_X dx \rho_x(x) \int\limits_Y dy \rho_y(y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \rho_x(x) \int\limits_Y dy \rho_y(y)} = \frac{\int\limits_X dx \rho_x(x)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \rho_x(x)} = \int\limits_X dx \rho_x(x)$$

and the result obviously does not depend on Y.

Continuous random events: more dimensions
Independent variables

Now we prove the necessary condition. Let us choose the regions X, Y to be very small intervals around specific (but arbitrary) values x_0, y_0. Let us denote those small intervals as dx_0, dy_0. We get

$$p(x \in dx_0 | y \in dy_0) = \frac{p(x \in dx_0, y \in dy_0)}{p(y \in dy_0)} = \frac{\int\limits_{dx_0} dx \int\limits_{dy_0} dy \rho(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{dy_0} dy \rho(x,y)}$$

$$= \frac{dx_0 dy_0 \rho(x_0, y_0)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx dy_0 \rho(x, y_0)} = \frac{dx_0 dy_0 \rho(x_0, y_0)}{dy_0 \rho_y(y_0)} = \frac{dx_0 \rho(x_0, y_0)}{\rho_y(y_0)}$$

Since the conditional probability is independent of Y, we can write

$$p(x \in dx_0 | y \in dy_0) = p(x \in dx_0 | y \in (-\infty, \infty) = p(x \in dx_0) = dx_0 \rho_x(x_0)$$

Comparing the two results, we get

$$\frac{dx_0 \rho(x_0, y_0)}{\rho_y(y_0)} = dx_0 \rho_x(x_0)$$

$$\rho(x_0, y_0) = \rho_x(x_0) \rho_y(y_0)$$

since the values x_0, y_0 are arbitrary, we have proven the factorization.

Continuous random events: more dimensions
Mean values

We have two random variables x, y with probability density $\rho(x, y)$. Then the following is true **in general**

$$\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$$

Proof:

$$\begin{aligned}
\overline{x+y} &= \iint dx dy\,(x+y)\rho(x,y) = \iint dx\,dy\,x\,\rho(x,y) = \iint dx\,dy\,y\,\rho(x,y) \\
&= \int dx\,x \int dy\,\rho(x,y) + \int dy\,y \int dx\,\rho(x,y) \\
&= \int dx\,x\,\rho_x(x) + \int dy\,y\,\rho_y(y) = \overline{x} + \overline{y}
\end{aligned}$$

We have two **independent** random variables x, y with probability density Then the following is true

$$\overline{x.y} = \overline{x}.\overline{y}$$

Continuous random events: more dimensions
Mean values

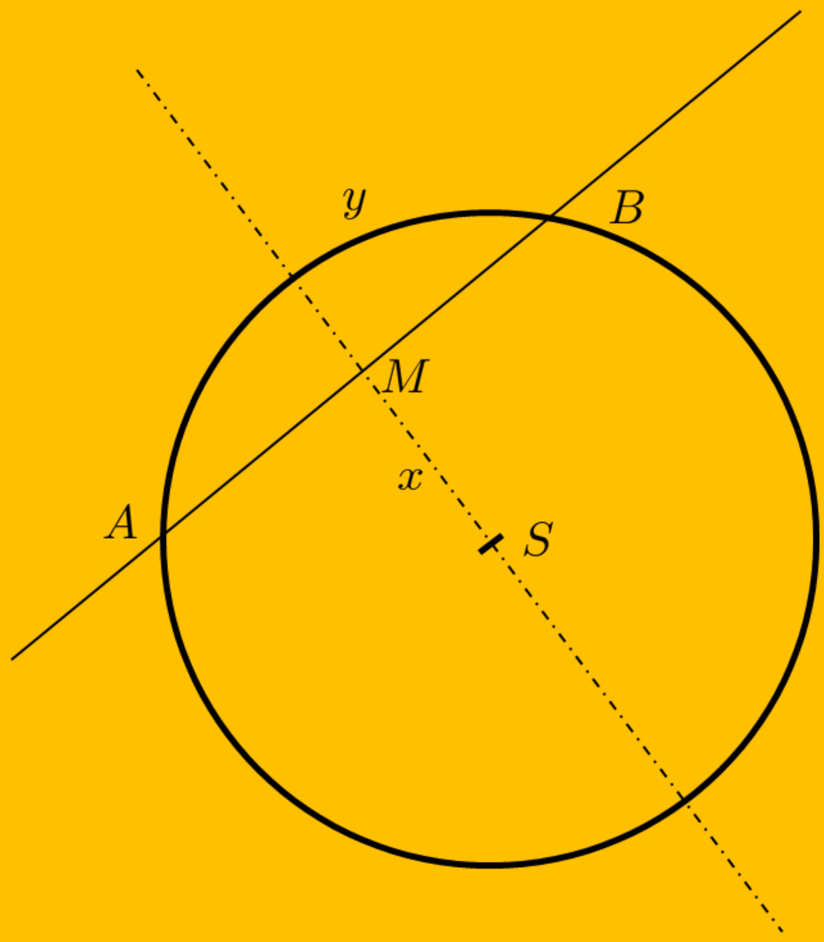
Proof: for independent variables $\rho(x,y)=\rho_x(x)\rho_y(y)$
and we get

$$\overline{x.y}=\iint dxdy\, x\, y\rho(x,y)=\iint dx\, dy\, xy\, \rho_x(x)\rho_y(y)=\int dx\, x\, \rho_x(x)\int dy\, y\, \rho_y(y)$$
$$=\overline{x}.\overline{y}$$

Note: if $\overline{x.y}=\overline{x}.\overline{y}$ holds, it does not necessarily mean that the variables are independent, even if it often considered as a strong hint for independence.

Continuous random events: no bias distribution counterexample

Consider the following problem. A thin long rigid rod is randomly thrown onto a circle and intersect the circle in two points A,B forming a chord (segment AB). Denote the length of the chord as ξ. Find the probability density for the random variable ξ.



“Solution” 1:

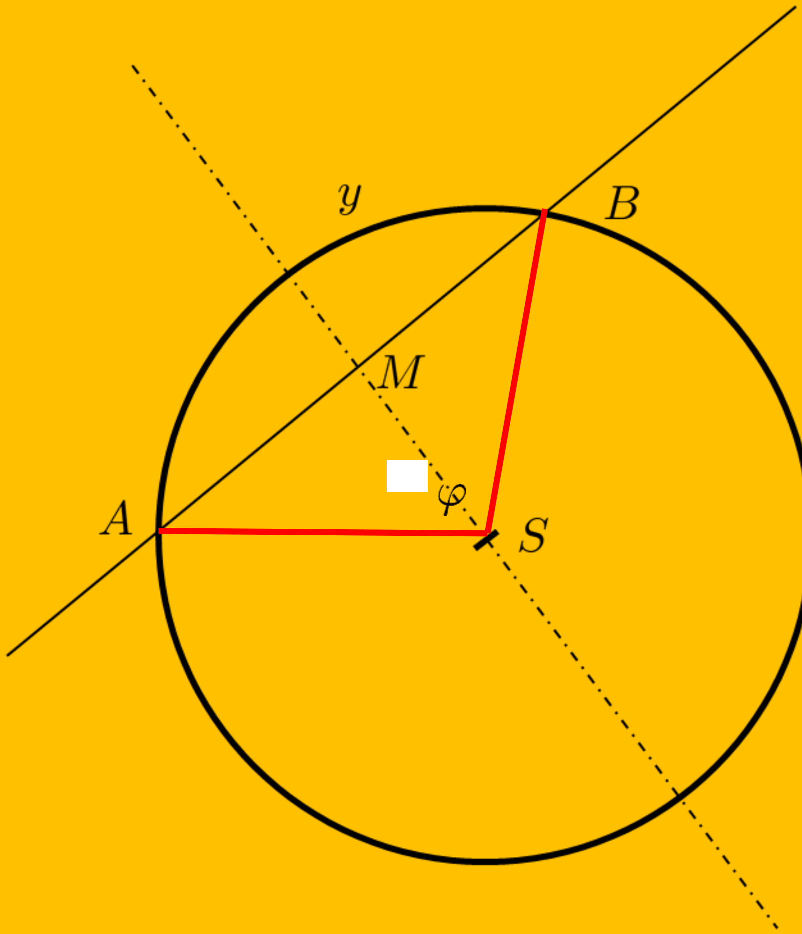
Without loss of generality we can assume that all the thrown rods are parallel, perpendicular to the dash-dotted line in the figure. So the random event is fully specified by the size of the segment SB denoted as x. Using “non-biased” uniform distribution of $x \in (-r, r)$ we get

$$\xi = 2\sqrt{r^2 + x^2}$$

$$\overline{\xi} = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 + x^2}\frac{1}{2r}dr \approx 1.57\, r$$

Continuous random events: no bias distribution counterexample

Consider the following problem. A thin long rigid rod is randomly thrown onto a circle and intersect the circle in two points A,B forming a chord (segment AB). Denote the length of the chord as ξ. Find the probability density for the random variable ξ.



“Solution” 2:
Without loss of generality we can assume that all the thrown rods intersect the circle in the specific point A. So the random event is fully specified by the angle ASB denoted as φ. Using “non-biased” uniform distribution of φ ∈ $(0,2\pi)$ we get

$$\xi = 2r/\sin(\varphi/2)$$

$$\bar{\xi} = \int_0^{\pi} 2r\sin(\varphi/2)\frac{d\varphi}{\pi} \approx 1.27\,r$$

So two equally plausible “solutions”, two different results!

- aké sú hlavné rozdiely medzi diskrétnymi a spojitými náhodnými udalosťami
- ako sa experimentálne stanoví pravdepodobnosť nejakej diskrétnej udalosti
- definícia strednej hodnoty diskrétnej náhodnej veličiny
- variancia diskrétnej náhodnej veličiny
- stredná kvadratická odchýlka
- čo je to kumulatívna distribučná funkcia pravdepodobnosti spojitej náhodnej veličiny
- hustota pravdepodobnosti spojitej náhodnej veličiny a jej súvis s distribučnou funkciou
- normalizácia hustoty pravdepodobnosti
- ako sa vypočíta pomocou hustoty pravdepodobnosti pravdepodobnosť, že náhodná veličina x padne do intervalu (a, b)
- definícia strednej hodnoty náhodnej veličiny
- definícia strednej hodnoty funkcie $f(x)$ náhodnej veličiny (x)
- variancia spojitej náhodnej veličiny
- stredná kvadratická odchýlka pre spojitú náhodnú veličinu
- rovnomerné náhodné rozdelenie
- normálne (Gaussovo) rozdelenie
- ako súvisí 95% confidence interval so štandardnou odchýlkou pre Gaussovo rozdelenie

Látky sa skladajú z molekúl

Molekuly na seba silovo pôsobia (silami elektromagnetickej povahy, lebo sa skladajú z nabitých častíc)

Molekuly sa hýbu chaotickým tepelným pohybom

Hýbu sa a pôsobia silovo, teda konajú prácu

Práca je mikroskopickej povahy, „nevidíme ju“

Prácu, ktorú koná trpaslík stláčaním piesta vidíme, je to makroskopická práca

Mikroskopicky konaná práca sa volá teplo. Teplo je druh práce, nie druh energie. Konaním práce sa vymieňa, prerozdeľuje energia

Kontakt medzi dvoma objektami, pri ktorom sa koná len mikroskopická tepelná práca sa vola tepelný kontakt

Dva objekty, ktoré boli makroskopicky statické, keď sa dajú do tepelného kontaktu, vo všeobecnosti sa začnú diať makroskopické zmeny ale napokon tie makroskopické zmeny ustanú. Hovoríme, že tepelný kontakt priviedol tie dva objekty do tepelnej rovnováhy.

Aj objekt izolovaný od okolia sa nakoniec dostane do stavu, že ustanú všetky makroskopické zmeny, je sám o sebe v rovnováhe

Niekedy dva objekty privedené do tepelného kontaktu nevyvolajú makroskopické zmeny, sú od začiatku v rovnováhe

Otázka je, dá sa nejako zistiť, kedy dva objekty privedené do kontaktu budú hneď v rovnováhe. Odpoveď: keď majú rovnakú teplotu.

Teplota to je také oné, ktoré keď je rovnaké, tak objekty privedené do tepelného kontaktu sú ihneď v rovnováhe bez makroskopických zmien.

Neviem, čo je to teplota, ale vieme že to má vlastnosť testovania vzťahu „byť v rovnováhe“

Dajme si menšiu úlohu, skonštruovať „termoskop“ teda prístroj, ktorý keď priložím k dvom objektom rozhodne, či po ich privedení do kontaktu budú v rovnováhe alebo nie.

V zásade môžem ako termoskop použiť hocičo veľmi malé, aby jeho privedenie do rovnováhy s meraným objektom ten objekt veľmi neovplyvnilo

Napríklad sklenená rúročka so zatavenou ortuťou. Po privedení do kontaktu s meraným telesom sa objem ortuti začne meniť (to je ten makroskopický dej) až sa ustáli. Keď potom privediem tú rúročku do kontaktu s iným objektom a objem sa nezačne meniť, tak je v rovnováhe s tým druhým objektom, takže má rovnakú teplotu ako ten prvý objekt**. Záver: dva objekty ak sa privedú do kontaktu budú okamžite v rovnováhe, keď je pravdou že otestovanie ortuťou naplnenou rúročkou ukáže rovnaký objem ortuti pri styku s oboma telesami. Na to ale musí byť ortuťová rúročka malá, aby tie objekty moc neovplyvnila.**

Matka spravidla nemeria teplotu decka, ktoré nechce ísť do školy tak, že by ho ponorila do veľkého množstva studenej vody a nesleduje ako sa zmenil objem vody vo vani po privedení do kontaktu. Privedie to objekt decko a objekt voda do rovnováhy, ibaže decku veľmi klesne teplota a matka ho vždy môže poslať do školy

Vhodným okalibrovaním sa môže z termoskopu stať teplomer

Napríklad termoskop typu „rúročka s ortuťou“ vlastne meria úplne inú veličinu: objem ortuti. Ak predpokladám jednoznačnú závislosť medzi teplotou a objemom ortuti, potom môžem na sklenenú rúročku naniesť „čiarky“ označované v jednotkách teploty a nie jednotkách objemu po vhodnej kalibrácii.

Jedna známa kalibárcia pochádza od Celsia

Celsius zaviedol v roku 1742 stupnicu s dvomi pevnými bodmi pri tlaku vzduchu 1 013,25 hPa, a to 100 °C pre teplotu tuhnutia vody a 0 °C pre teplotu varu vody. Carl Linné stupnicu neskôr otočil a preto je dnes definovaná ako

0 °C pre teplotu tuhnutia vody
100 °C pre teplotu varu vody .

Po definovaní dvoch teplotných bodov nasleduje interpolácia pre teploty medzi tými dvoma bodmi ako lineárna interpolácia na 100 rovnakých dielikov. Tým sme vlastne definovali, že ortuť zväčšuje svoj objem lineárne s teplotou. Keďže nevieme, čo je to teplota, je nám to jedno. Všimnime si, že zatiaľ máme len okalibrovaný termoskop, teplotné rozdiely nemajú zatiaľ žiaden fyzikálny význam. Význam pre posúdenie rovnováhy má len fakt, že dva objekty majú rovnakú teplotu. Ale to, že jeden objekt má teplotu o 5 stupňov vyššiu ako druhý objekt nemá zatiaľ pre nás žiaden význam.
Ale stačí začať robiť nejaké experimenty pri rôznych teplotách a nejaký význam sa prejaví.

Teplota a teplo

Doteraz sme teplotu definovali iba takto:
Teplota to je také oné, ktoré keď je rovnaké, tak objekty privedené do tepelného kontaktu sú ihneď v rovnováhe bez makroskopických zmien. Keď to oné nebolo rovnaké pred privedením do kontaktu, tak sa začnú diať makroskopické zmeny, ktoré po nejakom čase ustanú, už sa nič makroskopicky nemení a vtedy to oné je už rovnaké pre oba objekty v tepelnom kontakte.

Trochu odbornejšie to vyjadrujeme tak, že pri tepelnom kontakte sa vyrovnajú teploty, a to tak, že teplota objektu s pôvodne vyššou teplotou poklesne a teplota objektu s pôvodne nižšou teplotou stúpne.

Oprávnene sa môžeme pýtať, čo sa to deje pri tom tepelnom kontakte.

Nedodržíme historický vývoj a prezradíme, o čo ide. Fyzikom trvalo veľmi dlho, kým tento problém správne vyriešili a veľa času strávili skúmaním „slepých uličiek“.

Kľúčom je molekulová hypotéza. Látky sa skladajú z molekúl. Pri tepelnom kontakte sa molekuly dvoch objektov k sebe priblížia a začnú na seba silovo pôsobiť. Keďže sa pri tom aj chaoticky pohybujú, funguje vzorec „sila krát dráha“ a teda molekuly kontaktu jedna nad druhou konajú prácu. Práca znamená prenos energie. Pri tepelnom kontakte sa teda prerozdeľuje energia medzi objektami v kontakte, konaním „neviditeľnej“ mikroskopickej práce. **Tá mikroskopicky konaná práce sa volá teplo.**

Teplo je druh práce, nie druh energie

Do nadpisu sme dali dôležitú poučku. Najmä preto, že **ľudia to majú spravidla popletené**.

Bežná predstava je, že teplo je forma (druh) energie. Že je to čosi, čo je „schované“ v jednom (teplejšom) objekte a pri tepelnom kontakte sa to čosi „preleje“ do druhého (chladnejšieho) objektu, ktorý sa tým zohreje.

Odtiaľ **ďalšia chybná predstava**: keď chcem niečo zohriať (zvýšiť tomu teplotu) musím do toho „dodať teplo“ .

To všetko je zle. Teplo nie je nikde uskladnené, je to charakteristika nejakého deja, pri ktorom **sa to teplo koná**. Podobne, ako sa koná bežná makroskopicky viditeľná práca typu „sila krát dráha“. Rozdiel je len v tom, že pri makroskopicky konanej práci „vidím“ tú silu aj tú dráhu, pri mikroskopicky (na molekulovej úrovni) konanej práci nevidím ani silu ani dráhu. Mnohým vadí formulácia „teplo sa koná“ ale úplne súhlasia s formuláciou „práca sa koná“. Opakujem znovu: teplo je druh práce, teda „sa koná“. Ak je na faktúre z teplárne napísané „dodali sme vám teplo“, je to nefyzikálny paškvil. Hoci je pravdou, že aj veľa fyzikov by v živote nepoužilo formuláciu „teplo sa koná“. Je to pozostatok historických slepých uličiek a zlých hypotéz, ktoré používali formulácie typu „teplo sa dodáva, prenáša“ a podobne. Trvanie na formulácii „teplo sa koná“ je taká moja privátna obsesia. Ak sa vám to nepáči, hovorte ďalej, že teplo sa dodáva. **Ale naozaj sa zbavte predstavy, že teplo je druh energie.** V ďalšom ešte budeme tieto poučenia hlbšie a dôkladnejšie diskutovať.

Práca sa nedá uskladniť, energia áno

Energia je stavová veličina. Teda keď mám nejaký fyzikálny objekt, dá sa spýtať, akú **má** v momentálnom stave energiu. Dôraz je na slovo **mať**, takmer vo význame „vlastniť“, často aj vo význame „mať ju v sebe uskladnenú“. Energia v momentálnom stave sa zistí tak, že mám sadu vzorcov pre výpočet energie (Feynman), dosadím do tých vzorcov hodnoty veličín definujúcich momentálny stav, sčítam a dostanem hodnotu energie. Teda nemusím poznať históriu, ako sa objekt dostal do stavu, v ktorom momentálne je, ani budúcnosť, čo bude o chvíľu robiť. **Energia je záležitosť okamihu**.

Práca charakterizuje prebiehajúci dej, počas ktorého sa koná. Neexistuje niečo ako „práca v danom okamihu“, existuje len „práca vykonaná v priebehu nejakého času, nejakého procesu“. Keď proces skončil, práca nemá zmysel, **nikde nie je „uskladnená“.** Je pravdou, že množstvo práce vykonané v priebehu nejakého procesu sa dá „spätne vystopovať“: ak máme záznam, akú energiu mal objekt na začiatku vyšetrovaného procesu a potom vypočítame jeho energiu na konci toho procesu, **rozdiel je oná vykonaná práca**. Práca je spôsob, ako môže dôjsť k transferu energie medzi dvoma objektami. Ak objekt A vykoná nad objektom B kladnú prácu, jeho energia pri tom klesne o hodnotu vykonanej práce a energia objektu B stúpne o hodnotu vykonanej práce. Energia uskladnená v objekte A sa preskladnila do objektu B.

Práca sa týka dvoch objektov, „konateľa“ a „trpiteľa“. Kto je konateľ a kto trpiteľ je vecou dohody, pomenovania možno vymeniť ak súčasne zmeníme znamienko vykonanej práce. Na trpiteľa, nad ktorým konateľ vykonal kladnú prácu sa dá nahliadať akoby na konateľa, ktorý nad originálnym konateľom, na ktorého sa začneme dívať ako na trpiteľa, vykonal zápornú prácu. **Zvyknite si, že práce môže byť záporná**, to v bežnom živote nepoužívame.

Energia, práca a autoservis

Na faktúre z autoservisu sú dva stĺpce

- náhradné diely
- vykonané práce

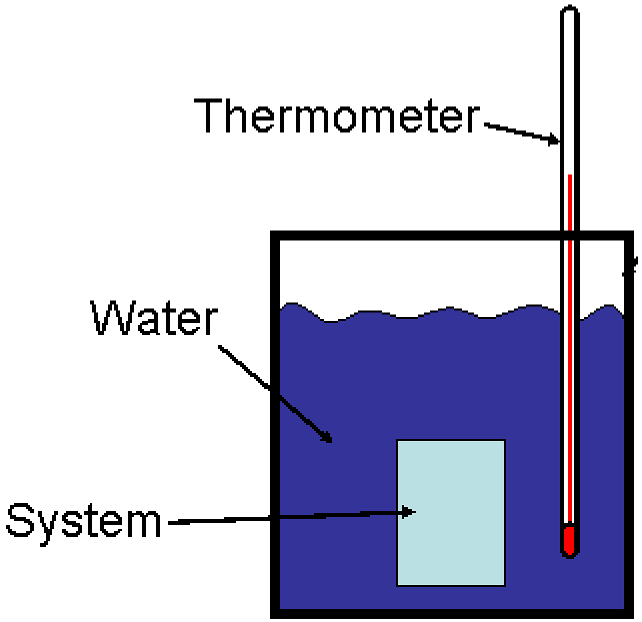
Náhradné diely boli v sklade, potom sú namontované do auta, a potom sú vo vašej garáži
Práce neboli v sklade a nemáte ich uložené vo vašej garáži po návrate zo servisu.
Práce sa konali a neboli ani nie sú nikde uložené
Súčiastky stále niekde sú.

Podobný rozdiel je vo fyzike medzi energiou a prácou.

Energia stále niekde je a týka sa okamžitého stavu. Je to stavová veličina.
Práca sa koná počas deja. Pred jeho začatím ani po jeho skončení nikde nie je.

Teplo je druh práce, nie energie. Nikde nie je schované. To bol len historický omyl.

Kalorimetria



Kalorimeter je tepelne izolovaná nádoba, čím je vylúčený tepelný kontakt s okolitým prostredím. Vnútri nádoby prebieha typicky experiment, v ktorom privedieme do tepelného kontaktu dva fyzikálne objekty, ktoré majú na začiatku nerovnaké teploty. Na obrázku jeden systém je voda, druhý nejaké tuhé teleso.

Po istom čase sa ustáli spoločná výsledná teplota

Experiment vyzerá teda takto
Voda: hmotnosť m_1, počiatočná teplota t_1. Teleso: hmotnosť m_2, počiatočná teplota $t_2 > t_1$.
Výsledná teplota je t.
Súhrn experimentálnych skúseností je, že existujú materiálové konštanty pre vodu c_1 a pre materiál telesa c_2, tak, že pre experiment popísaného typu platí kalorimetrická rovnica:

$$\boxed{m_1 c_1 (t - t_1) = m_2 c_2 (t_2 - t)}$$

Konštanty c_1, c_2 sa nazývajú merné teplá príslušných materiálov.

Kalorimetrická rovnica ako „zákon zachovania tepla“

Kalorimetrická rovnica sa dá prepísať takto: $m_1c_1t_1 + m_2c_2t_2 = m_1c_1t + m_2c_2t$

Pozriem na tú rovnicu **a vidím zákon zachovania**. Niečo na začiatku vypočítané podľa vzorcov typu „mct“ je rovnaké ako na konci. A zjavne ma musí napadnúť, že „niečo je schované v zohriatom telese“, čo sa prelieva z teleso do telesa a celková suma sa zachováva. A vyhútam si čosi ako „zákon zachovania tepla“. **A že teplo je také oné čo je zodpovedné za teplotu telesa a dá sa „mať v sebe teplo“, „premiestniť teplo“, vyhútam rovnicu pre „vedenie tepla“, potom „z izby uniklo teplo“, dom má „straty tepla“, „teplo sa šíri vedením, prúdením alebo sálaním“. A mnoho ďalších klišé. Všetko je to zle**.

Celkom dobrá hypotéza o zachovaní tepla ale nepravdivá. Kalorimetrické merania na to priam navádzajú. Čo je na tom zle? To, že keď chcem meniť teplotu, dá sa to nielen (už to poviem „po novom“) konaním tepla ale aj konaním práce. Teplota súvisí s energiou uskladnenou v telese, nie s „**teplom, uskladneným v telese**“.

Ako vznikli také zmätky? Tak, že kalorimetrické merania sa prirodzene robili s kvapalinami a tuhými telesami, nie s plynmi. Kvapaliny a tuhé telesá majú malú tepelnú rozťažnosť, málo menia svoj a teda sa koná malá makroskopická mechanická práca. Koná sa prakticky len mikroskopická tepelná práca. Zmena energie v každom telese je potom celá rovná vykonanému teplu, je za tým zákon zachovania energie, nie tepla. Keď sa začnem hrať s plynmi, tak zistím že neplatí kalorimetrická rovnica tak, že by existovala pre každý plyn jedna hodnota „merného tepla“. Záleží, ako je experiment usporiadaný, napríklad, či prebieha v kalorimetri pri stálom objeme plynu alebo pri stálom tlaku alebo mnohými inými spôsobmi.

Prvá veta termodynamická

Uvažujme nejaký fyzikálny systém (objekt). Ten objekt má nejakú vnútornú štruktúru a predpokladajme, že v každom stave vieme vypočítať energiu toho objektu.

Pôsobením vonkajších objektov uvažovaný objekt môže zmeniť svoj stav a teda aj svoju energiu o nejakú hodnotu ΔE. Tá zmena energie je možná iba tak (ak veríme na zákon zachovania energie), že prebehol nejaký dej, počas ktorého vonkajšie objekty vykonali prácu nad uvažovaným objektom. Tá práca môže byť dvoch typov

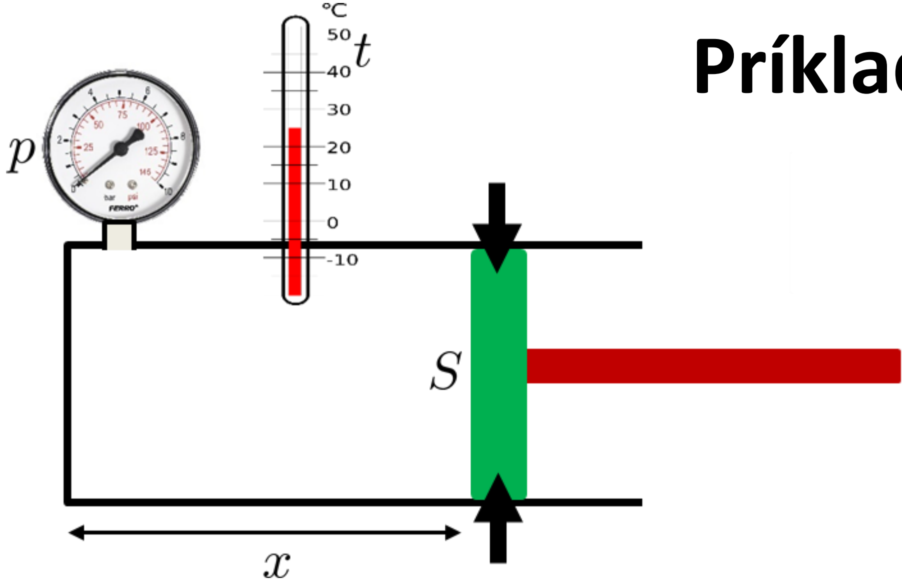
- makroskopická, označme ju A' (čiarkované označenie je historická konvencia)
- mikroskopická, čiže teplo, označme ho Q.

Zákon zachovania energie hovorí, že zmena energie musí byť krytá zvonku vykonanou prácou, teda platí

$$\boxed{\Delta E = A' + Q}$$

Uvedené rovnica sa volá „prvá veta termodynamická“. Dôvod, prečo sa tomu nehovorí prosto zákon zachovania energie je historický. V dobe, keď sa na všetko toto postupne došlo neboli známe molekuly a teda nebolo zrejmé, že „vnútri telesa“ sa môže „schovávať“ nejaká energia napríklad ako kinetická energia neviditeľného pohybu molekúl. Dokonca nebol ani vycizelovaný pojem energie. Takže nebolo jasné, či a čo sa vlastne zachováva. Prvá veta termodynamická hovorila vlastne na začiatku len toľko, že ak k prechodu z jedného stavu do druhého dôjde dvoma rôznymi spôsobmi, potom súčet vykonanej makroskopickej práce a tepla je pri oboch procesoch rovnaký, pričom relatívna veľkosť práce a tepla môže byť pre rôzne procesy rôzna. **Prvá veta termodynamická bol vlastne príspevok „tepelných vedcov“ (termodynamikov) k vycizelovaniu pojmu energie a zákona zachovania energie.**

Príklad makroskopickej práce

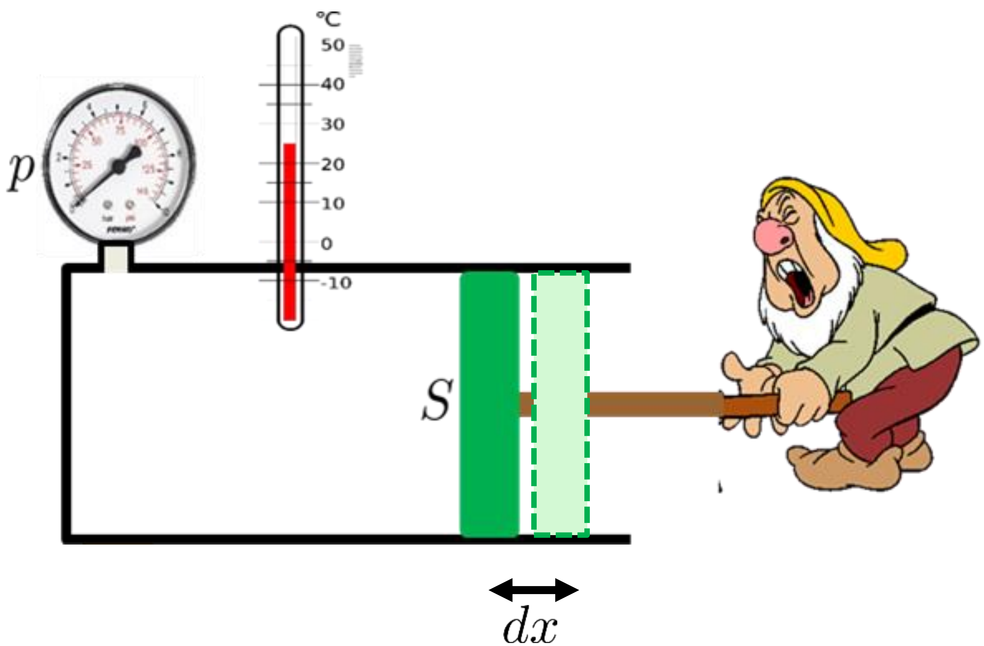


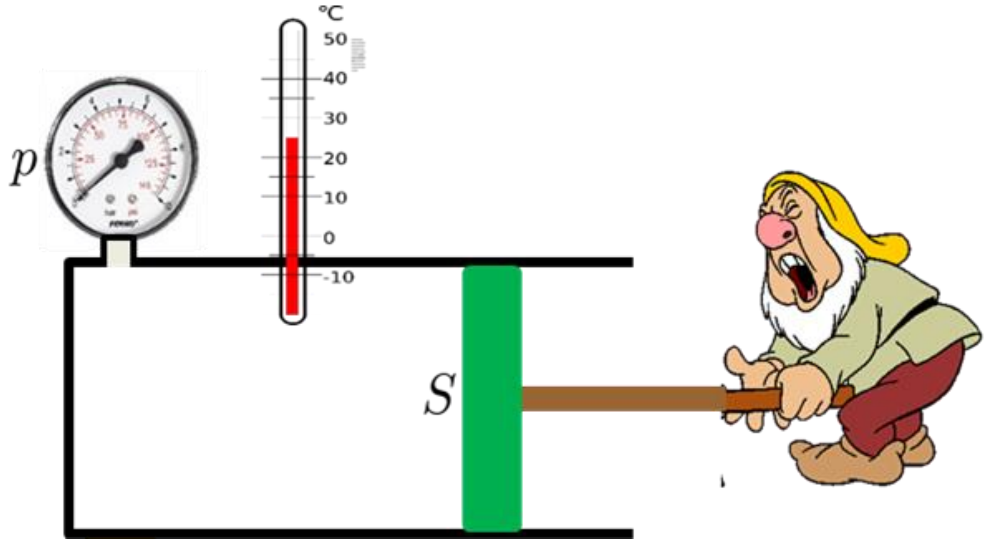
V plyne je tlak p. Piest je „zašprajcovaný“, objem je konštantný. Ak chceme meniť objem, musíme na pomoc zavolať „vonkajšieho agenta“ trpaslíka. Ten chytí piest a nastaví silu rúk tak, aby akurát vyrovnávala vnútorný tlak. Takže piest stojí.
Teraz môže trpaslík trochu potiahnuť piest maličkým zmenšením sily rúk. Piest sa posunie o dx.
Plyn vykoná prácu

$$\delta A = pSdx = pdV$$

Trpaslík vykoná prácu

$$\delta A' = -pSdx = -pdV$$





Budeme hlasovať

a) Každá práca je vždy kladná
b) Práca plynu je vždy kladná
c) Práca trpaslíka vždy záporná
d) Keď je práca plynu kladná je práca trpaslíka záporná a naopak

Prvá veta termodynamická

$$\Delta E = A' + Q$$

Upozornime, že **na ľavej strane je „delta“,** čo označuje „zmenu“ presnejšie „prírastok“ energie. Technicky to znamená, že ide o rozdiel (diferenciu, preto delta) dvoch hodnôt energie: energia v koncovom stave mínus energia v počiatočnom stave.
Všimnime si, že na **pravej strane nie sú žiadne „delty“.** Práca je konaná počas nejakého procesu, nie je to „práca v koncovom stave mínus práca v počiatočnom stave“. Práca nie je stavová veličina. Napravo teda nemáme „prírastky prác“ ale „vykonané práce“. Preto žiadne „delty“.

Ukázaním prvej vety termodynamickej sme trochu predbehli logický aj historický vývoj, lebo sme chceli ukázať „na čo je to dobré“ a tak motivovať záujem dumať nad logickými a technickými jemnosťami, ku ktorým sa teraz ideme vrátiť.

Chceme používať pojem teplo ako mikroskopická práca, teda by sme ho mali merať v jednotkách Joule, ibaže nevieme ako. Zatiaľ sme pojem teplo mali skryté v kalorimetrickej rovnici

kde sme hovorili že „existujú materiálové konštanty“ c_1, c_2. Ale nepovedali sme nič o jednotkách, v akých sa merné teplá vyjadrujú. Malo by to zjavne byť „čosi/(kg.stupeň)“. Problém je v tom, že ak tie merné teplá nechceme používať inde ako v kalorimetrickej rovnici, potom na voľbe jednotky „čosi“ vôbec nezáleží, len musí byť rovnaká pre merné teplá všetkých látok. Jednotka čosi sa totiž v rovnici vykráti, takže jej „veľkosť“ vlastne nič nehovorí (opakujem: ak to vystupuje len v kalorimetrickej rovnici – **predumajte si to poriadne**!)

Jednotka tepla

Pojem teplo sa historicky zjavil v kalorimetrickej rovnici

$$m_1c_1(t-t_1) = m_2c_2(t_2-t)$$

kde sme hovorili že „existujú materiálové konštanty“ c_1, c_2. Ale nepovedali sme nič o jednotkách, v akých sa merné teplá vyjadrujú. Malo by to zjavne byť „čosi/(kg.stupeň)“. A to „čosi“ by mala byť „jednotka tepla“.

Problém je v tom, že ak tie merné teplá nechceme používať inde ako v kalorimetrickej rovnici, potom tá jednotka nič neznamená. Na voľbe jednotky „čosi“ vôbec nezáleží, len musí byť rovnaká pre merné teplá všetkých látok. Jednotka čosi sa totiž v rovnici vykráti, takže jej „veľkosť“ vlastne nič nehovorí (opakujem: ak to vystupuje len v kalorimetrickej rovnici – **predumajte si to poriadne**!)

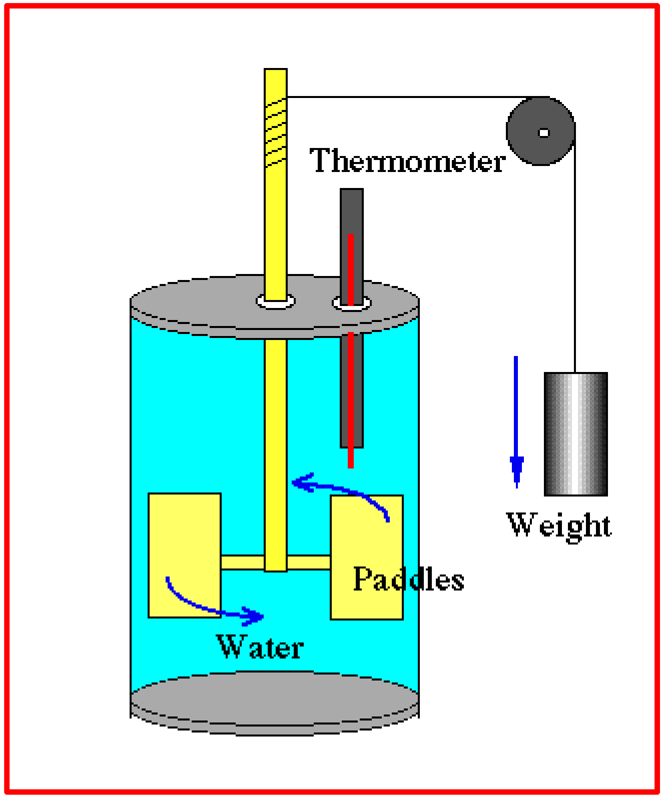
Historicky takéto čosi bolo (ľubovoľne) definované tak, že sa **definovalo**, že merné teplo vody má hodnotu 1 kcal/(kg.stupeň) a teda teplo sa meralo v kilokalóriách.

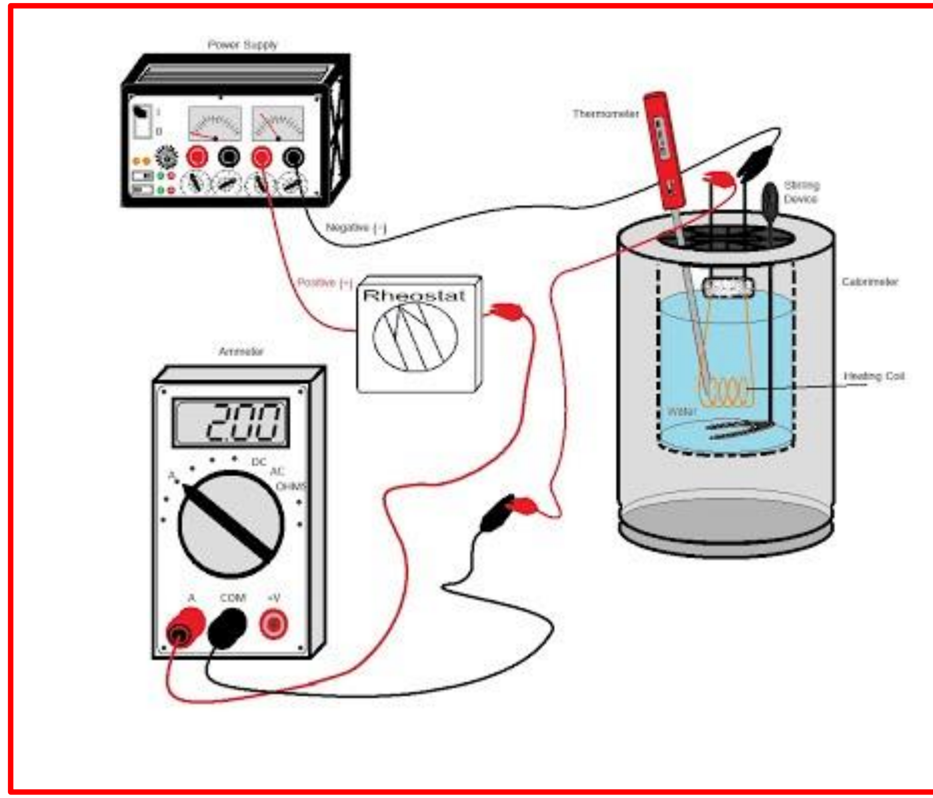
Mechanický ekvivalent tepla

Názov tohto slajdu odráža fakt, že postupne sa vycizelovalo, že teplo je druh práce a teda by sa malo merať v jednotkách, v ktorých sa meria práca.
Bol to historicky zdĺhavý proces.
Prvý kvalitatívny záver urobil zrejme Benjamin Thompson v roku 1797, ktorý si všimol, že objekt sa dá zahriať nielen tak, že ho privedieme do kontaktu s teplejším objektom ale aj tak že „sa niekde koná mechanická práca“. Konkrétne si všimol, že pri vŕtaní delových hlavní sa hlavne (aj vrtáky) zahrejú až do tej miery, že keď sa chladia vodou, tak voda až zovrie.
Kvantitatívne merania urobil najmä James Prescott Joule v roku 1843 a zistil (rôznymi experimentálnymi technikami), koľko mechanickej práce treba vykonať aby to viedlo k rovnakému zvýšeniu teploty ako pri „dodaní“ 1 jednotky tepla. Odtiaľ ten názov mechanický ekvivalent tepla.
Štandardná hodnota „mechanického ekvivalentu tepla“ je

$$\boxed{1 \text{ kcal} = 4.186 \text{ kJ}}$$

Mechanický ekvivalent tepla





Ak trváme na „čisto mechanickej práci“ (čo pred sformulovaním zákona o zachovaní energie bolo určite treba), potom meranie bolo založené na rôznych rafinovanejších postupoch (trenie!!!) podľa princípu „vrtuľka sa točí vo vode v kalorimetri na úkor zmeny mechanickej energie závažia“. Dnes je oveľa jednoduchšie dať do vody v kalorimetri špirálu a pustiť do nej elektrický prúd a vypočítať prácu batérie podľa vzorca UIt .

Mechanický ekvivalent tepla

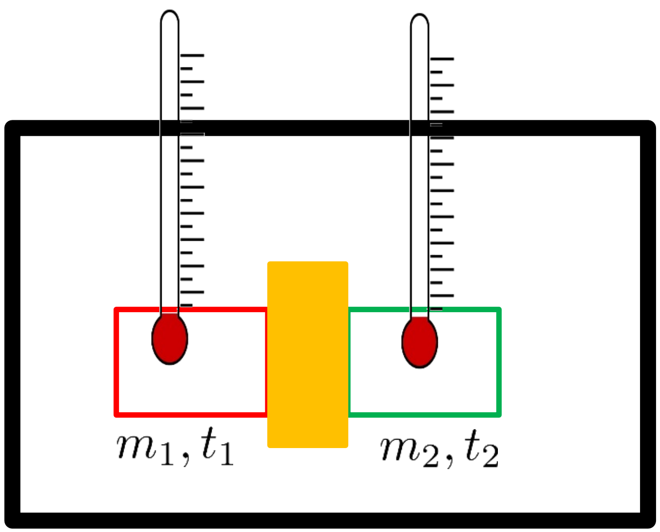
Názov tohto slajdu odráža fakt, že postupne sa vycizelovalo, že teplo je druh práce a teda by sa malo merať v jednotkách, v ktorých sa meria práca.
Bol to historicky zdĺhavý proces.
Prvý kvalitatívny záver urobil zrejme Benjamin Thompson v roku 1797, ktorý si všimol, že objekt sa dá zahriať nielen tak, že ho privedieme do kontaktu s teplejším objektom ale aj tak že „sa niekde koná mechanická práca“. Konkrétne si všimol, že pri vŕtaní delových hlavní sa hlavne (aj vrtáky) zahrejú až do tej miery, že keď sa chladia vodou, tak voda až zovrie.
Kvantitatívne merania urobil najmä James Prescott Joule v roku 1843 a zistil (rôznymi experimentálnymi technikami), koľko mechanickej práce treba vykonať aby to viedlo k rovnakému zvýšeniu teploty ako pri „dodaní“ 1 jednotky tepla. Odtiaľ ten názov mechanický ekvivalent tepla.
Štandardná hodnota „mechanického ekvivalentu tepla“ je

$$\boxed{1\ \text{kcal} = 4.186\ \text{kJ}}$$

„Vedenie“ tepla

Spomenuli sme, že tepelná práca sa koná pri tepelnom kontakte medzi dvoma objektami. Kalorimetrická rovnica nám potom pri meraní zmien teploty, koľko tepla bolo v procese vykonané.

Rafinovaniejšií spôsob kontroly nad konaným teplom spočíva v kontakte cez „takmer izolujúci medzikus“. Medzikus je z malého množstva látky, ktorá má veľmi nízke merné teplo, takže „pre seba si ukradne“ len zanedbateľnú energiu a zabezpečí len pomalý „prenos tepla z objektu 1 do objektu 2“. Korektnejšia formulácia by bola takáto:

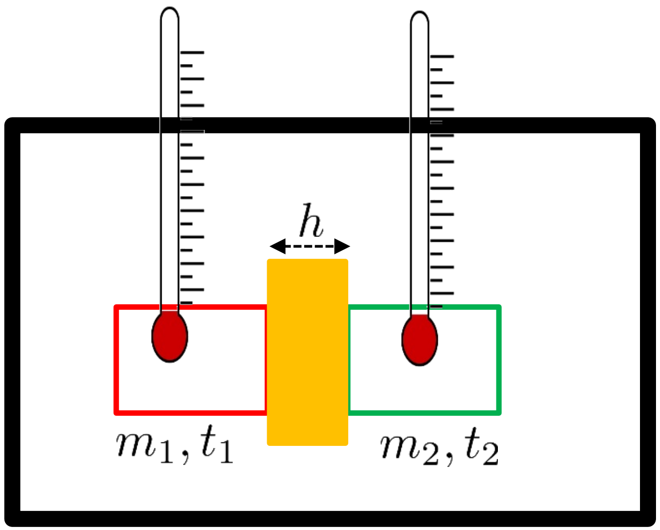


Na styku objekt 1 s medzikusom koná objekt 1 tepelnú prácu, čo zvyšuje energiu kontaktnej vrstvy materiálu medzikusa. Prvá vrstva medzikusa ale bude konať tepelnú prácu nad druhou vrstvou. Energia prvej vrstvy ale podľa predpokladu vzrastie len málo, takže teplo konané prvou vrstvou nad druhou vrstvou je prakticky rovnaké ako teplo konané objektom 1 nad prvou vrstvou. A tak ďalej po vrstvách až po styk s objektom 2.

Po veľmi dlhom čase sa teploty objektov 1 a 2 vyrovnajú, ale môžeme sledovať ten proces postupne, takže v nejakom okamihu τ budú teploty tých objektov t_1', t_2'. Vtedy bude platiť kalorimetrická rovnica $m_1c_1(t_1 - t_1') = m_2c_2(t_2' - t_2)$. Celkové množstvo tepla, ktoré objekt 1 vykonal za čas τ potom je

$$Q(\tau) = m_1c_1(t_1 - t_1')$$

„Vedenie“ tepla



$$Q(\tau) = m_1 c_1 (t_1 - t_1')$$

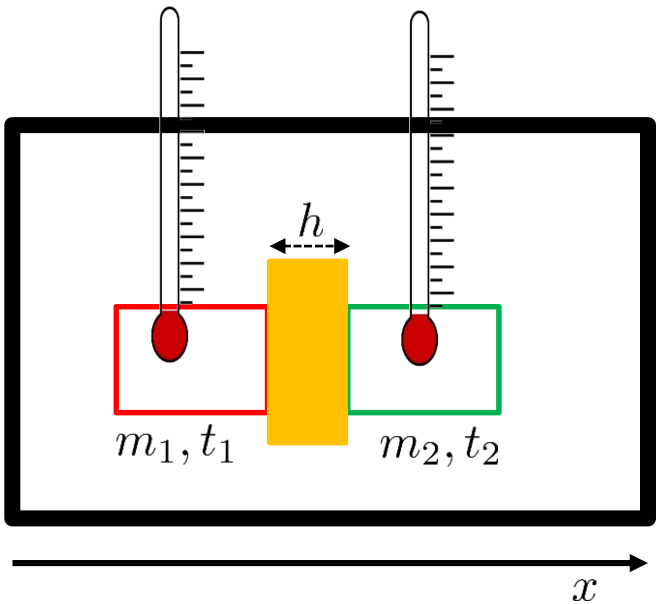
Toto je množstvo tepla vykonaného objektom 1 nad objektom 2 za čas τ. Pri lepšie izolujúcom materiáli „medzikusa“ bude potom toto vykonané množstvo tepla menšie. Izolačné vlastnosti „medzikusa“ môžeme v takomto experimentálnom usporiadaní merať a zisťovať, od čoho závisí teplo vykonané za jednotku času.

Všetci „normálni“ ľudia tomu ale hovoria „teplo prenesené medzikusom“ za jednotku času. S vedomím, že sa neprenáša teplo ale de facto energia, si aj my nebudeme dávať paranoidný pozor na terminológiu a budeme hovoriť o „vedení tepla“.
Experimentálne sa pozoruje, že množstvo preneseného tepla je priamo úmerné času τ, veľkosti styčnej plochy S, nepriamo úmerné hrúbke izolačného materiálu h a priamo úmerné rozdielu teplôt na „vstupe“ a „výstupe“ $(t_1 - t_2)$. Vyjadrené matematicky

$$\boxed{Q = \lambda \tau S \frac{t_1 - t_2}{h}}$$

koeficient λ sa volá koeficient vedenia tepla a je materiálovou charakteristikou. Rovnica sa volá rovnica vedenia tepla.

„Vedenie“ tepla



$$Q = \lambda \tau S \frac{t_1 - t_2}{h}$$

V učebniciach „rovnicu vedenia tepla“ častejšie nachádzame zapísanú v tvare

$$\boxed{j_Q = -\lambda \frac{dt}{dx}}$$

Veličina na ľavej strane sa volá hustota prúdu tepla a udáva, má význam prenosu tepla za jednotku času cez jednotku plochy. Udáva sa teda v jednotkách $Js^{-1}m^{-2}$. Zlomok

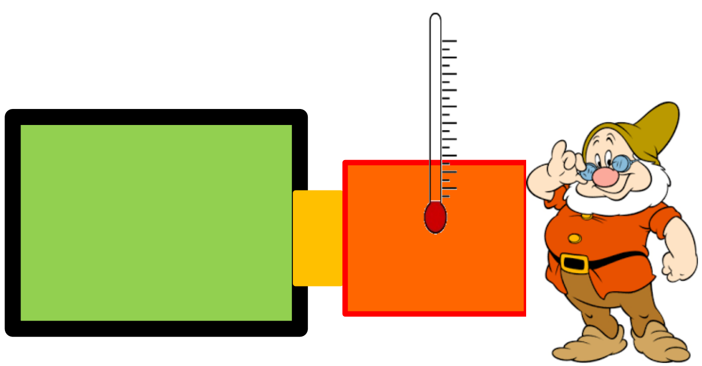
$$\frac{t_1 - t_2}{h}$$

v rovnici vedenia tepla vyjadruje vlastne rýchlosť poklesu teploty so vzdialenosťou v smere x, preto sme ho nahradili záporným gradientom (deriváciou) teploty podľa premennej x. Záporným preto, že poradie v čitateli uvedeného zlomku je opačné ako v definícii derivácie. Ak gradient teploty je záporný, dostaneme kladný „tok tepla“ v smere x, ako intuitívne očakávame, lebo „teplo tečie od teplejšieho telesa k chladnému“.

Trpaslík „kurič“

Postupne budeme skúmať rôzne procesy, najmä v plynoch, pri ktorých sa bude kontrolovane meniť teplota, tlak, objem, bude sa konať mechanická práca a teplo. Najlepšie je predstaviť si pomocných laborantov, budem ich volať „trpaslíci“, ktorý dostanú presné inštrukcie pre sledovanie nejakých meracích prístrojov a ovládanie nejakých vonkajších objektov.

Prvý pomocník sa bude volať „trpaslík kurič“. Jeho úlohou bude vykonať nad vyšetrovaným systémom nejaké teplo Q. Systém je dokonale tepelne izolovaný, nemôže dôjsť k nekontrolovanému konaniu tepla. Ak úloha pre kuriča bude „dodať“ systému kladné množstvo tepla Q, zoberie si nejaký externý objekt o hmotnosti m a mernom teple c zahriaty na teplotu vyššiu ako je teplota systému. Potom urobí do izolácie systému otvor a do otvoru presne nasadí slabo tepelne vodivý medzikus na ktorý priloží v tepelnom kontakte zahriaty objekt, ktorého teplotu sleduje kým **poklesne** oproti počiatočnej teplote o hodnotu Δt, pre ktorú platí $Q = mc|\Delta t|$. Je zrejmé, že do systému „dodal“ požadované kladné teplo Q.



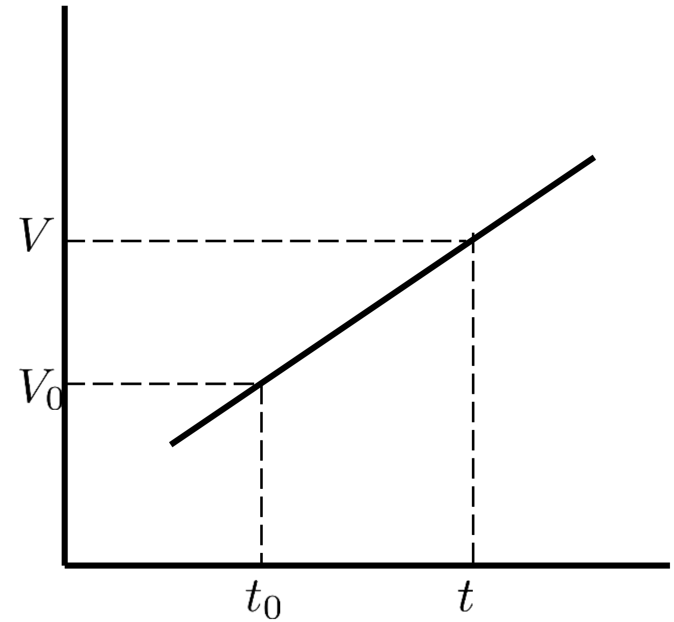
Keby požiadavka bola dodať **záporné** teplo, zoberie si objekt chladnejší ako vyšetrovaný systém a dočká, až jeho teplota **stúpne** o hodnotu Δt, pre ktorú platí $|Q| = mc\Delta t$.

Trpaslík kurič bude pre nás neskôr robiť aj ďalšie operácie. V technickej praxi sa zariadenie, ktoré obsluhuje trpaslík kurič volá **výmenník tepla**.

Teplotná rozťažnosť látok

Ortuťový teplomer definoval, že ortuť sa rozťahuje lineárne s teplotou. To nie je prírodný zákon ale (zatiaľ) súčasť definície teploty. Potom môžeme skúmať, ako je to s objemom iných látok pri rôznych teplotách. A objavíme, že látky s rastúcou teplotou spravidla zväčšujú pri konštantnom vonkajšom tlaku svoj objem a to lineárne (resp. takmer lineárne) v prakticky zaujímavom intervale teplôt. Lineárna závislosť znamená že pre závislosť objemu na teplote platí vzťah (β sa volá koeficient objemovej rozťažnosti).

$$V = V_0(1 + \beta(t - t_0))$$



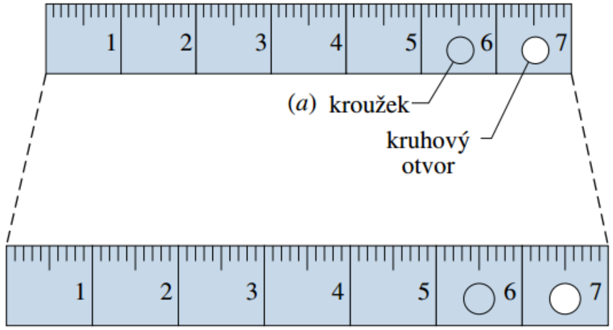
Všimnime si, že tu máme na mysli relatívnu objemovú rozťažnosť: väčší objem látky má väčší prírastok objemu pri tom istom zvýšení teploty. Vyplýva to z prirodzeného predpokladu, že „každý kubický centimeter“ tej látky sa roztiahne rovnako, preto 10 cm^3 sa roztiahne 10-x viac ako 1 cm^3. Tento predpoklad je prirodzený, ale nie logicky nevyhnutný. **Premyslite si, prečo je prirodzený, ak látky sú zložené z molekúl.**

Dĺžková rozťažnosť

Objemová teplotná rozťažnosť je vlastnosť všetkých látok. U tuhých látok (ktoré na rozdiel od tekutín majú svoj vlastný tvar neurčený nejakou nádobou) môžeme hovoriť aj o dĺžkovej rozťažnosti (v nejakom smere). Aj tu pozorujeme že v dosť veľkom intervale teplôt sa rozmery látok zväčšujú takmer lineárne, teda podľa zákona (α sa volá koeficient dĺžkovej rozťažnosti rozťažnosti).

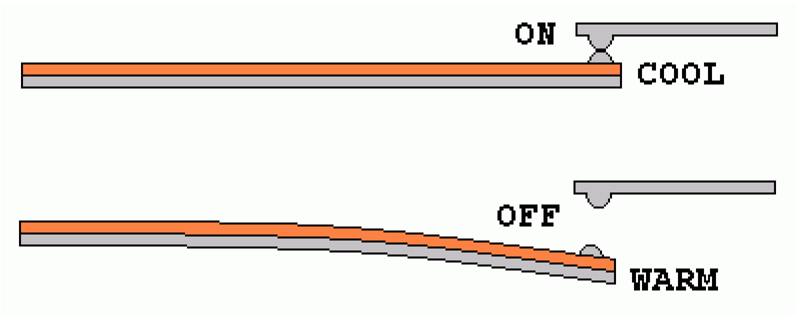
$$d = d_0(1 + \alpha(t - t_0))$$

Pre veľa tuhých látok je hodnota koeficientu rozťažnosti rádovo $\alpha \approx 10^{-5}$/°C.
Pri izotropných látkach sú koeficienty dĺžkovej rozťažnosti v každom smere rovnaké a teda pre objemovú rozťažnosť dostaneme $\beta \approx 3\alpha$.



Oceľové pravítko pri dvoch teplotách. Stupnica, čísla, priemer vyrytého kruhu aj priemer kruhového otvoru sa menia v rovnakom pomere.

Bimetalový teplotný vypínač



Deje v plynoch

V tejto prezentácii zhrnieme prevažne experimentálne poznatky historicky získané pred sformulovaním molekulovej hypotézy. Všetko sa bude týkať plynov, lebo to sú látky s jednoduchou štrukúrou. Dnes vieme, že sa skladajú z molekúl, ale tie sa v obvyklých podmienkach nachádzajú ďaleko (vyjadrené v rozmeroch typických pre svet molekúl) od seba a teda ich vzájomná interakcia sa dá väčšinu času zanedbať, s výnimkou zrážok molekúl. Preto makroskopické rovnice pre plyny sú dosť jednoduché a aj kvalitatívne pochopenie základných procesov je tiež jednoduché.

Takže väčšinou budeme imitovať starých experimentátorov, teda, že nevieme, že plyny sa skladajú z molekúl. Ale často potom tam, kde to nebude príliš zložité, ozrejmíme si aj to, ako sa na diskutovanú vec díva dnešná fyzika „očami molekúl“.

Stav plynu. Rovnovážny stav.

Pre človeka, ktorý nevie o molekulách, je plyn „nové fyzikálne zviera“, ktorému sa nedá bezprostredne rozumieť ak rozumieme napríklad mechanike hmotných bodov. Je to „zviera“ vypĺňajúce nejaký objem priestoru, je to kontinuum a keď ho chceme ovládať, musíme nejako vyexperimentovať ako sa správa a potom naplniť základný fyzikálny program,

- teda povedať ako sa zapíše momentálny stav plynu a
- ako sa potom dá predpovedať budúcnosť, teda zmeny stavu pri interakcii s vonkajším svetom.

Vo všeobecnosti sú stavy plynu a deje v plyne veľmi komplikovaná vec (koniec koncov napríklad „počasie“ je v istom priblížení „časový vývoj stavov vzduchu“).
Fyzici si ale skoro všimli, že istá podmnožina stavov plynu sú jednoduché stavy. Sú to tzv. **rovnovážne stavy**.
Ide o toto. Ak plyn v ľubovoľnom stave dokonale izolujeme od okolia a „ponecháme ho samého na seba“, potom spravidla na začiatku sa s plynom dejú všakové aj dosť divoké deje ale po uplynutí istej doby deje utíchnu, plyn vyzerá staticky, nemení svoj „experimentálne pozorovateľný stav“. Takýto stav, ktorý sa už sám o sebe nemení, sa nazýva rovnovážny stav plynu.
Zaregistrovali sme teda prírodný zákon: **Izolovaný plyn samovývojom prejde do rovnovážneho stavu**.

Vratné deje

V našej ďalšej diskusii sa obmedzíme iba na rovnovážne stavy (budeme sa tváriť ako keby žiadne iné stavy ani neexistovali). Ak aj budeme skúmať nejaké deje, potom iba také, keď počas deja stav „neopustí množinu rovnovážnych stavov“. Keďže rovnovážny stav sa už samovoľne nemení, skúmané deje budú prebiehať vplyvom vonkajších objektov. Ak dej nemá opustiť podmnožinu rovnovážnych stavov, potom tie vonkajšie vplyvy musia byť dostatočne „opatrné“. Také, že keď sa vplyv preruší, dej už samovoľne nepokračuje ďalej, lebo predpokladáme, že sledovaný systém je stále v rovnovážnom stave. Prerušenie vonkajšieho vplyvu znamená okamžité zastavenie deja.

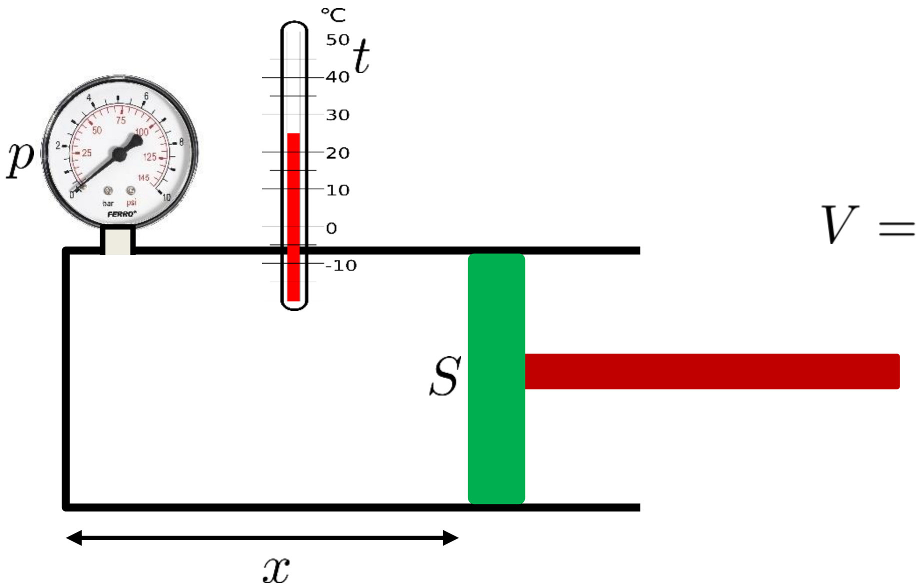
Takto prebiehajúce deje nazývame **vratné deje**. Názov pochádza z toho, že ak taký dej prebieha pod nejakým vonkajším vplyvom, potom infinitezimálnou zmenou toho vplyvu možno dosiahnuť, že dej začne prebiehať „opačným smerom“.

Rovnovážne stavy plynu

Experimentálna skúsenosť hovorí, že ak uvažujeme nejaké fixné množstvo (hmotnosť, počet molekúl) nejakého plynu, potom rovnovážne stavy možno jednoznačne určiť definovaním len dvoch (makroskopických) veličín. Najčastejšie sa vyberá nejaká dvojica z trojice možností

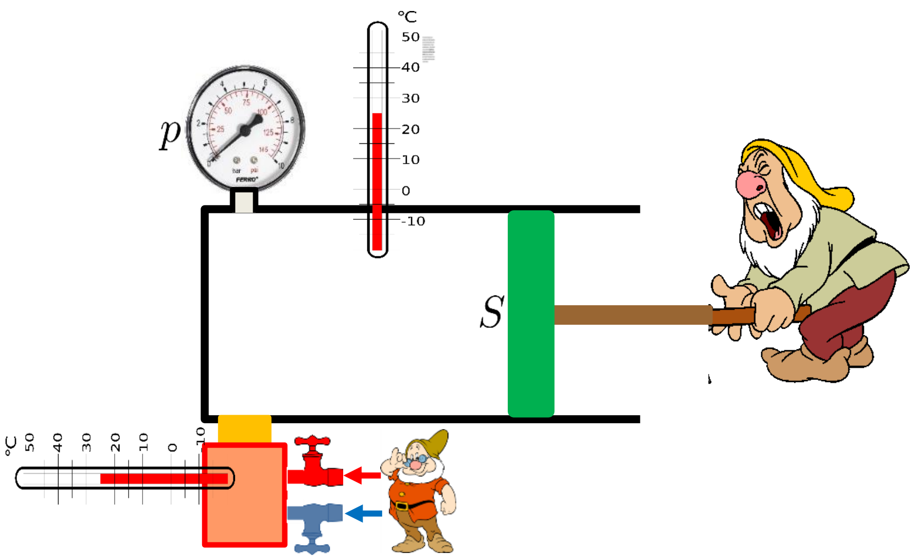
- objem
- tlak
- teplota

Tlak plynu sa zistí tlakomerom, teplota teplomerom a objem spravidla výpočtom, z rozmerov kontajnera, v ktorom je skúmaný plyn uzavretý.
Ak chceme skúmať rovnovážne stavy toho istého plynu pri rôznych objemoch, je potrebné ľahko (a pri tom dosť opatrne, aby dej bol vratný) meniť objem kontajnera, v ktorom sa plyn nachádza. Zariadi to „variabilná stena" kontajnera, technicky realizovaná ako utesnený **piest**



$$V = S \times x$$

Deje v plynoch - experimentálne usporiadanie



Chceme sledovať vratné deje v plynoch, potrebujeme „zvonku“ ovládať (nastavovať) dva parametre. Zamestnáme trpaslíka kuriča, ktorý bude vykonávať tepelnú prácu a tým nejako ovplyvňovať parametre t, p. Bude mať zásobník na vodu, do ktorého môže **pripúšťať horúcu a studenú vodu a tým nastaviť ľubovoľne teplotu zásobníka**, čo ovplyvní „transport tepla“ do plynu v kontajneri. Poznamenajme, že miešanie vody v zásobníku nemusí byť vratný dej (netýka sa plynu v kontajneri).

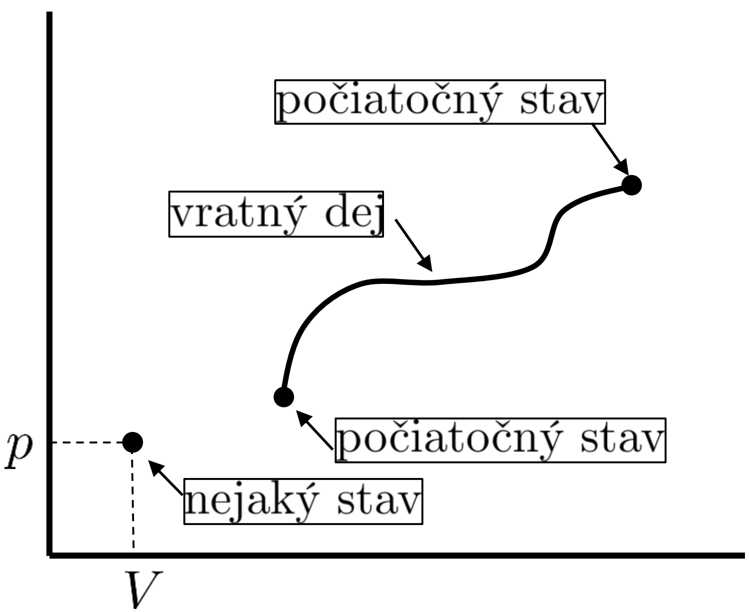
Vratnosť je zabezpečená tým, že transport tepla sa deje cez látku s malým koeficientom vedenia tepla, takže konanie tepla nad plynom v kontajneri je pomalý vratný dej.

Zjavne potrebujeme ešte jeden nezávislý vonkajší vplyv, lebo nemôžme nezávisle ovládať dva parametre t, p kontrolou iba jedného parametra, vykonaného tepla Q.

K piestu preto angažujeme druhého trpaslíka, budeme ho volať **„tlačič“**. On priamo ovláda parameter V. Koordinovaným úsilím sa po nejakom čase naučia nastaviť vratným spôsobom vychádzajúc z ľubovoľného rovnovážneho stavu nový stav dopredu zvolenými hodnotami ľubovoľnej dvojice parametrov z množiny p, V, t. V ďalšej diskusii potom uvidíme, ako to asi môžu robiť.

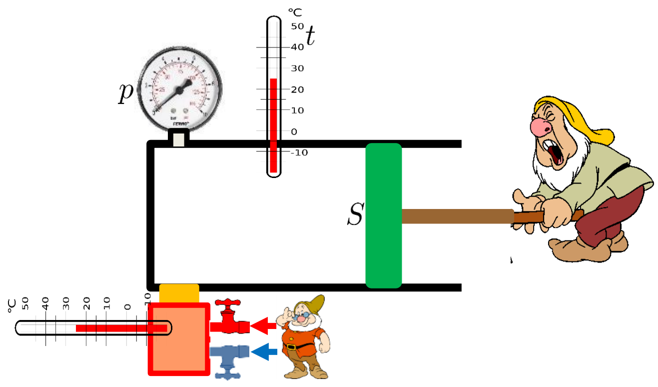
Stavový diagram *p,V*

Už sme povedali, že priestor rovnovážnych stavov plynu je dvojrozmerný, rovnovážny stav môžeme zadať nezávislou voľbou dvoch parametrov. Graficky potom môžeme vizualizovať priestor rovnovážnych stavov v rovinnom diagrame, často to býva p, V diagram. Rovnovážnemu stavu potom zodpovedá bod na diagrame, vratnému deju nejaká čiara



Uvedomme si, že na tomto diagrame sa dajú jednoznačne zobraziť iba rovnovážne stavy a iba vratné deje. Nerovnovážny stav sa nedá jednoznačne zobraziť, lebo na jeho zadanie treba viac parametrov. Napríklad ak urobíme umelo nerovnováhu tak, že natlačíme molekuly iba do jednej polovice kontajnera, potom ten stav nie je charakterizovaný jedinou hodnotou tlaku. Tlak v polovici zaplnenej plynom je vysoký, v prázdnej polovici nulový: dva manometre ukážu rôzne hodnoty. Preto vizualizácii takého nerovnovážneho stavu nezodpovedá bod na p, V diagrame. Vratný dej je (hustá, spojitá) postupnosť rovnovážnych stavov, preto vratnému deju zodpovedá čiara na p, V diagrame.

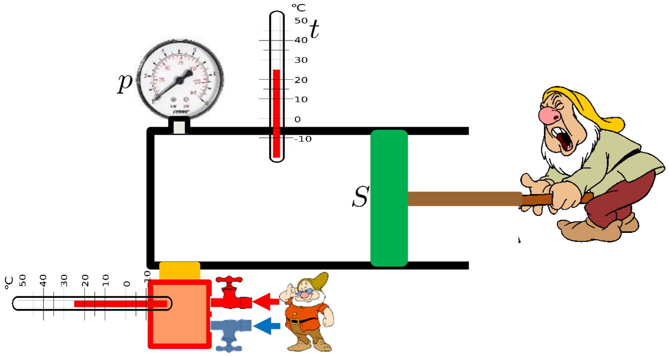
Izotermický dej (vratný)



Podumajme, aké príkazy dať tlačičovi a kuričovi, aby prebiehal izotermický dej, teda kontinuálna zmena stavu pri **zachovaní konštantnej hodnoty teploty** plynu. Stavy sa majú postupne meniť, takže sa bude meniť p, V pri konštantnom t. Cieľom je napríklad zvýšiť objem z počiatočnej hodnoty V_1 na objem $V_2 > V_1$.

- **Príkaz pre kuriča**: „Sleduj teplomer plynu a pred začatím pokusu si namiešaj (prilievaním teplej a studenej vody) vo svojom „zásobníku tepla“ takú istú teplotu, aká je teplota plynu v kontajneri. Počas deja neustále sleduj teplomer. Keby teplota začala trochu klesať, prilej teplej vody do zásobníka, čo zvýši transport tepla do plynu v kontajneri, keby teplota mala tendenciu stúpať, podchlaď priliatím studenej vody zásobník pod teplotu plynu v kontajneri, čo spôsobí „opačný transport tepla z plynu do zásobníka“ a vráti teplotu na požadovanú hodnotu. Takto kurič primitívne realizuje čosi, čomu sa hovorí v technickej praxi **termostat**.
- **Príkaz pre tlačiča**: na začiatku tlač na piest silou $\mathrm{F} = p.S$, ktorá akurát vyrovná aktuálny tlak plynu v kontajneri, piest bude stáť. Potom málinko zníž silu tvojich rúk, takže piest sa začne posúvať doprava a zväčšovať objem kontajnera. Ustúp doprava a postupne tak pokračuj, až kým nedosiahneš želaný výsledný objem. Rob to pomaly, aby kurič stačil udržiavať konštantnú teplotu. Priebežne zapisuj postupnosť hodnôt V, p.

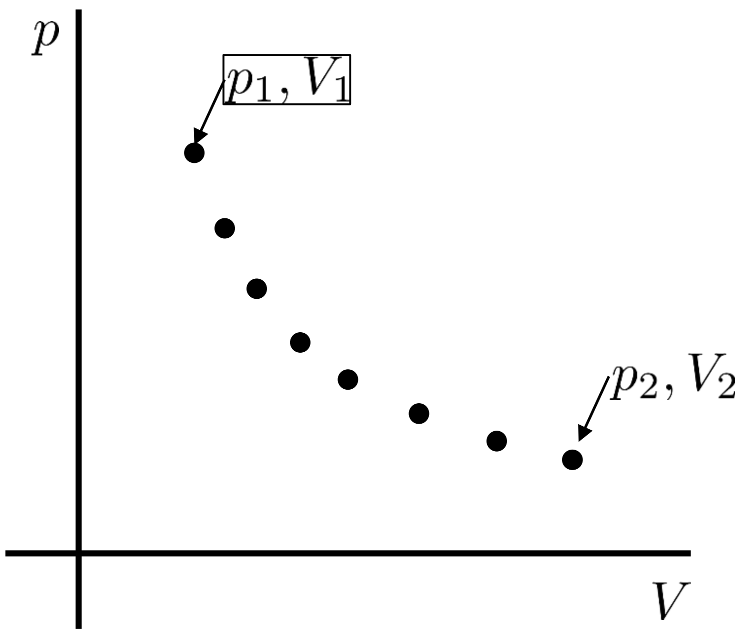
Myšlienkové experimenty



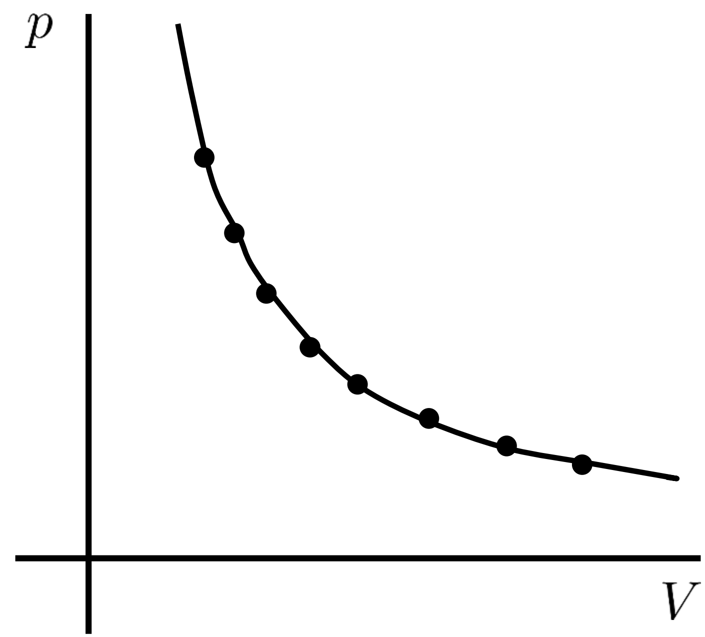
Predchádzajúci „detinský“ popis experimentu s izotermickým dejom je možno sčasti odrazom postupného zdetinšťovania mysle starnúceho učiteľa. Ale chceným cieľom bolo ukázať na primitívnom príklade techniku „**myšlienkového experimentu**“. To je čosi ako „návod na skutočný experiment“ ktorý možno nikdy nevykonáme a často je to mierne zjednodušený návod s vynechaním podrobností, ktoré považujeme za nepodstatné pre principiálne fungovanie. (V skutočnom experimente napríklad môže dať veľa práce vyriešiť ako zatesniť výmenník tepla aby plyn ani neunikal ani sa nekontaminoval výparmi tesniacej vazelíny.) Myšlienkový experiment nás má zachrániť pred spakruky sformulovanými vetami typu „potom izotermicky zvýšime objem na hodnotu V_2“, lebo by sa mohlo stať, že taká zmena nie je v princípe vykonateľná. Majstrami v technike myšlienkového experimentu boli Einstein a Feynman a veruže sa im to vyplatilo. Myšlienkové experimenty im pomohli vycizelovať úvahy, no a potom už len Štokholm (Feynman bol už chorý, Nobelovu cenu mu priniesli domov.)

Cvičte si techniku myšlienkového experimentu rozpitvávaním vecí, ktoré počujete na prednáškach, možno budete prekvapení, keď pri tom objavíte, čomu všetkému nerozumiete.

Izotermický dej (vratný)



Takto nejako by mohol vyzerať graf so záznamami trpaslíka tlačiča o hodnotách p, V pri vratnom izotermickom deji



Keď už máme záznam o pároch hodnôt p, V môžeme skusmo nájsť vzorec pre funkciu $p(V)$ tak, aby si namerané hodnoty „ľahli" na graf tej funkcie. V dnešnej dobe to počítač urobí za okamih, voľakedy to dalo zrejme viac roboty. Experimentálne sa našlo, že rovnica izotermy je

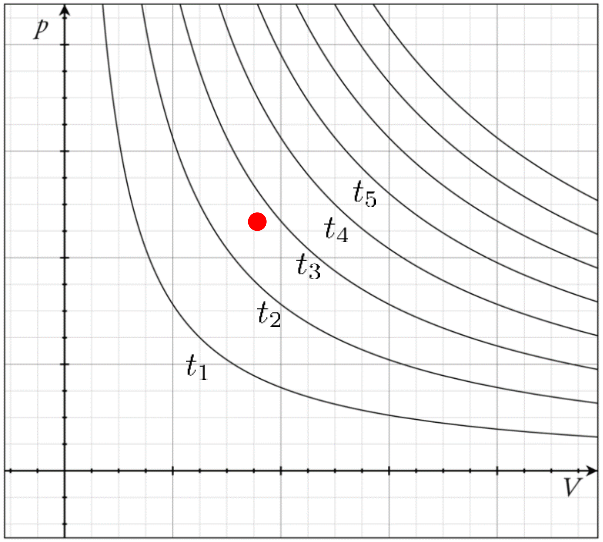
Boyle Mariottov zákon:

$$pV = \text{const}$$

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

Izotermy ideálneho plynu

Boyle Mariottov zákon nie je absolútne presný, pre reálne plyny platí dosť dobre len v istej oblasti p, V —diagramu a presne platí len pre hypotetické ideálne plyny. To sú také, ktorých molekuly sa navzájom „necítia“ (neinteragujú). Na p, V —diagrame ideálneho plynu si môžeme dopredu nakresliť sústavu izoterm pre rôzne konštantné teploty. Bude to vyzerať ako na tomto obrázku pre teploty $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5 < \cdots$



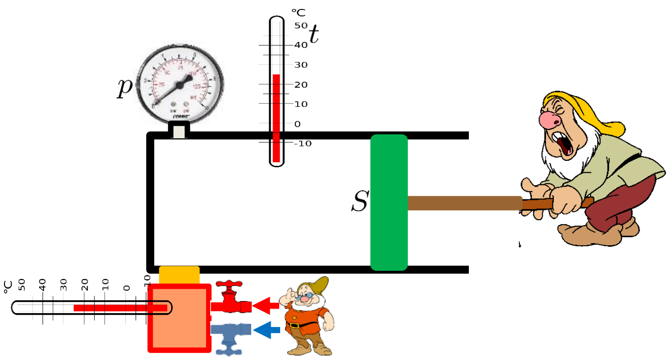
Rovnovážnemu stavu stále zodpovedá bod na p, V —diagrame, ale ak sú na diagrame predkreslené označené izotermy, potom pre znázornený bod môžeme odčítať nielen hodnoty p, V na osiach ale môžeme určiť aj teplotu toho stavu tak že zistíme medzi ktorými izotermami sa nachádza a potom interpoláciou zistíme teplotu aj trochu presnejšie Napríklad, len tak od oka, červený bod na obrázku leží približne v 1/3 vzdialenosti medzi izotermami t_2, t_3. Teplota teda bude približne

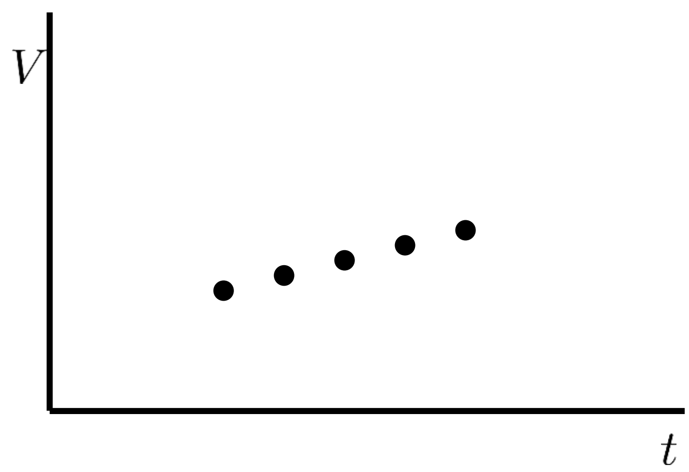
$$t = \frac{2}{3}t_3 + \frac{1}{3}t_2$$

Izobarický dej

Idea je zistiť, ako sa mení objem plynu s teplotou pri konštantnom tlaku, napríklad chcem zvýšiť teplotu z t_1 na $t_2 > t\_1$. Experiment sa dá vykonať za pomoci tlačiča a kuriča. Kuričovi poviem, aby kontrolovaným prenosom tepla pomaly zvyšoval teplotu až na t_2. A to tak, aby tlačič stíhal udržiavať konštantný tlak.

Tlačičovi dám komplikovanejší príkaz: „Sleduj tlakomer a snaž sa udržať konštantný tlak počas toho ako bude kurič „kúriť". Ak bude mať tlak tendenciu stúpať, málička posuň piest doprava aby si zväčšil objem a tlak sa vrátil na požadovanú hodnotu. Ak naopak tlak začne klesať, potlač trošku piest doľava aby si zmenšil objem a tlak naspäť stúpol na požadovanú hodnotu. V priebehu deja zapisujte dvojice hodnôt V, t. Experiment na V, t –diagrame dopadne nejako takto:

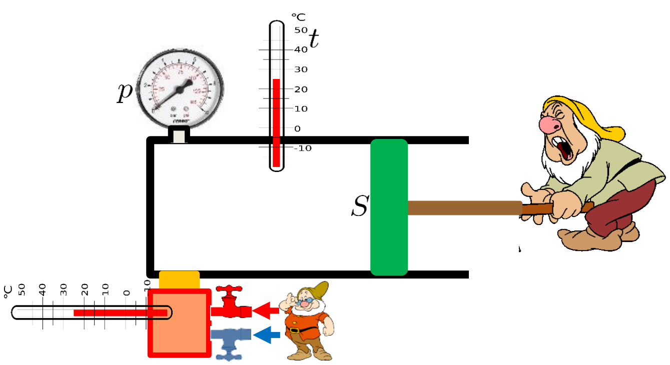


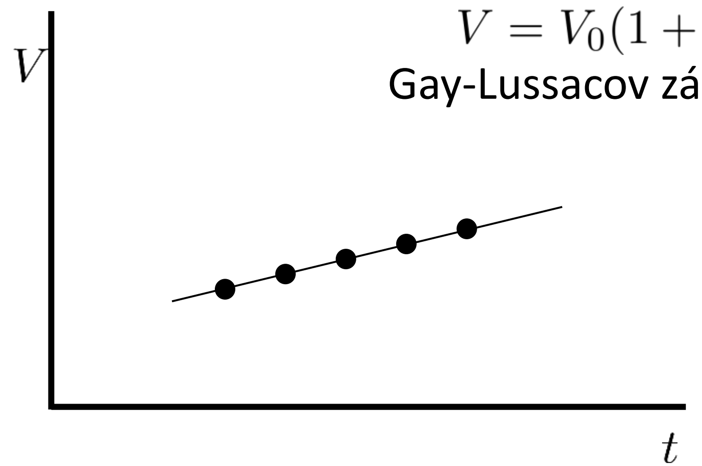


Izobarický dej

Idea je zistiť, ako sa mení objem plynu s teplotou pri konštantnom tlaku, napríklad chcem zvýšiť teplotu z t_1 na $t_2 > t\_1$. Experiment sa dá vykonať za pomoci tlačiča a kuriča. Kuričovi poviem, aby kontrolovaným prenosom tepla pomaly zvyšoval teplotu až na t_2. A to tak, aby tlačič stíhal udržiavať konštantný tlak.

Tlačičovi dám komplikovanejší príkaz: „Sleduj tlakomer a snaž sa udržať konštantný tlak počas toho ako bude kurič „kúriť“. Ak bude mať tlak tendenciu stúpať, máličko posuň piest doprava aby si zväčšil objem a tlak sa vrátil na požadovanú hodnotu. Ak naopak tlak začne klesať, potlač trošku piest doľava aby si zmenšil objem a tlak naspäť stúpol na požadovanú hodnotu. V priebehu deja zapisujte dvojice hodnôt V, t. Experiment na V, t −diagrame dopadne nejako takto:





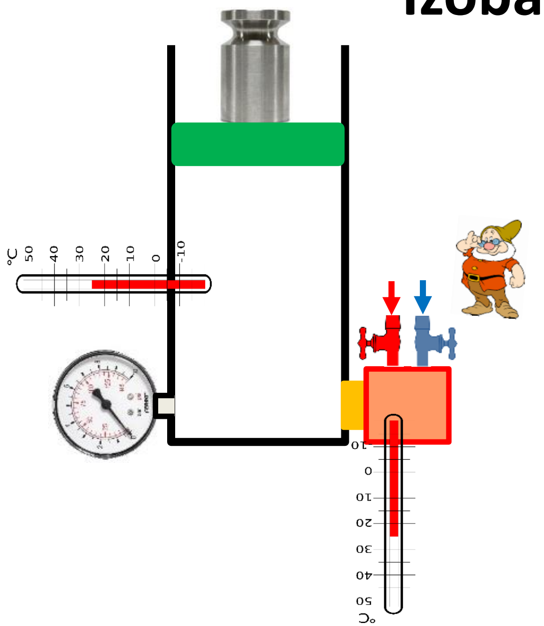
Bodmi sa dá preložiť priamka

$$V = V_0(1 + \gamma(t - t_0))$$

Gay-Lussacov zákon

Koeficient γ je koeficient objemovej rozťažnosti plynu.

Izobarický dej jednoduchšie

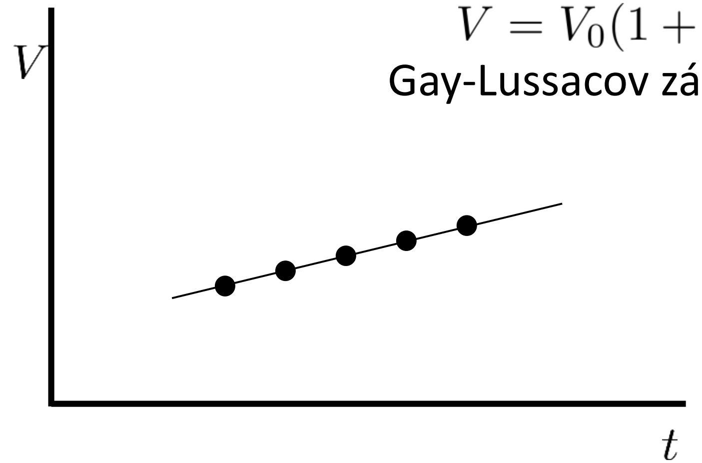


Jednoduchšie je dať tlačičovi voľno a zaťažiť piest závažím vypočítaným tak, aby v gravitačnom poli spolu s vonkajším atmosférickým tlakom udržiavalo „automaticky“ želanú hodnotu tlaku plynu.

Bodmi sa dá preložiť priamka

$$V = V_0(1 + \gamma(t - t_0))$$

Gay-Lussacov zákon



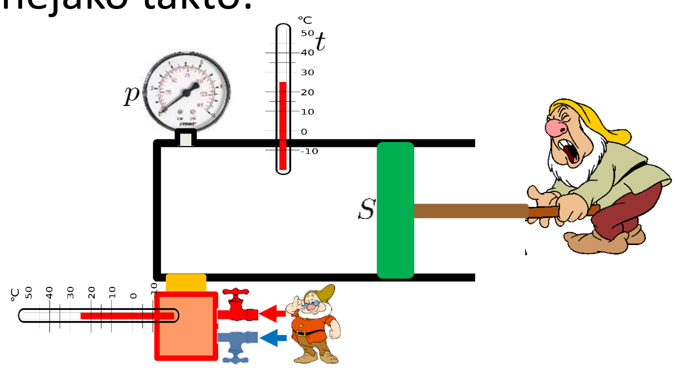
Koeficient γ je koeficient objemovej rozťažnosti plynu.

Izochorický dej

Idea je zistiť, ako sa mení tlak plynu s teplotou pri konštantnom objeme, napríklad chcem zvýšiť teplotu z t_1 na $t_2 > t\_1$. Experiment sa dá vykonať za pomoci tlačiča a kuriča. Kuričovi poviem, aby kontrolovaným prenosom tepla pomaly zvyšoval teplotu až na t_2. A to tak, aby tlačič stíhal udržiavať konštantný objem.

Tlačičovi dám komplikovanejší príkaz: „Konštantný objem sa nedá udržať tak, že budeš držať piest na mieste. Problém je v tom, že s meniacou sa teplotou sa menia aj rozmery kontajnera. Takže meraj neustále rozmery kontajnera a posúvaj piest tak, aby objem plynu pri zmenených rozmeroch ostával konštantný.“

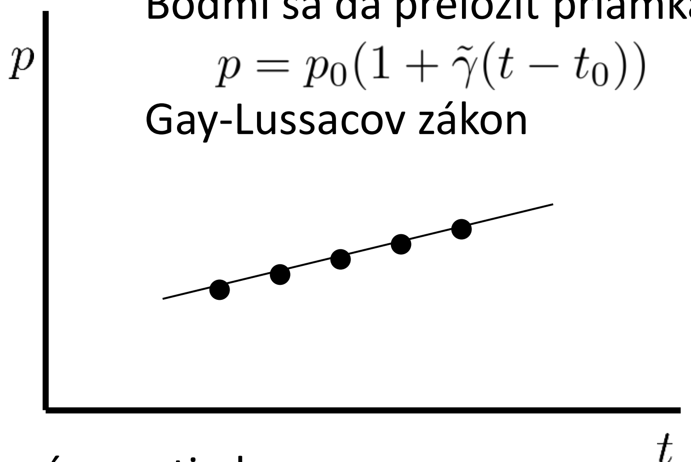
V priebehu deja zapisujte dvojice hodnôt p, t. Experiment na p, t −diagrame dopadne nejako takto:



Bodmi sa dá preložiť priamka

$$p = p_0(1 + \tilde{\gamma}(t - t_0))$$

Gay-Lussacov zákon



Koeficient $\tilde{\gamma}$ sa volá koeficient tepelnej rozpínavosti plynu.

Vratné deje v ideálnom plyne

Pre ideálny plyn sa našli jednoduché zákony

- izotermický dej $pV = p_0 V_0$
- izobarický dej $V = V_0(1 + \gamma(t - t_0))$
- izochorický dej $p = p_0(1 + \tilde{\gamma}(t - t_0))$

Uvedené špeciálne deje sa „vyučujú v škole“. Okrem nich existuje veľa iných dejov. Ak vychádzam zo stavu p_0, V_0, môžem na pV-diagrame nakresliť ľubovoľnú krivku a vyhútať príkazy pre kuriča a tlačiča tak, aby dej sledoval dopredu zvolenú krivku. A potom nájsť príslušný „zákon“. Ukážeme si, že netreba robiť žiadne ďalšie experimenty, stačia dokonca už napríklad izotermický a izobarický zákon a môžem odvodiť zákon pre ľubovoľný dej, ak zvolím nejakú krivku. Nie je na tom nič záhadné, izotermy sú nakreslené podľa dopredu známych rovníc a ak zadám nejakú krivku závislosťou $p(V)$, potom čistá matematika (bez fyzikálneho experimentu) už umožňuje vypočítať priesečníky tejto krivky s izotermami a teda nájsť rovnicu procesu typu $T(V)$. Urobíme to všeobecne, ale najprv dodajme ďalšiu experimentálnu informáciu: **koeficient teplotnej rozťažnosti plynu γ je pre všetky (ideálne) plyny pri rovnakej teplote t_0 rovnaký**, pri 0°C má hodnotu

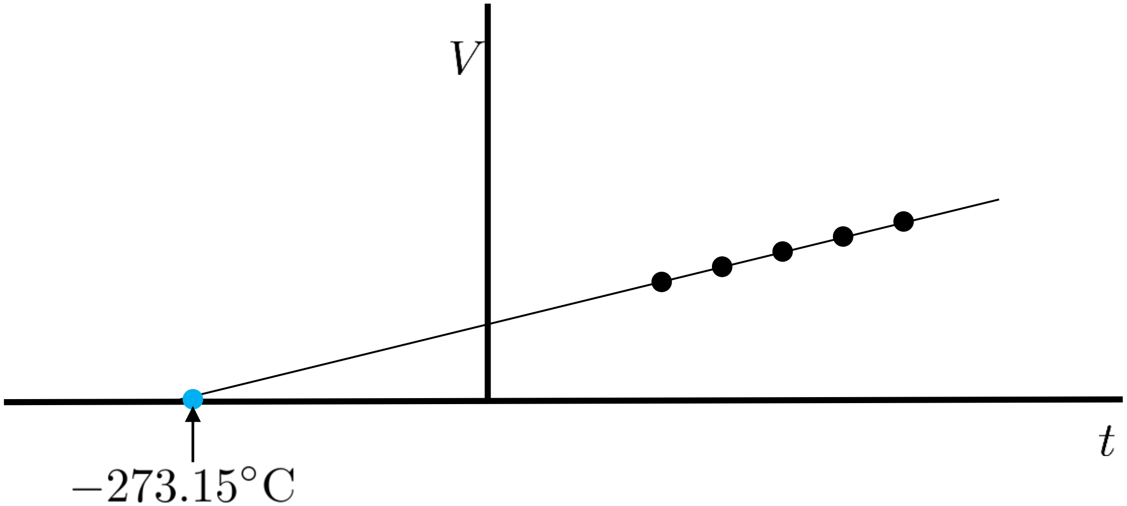
$$\boxed{\gamma_{0^\circ C} = \frac{1}{273.15^\circ C}}$$

Absolútna teplota, Kelvin

Univerzálnosť koeficient rozťažnosti plynov

$$\gamma_{0^\circ C} = \frac{1}{273.15^\circ\mathrm{C}}$$

už potom čisto matematicky vedie k tomu, že **všetky** grafy rozpínavosti (ideálnych) plynov lineárne extrapolované do záporných teplôt pretínajú os teplôt v jednom univerzálnom bode $-273.15^\circ\mathrm{C}$



Kelvina napadlo posunúť počiatok teplotnej stupnice do tohto univerzálneho teplotného bodu. Odvtedy meriame vo fyzike teplotu v Kelvinoch, pričom 0K zodpovedá $-273.15^\circ\mathrm{C}$. Veľkosť „jedného stupňa“ sa nezmenila, teda teplotný rozdiel meraný v Kelvinoch a stupňoch Celzia má rovnakú číselnú hodnotu. Dnešná definícia Kelvinu vychádza z toho že teplotu trojného bodu vody **definujeme** ako 273.16 K.

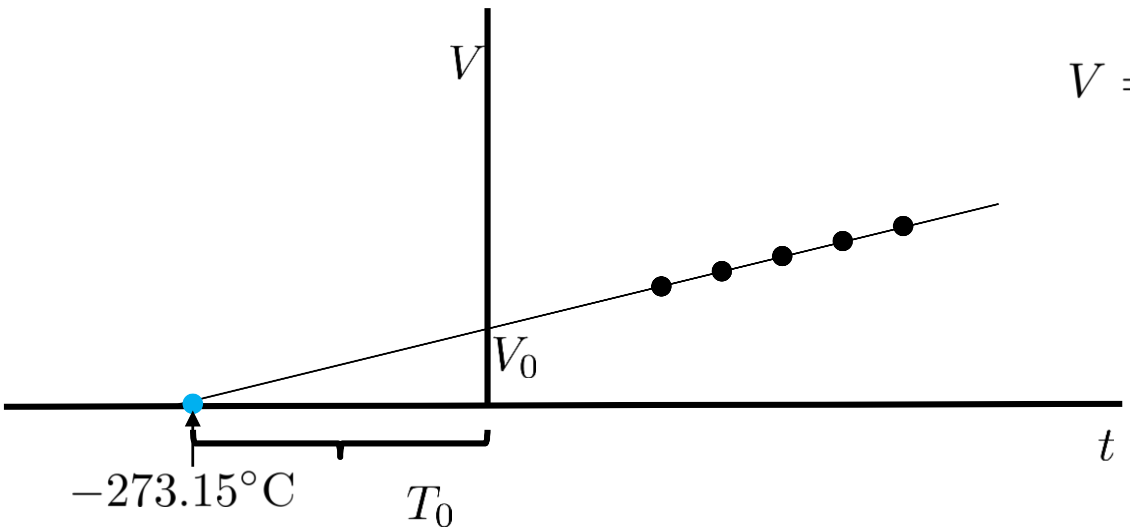
Absolútna teplota, Kelvin

Univerzálnosť koeficient rozťažnosti plynov

$$\gamma_{0^\circ C} = \frac{1}{273.15^\circ\mathrm{C}}$$

už potom čisto matematicky vedie k tomu, že **všetky** grafy rozpínavosti (ideálnych) plynov lineárne extrapolované do záporných teplôt pretínajú os teplôt v jednom univerzálnom bode $-273.15^\circ\mathrm{C}$

$$V = V_0(1+\gamma(t-t_0))$$



Kelvina napadlo posunúť počiatok teplotnej stupnice do tohto univerzálneho teplotného bodu. Odvtedy meriame vo fyzike teplotu v Kelvinoch, pričom 0K zodpovedá $-273.15^\circ\mathrm{C}$. Veľkosť „jedného stupňa“ sa nezmenila, teda teplotný rozdiel meraný v Kelvinoch a stupňoch Celzia má rovnakú číselnú hodnotu. Dnešná definícia Kelvinu vychádza z toho že teplotu trojného bodu vody **definujeme** ako 273.16 K.

Stavová rovnica ideálneho plynu

Zákon pre izobarický dej $V = V_0(1+\gamma(t-t_0))$
prepísané pomocou absolútnej teploty využijúc $\gamma_{0°C} = \dfrac{1}{273.15°C}$

$$V = V_0(1+\frac{1}{T_0}(T-T_0))$$

$$\boxed{\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0}}$$

Toto je Gay-Lussacov zákon prepísaný do absolútnych teplôt

Teraz prejdeme zo stavu p_1, V_1, T_1 do ľubovoľného iného stavu daného pomocou p_2, V_2 vypočítame jeho teplotu T_2 a uvidíme ako stav „2" súvisí so stavom „1". Urobíme to tak, že najprv pôjdeme zo stavu „1" izotermicky do pomocného stavu p_2, V', T_1 a odtiaľ izobaricky do stavu p_2, V_2, T_2. Postupne dostaneme

$$P_1V_1 = p_2V'$$ pri konštantnom T_1, zákon Boyle Mariott

$$\frac{V'}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$ pri konštantnom p_2, zákon Gay-Lussac

Neznáme sú tu V', T_2. Po vylúčení neznámej V' dostaneme rovnicu

$$\boxed{\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2} = \mathrm{const}}$$

Dostali sme stavovú rovnicu ideálneho plynu ako logický dôsledok experimentálnych zákonov Boyle Mariottovho a jedného z dvoch Gay-Lussacových zákonov. Teraz už zo stavovej rovnice môžeme odvodiť Gay-Lussacov zákon pre izochorický dej, ktorý sme doteraz nepoužili. Takže izochorický experiment ani nemusíme robiť.

Stavová rovnica ideálneho plynu

Ppri odvodení stavovej rovnice $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = \mathrm{const}$ sme nepoužili zákon pre izochorický dej, ktorý experimentálne vyzerá takto $p = p_0(1 + \tilde{\gamma}(t - t_0))$

Zo stavovej rovnice pre $V_1 = V_2$ dostaneme zákon

$$\boxed{\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}}$$

Gay-Lussacov zákon

Toto je kompatibilné s „experimentálnym tvarom zákona“ ak sa dá oj v zákone pre izochorický dej presjť k absolútnym teplotám presne rovnako, ako sme to urobili pre izobarľický dej. A to bude len vtedy ak koeficient teplotnej rozpínavosti $\tilde{\gamma}$ je rovný koeficientu teplotnej rozťažnosti γ. Experimentálne je to naozaj tak.

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = \mathrm{const}$$

Konštanta na pravej strane stavovej rovnice môže pre každé množstvo plynu a každý druh plynu iná. Ak si ale spomenieme na Avogadrov zákon

Rovnaké objemy rôznych plynov za rovnakého tlaku a teploty obsahujú rovnaký počet častíc (atómov alebo molekúl)

potom je zrejmé (predumajte si to a presvedčte sa, že je to tak!) že konštanta na pravej strane musí byť úmerná počtu molekúl plynu N a konštanta úmernosti musí byť nejaká univerzálna konštanta. Nazýva sa Boltzmannova konštanta k.

Stavová rovnica ideálneho plynu

Stavová rovnica ideálneho plynu s explicitným uvedením konštanty na pravej strane vyzerá takto:

$$\boxed{pV = NkT}$$

N je počet molekúl (častíc) v uvažovanom množstve plynu, Boltzmannova konštanta má hodnotu

$$k = 1.38064852 \times 10^{-23}\ \mathrm{m^2\ kg\ s^{-2}\ K^{-1}}$$

Počet molekúl vieme ľahko vyjadriť pomocou Avogadrovej konštanty

$$N_A = 6.02214086 \times 1023\ \mathrm{mol}^{-1}$$

$$N = \frac{m}{M} N_A$$

kde m je hmotnosť uvažovaného plynu a M molekulová hmotnosť.
Historicky sa stavová rovnica písala v tvare

$$\boxed{pV = \frac{m}{M} RT}$$

Dôvod bol taký, že veľkosť konštánt k, N_A dlho nebola známa s dostatočnou presnosťou, kým hodnota **plynovej konštanty**

$$\boxed{R = N_A k = 8.3144598\ \mathrm{J\ mol^{-1}\ K^{-1}}}$$

sa dala zmerať priamo porovnaním experimentu so stavovou rovnicou.

Deje v plynoch:
práca, teplo, energia

Zaoberali sme sa dejmi v plynoch z hľadiska dobre merateľných stavových parametrov p, V, T a dospeli sme k stavovej rovnici ideálneho plynu

$$pV = \frac{m}{M}RT$$

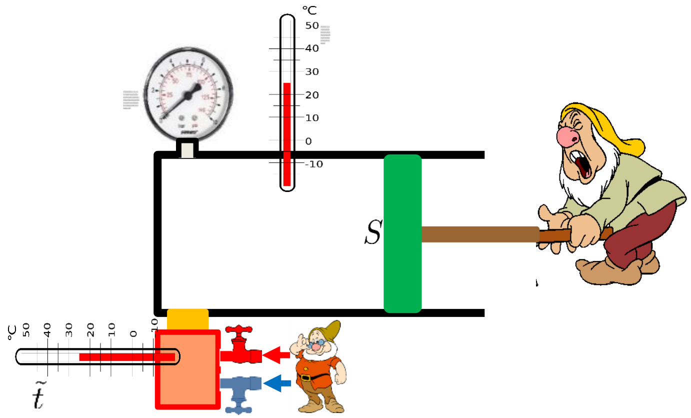
táto rovnica sa v termodynamike charakterizuje prívlastkom „**termická**“ pretože v nej vystupuje teplota (meraná v Kelvinoch) ale žiadna veličina typu práce alebo energie, čo sú veličiny merané v Jouloch.

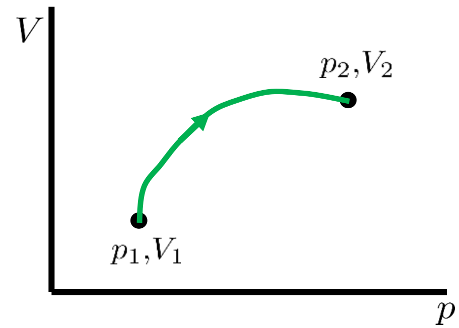
Termodynamika je “náuka o teplote, teple, práci a energii”. Teplota je stavová veličina a vieme ju v danom stave priamo odmerať, máme na to teplomer (čo je trochu mätúci historický názov, možno by bolo lepšie hovoriť teplotomer). Práca a teplo nie sú stavové veličiny, takže ani nemá zmysel pýtať sa na nejaké meracie prístroje ktoré by ich „v danom okamihu zmerali“.

Energia je stavová veličina, ale, napodiv, nemôžeme kúpiť energometer, ktorý by zmeral v danom okamihu a stave systému okamžitú hodnotu celkovej energie toho systému.

Energia v danom okamihu sa nemeria, energia sa počíta podľa vzorcov, o ktorých sme hovorili v súvislosti s Feynmanom. Rovnici, ktorá určí energiu systému v danom stave výpočtom z priamo merateľných stavových veličín sa hovorí **kalorimetrická rovnica**. Je to preto, že kalorimetrické merania zohrali historicky dôležitú úlohu pri spresňovaní pojmov teplo a energia. Takže ideme hľadať kalorimetrickú rovnicu ideálneho plynu.

Deje v plynoch: teplo konané kuričom



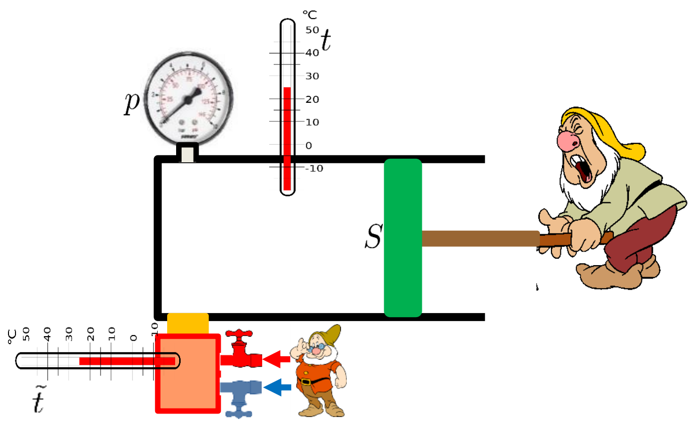


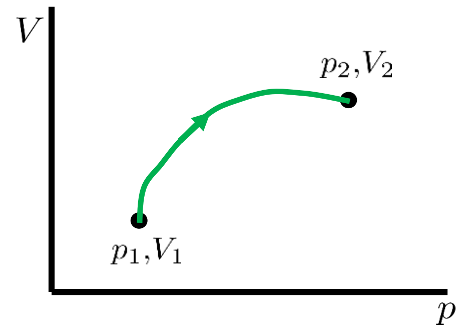
Trpaslíci dostali za úlohu vykonať vratný dej zo stavu p_1, V_1 do stavu p_2, V_2 presne po "zelenej ceste".Obaja sledujú teplomer plynu a počítajú objem a prispôsobujú svoje manipulácie výmenníkom tepla a piestom tak, aby dej naozaj prebiehal po zvolenej ceste. Trpaslík kurič zapisuje v krátkych časových úsekoch zmeny teploty výmenníka $\tilde{t}$: každá taká malá zmena teploty zásobníka dt znamená vykonanie malej tepelnej práce (tepla) δQ. Nakoniec kurič sčíta všetky hodnoty vykonaných (infinitezimálnych) tepiel a dostane celkové vykonané teplo „po zelenej dráhe"

$$Q = \int_1^2 \delta Q$$

Ešte dôležitá poznámka k označovaniu. Zmenu teploty výmenníka sme označili písmenom d, teda písali sme dt, lebo sa to počíta ako rozdiel dvoch teplotných hodnôt, po cudzom diferencia, preto d. **Zodpovedajúce vykonané malé teplo sa ale nepočíta ako diferencia dvoch hodnôt nejakého „momentálneho tepla", symbol δQ má len pripomenúť, že ide o malú hodnotu vykonaného tepla, preto δQ a nie dQ.**

Deje v plynoch: práca konaná tlačičom





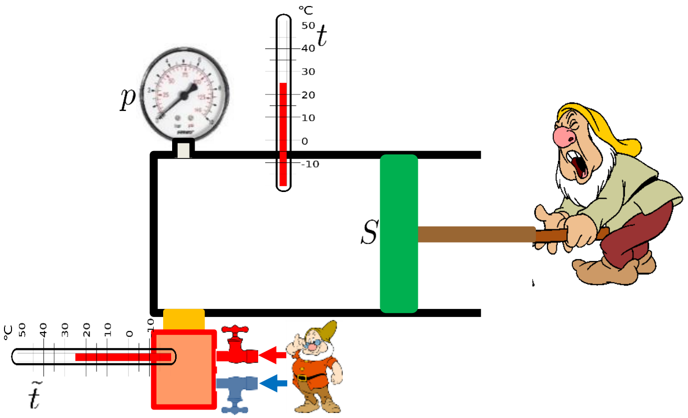
Trpaslík tlačič pomaly mení objem kontajnera po malých kúskoch dV. Túto hodnotu zisťuje meraním malého posunutia piesta dx, pričom zjavne $dV = Sdx$. (V zápise všetky „déčka“ znamenajú poctivé diferencie, sú to všetko rozdiely dvoch okamžitých hodnôt. Pritom tlačič tlačí na piest smerom doľava silou o veľkosti $F = pS$, kde p je okamžitý tlak plynu. To preto, aby sa piest pohyboval pomaly. (Presnejšie povedané tlačí silou let infinitezimálne menšou ako pS, aby sa piest predsa len pomaly pohyboval doprava. Všimnime si že smer sily a dráhy je opačný, takže pri zmene objemu plynu o dV vykoná tlačič zápornú prácu

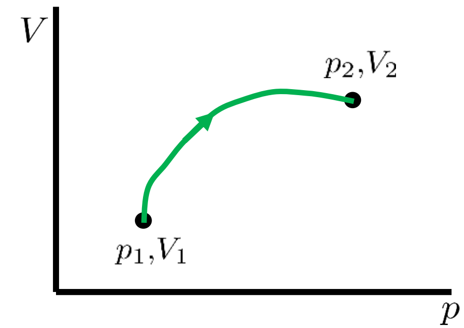
$$\delta A' = -F dx = -p dV$$

Všimnime si symbol δ, ktorý opäť znamená, že sa nejedná o rozdiel dvoch nejakých hodnôt ale proste o malú hodnotu. Tlačič nakoniec spočíta všetky infinitezimálne vykonané práce a dostane celkovú prácu, ktorú vykonal

$$A' = \int_1^2 \delta A' = -\int_1^2 p dV$$

Deje v plynoch: práca konaná plynom





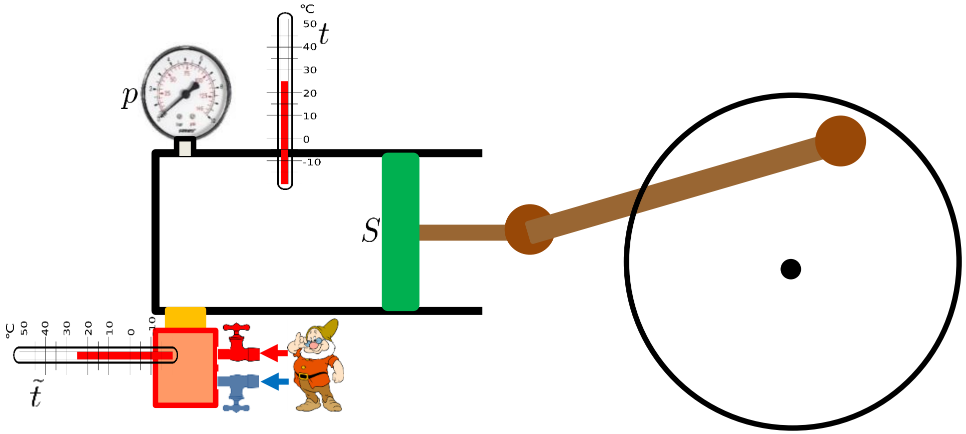
Pripomeňme, že pri konaní práce sú spravidla prítomní dvaja (dva fyzikálne objekty), „konateľ" a „trpiteľ". Na predchádzajúcom slajde sme počítali prácu, ktorú konal trpaslík tlačič. Teda tlačič bol konateľ a plyn trpiteľ.

Ibaže nielen trpaslík pôsobí cez piest na plyn, ale aj plyn pôsobí cez piest na trpaslíka. Podľa princípu akcie a reakcie silou rovnako veľkou ale opačne orientovanou. Pritom ide o kontaktnú interakciu, preto dráha trpaslíka je rovnaká ako dráha piesta. Preto plyn ako konateľ vykoná nad trpaslíkom ako trpiteľom rovnako veľkú prácu iba opačného znamienka. Práca vykonaná plynom bude

$$A = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 p dV = -A'$$

Deje v plynoch: práca konaná plynom

Práca plynu ako konateľa sa v praxi nevyužíva na strkanie do trpaslíkov, ale na niečo užitočnejšie, napríklad na pohon kolesa. Pretože primárny záujem o termodynamiku bol praktický, ustálil sa pohľad že na prácu pri dejoch v plynoch sa pozeráme ako na prácu plynu, nie trpaslíka a preto definujeme A (nečiarkované) ako prácu konanú plynom a čiarkované označenie volíme pre prácu externého objektu nad plynom ako trpiteľom.

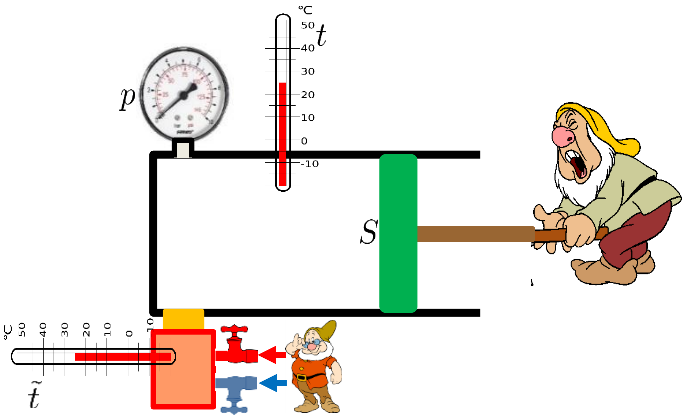


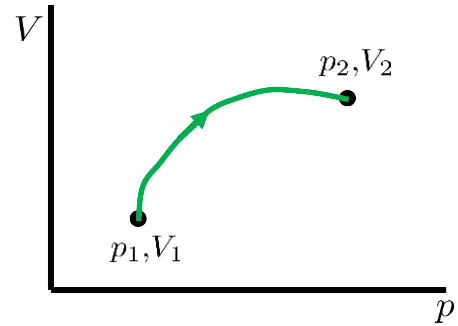
$$A = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 p dV = -A'$$

Naopak, plynové tepelné stroje nie sú na to, aby „dodávali teplo“, preto sa na teplo v súvislosti s plynom dívame primárne tak že plyn je trpiteľ a trpaslík kurič konateľ a nečiarkované označenie Q volíme pre teplo konané vonkajším objektom. Takže ešte raz:

- Q: konateľom je trpaslík kurič, trpiteľom je plyn
- A: konateľom je plyn, trpiteľom je trpaslík tlačič

Deje v plynoch: práca a teplo súčasne



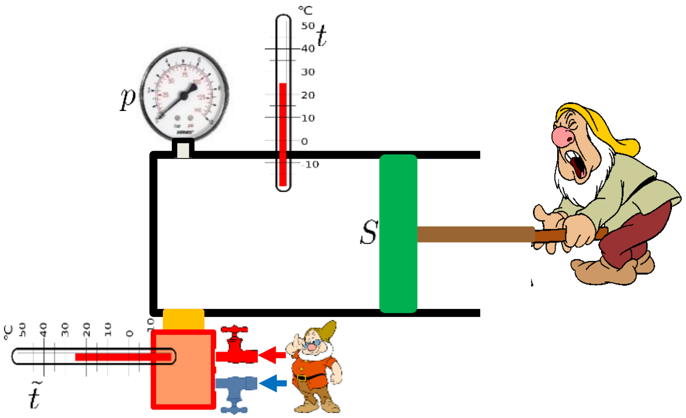


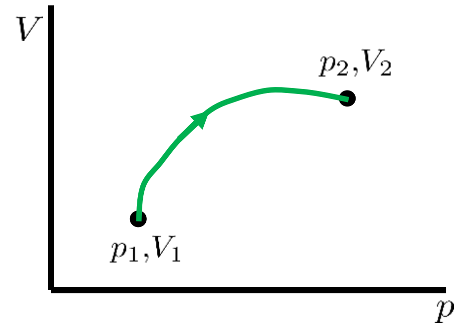
Kurič a tlačič môžu spoločným koordinovaným snažením vykonať akýkoľvek vratný dej, napríklad po zelenej trajektórii začínajúcej v rovnovážnom stave „1“ a končiacej v stave „2“. Pri tom deji si starostlivo zapisujú vykonané teplo a prácu, takže nakoniec môžu spočítať celkovú prácu i celkové teplo.

$$A' = \int_1^2 \delta A' = -\int_1^2 p dV \qquad Q = \int_1^2 \delta Q$$

Historicky práca sa merala v mechanických jednotkách, dnes je tou mechanickou jednotkou Joule. Ale teplo sa meralo v jednotkách tepla, napríklad kalóriách, teda tie hodnoty A' a Q boli (akoby) nezávislé. Potom prišiel Joule a našiel „mechanický ekvivalent tepla“, teda v dnešnom slovníku prevod kalórií na Jouly.

Deje v plynoch: práca a teplo súčasne



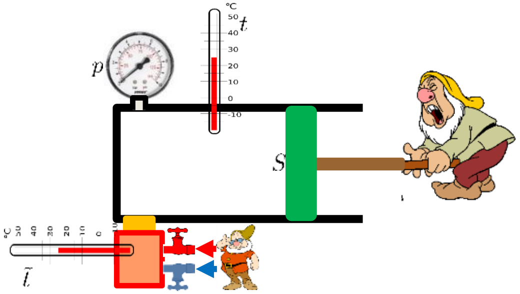


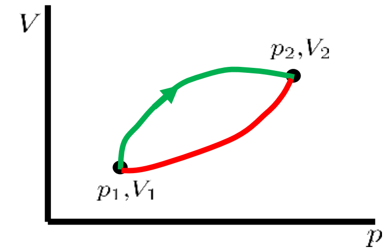
$$A' = \int_1^2 \delta A' = -\int_1^2 p dV \qquad Q = \int_1^2 \delta Q$$

Na vzorcoch sa nič nezmenilo, ale teraz už prácu a teplo meriame v rovnakých jednotkách J. Preto teraz na chvíľu budeme pri veličine teplo písať index J aby sme explicitne zdôraznili jednotku J. Máme teda

$$A' = \int_1^2 \delta A' = -\int_1^2 p dV \qquad Q_J = \int_1^2 \delta Q_J$$

Deje v plynoch: práca a teplo súčasne





$$A' = \int_1^2 \delta A' = -\int_1^2 p dV \qquad Q_J = \int_1^2 \delta Q_J$$

Teraz kľúčová vec: trpaslíkom rozkážeme, aby vykonali iný dej, začínajúci a končiaci v tých istých stavoch, ale po inej trajektórii (červenej). Spočítajú prácu i teplo po novej trajektórii a dostanú:

$$\tilde{A}' = \int_1^2 \delta A' = -\int_1^2 p dV \qquad \tilde{Q}_J = \int_1^2 \delta Q_J$$

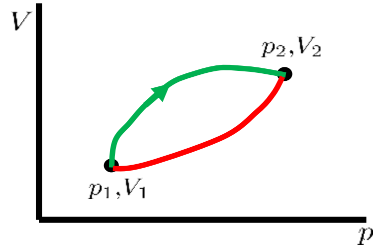
Zistia, že hodnoty práce i tepla budú iné $\tilde{A}' \neq A'$ $\tilde{Q} \neq Q$

Ale keď spočítajú celkovú prácu (makroskopickú plus mikroskopickú) , dostanú tú istú celkovú hodnotu, teda

$$\boxed{\tilde{A}' + \tilde{Q} = A + Q}$$

Poučenie: **súčet vykonanej makroskopickej práce a tepla je nezávislý na ceste, ak tie cesty majú spoločný počiatočný aj spoločný koncový stav ak práca a teplo sú merané v rovnakých (ekvivalentných) jednotkách**

Deje v plynoch: práca a teplo súčasne



Integrály $\int_1^2 \delta A'$ $\int_1^2 \delta Q_J$ sú oba definované pre nejakú trajektóriu a pre inú trajektóriu dajú iné výsledné hodnoty. Ale súčet, teda integrál

$$\int_1^2 \delta Q_J + \int_1^2 \delta A'$$

dá na ľubovoľnej trajektórii tú istú hodnotu, ak tie trajektórie začínajú v tom istom stave aj končia v tom istom stave. Hodnota toho súčtu integrálov teda závisí len na tom, kde je počiatočný a kde koncový stav. Znamená to teda (toto si dobre premyslite sami !!!), že musí existovať stavová veličina, nazvime ju E, ten súčet integrálov sa dá vyjadriť ako

$$\boxed{E_2 - E_1 = \int_1^2 \delta Q_J + \int_1^2 \delta A'}$$

Takto termodynamici objavili **novú stavovú veličinu a nazvali ju energia**

Prvá veta termodynamická

Pre infinitezimálny prírastok energie po infinitezimálnej trajektórii, teda pre rozdiel energie medzi dvoma infinitezimálne blízkymi stavmi dostaneme

$$dE = \delta Q_J + \delta A'$$

Tento zákonom sme už videli a nazvali sme ho „prvá veta termodynamická". Všimnime si, že pre zmenu energie používame symbol d, lebo je to rozdiel dvoch hodnôt stavovej veličiny. Pre prácu a teplo musíme naďalej používať symbol δ.

Vzniká otázka, či názov „energia" je vhodný, lebo toto slovo sme už používali v mechanike na označenie akejsi veličiny. Otázka vlastne je, či je to „tá istá veličina". **Áno, je**. Stručný náznak „dôkazu" je napríklad tento. Zvolíme si také dva stavy, medzi ktorými sa dá vykonať dej pri tepelnej izolácii, teda „bez kuriča". V takom prípade prírastok veličiny E bude daný len veľkosťou makroskopickej mechanickej práce. A to je práve prírastok veličiny, ktorú sme nazvali v mechanike energia.
Pre termodynamikov bolo teplo „mystika": je to také oné, čo treba pridať k práci aby sme dostali zákon zachovania. Po tom, čo sme „uverili, že látky sa skladajú z molekúl" sa mystika tepla stratila: teplo je obyčajná mechanická práca konaná medzi molekulami na mikroskopickej úrovni, ktorú sme si predtým makroskopicky „nevšimli". Takže E **je** energia, jej zmena je krytá prácou (súčtom makroskopickej a mikroskopickej práce).

- Čo sú vratné deje
- Prečo na pV diagrame možno zobraziť iba rovnovážne stavy (body) a vratné deje (čiary)
- Čo je graf izotermického deja na pV diagrame
- Nakreslite čiaru izobarického a izochorického deja na pV diagrame
- Nakreslite čiaru izobarického a izochorického deja na na tp resp tV diagrame
- Zákon pre izotermický dej
- Zákony pre izochorický a izobarický dej
- Makroskopická práca pri izotemickom deji
- Makroskopická práca pri izochorickom deji
- Makroskopická práca pri izobarickom deji
- Prvá veta termodynamická
- Vzťah medzi prácou plynu a prácou „trpaslíka-tlačiča“

Kinetická teória plynov

Molekulová hypotéza o zložení látok a jej dôsledky

Ukázali sme si, ako analýza chemických receptúr viedla na vyslovenie hypotézy, že látky sa skladajú z atómov a molekúl a podarilo sa vyriešiť „puzzle“ o tom ako vyzerajú stechiometrické vzorce zlúčenín tak, aby to bolo konzistentné s priradenými atómovými hmotnosťami.
To, že sme dostali konzistentnú molekulárnu interpretáciu chemických receptúr ešte „nedokazuje“, že molekulová hypotéza zodpovedá skutočnosti, lebo vlastne sme ju vyhútali tak, aby to zodpovedalo receptúram. I keď nie je úplne triviálne, že taký model sa vôbec dá zostrojiť, je to málo na to, aby sme uverili, že model zodpovedá skutočnosti.
Ak ale prijmeme molekulovú hypotézu, potom môžeme skúmať jej ďalšie dôsledky a urobiť predpovede pre iné pozorovania, nielen pre chemické reakcie. Čím bude väčšie množstvo pozorovaní, ktorých výsledky sa budú zhodovať s predpoveďami molekulovej hypotézy, tým viac budeme nadobúdať presvedčenie, že tá hypotéza zodpovedá skutočnosti.

Podľa štandardnej metodológie fyziky však nikdy nebudeme tvrdiť, že „molekulová hypotéza už bola dokázaná“. Fyzika nedokazuje, fyzika vyvracia. Keby sme na základe molekulovej hypotézy urobili nejakú predpoveď, a tá by sa nepotvrdila, potom by sme povedali, že sme molekulovú hypotézu vyvrátili a museli by sme hľadať novú hypotézu, prinajmenej nejakú modifikáciu pôvodnej hypotézy, ktorá by už viedla k súhlasu so všetkými pozorovaniami.

Dôsledky molekulovej hypotézy: kinetická teória teploty a tlaku plynov

My si všimneme bližšie dva dôsledky molekulovej teórie, ktoré spadajú pod novú hypotézu s názvom: **kinetická teória plynov**. Táto hypotéza hovorí, že molekuly sú v neustálom chaotickom pohybe a dôsledkom tohto pohybu je

- **teplota ako efekt spojený s kinetickou energiou chaotického pohybu molekúl**
- **tlak, ako prejav nárazov molekúl na stenu nádoby, v ktorej je plyn**

Avogadrov zákon: „**Rovnaké objemy rôznych plynov za rovnakého tlaku a teploty obsahujú rovnaký počet častíc (atómov alebo molekúl)“** sa dá pochopiť iba tak, že väčšina objemu v kontajneri s plynom je prázdna a len kde-tu sa nachádza molekula. Ale potom molekuly v rovnovážnom stave nemôžu stáť nemôžu stáť: vplyvom gravitácie by sa všetky museli usadiť na dne kontajnera a keby sme urobili dierku pri vrchnom veku, plyn by nevyfučal von. Takže plyn náhodne zapĺňa celý kontajner a molekuly sa musia, predpokladáme že chaoticky, hýbať. Ak je to stav rovnovážny, nič makroskopické sa v ňom už nemení, tak musia mať konštantnú strednú hodnotu veľkosti rýchlosti alebo aj konštantný stredný kvadrát rýchlosti. Predstavme si teraz, že v kontajneri sú dva druhy molekúl, teda zmiešané dva plyny. V rovnovážnom stave musí byť stredný kvadrát rýchlosti molekúl každého plynu konštantný a teda stredná kinetická energia molekúl každého plynu konštantná. Z toho ale nič nevyplýva pre vzájomné porovnanie stredných kinetických energií rôznych molekúl. Ukážeme si teraz, že je rozumné predpokladať, že stredné kinetické energie postupného pohybu všetkých molekúl (aj navzájom rôznych) sú v rovnováhe rovnaké. Vedie k tomu analýza zrážok molekúl

Náhodná veličina: rýchlosť chaotického pohybu molekúl

Predstavme si, že náhodne vyberieme jednu molekulu v plyne a zmeriame jej vektor rýchlosti. S týmto meraním sú spojené tri náhodné veličiny

$$v_x, v_y, v_z$$

sústreďme sa na jednu z nich v_x . Ide o spojitú náhodnú veličinu, má zmysel pýtať sa na hustotu pravdepodobnosti, ktorá ju popisuje. Správny vzorec objavil v podstate teoretickým uvažovaním Maxwell, ktorý sformuloval vzorec (m je hmotnosť jednej molekuly v kg)

$$\boxed{\varrho(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right)}$$

porovnajme tento vzorec so vzorcom abstraktnej Gaussovskej hustoty pravdepodobnosti

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$$

z ktorého pre strednú hodnotu a stredný kvadrát gaussovsky rozdelenej veličiny platí:

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)dx = \mu \qquad \overline{(x-\overline{x})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\overline{x})^2 \rho(x)dx = \sigma^2$$

Porovnaním s Maxwellovým rozdelením dostaneme

$$\boxed{\overline{v}_x = 0 \qquad \overline{v}_x^2 = \frac{kT}{m} \implies \overline{\frac{1}{2}mv_x^2} = \frac{1}{2}kT}$$

Maxwellovo rozdelenie rýchlostí

Maxwell tiež zistil, že priemety rýchlosti náhodnej molekuly na rôzne osi sú navzájom nezávislé, čo znamená že zmeranie priemetu rýchlosti na nejakú os neprinesie nijakú informáciu o priemete jej rýchlosti na inú os. Všetky priemety rýchlosti náhodne zvolenej molekuly sú teda popísané rovnakými hustotami pravdepodobnosti

$$\boxed{\begin{aligned}
\varrho(v_x) &= \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right)\\
\varrho(v_y) &= \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv_y^2}{2kT}\right)\\
\varrho(v_z) &= \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right)
\end{aligned}}$$

V týchto vzorcoch m je hmotnosť molekuly (obyčajná hmotnosť v kg, teda nie relatívna molekulová hmotnosť v jednotkách 1/12 hmotnosti atómu uhlíka), T je teplota v Kelvinoch a k je Boltzmanova konštanta. Všetky priemety majú teda rovnaký stredný kvadrát

$$\overline{v}_x^2 = \overline{v}_y^2 = \overline{v}_z^2 = \frac{kT}{m}$$

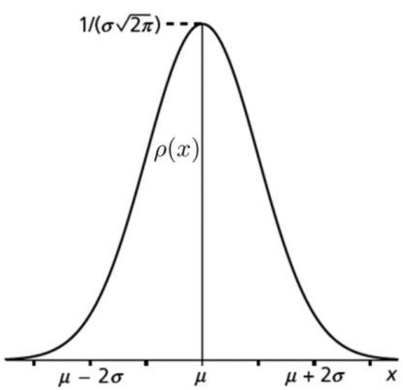
a teda stredná hodnota kinetickej energie častice je

$$\boxed{\overline{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{3}{2}kT}$$

Maxwellovo rozdelenie rýchlostí

Ako to mohol Maxwel vyhútať?
On bol naozaj geniálny a mal oveľa lepšie argumenty než teraz napíšem, ale mohol to urobiť aj takto:

Hľadám neznámu hustotu pravdepodobnosti $\rho(v_x)$. Čo od nej čakám? Keď sa kontajner s plynom nehýbe, pravdepodobnosť kladných a záporných priemetov rýchlosti bude rovnaká, takže funkcia $\rho(v_x)$ by mala byť párna $\rho(v_x) = \rho(-v_x)$ a bude platiť $\overline{v_x} = 0$. Veľmi veľké rýchlosti (v limite nekonečné) budú mať zrejme zanedbateľnú pravdepodobnosť, hľadám teda párnu funkciu, ktorá pre veľké hodnoty premennej klesá dosť rýchlo k nule. Takáto funkcia má zjavne „zvonovitý tvar". Bakalár fyziky pozná **jediný vzorec, ktorý dá taký zvonový tvar**



$$\varrho(v_x) = C\exp(-\alpha v_x^2)$$

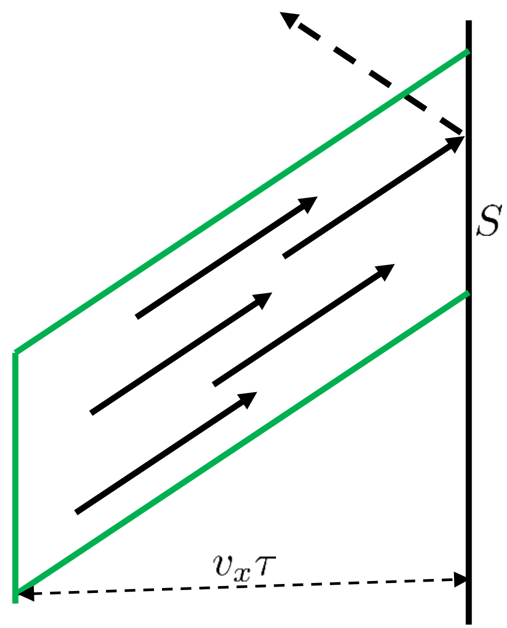
kde C, α sú (zatiaľ) neznáme konštanty. Maxwell ale vedel ako vyzerá „Gaussovo rozdelenie" a vedel aj to, že má platiť $\overline{v}_x^2 = \frac{kT}{m}$
a to už mu dalo

$$\varrho(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right)$$

Odkiaľ vedel, že by malo platiť $\overline{v}_x^2 = \frac{kT}{m}$?

Lebo vyhútal kinetickú teóriu tlaku plynu, že tlak na stenu nádoby vzniká v dôsledku nárazov molekúl na tú stenu. Pozrime sa teraz na to.

Kinetická teória tlaku



Predstavme si, že molekuly nemajú žiaden chaotický pohyb a že všetky molekuly pred stenou sa hýbu rovnakou rýchlosťou $\vec{v}$. Je tam teda čosi ako vietor, vanúci rýchlosťou $\vec{v}$.

Po dopade na stenu sa každá častica odrazí tak, že priemet jej rýchlosti vo vodorovnom smere zmení znamienko. Pri odraze molekuly od stenu sa teda zmení hybnosť každej častice o

$$\Delta p_x = -2mv_x$$

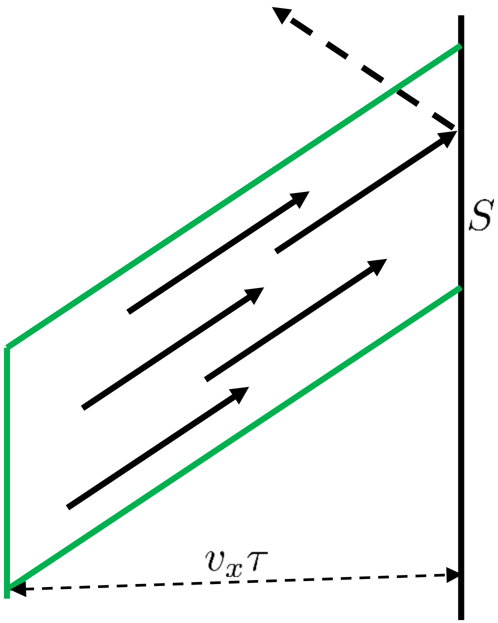
Vypočítajme teraz počet častíc „vetra“, ktoré sa od steny odrazia v priebehu nejakého času τ . Zeleným je na obrázku nakreslený šikmý valec s podstavou plchy S na stene s výškou $v_x\tau$.

Ak hustota častíc „vetra“ je n, potom v tom šikmom valci sa nachádza $nSv_x\tau$ častíc a sú to práve tie, ktoré za čas τ dopadnú na plochu S steny. Celková zmena hybnosti všetkých častíc, ktoré dopadnú na stenu za čas τ bude

$$-2mnSv_x^2\tau$$

a teda priemerná sila, ktorou tieto častice pôsobia na stenu bude $F = 2mnSv_x^2$ a priemerný tlak uvažovaného „vetra častíc“ bude $p = 2mnv_x^2$

Kinetická teória tlaku



Ukázali sme si, že ak by sa častice nepohybovali chaoticky náhodnými rýchlosťami ale pohybovali sa ako ustálený vietor rýchlosťou $\vec{v}$, pôsobili by na stenu tlakom

$$p = 2mnv_x^2$$

V kontajneri sa ale hýbu náhodnými rýchlosťami, takž prer tlak dostaneme čosi ako

$$p = 2mn\overline{v_x^2}$$

Ibaže takto je to zle, lebo od samej horlivosti sme si neuvedomili že k nenulovému $\overline{v_x^2}$ prispievajú aj častice s $v_x < 0$ a tie sa pohybujú od steny a teda na stenu vôbec nenarazia!

Správny výraz pre tlak plynu na stenu v dôsledku chaotických nárazov molekúl teda je

$$p = mn\overline{v_x^2}$$

Platí $n = N/V$, preto nakoniec dostaneme $pV = mN\overline{v_x^2}$. Porovnaním so stavovou rovnicou $pV = NkT$ dostaneme, že ak tlak je dôsledok chaotických nárazov molekúl, tak musí platiť

$$m\overline{v_x^2} = \frac{1}{3}m\overline{v^2} = \frac{2}{3}\frac{1}{2}m\overline{v^2} = kT \implies \boxed{\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT}$$

Tak odtiaľto to Maxwell vedel.

Teraz už rozumieme fyzikálnemu objektu „ideálny plyn“ ako jeho vlastnosti vyplývajú z toho, že sa skladá z molekúl.
Teplota je daná strednou kinetickou energiou postupného pohybu molekúl

$$\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT$$

Tlak plynu na steny nádoby je daný nárazmi molekúl v dôsledku ich chaotického pohybu

$$p = mn\overline{v_x^2}$$

odtiaľ priamo vyplýva stavová rovnica ideálneho plynu $pV = NkT$
a špeciálne pre jeden mól plynu

$$pV = N_A kT = RT \qquad \boxed{R = N_A k}$$

Celková energia plynu je určená celkovou kinetickou energiou molekúl, lebo v ideálnom plyne „sa molekuly navzájom necítia“, preto potenciálna inmterakčná energia molekúl je nulová. Pri jednoatómových molekulách možno kinetickú rotačnú energiu zanedbať, preto celková kinetická energia je daná len kinetickou energiou postupného pohybu, **preto pre jednoatómový plyn** dostávame kalorickú rovnicu $E = \frac{3}{2}NkT$

pre dvojatómový plyn $E = \frac{5}{2}NkT$

pre troj a viacatómový plyn $E = \frac{6}{2}NkT$

Súhrnný vzorec: $E = \frac{f}{2}NkT$

f je „**počet stupňov voľnosti**“

Historické merania v kalorimetroch pre kvapaliny neodhalili, že teplo nie je stavová veličina, že teplo nie je „druh energie“ ale „druh práce“, pretože kvapaliny sú prakticky nestlačiteľné, nemenia svoj objem a teda sa pri „dejoch v kvapalinách“ nekonmá makroskopická mechanická práca

$$\delta A = pdV = 0$$

pretože $dV = 0$.

Pozrime sa teda, čo dostaneme v analogickej situácii pre ideálny plyn. Aké teplo treba vykonať, aby sa zmenila teplota plynu pre izochorický dej, teda pri $dV = 0$.

Trpaslík tlačič drží piest zafixovaný, nekoná prácu. Trpaslík kurič vykoná teplo δQ, teplota plynu sa pri tom zmení o dT. Prvá veta termodynamická (zákon zachovania energie) hovorí

$$dE = \delta Q$$

Kalorimetrická rovnica hovorí

$$E = \frac{f}{2} NkT$$

$$dE = \frac{f}{2} NkdT$$

$$\boxed{\delta Q = \frac{f}{2} NkdT}$$

na zvýšenie teploty ideálneho plynu o dT pri stálom objeme treba vykonať teplo

$$\delta Q = \frac{f}{2} N k dT$$

V analógii s kalorimetrickými meraniami definujme pojem

c_V špecifické teplo plynu pri stálom objeme

ako množstvo tepla, ktoré treba vykonať na izochorické zahriatie 1 kg plynu o jeden Kelvin. Na zahriatie plynu o hmotnosti m treba

$$\delta Q = \frac{f}{2} N k dT = \frac{f}{2} \frac{m}{M} N_A k dT$$

preto

$$c_V = \frac{f}{2} \frac{1}{M} N_A k$$

Okrem špecifického tepla (teda na jeden kilogram) sa zavádza aj pojem mólové teplo pri stálom objeme (C_V) ako teplo potrebné na zahriatie jedného mólu plynu o jeden Kelvin. Dostaneme

$$\boxed{C_V = \frac{f}{2} N_A k}$$

Všimnime si teraz, že celkovú energiu ideálneho plynu vyjadrujeme ako

$$E = \frac{f}{2} NkT$$

porovnaním so vzorcom

$$C_V = \frac{f}{2} N_A k$$

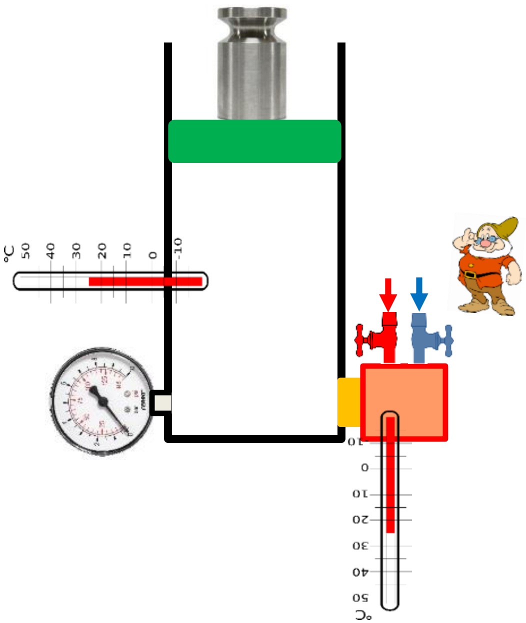
vidíme, že celkovú energiu plynu vieme vyjadriť ako

$$\boxed{E = \frac{N}{N_A} C_V T}$$

Pozor! Energia plynu je stavová veličina. Nesúvisí s nijakým dejom. Napriek tomu sa dá pre ideálny plyn vyjadriť vzorcom, v ktorom vystupuje mólové teplo pri stálom objeme. To je len zhoda okolností. Energia plynu nie je daná nijakým „stálym objemom“. Je to len prakticky užitočný vzorec, lebo v ňom vystupuje merateľná charakteristika C_V, namiesto abstraktnej charakteristiky f (počet stupňov voľnosti molekuly).

Mayerov vzťah

Experimentálne sa oveľa ľahšie zabezpečuje konštantný tlak plynu v porovnaní s konštantným objemom plynu. Pozrime sa preto, aké teplo treba dodať na zahriatie plynu pri konštantnom tlaku, tlačiča nahradíme „barostatom“. Aké teplo musí dodať kurič pre zvýšenie teploty o dT **pre jeden mól** plynu v takomto experimentálnom usporiadaní?



Zákon zachovania energie

$$dE = \delta Q - \delta A = \delta Q - pdV$$

Stavová rovnica $\quad pV = N_A kT$

Odtiaľ pri stálom tlaku (teda pri $dp = 0$) dostaneme

$$pdV = N_A kdT$$

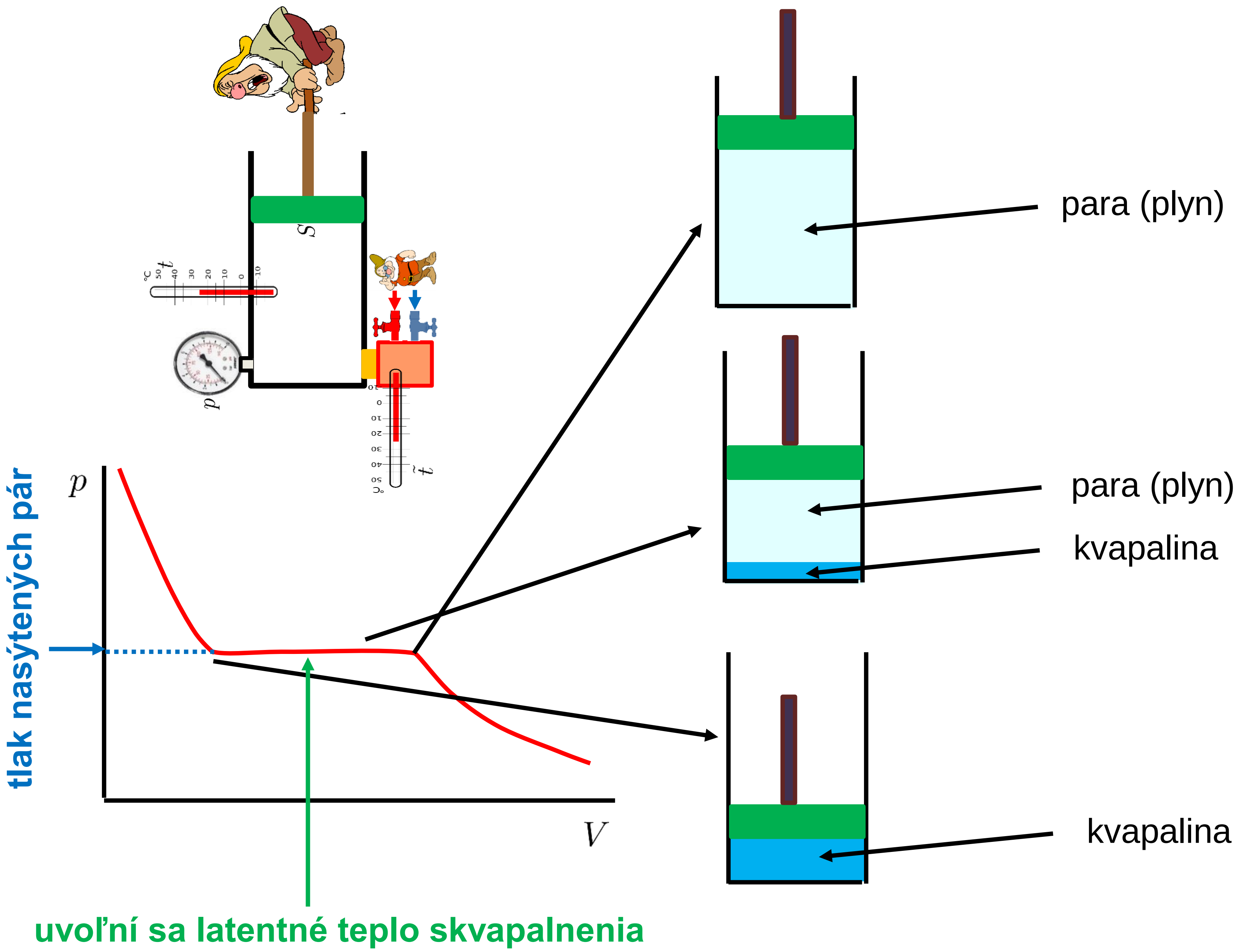
Po dosadení do rovnice pre energiu jedného mólu

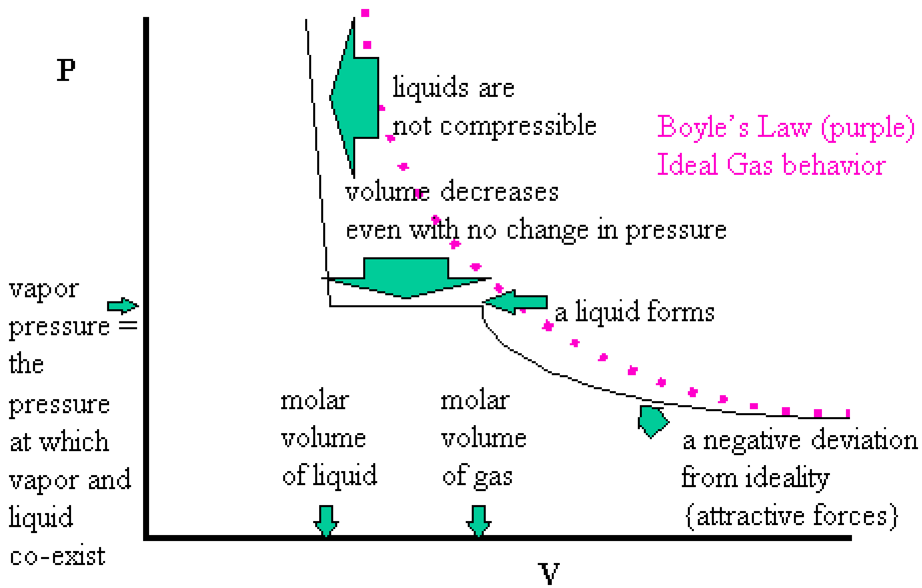
$$\delta Q = dE + pdV = C_V dT + N_A kdT = (C_V + N_A k)dT$$

Vidíme, že pre mólové teplo pri stálom tlaku dostaneme Mayerov vzťah

$$\boxed{C_p = C_V + N_A k = C_V + R}$$

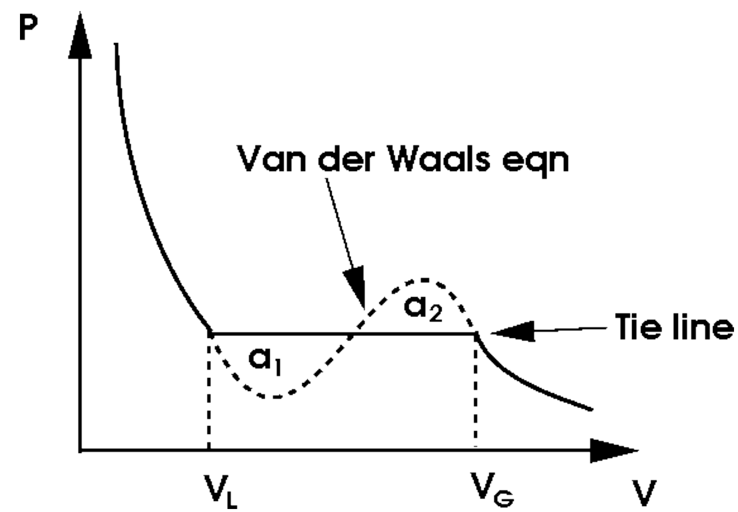
Neideálne (reálne) plyny
Kondenzácia

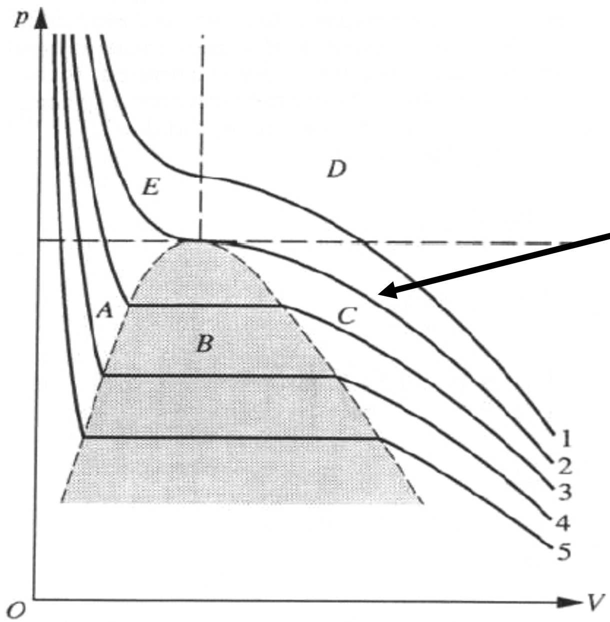

para (plyn)
para (plyn)
kvapalina
kvapalina
tlak nasýtených pár
p
V
S
p
t
t
uvoľní sa latentné teplo skvapalnenia



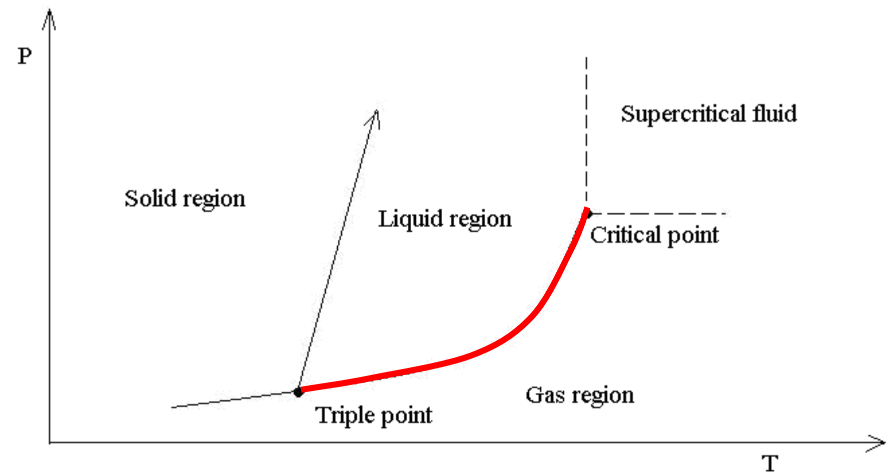
van der Waalsova rovnica

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

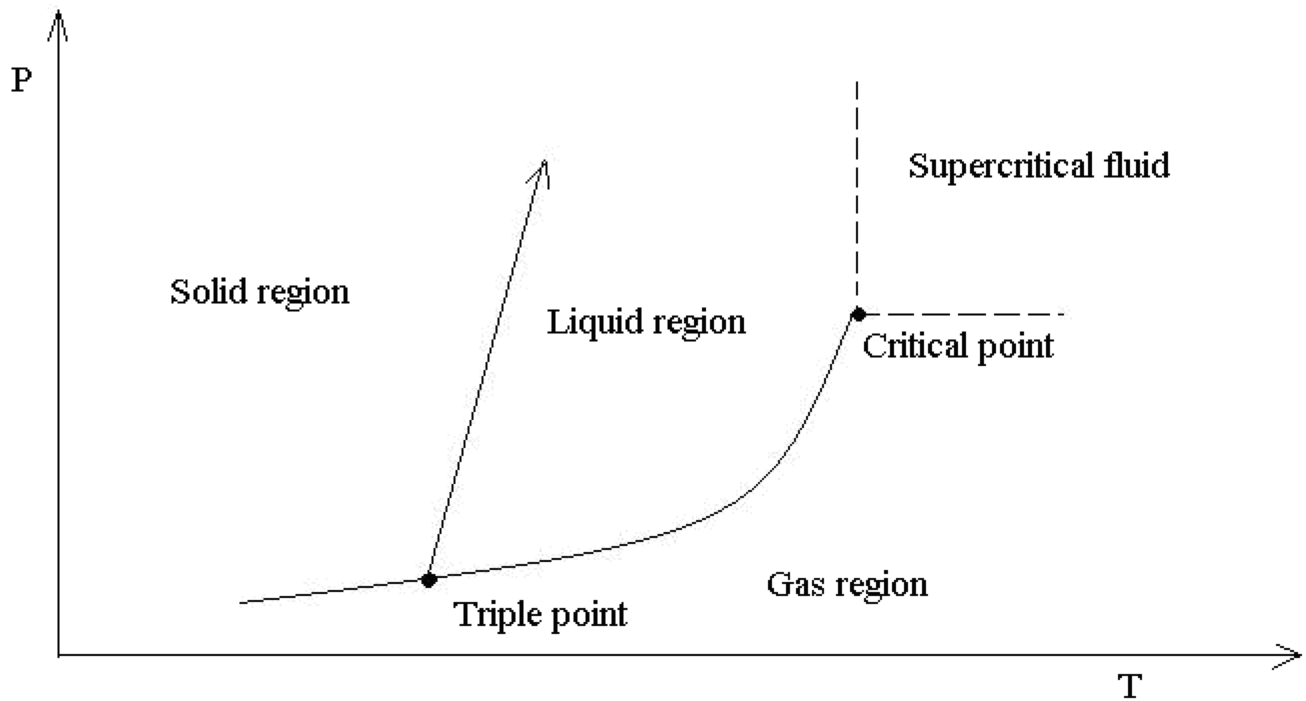


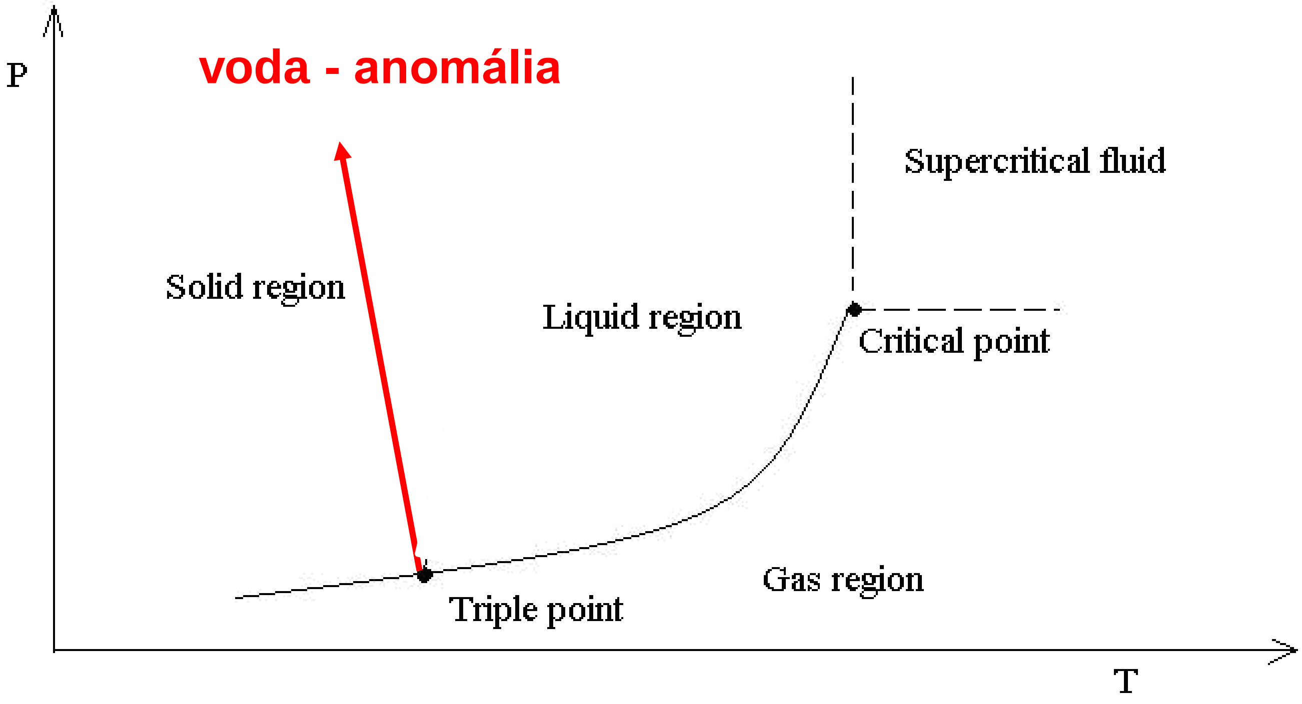


kritická teplota, kritická izoterma



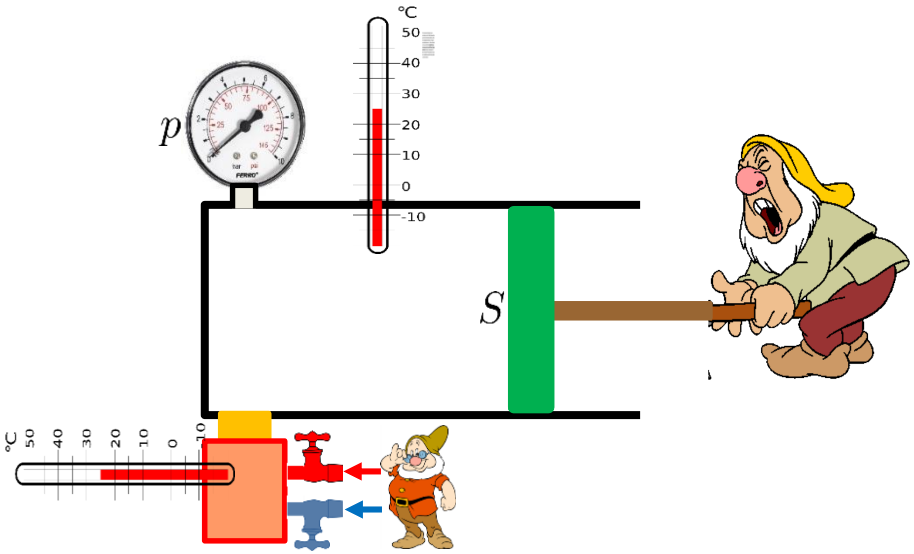
Fázový diagram

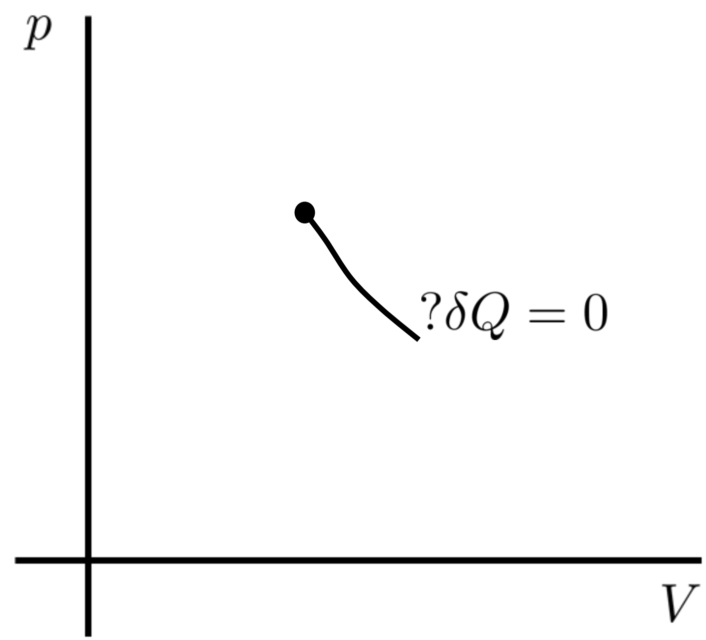

P
Supercritical fluid
Solid region
Liquid region
Critical point
Gas region
Triple point
T


P
voda - anomália
Supercritical fluid
Solid region
Liquid region
Critical point
Gas region
Triple point
T

- Napíšte Maxwellovo rozdelenie, hustotu pravdepodobnosti pre priemet rýchlosti na os x. Normalizačnú konštantu nemusíte vedieť naspamäť.
- Napíšte, ako súvisí tlak ideálneho plynu so strednou kinetickou energiou postupného pohybu molekúl
- Napíšte, ako súvisí teplota plynu so strednou kinetickou energiou postupného pohybu molekúl
- Napíšte vzorce pre energiu ideálneho jednoatómového, dvojatómového a viacatómového plynu.
- Čo je to tlak nasýtených pár
- Čo je kritická teplota plynu
- Čo je skupenské teplo kondenzácie

Doplnok: adiabatický dej





$$0 = \delta Q = dE + pdV = C_V dT + pdV$$

$$pV = RT \implies pdV + Vdp = RdT$$

$$0 = \delta Q = C_V \frac{1}{R}(pdV + Vdp) + pdV$$

$$pdV(C_V + R) + C_V V dp = 0$$

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{C_P}{C_V}\frac{p}{V}$$

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{C_P}{C_V}\frac{p}{V}$$

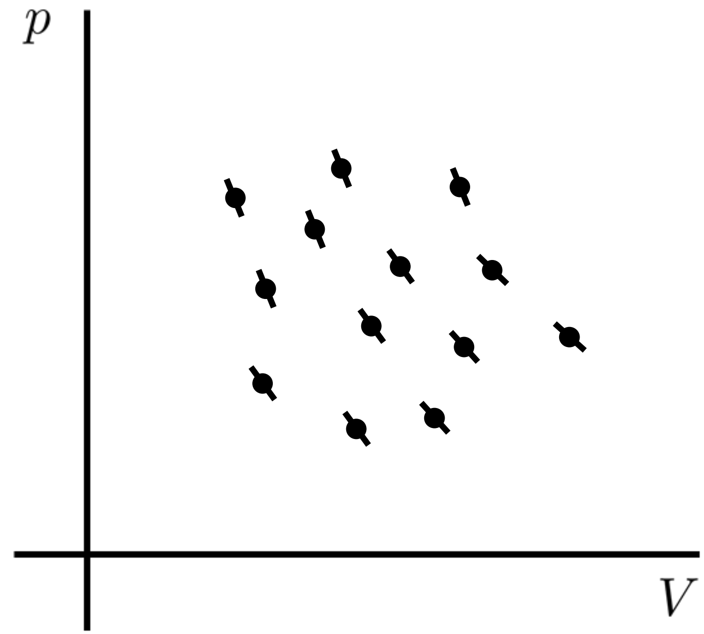
Pre strmosť izotermy by sme dostali

$$pV = \mathrm{const}$$

$$pdV + Vdp = 0$$

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{p}{V}$$

diabaty sú strmšie ako izotermy



Rovnica adiabaty

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{C_P}{C_V}\frac{p}{V} = -\varkappa\frac{p}{V}$$

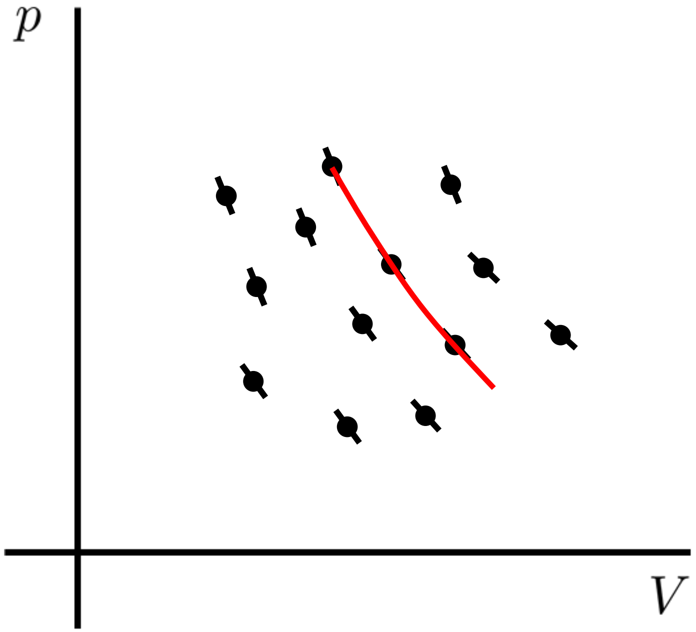
$\varkappa$	Poissonova konštanta

$$\frac{dp}{p} = -\varkappa\frac{dV}{V}$$

$$\ln p - \ln p_0 = -\varkappa(\ln V - \ln V_0)$$

$$\ln\frac{p}{p_0} = \ln\frac{V_0^{\varkappa}}{V^{\varkappa}}$$

$$\boxed{pV^{\varkappa} = p_0 V_0^{\varkappa} = \mathrm{const}}$$

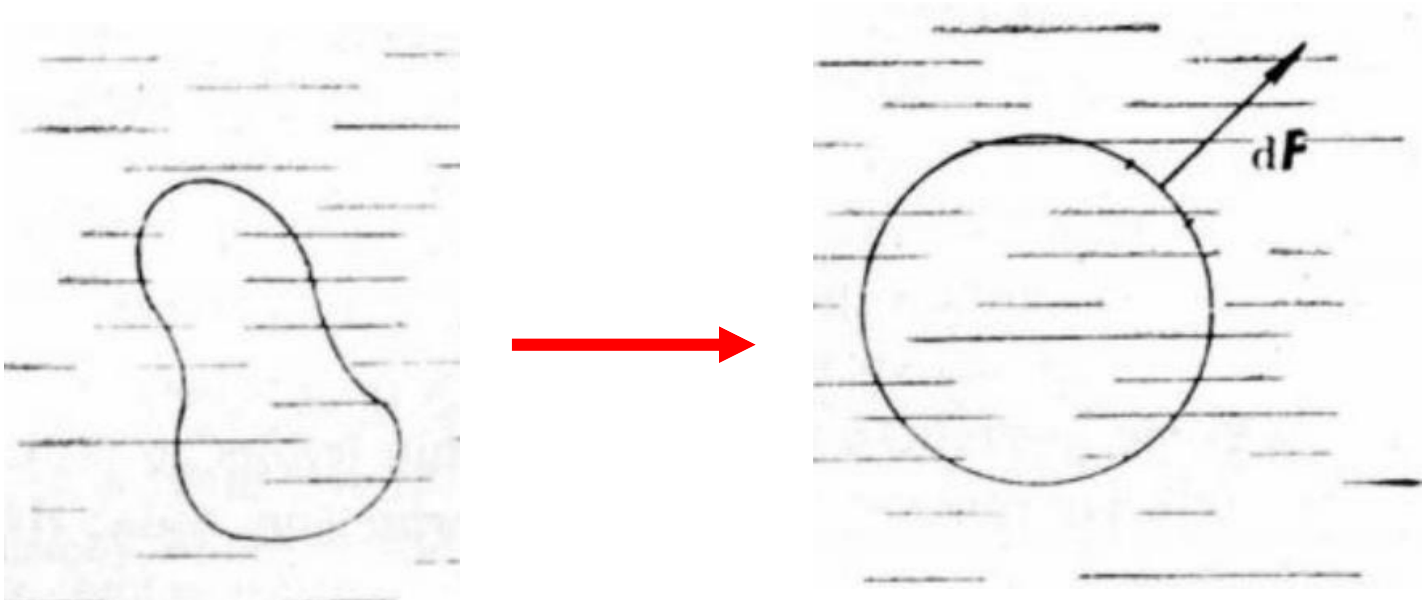


Kapilarita: povrchový jav

- V trojdimenzionálnom svete platí tvrdenie, že oveľa viac molekúl sa nachádza vnútri objemu nejakej látky než na povrchu tohto objemu.
- Molekuly na povrchu inakšie „cítia svoje okolie“ než molekuly vnútri objemu
- Medzimolekulové sily sú krátkodosahové, preto už v malej vzdialenosti od povrchu molekula „cíti svoje okolie“ rovnako ako molekula vo veľkej vzdialenosti od povrchu
- Len veľmi tenká vrstva molekúl na povrchu sa správa inak
- Molekula na povrchu „cíti“ jednostrannú príťažlivú silu od molekúl vnútri objemu, príťažlivé sily na molekulu vnútri objemu od okolitých molekúl sa rušia
- Ak sa chce molekula dostať na povrch, musí za to „niekto zaplatiť energiou“
- Látky majú „prídavnú energiu! za molekulovú povrchovú vrstvu oproti tomu, akú by mali energiu, keby nebol povrch
- Tá prídavná energia je úmerná ploche povrchu, existuje teda

hustota povrchovej energie σ

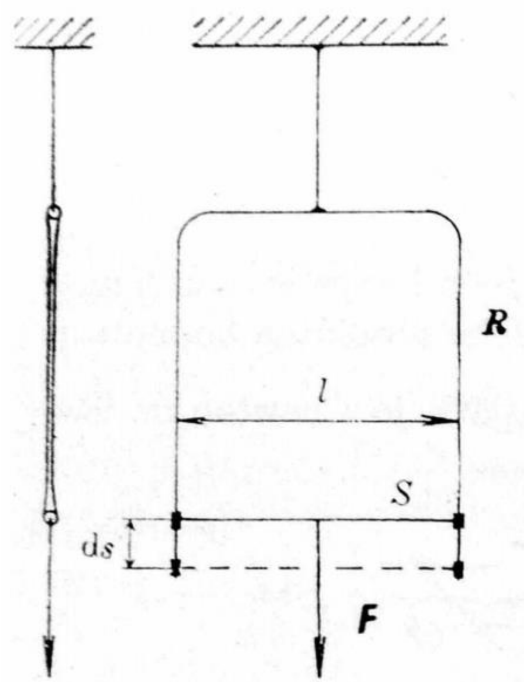
Hustota povrchovej energie vody je napríklad väčšia ako u mydlového roztoku. Preto ak na pokojnú hladinu vody v nejakej nádobe položíme opatrne slučku z bavlnenej nite a do stredu slučky kvapneme trošku mydlového roztoku, slučka sa roztiahne na presný kruh: systém „uprednostňuje“ aby povrch vody bol čo najmenší a povrch mydlového roztoku čo najväčší, vtedy bude celková povrchová energia minimálna.



Efekt optimalizácie povrchovej energie sa prejavuje tak, že na krivku − hranicu rozhrania pôsobí sila všade kolmá na dotyčnicu ku krivke. Veľkosť sily pôsobiacej na element rozhrania dĺžky ds je úmerná ds. Konštanta úmernosti sa volá povrchové napätie. Označme ho na chvíľu o:

$$\boxed{dF = o\, ds}$$

Ukážeme si, že povrchové napätie je rovné hustote povrchovej energie: $o = \sigma$.



Súvislosť povrchového napätia s plošnou hustotou povrchovej energie názorne vyplýva z nasledujúceho jednoduchého pokusu.
Keď do vodného roztoku mydla a glycerolu ponoríme obdĺžnikový rámček *R* s pohyblivou priečkou *S,* vytvorí sa v ňom tenká kvapalinová blana s povrchovými vrstvami po obidvoch stranách. Preto, ak povrchové napätie použitého roztoku je o a dĺžka priečky l, blana účinkuje na priečku silou $F = 2ol$. Faktor 2 pochádza z toho, že povrchy sú dva, po oboch stranách rámčeka.

Ak posunieme priečku o ds vykoná sa práca

$$\delta A = 2ol\, ds$$

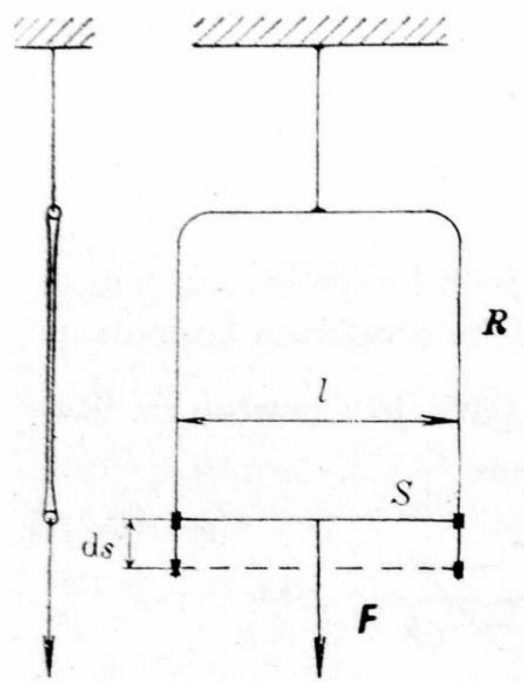
Táto práca sa spotrebuje na zväčšenie energie povrchov. Plocha povrchu na každej strane sa pri posunutí priečky zväčší o hodnotu

$$dS = l\, ds$$

Zvýšenie povrchovej energie teda bude

$$dW = 2\sigma l\, ds$$

Porovnaním dostaneme $o = \sigma$.



Súvislosť povrchového napätia s plošnou hustotou povrchovej energie názorne vyplýva z nasledujúceho jednoduchého pokusu.
Keď do vodného roztoku mydla a glycerolu ponoríme obdĺžnikový rámček *R* s pohyblivou priečkou *S,* vytvorí sa v ňom tenká kvapalinová blana s povrchovými vrstvami po obidvoch stranách. Preto, ak povrchové napätie použitého roztoku je o a dĺžka priečky l, blana účinkuje na priečku silou $F = 2ol$. Faktor 2 pochádza z toho, že povrchy sú dva, po oboch stranách rámčeka.

Ak posunieme priečku o ds vykoná sa práca

$$\delta A = 2ol\, ds$$

Táto práca sa spotrebuje na zväčšenie energie povrchov. Plocha povrchu na každej strane sa pri posunutí priečky zväčší o hodnotu

$$dS = l\, ds$$

Zvýšenie povrchovej energie teda bude

$$dW = 2\sigma l\, ds$$

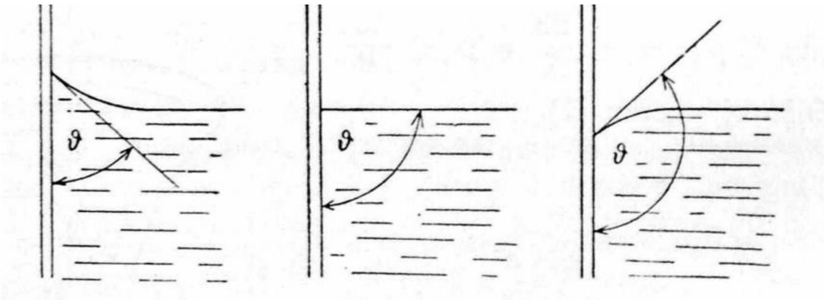
Porovnaním dostaneme $o = \sigma$.

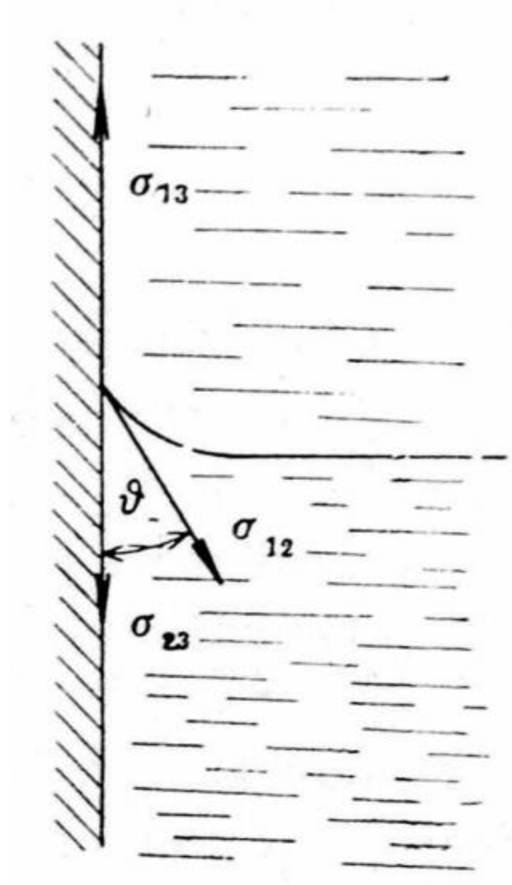
Vzťah $o = \sigma$ je aj jednotkovo v poriadku. Jednotkou hustoty povrchovej energie je J m^{-2}, čo je to isté ako N m^{-1}.

Príklad niekoľkých hodnôt povrchových napätí

kvapalina	povrchové napätie v jednotkách 10^{-3} N m^{-1}
alkohol	22
olivový olej	33
voda	73
glycerol	66
ortuť	500

Ako vieme z dennej skúsenosti, obyčajne ani za rovnováhy nie je hladina kvapaliny v nádobe všade vodorovná. Vo všeobecnosti je povrch kvapalinypri stene zdvihnutý, alebo stlačený, a len vo zvláštnom prípade je až po stenu presne vodorovný.

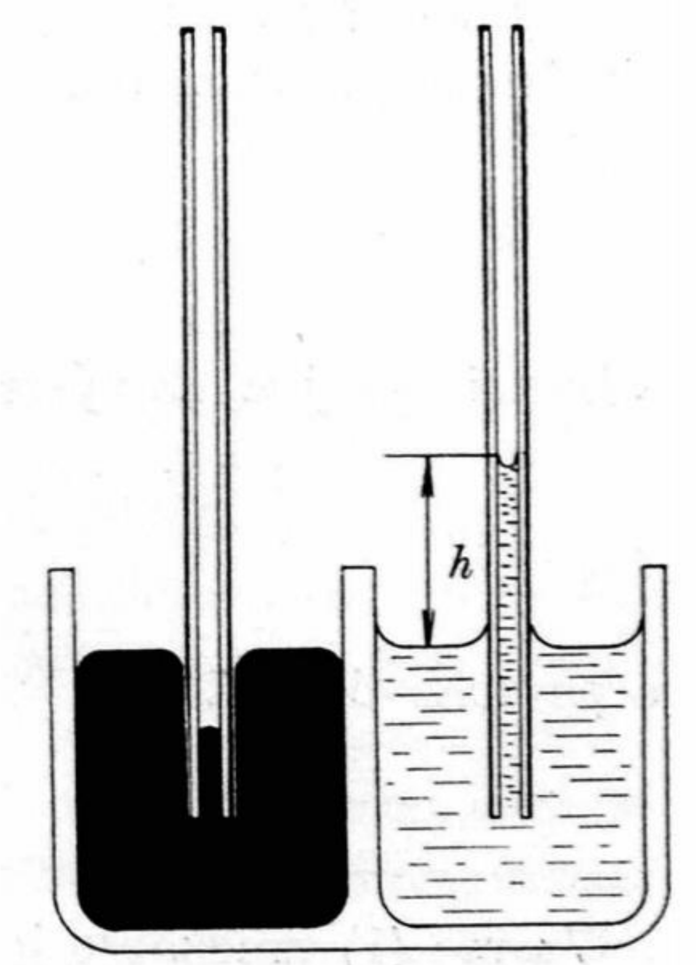




Tento jav môžeme vysvetliť jestvovaním povrchových napätí nielen na rozhraní dvoch kvapalín alebo kvapaliny a plynu, ale aj na rozhraní pevného telesa a kvapaliny a na rozhraní pevného telesa a plynu. Detaily rozoberať nebudeme.

Keď do kvapaliny v širšej nádobe ponoríme v zvislej polohe úzku rúrku s kruhovým prierezom, tzv. kapiláru, hladina kvapaliny bude v kapiláre v inej výške ako v širokej nádobe.

Kvapalina, ktorá zmáča steny kapiláry (napríklad voda v sklenej kapiláre), pôsobením povrchového napätia vystúpi v kapiláre nad úroveň hladiny v širokej nádobe; nastáva kapilárna elevácia a zakrivený povrch kvapaliny, tzv. meniskus, je dutý. Keď kvapalina steny kapiláry nezmáča, hladina kvapaliny v kapiláre je pod úrovňou hladiny v širokej nádobe; nastáva kapilárna depresia a meniskus je vypuklý.



Odhadnime rádovo do akej výšky vystúpi voda v kapiláre o polomere $r = 0.1$ mm

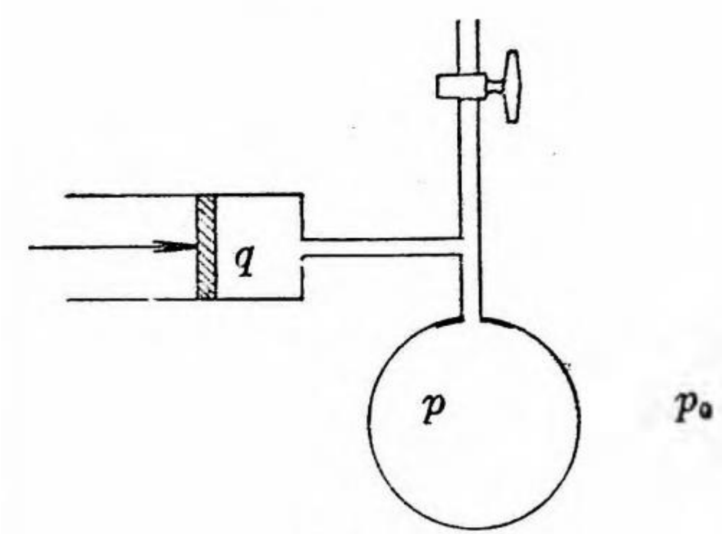
$$2\pi r\sigma = \pi r^2 h\varrho g$$

ϱ je hustota vody.
Po dosadení hodnôt dostaneme $h \approx 15$cm.

Hodnota elevácie nie je malá, ale určite **nestačí napríklad na to, aby stromy dostali vodu na vrchol koruny kapilárnymi silami**. V stromoch to musí byť niečo iné. Prezradíme: **osmóza**

Predstavme si, že sme na konci sklenej rúrky vyfúkli mydlovú bublinu s polomerom R. Pretože sa kvapalinová blana pôsobením povrchového napätia usiluje svoj povrch, zmenšiť, za rovnováhy je tlak p vo vnútri bubliny väčší než tlak p_0 na vonkajšej strane. Rozdiel obidvoch tlakov môžeme určiť pomocou zákona o zachovaní energie.
V zariadení podľa obr. posunutím piesta vykoná trpaslík posúvajúci piest prácu pdV pričom dV je zväčšenie objemu bubliny. Plyn pritom vykoná prácu proti atmosférickému tlaku p_0dV Podľa zákona o zachovaní energie celková bilancia práce „je použitá“ na zväčšenie povrchovej energie bubliny, teda $(\mathrm{p}-\mathrm{p}_0)\mathrm{dV}=2\sigma dS$, kde dS je zväčšenie povrchu bubliny $dS=d(4\pi R^2)=8\pi Rd\mathrm{R}$, $dV=d\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)=4\pi R^2dR$. Faktor 2 vo vzorci povrchovej energie pochádza z toho, že bublina má dva povrchy, vonkajší a vnútorný.
Po dosadení dostaneme pre rozdiel tlakov daných **dvoma** povrchmi

$$p-p_0=\frac{4\sigma}{R}$$

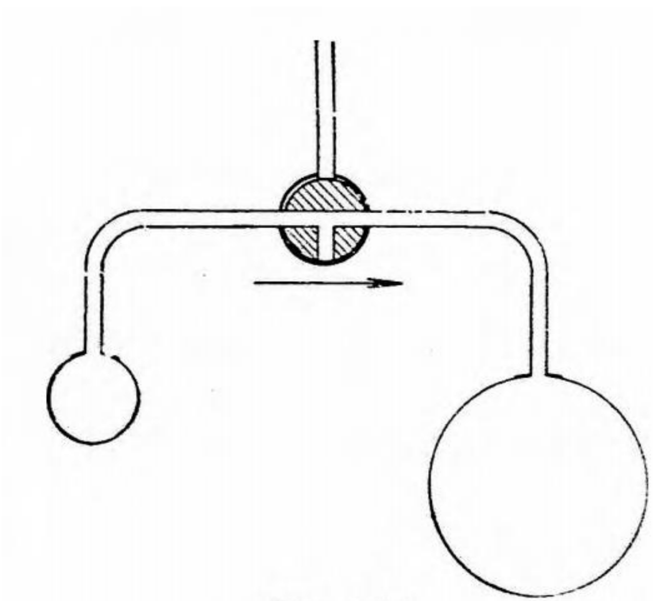


Pod rozhraním guľového tvaru o polomere *R* medzi dvoma kvapalinami sa teda vytvorí kapilárny pretlak (daný len jedným povrchom)

$$\boxed{\Delta p=\frac{2\sigma}{R}}$$

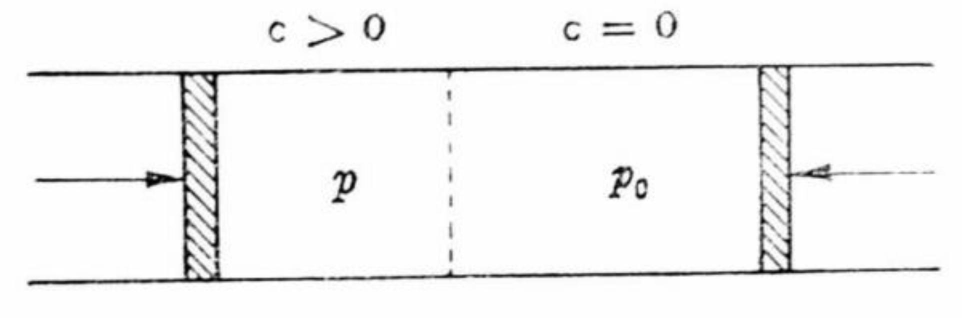
Ak kozmonautom v bezváhovom stave unikne do vzduchu malé množstvo nejakej kvapaliny, vytvorí guličku (lebo gulička má minimálny povrch pri danom objeme) a kapilárny pretlak vnútri guličky je daný uvedeným vzorcom.

Kapilárny pretlak v bubline je teda nepriamo úmerný polomeru bubliny, preto ak spojím dve bubliny rozdielnych polomerov, bude menšia bublina nafukovať väčšiu. Všeobecnejší vzorec pre pretlak pod zakriveným povrchom neguľového tvaru je odvodený napríklad v **Ilkovičovej učebnici**.



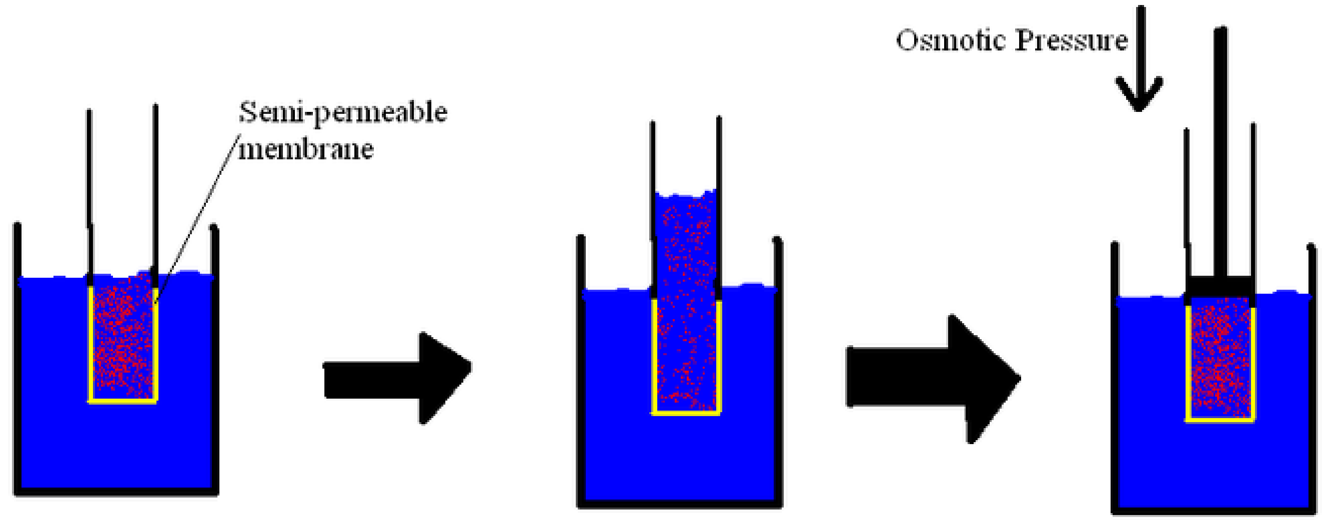
Osmóza

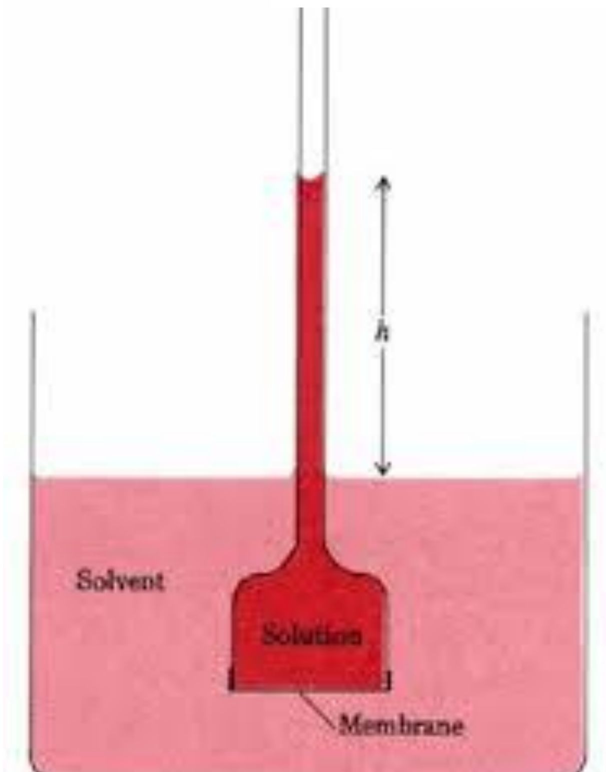
Sú známe polopriepustné (semipermeabilné) blany, ktoré v niektorých prípadoch prepúšťajú len rozpúšťadlo, nie však aj rozpustenú látku.



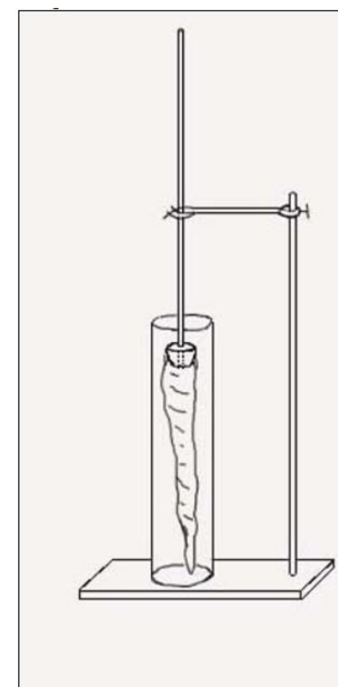
V zariadení podľa obr. roztok neprchavej látky je oddelený od čistého rozpúšťadla polopriepustnou blanou. Podľa experimentálnej skúsenosti na strane roztoku musí účinkovať tlak väčší než na strane čistého rozpúšťadla, inak rozpúšťadlo bude prenikať cez polopriepustnú blanu do roztoku a zrieďovať ho. Rozdiel $p - p_0$ sa nazýva osmotický tlak. Dá sa ukázať, že osmotický tlak je práve taký veľký, ako keby rozpustená látka vyplňovala objem roztoku v plynnom stave

$$pV = nRT$$



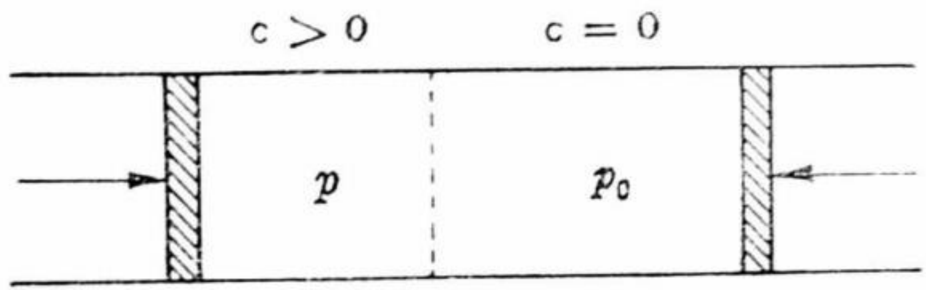


$$h\varrho g = \frac{n}{V} RT$$



Reverzná osmóza

Reverse osmosis desalination plant in Barcelona, Spain



Osmotický tlak morskej vody je okolo 25 at.

Zrážky častíc

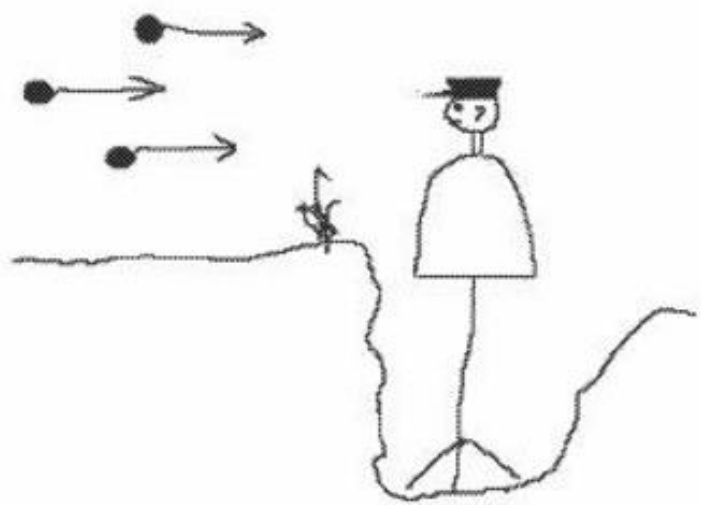
Rovnovážny stav plynu nastáva v dôsledku zrážok častíc. I v prakticky ideálnom plyne, keď typicky sa molekuly nachádzajú ďaleko od seba a pri počítaní energie plynu nemusíme zarátavať potenciálnu energiu vzájomnej interakcie molekúl, dochádza pri náhodnom blízkom priblížení molekúl k zrážkam.

Uvedieme si teraz niekoľko technických vecí, ktoré sa používajú pri teoretickom popise zrážkových procesov.

Postupne si priblížime pojmy

- stredná doba medzi zrážkami
- stredná voľná dráha
- účinný prierez zrážky

Ruská ruleta.



Pre krátke časy dt je pravdepodobnosť zásahu úmerná dt.

$$p(t, t + dt) \propto dt$$

Ruská ruleta.

$$p(t, t+dt) \propto dt$$

$$p(t, t+dt) = \frac{1}{\tau} dt$$

Z rozmerových dôvodov má τ rozmer času, je to nejaká doba.

Opačná pravdepodobnosť, že nenastane zásah je zrejme

$$\overline{p}(t, t+dt) = 1 - \frac{1}{\tau} dt$$

Pravdepodobnosť, že nenastane zásah po celú dobu t je teda

$$\overline{p}(0, t) = (1 - \frac{1}{\tau} dt) \times (1 - \frac{1}{\tau} dt) \times (1 - \frac{1}{\tau} dt) \times \ldots = \lim_{n \to \infty} (1 - \frac{1}{\tau} \frac{t}{n})^n$$

$$\overline{p}(0, t) = \exp(-t/\tau)$$

Ruská ruleta.

Pravdepodobnosť, že **prvý** zásah nastane v intervale $(t, t+dt)$ teda bude

$$P(t, dt) = \overline{p}(0, t) \times p(t, t+dt) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\, \frac{1}{\tau}dt$$

Stredná doba prežitia bez zásahu teda bude

$$\overline{t} = \int tP(t, dt) = \int t \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\, \frac{1}{\tau}dt = \tau$$

Veličina τ vo výraze $p(t, t+dt) = \frac{1}{\tau}dt$ má význam strednej doby života.

Stredná doba medzi zrážkami molekúl

Predstavme si taký škôlkarsky popísaný myšlienkový experiment. Dám jednej molekule malý zošitok a požiadam ju, aby si zapisovala časy, keď do nej narazí iná molekula. Po určitom dlhom čase si od nej vypýtam ten zošitok a popočítam časové rozdiely medzi po sebe nasledujúcimi okamihmi zrážok. Potom vypočítam strednú hodnotu tých časových rozdielov. To čo dostanem sa volá stredná doba medzi zrážkami. A je to rovné času τ, ktorý sme videli v príklade o ruskej rulete: molekula si tiež môže vyčísliť pravdepodobnosť že do nej nejaká iná molekula narazí v nasledujúcom krátkom časovom intervale dt, pričom tá pravdepodobnosť sa z rozmerových dôvodov musí dať vyjadriť pomocou nejakého časového parametra τ v tvare

$$\frac{1}{\tau}dt$$

Potom, keď do molekuly niekto naozaj narazí, môže sa spýtať aká je hustota pravdepodobnosť, že nasledujúci záznam o zrážke bude v intervale $(t, t + dt)$ od posledného zápisu a dostane hustotu pravdepodobnosti

$$\boxed{p(t, t + dt) = \exp(-\frac{t}{\tau})\frac{dt}{\tau}}$$

a stredná doba medzi zrážkami bude práve τ.

Stredná voľná dráha

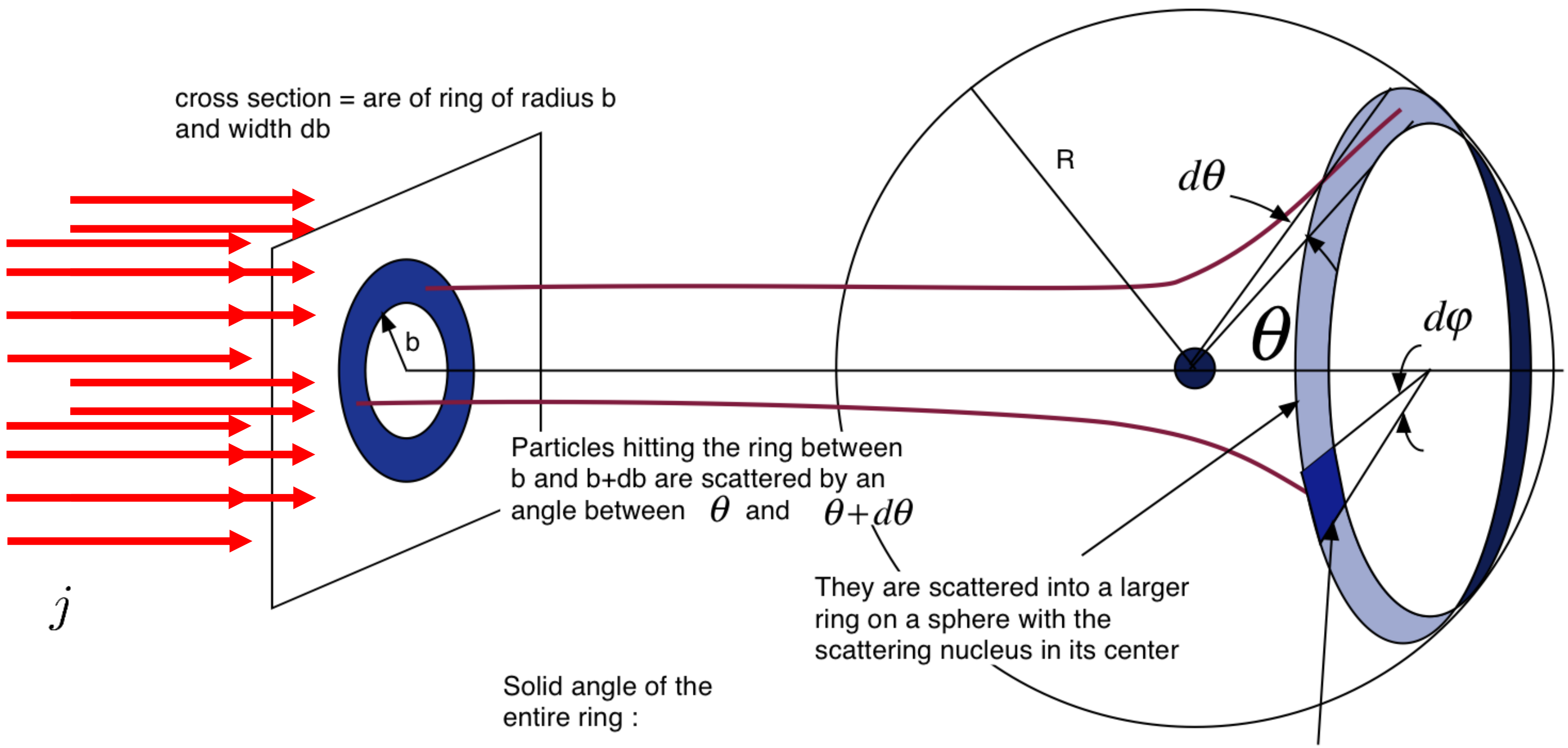
V časových intervaloch medzi „záznamami o okamihoch zrážok v zošitku“ sa molekula pohybuje podľa Newtonovej pohybovej rovnice cítiac prípadne len silu od nejakého „vonkajšieho poľa“, napríklad gravitačného.
Dráha, ktorú ubehne medzi zrážkami sa volá voľná dráha a v strednom sa tomu hovorí **stredná voľná dráha** a označuje sa spravidla l. Ak poznáme strednú dobu medzi zrážkami τ, potom stredná voľná dráha je rádovo rovná

$$l = v\tau$$

kde v je typická rýchlosť chaotického pohybu molekúl. Zámerne sme povedali „rádovo“, lebo pri rigoróznom pokuse o definíciu strednej voľnej dráhy a jej závislosti na strednej dobe medzi zrážkami by sme narazili na technické matematické nepríjemnosti. V učebniciach sa preto uspokojujeme iba s radovo presnou definíciou strednej voľnej dráhy a vynásobením „typickou rýchlosťou“ bez toho aby sme presne definovali, čo sa pojmom typická rýchlosť presne myslí.

- Napíšte rovnicu adiabaty
- Čo je Poissnova konštanta v rovnici adiabaty?
- Vysvetlite kvalitatívne prečo kvapalina má povrchovú hostutu energie.
- Ako súvisí hustota povrchovej energie a kapilárna sila na jednodtku dĺžky čiarového rozhrania
- Ako osmotický tlak súvisí s osmózou a inverznou osmózou.
- Vyjadrite pravdepodobnosť zrážky častice v krátkom okamihu dt
- Aký je fyzikálny význam časovej konštanty vo vzťahu pre pravdepodobnosť zrážky častice v krátkom okamihu dt

Účinný prierez pre „šťuknutie detektorov“



$$d\Omega = \frac{2\pi R\sin(\theta)Rd\theta}{R^2} = 2\pi\sin(\theta)d\theta$$

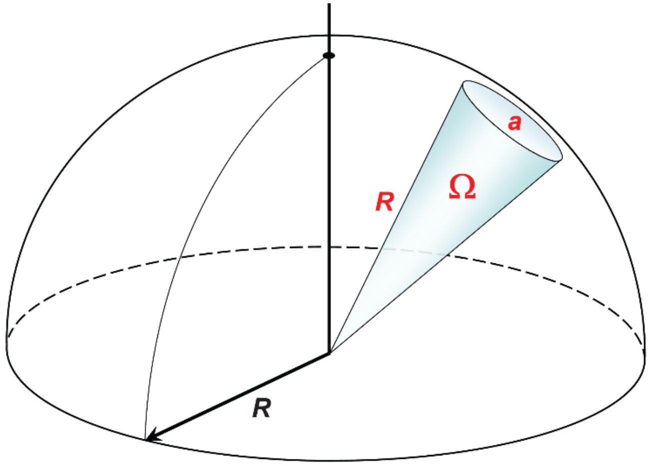
$$d\Omega = \frac{d\varphi R\sin(\theta)Rd\theta}{R^2} = \sin(\theta)d\theta d\varphi$$

j particles/cm^{-2}/s

n detector_clicks/s

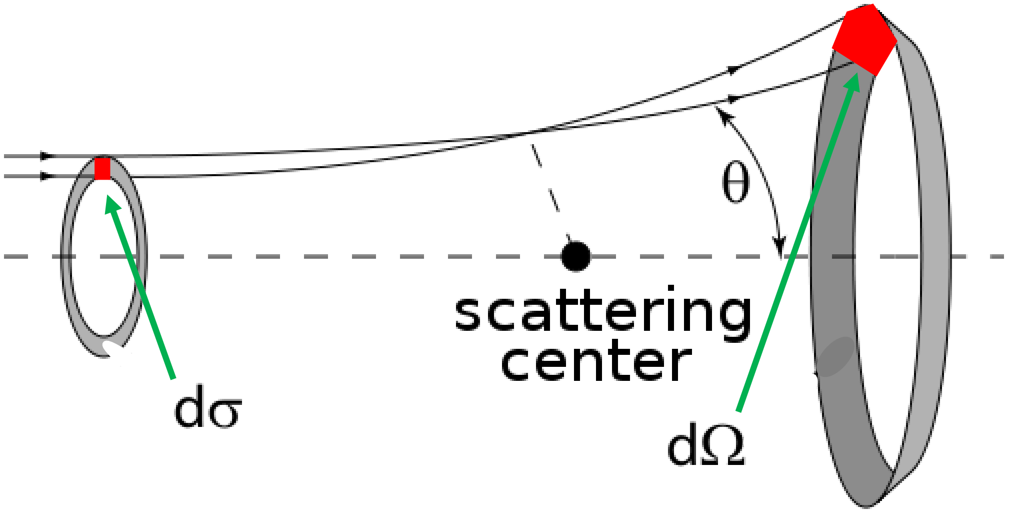
$$\boxed{n = j\sigma}$$

$$\boxed{n = j\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega}$$



Priestorový uhol
jednotka steradián

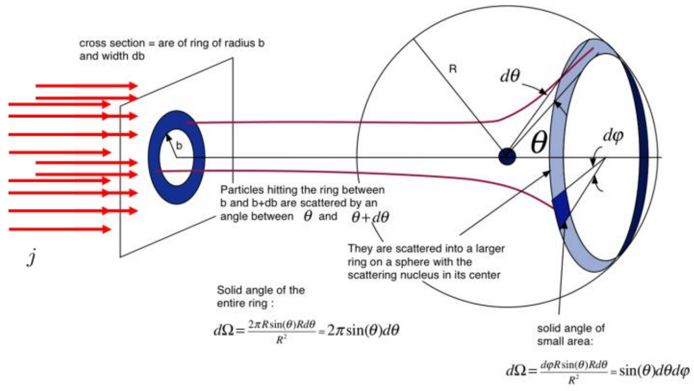
$$a = R^2\Omega$$



$$n = j\,d\sigma$$

$$\boxed{n = j\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega}$$

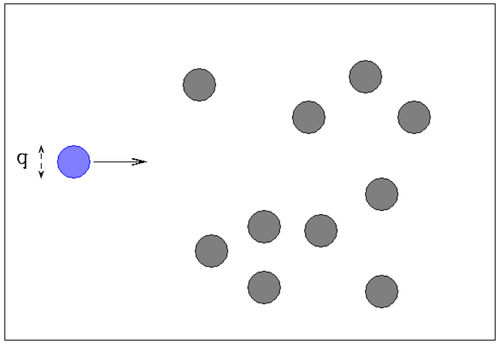
Totálny účinný prierez

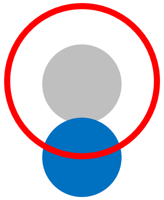


Keby som detektormi pokryl celú sféru okolo terča, okrem maličkej plôšky v priamom smere, kam idú projektily ktoré „nenarazili“ potom príslušný počet šťuknutí detektorov je vyjadrený tiež nejakou plochou na myslenej rovine kolmej na zväzok projektilov

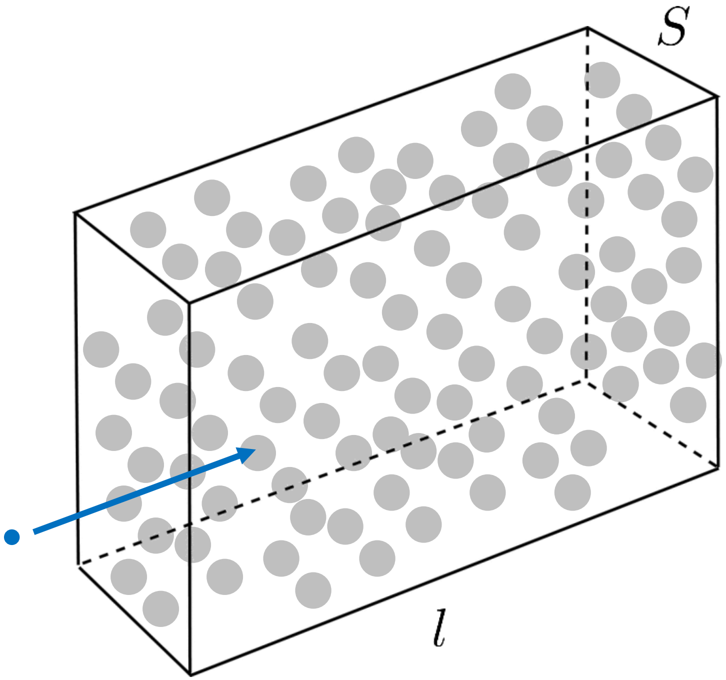
$$n = j\sigma_{\text{tot}}$$

Odhad strednej voľnej dráhy v plyne z účinného prierezu





$$\sigma = \pi(2d)^2$$



Každá častica plynu predstavuje terč o ploche σ. V akej hĺbke sa zastaví bodový projektil?

Hustota častíc v plyne n.

Celková plocha terčov na ceste

$$nlS\sigma$$

Zakrytá zadná stena: $nlS\sigma = S$

$$\boxed{l = \frac{1}{n\sigma}}$$

rádovo stredná voľná dráha

Pre typický plyn

- $n = 0{,}3.\,10^{26}$ m^{-3}

Rádovo

- typický rozmer molekuly 1 nm

- $\sigma = 0.1\ \mathrm{nm}^2$
- $l = 3.10^{-7}$ m
- $\tau = 10^{-9}$ s

$$l = \frac{1}{n\sigma}$$

$$\sqrt{n}$$

Molekula neustále meniaca po zrážkach smer svojho pohybu sa správa ako „**opitý námorník**".

Námorník vyjde z krčmy a pretože je totálne opitý kráča domov nie cielene ale náhodne. Robí opakovane kroky náhodného smeru. Otázka je, ako ďaleko sa typicky môže dostať po n krokoch. Úlohu vyriešime pre námorníka, ktorý kráča v jednorozmernom svete, teda po priamke. Naštartuje v bode so súradnicou 0 a po n krokoch je jeho súradnica x_n. Zistíme, že stredný **kvadrát vzdialenosti,** kam sa dostane námorník po n krokoch **rastie ako počet krokov**, nie ako kvadrát počtu krokov, ako to platí, ak kráča nie náhodne ale cielene v jednom smere. Teda **vzdialenosť, kam sa typicky dostane rastie ako $\sqrt{n}$.**
Dĺžka kroku jednej blúdiacej molekuly je typicky 300 nm. Za ako dlho typicky prekoná vzdialenosť 10m? 10m $= 3.10^6$ cielených krokov $= 10^{13}$ opitých krokov . Jeden opitý krok trvá 10^{-9} s, takže jedna molekula potrebuje typicky vyše hodiny na prekonanie 10 m.

Tu je „teória“ opitého námorníka

Rovnica pre jedného námorníka znie (pre n-tý krok)

$$x_n = x_{n-1} \pm step$$

Majme N námorníkov, pre každého napíšeme jeho rovnicu. Pre i-teho námorníka bude

$$x_n^{(i)} = x_{n-1}^{(i)} \pm step$$

Predstavme si rovnice pre všetkých N námorníkov napísané pod sebou, sčítajme ich a výsledok vydeľme počtom námorníkov. Dostaneme

$$\overline{x_n} = \overline{x_{n-1}} + 0$$

Keďže znamienka v rovniciach sú náhodné, sčítaním veľkého počtu rovníc vznikla v stĺpci krokov nula. Dostali sme aký je vzťah medzi strednou polohou námorníka po n krokoch a strednou polohou námorníka po $n-1$ krokoch

$$\overline{x_n} = \overline{x_{n-1}}$$

Riešením tohto rekurzívneho vzťahu pre všeobecné n je

$$\overline{x_n} = \overline{x_0} = 0$$

Teda v stredná poloha námorníka je „v krčme“. Informačne bohatší vzťah dostaneme, keď rovnice námorníkov najprv umocníme na druhú.

$$\left(x_n^{(i)}\right)^2 = \left(x_{n-1}^{(i)} \pm step\right)^2$$

$$\left(x_n^{(i)}\right)^2 = \left(x_{n-1}^{(i)}\right)^2 \pm 2x_{n-1}^{(i)} step = step^2$$

Po sčítaní a vydelení počtom dostaneme

$$\overline{x_n^2} = \overline{x_{n-1}^2} + step^2$$

Riešením tohto rekurzívneho vzťahu je

$$\overline{x_n^2} = n \times step^2$$

Teda stredný kvadrát vzdialenosti kam sa dostane námorník po n krokoch **rastie len ako počet krokov**, nie ako kvadrát počtu krokov, ako to platí, ak kráča nie náhodne ale cielene v jednom smere.

Difúzia molekúl

Molekuly plynu sa pohybujú ako opití námoerníci. Robia náhodne kroky, ktoré majú dĺžku strednej voľnej dráhy. Preto keď urobia n krokov dostanú sa typicky iba do vzdialenosti $\sqrt{n}l$.

- $l = 3.10^{-7}$ m
- $\tau = 10^{-9}$ s

Aby sa molekula dostala do vzdialenosti 10m od „štartu“, musí vykonať $9x10^{14}$ krokov, to je 9×10^{5} sekund!!

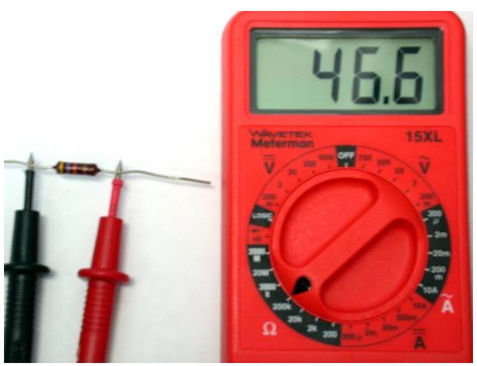
Aplikácie

Elementy spracovania dát

Jednoduché meranie

Analyzujme jednoduché fyzikálne meranie: meranie rezistora abstraktným ohmmetrom. Preto abstraktným, lebo naozajstné ohmmetre sa tak nespravajú, ako ďalej budeme predpokladať. Ale modeluje to nejakú situáciu a pre naozajstnú analýzu reálnej situácie musíme použiť hlavu a premyslieť si, ako aplikujeme to, čo sa tu abstraktne naučíme.

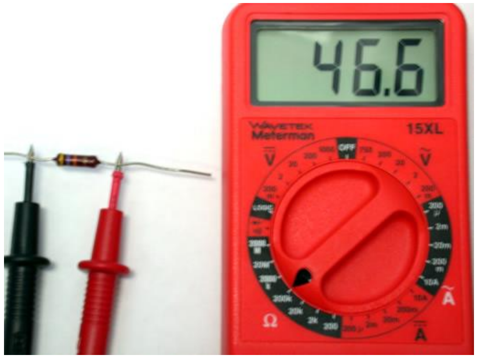
Máme jeden konkrétny rezistor. Budeme predpokladať, že hodnota jeho odporu, ktorú chceme určiť nie je náhodná ale celkom konkrétna hodnota. Povedané lapidárne „ten rezistor presne vie, koľko má Ohmov“. Keby vedel hovoriť, povie nám to, a nemusíme sa trápiť analyzovaním „chýb merania“. Ibaže nevie hovoriť. Mám konkrétny ohmmeter, pripojím ho k rezistoru, ukáže



číslo: 46.6 Ω. To ale neznamená, že „naozajstná hodnota“ odporu je 46.6 Ω. Problém je v tom, že údaj ohmmetra sa „náhodne líši“ od skutočnej hodnoty. Opakujeme: **budeme sa tváriť, že existuje čosi ako skutočná, presná, nenáhodná hodnota odporu a údaj ohmmetra je náhodná veličina, ktorá sa od skutočnej náhodne líši.**

Reálna „skutočná“ hodnota odporu je tiež trochu náhodná, lebo napríklad teplota v miestnosti trochu fluktuuje, ale to je v praxi úplne zanedbateľné.

Jednoduché meranie



Ohmmeter nie je celkom ilustrácia toho, čo chceme ďalej robiť, ale zase ilustruje všelijaké iné úskalia, na ktoré si musím dávať v reáli pozor.
Predovšetkým zmerať odpor pomocou hrotov ako na obrázku je celkom umenie, kvôli zlým kontaktom. Špina, oxidácia. Ohmmeter môže ukázať takmer čokoľvek.
Údaj na displeji bude divoko náhodný ale to je nie ten typ náhody, o ktorej sa chceme baviť. Ďalej ohmmeter môže byť systematicky zle ukazujúci. Kvôli slabej batérii, kvôli zlému nastavenie, kvôli starnutiu ... Všetkému tomu sa hovorí systematická chyba, lebo nemá náhodný charakter a nedá sa jej zbaviť opakovaným meraním, treba ju identifikovať a zbaviť sa jej alebo ju aspoň odhadnúť a upozorniť na ňu „zákazníka".
Po tom, čo si odmyslíme divočiny a systematiku ostane náhodná chyba merania, teda že pôsobením nejakej náhodnej príčiny (ktorú nemám pod kontrolou) sa zobrazená hodnota líši od skutočnej hodnoty. Terminológia používané v skriptách kolegu Kundracika (odporúčam!) http://www.drp.fmph.uniba.sk/SED/sed1.pdf

chyba merania : rozdiel medzi získanou a skutočnou hodnotou veličiny
neistota merania: odhad chyby merania

V praxi sa často terminologicky nerozlišuje medzi chybou a neistotou a hovorí sa proste o chybe.

Jednoduché meranie

V ďalšom budeme teda predpokladať, že skutočná hodnota meranej veličiny je fixné nenáhodné číslo a údaj meracieho prístroja (nameraná hodnota) je náhodná veličina.

Ako každá náhodná veličina aj nameraná hodnota musí mať nejakú hustotu rozdelenia pravdepodobnosti $\rho(x)$. O tejto funkcii málokedy vieme niečo exaktne, ale my sa tu budeme tváriť, že ide o Gaussovo rozdelenie, teda

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$$

Ak meranie nemá systematickú chybu potom hodnota μ je skutočná hodnota meranej veličiny a merané hodnoty sú okolo nej rozptýlené s varianciou σ^2. O hodnote σ spravidla niečo vieme alebo aspoň tušíme, je to vlastne to, čo Kundracik vola neistota jedného merania. My tu budeme predpokladať, že hodnota σ „je napísaná na meracom prístroji", teda že ju niekto určil pri jeho kalibrácii.

Je zrejmé, že nás nezaujíma údaj prístroja, teda jedna nameraná hodnota, my chceme vedieť hodnotu μ.

Jednoduché meranie bez opakovania

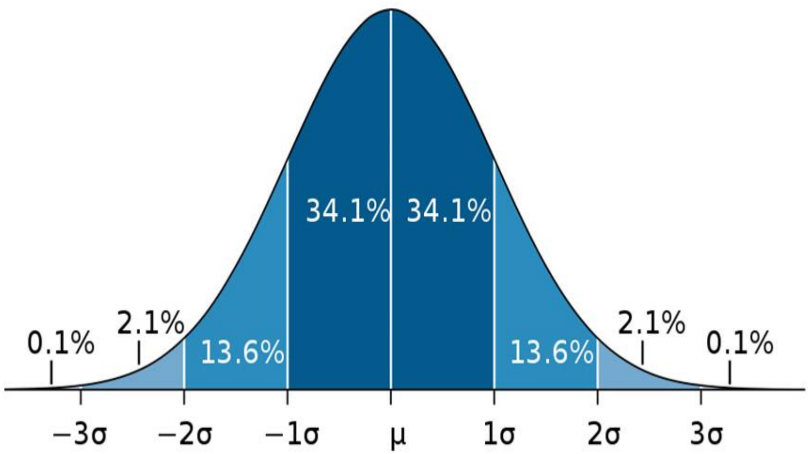
Zhrňme tu, čo sme povedali o jednorazovom meraní nejakej veličiny. Výsledkom merania je jediná „nameraná hodnota“ x_1. Na meracom prístroji je napísaná hodnota neistoty jedného merania σ. Do protokolu ako výsledok zapíšeme čosi ako:

$$x = x_1 \pm \sigma$$

Teraz ide o to, čo to znamená. Varovanie: ten zápis nehovorí nič o tom, že by meraná veličina bola náhodná a jej rozdelenie pravdepodobnosti odhadujeme nejako tak, ako to naznačuje ten zápis. Naopak, meraná veličina má (anjelom v nebi presne známu) určitú fixnú hodnotu. Ten zápis hovorí niečo o nás ako experimentátoroch, hovorí niečo o našom odhade našej pravdepodobnosti namerať hodnotu s menšou alebo väčšou chybou merania. Pravdepodobnosť, o ktorej hovorí ten zápis sa týka tohto:

Predstavme si, že ten istý rezistor s tou istou skutočnou hodnotou odporu zmeria veľa experimentátorov, Jano, Jožo, Fero, Mišo,.... Každý urobí jediné meranie. Každý nameria inú (svoju) konkrétnu hodnotu x_1. Tie namerané hodnoty od rôznych experimentátorov budú náhodne rozdelené a ten zápis hovorí o našom odhade hustoty pravdepodobnosti tých nameraných hodnôt. Očakávame, že tie namerané hodnoty budú rozdelené gaussovsky okolo nejakej strednej hodnoty, ktorú odhadujeme našou hodnotou x_1 a jedna štandardnu odchýlka toho rozdelenia odhadujeme ako σ.

Jednoduché meranie bez opakovania



Tento zápis hovorí, že keď veľmi veľa experimentátorov nameria jednorazovo veličinu x potom v 68.2% prípadov bude skutočná hodnota meranej veličiny ležať v rámci intervalu $(x_1 - \sigma, x_1 + \sigma)$.

Inými slovami povedané to znamená toto. Budem vystupovať ako súdny znalec na súde a dostanem otázku „koľko promile alkoholu mal obžalovaný v krvi?“. Odmeriam vzorku jedenkrát „alkoholometrom“ a napíšem

$$x = 1.1 \pm 0.1\%$$

Sudca to interpretuje tak, že alkohol nebol pod 1.0 % a obžalovaného odsúdi, lebo si možno si nie celkom uvedomuje, čo ten zápis hovorí. Ak to tak chodí (neviem ako to chodí na naozajstnom súde!), potom ak vypovedám ako expert pravidelne, **potom zo 100 obžalovaných (u ktorých uvediem tento konkrétny interval) na základe môjho svedectva odsúdia 32 nevinných!!!** Lebo v 32 % prípadoch skutočná hodnota (asi, teda podľa môjho odhadu neistoty) neleží v intervale, ktorý som uviedol. Uf!!!

Intervaly spoľahlivosti

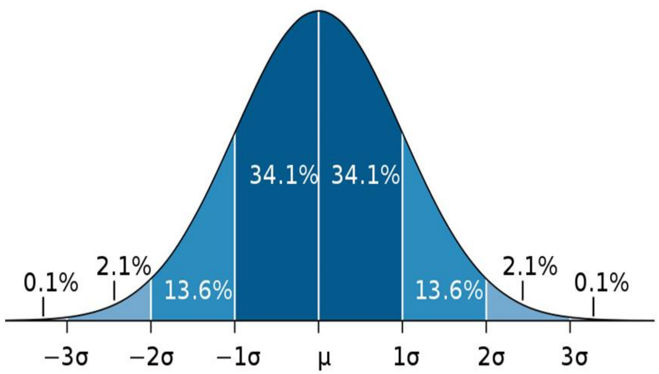
Zdôraznime znovu veľmi jasne. Zápis typu

$$x = x_1 \pm \sigma$$

vypovedá o tam, ako **ja odhadujem** možnosť **mojej smoly**, že sa mýlim.

Nespával by som dobre, keby som myslel že na základe mojich svedectiev odsúdili 32 nevinných z každej stovky obžalovaných.

Neviem, akú inštrukciu dávajú na školení súdnych znalcov, ja by som radšej uvádzal výsledok v tvare „**n% confidence level interval**“. Napríklad by som sudcovi povedal, že 95% confidence level interval je približne $(x_1 - 2\sigma, x_1 + 2\sigma)$.



Ak na základe takejto výpovede odsúdia niekoho, že jeho hodnota nespadá do tohto intervalu, potom na základe mojej výpovede odsúdia už „len“ 5 nevinných zo 100 obžalovaných. To už by som spával dobre?

Vo fyzike sa spravidla verí na pravidlo „aspoň 3σ“. Teda napríklad, že publikujem, že meraná hodnota sa líši od takej, ktorej sme doteraz verili, ak je to o „viac ako o 3σ“. S veľmi vážnymi oznámeniami sa čaká dlhšie, kým sa nahromadí dostatočná štatistika. Objav Higgsa oznámili, keď to bolo čosi okolo 7σ.

Zmenšenie neistoty: urobiť viacero meraní

Doteraz sme diskutovali neistotu pri jednom odmeraní nejakej veličiny. A hovorili sme, že ak merania urobia postupne Jano, Mišo, Fero,... namerajú rozličné hodnoty. Namerané hodnoty od rôznych experimentátorov budú náhodne rozdelené. Ako každá náhodná veličina aj nameraná hodnota musí mať nejakú hustotu rozdelenia pravdepodobnosti $\rho(x)$. O tejto funkcii málokedy vieme niečo exaktne, ale my sa tu budeme tváriť, že ide o Gaussovo rozdelenie, teda

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$$

V tom rozdelení je skrytá mne neznáme hodnota μ, teda skutočná hodnota meranej veličiny. Idea je teraz taká: merania nemusia robiť iní experimentátori, ja sám môžem zopakovať to meranie veľakrát a získam n vzoriek „nameranej hodnoty. Je to teda čosi, ako keby som mal zásobník („mech“) vzoriek náhodnej veličiny a stojím pred nasledovnou úlohou: **Máš k dispozícii plný mech vzoriek náhodnej veličiny rozdelenej ako $N(\mu,\sigma)$, kde hodnota σ je známa ale hodnota μ je neznáma. Môžeš vytiahnuť z vreca nejaký počet vzoriek a ich „štatistickou analýzou“ určiť čo možno najlepšie neznámy parameter μ.**

Z jednorazového merania nemôžem odhadnúť skutočnú hodnotu meranej veličiny inak ako tak, že je to hodnota, ktorú som práve nameral. Na základe viacerých opakovaných metaní sa to dá urobiť lepšie. Veda, ktorá poskytuje rady „ako takéto veci robiť“ je **matematická štatistika**.

Nápad: urobím viac meraní a z nich aritmetický priemer

$$N(\mu,\sigma): \qquad \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$$

Chcem experimentálne určiť μ. Vytiahnem z vreca n čísel (prakticky to znamená „urobím n meraní)

$$x_i \in N(\mu,\sigma) \quad \text{pre} \quad i \in (1,\ldots,N)$$

$$x_{av} = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i$$

Vypočítam aritmetický priemer. Čísla x_i sú náhodné, preto aj x_{av} je náhodné číslo. Ukážeme si o chvíľu, že toto náhodné číslo má Gaussovo rozdelenie pravdepodobnosti, aké sú parametre toho rozdelenia?

$$\overline{x_{av}} = \frac{1}{n}\sum_1^n \overline{x_i} = \frac{1}{n}\sum_1^n \mu = \mu$$

Treba si jasne uvedomiť, akú strednú hodnotu sme to počítali. Máme veľa experimentátorov. Každý z nich urobí n meraní a každý vypočíta svoj aritmetický priemer. To sú náhodné priemery. Ich stredná hodnota je to čo sme práve spočítali. **Hovorí sa tomu stredná hodnota cez súbor experimentátorov**.

Variancia aritmetického priemeru

$$N(\mu,\sigma): \qquad \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$x_i \in N(\mu,\sigma) \quad \text{for} \quad i \in (1,\ldots,N)$$

$$x_{av} = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i$$

$$\boxed{\overline{x_{av}} = \mu}$$

$$\overline{x_{av}^2} = \overline{\left(\frac{1}{n}\sum_1^n x_i\right)^2} = \frac{1}{n^2}\sum_1^n \overline{x_i^2} + \frac{1}{n^2}\sum_{i\neq j}\overline{x_i}\,\overline{x_j} = \frac{1}{n^2}\sum_1^n \overline{x_i^2} + \frac{1}{n^2}\sum_{i\neq j}\mu^2 =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_1^n(\overline{x_i^2}-\mu^2) + \frac{1}{n^2}\sum_1^n\mu^2 + \frac{n(n-1)}{n^2}\mu^2 = \frac{1}{n^2}\sum_1^n\sigma^2 + \mu^2 = \frac{1}{n}\sigma^2 + \mu^2$$

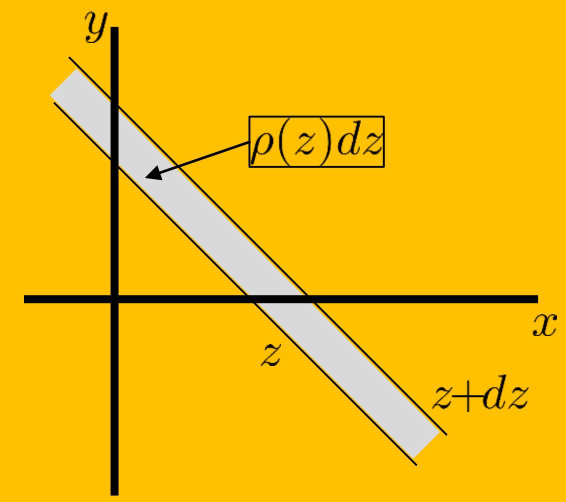
$$\boxed{\sigma_{av}^2 = \overline{x_{av}^2} - (\overline{x_{av}})^2 = \frac{1}{n}\sigma^2}$$

Poznáteda dva parameter pre rozdelenie náhodných hodnôt aritmetických priemerov n meraní získaných veľkým súborom experimentátorov. Ostáva určiť hustotu pravdepodobnosti týchto náhodných hodnôt. Ukážeme, že je to Gauss.

Súčet dvoch Gaussov je Gauss

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}) \qquad \rho(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{y^2}{2})$$

$$z = x + y \qquad \rho(z) = ?$$



$$\rho(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(x) \int_{z-x}^{z+dz-x} dy \rho(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(x) \rho(z-x) dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi} dz \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-x^2/2) \exp(-(z-x)^2/2) = \frac{\exp(-z^2/2)}{2\pi} dz \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-\frac{2x^2 - 2zx}{2}) =$$

$$= \frac{\exp(-z^2/2)}{2\pi} dz \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-(x^2 - zx + z^2/4 - z^2/4)) = \frac{\exp(-z^2/4)}{2\pi\sigma^2} dz \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-(x - z/2)^2) =$$

$$= \frac{\exp(-z^2/4)}{2\pi} dz \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp(-\xi^2) = \frac{\exp(-z^2)}{2\pi} dz \sqrt{\pi} = \frac{\exp\left(-\frac{z^2}{2.2}\right)}{\sqrt{2\pi.2}} dz$$

Výsledok je Gauss so $\sigma^2 = 2$.

Neistota aritmetického priemeru

Ukázali sme si, že súčet dvoch gaussovsky rozdelených premenných je gaussovsky rozdelený. Preto aj súčet n gaussovsky rozdelených premenných je gaussovsky rozdelený. A preto zjavne aj aritmetický priemer n gaussovských premenných je gaussovsky rozdelený. Stredná hodnéta a variancia tohto výsledného rozdelenia je

$$\overline{x_{av}} = \mu \qquad \sigma_{av}^2 = \overline{x_{av}^2} - (\overline{x_{av}})^2 = \frac{1}{n}\sigma^2$$

Som experimentátor a mám zmerať veličinu, ktorej presná (ale neznáma) hodnota je μ, a neistota (jedna štandardná odchýlka) jedného merania je známa a má hodnotu σ. Čo mám urobiť? Zmerať tú veličinu n-krát a vydať výsledok v tvare

$$\boxed{x = x_{av} \pm \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma}$$

Poučka: **neistota aritmetického priemeru n nameraných hodnôt je $\sqrt{n}$-krát menšia ako neistota jedného merania.**

Zapamätajte si „hieroglyf“

$$\sqrt{n}$$

„Odmocnina z n“ sa vo vzorcoch zo štatistiky vyskytuje enormne často a je dobre rozumieť prečo. „Prečo to vyšlo, ako to vyšlo.“

$$x_{av} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i$$

Je to opitý námorník

Keď počítame aritmetický priemer sčítame n čísel. Každé sa líši od skutočnej hodnoty o náhodnú chybu, ale tie náhodné chyby majú náhodné znamienka. Presne ako kroky opitého námorníka majú náhodný smer. Preto aj veľkosť súčtu náhodných chýb nebude n-krát veľkosť náhodnej chyby σ, ale len $\sqrt{n}$-krát veľkosť náhodnej chyby a po predelení n dostaneme

$$x = x_{av} \pm \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma$$

Meranie valčeka mikrometrom

Doteraz sme sa tvárili, že na meracom prístroji „je napísaná“ hodnota neistoty jedného merania. Často to tak nie je a neistotu jedného merania musíme odhadnúť zo samotných meraní. Nie je to ťažké, vykonáme n meraní, pozrieme sa ako sú jednotlivé výsledky rozptýlené okolo aritmetického priemeru a máme odhad neistoty jedného merania.

V živote sme to všetci robili na prvom praktiku v úlohe „meranie priemeru valčeka mikrometrom“. Valček sa odmeral 10-krát a potom „sa to spracovalo“. Problém bol len v tom, že pri meraní človek dostane 10-krát tú istú hodnotu, lebo mikrometer je kvalitný a valček dobre vysústružený. Takže všetci sme po čase prišli na to, že to „treba našvindľovať“. Vymysleli sme si 5 akože nameraných hodnôt a spracovali do tabuľky v protokole.

i	x_i		$(x_i-x)^2$	
1		5.2		0.0484
2		5.1		0.0144
3		4.8		0.0324
4		4.9		0.0064
5		4.9		0.0064
	$x = \frac{1}{n}\sum x_i$	4.98	$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - x)^2$	0.027

V žltej bunke je odhad neistoty jedného merania.

V tabuľke sa vypočítal najprv aritmetický priemer podľa vzorca

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$$

a potom odhad kvadrátu neistoty jedného merania

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

Vzorec je zrejmý, vypočítajú sa kvadráty odchýlok jednotlivých meraní od aritmetického priemeru a potom ich priemer, čo je asi dobrý odhad kvadrátu neistoty jedného merania.

Ibaže priemer sa robí dajako divne, delí sa hodnotou $(n - 1)$ a nie n. Že je to tak správne, prenechávam na duševnú aktivitu čitateľa. Treba si overiť, že stredná hodnota takto odhadnutého kvadrátu je naozaj variancia rozdelenia výsledkov meraní. Intuitívny dôvod odkiaľ sa berie -1 je v tom, že merania sme už raz použili na výpočet aritmetického priemeru, takže z 5 kvadrátov odchýlok v riadkoch je sú len 4 riadky nezávislé.

Na záver sme našvindľované dáta zhrnuli do víťazného vzorca

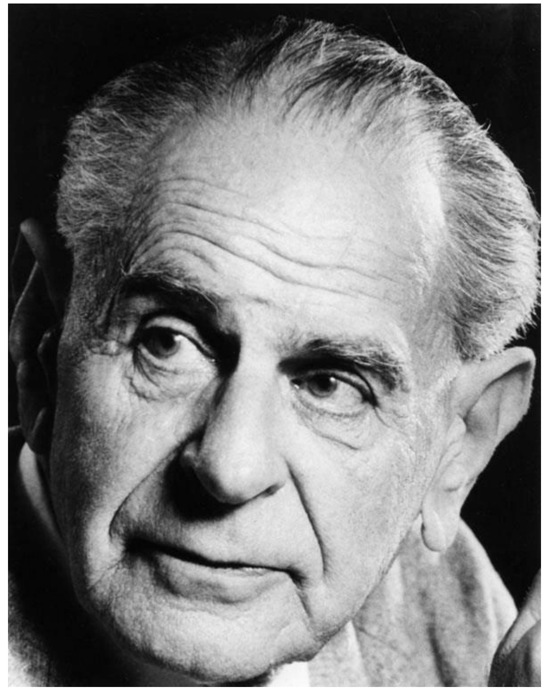
$$x = \frac{1}{n} \sum x_i \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$\boxed{\text{Toto je hieroglyf „odmocnina z n“ za „opitého námorníka“.}}$

- Ako súvisí účinný prierez, hustota prúdu projektilov a počet šťuknutí detektorov v rozptylovom experimente.
- Ako súvisí stredný kvadrát vzdialenosti kam dokráča opitý námorník po n krokoch s tým počtom krokov
- Ako pre Gaussovom rozdelení súvisí 95% interval spoľahlivosti so strednou kvadratickou odchýlkou
- Aké je približne percento spoľahlivosti v intervale plus mínus jedna štandardná odchýlka

Elementy metodológie fyziky

- Fyzika je motivovaná hľadaním pravdivého obrazu sveta okolo nás
- Ale neuplatňuje si nárok na pravdu
- Netvrdí, že to, čo učí, je pravda
- To, čo učí sú dobré „rady do života“
- Občas tie dobré rady modifikuje alebo zmení
- Na rozdiel od matematiky, ktorá tvrdí, že jej vety sú pravdivé
- Matematika je rigorózna veda, vie „ako sa dokazuje pravda“
- V skutočnosti „pravidlá dokazovania pravdy vznikli „v podstate konsenzom“, dohodou
- Ale potom, ak sa pravidlá dokazovania použili správne, o pravdivosti výsledku sa už „nehlasuje“. V dôkaze niekto môže nájsť chybu, ale o tej chybe tiež niet sporu
- Fyzika nedokazuje pravdivosť svojich tvrdení
- **Fyzika svoje tvrdenia vyvracia, zamieta, falzifikuje**
- A potom sa ich snaží nahradiť, upresniť, ohraničiť ich platnosť



Sir Karl Raimund Popper (28 July 1902 – 17 September 1994)

Požiadavka falzifikovateľnosti vedeckej teórie

Ako sa falzifikuje teória

Tak, že sa nájde nesúlad medzi predpoveďou teórie a výsledkom merania

I každý výsledok je zaťažený prinajmenej nejakou náhodnou chybou merania, takže presný súlad s teóriou sa nenájde nikdy. Takže pravidlo o falzifikácii treba upraviť

Tak, že sa nájde štatisticky signifikantný nesúlad medzi predpoveďou teórie a výsledkom merania

Platí „prezumpcia neviny“. Predpokladám, že teória je správna. Te je tzv. **nulová hypotéza**.

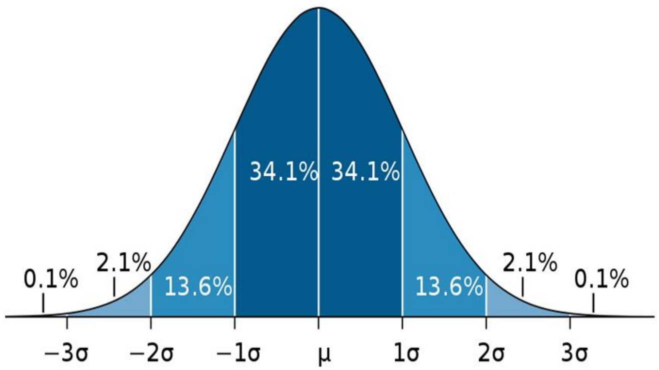
Výsledok merania sa líši od predpovede. Vyčíslim (odhadnem) pravdepodobnosť toho, že pozorovaná odchýlka od predpovede je štatistická chyba merania, teda fluktuácia. Vlastne odhadnem pravdepodobnosť svojej smoly, že pozorujem odchýlku od teórie ktorá je správna. A keď tá pravdepodobnosť je veľmi malá, vyhlásim teóriu za nesprávnu. **Vlastne vyčísľujem pravdepodobnosť, že si urobím vedeckú hanbu, že správnu teóriu vyhlásim za nesprávnu, za falzifikovanú.** Je mojím subjektívnym rozhodnutím, akú pravdepodobnosť hanby som ochotný riskovať. V každej oblasti vedy panuje akýsi konsenzus o „akceptovateľnej hanbe“.

Ak fyzika len falzifikuje ako to, že sa oznamujú objavy?

V CERNe objavili Higgsovu časticu, čo to znamená?

Falzifikovali „teóriu“ že Higgsov bozón neexistuje. To bola pri spracovaní experimentu nulová hypotéza: Sú namerané dáta konzistentné s predpokladom, že Higgsov bozón neexistuje?

Vedenie CERNu dovolilo „publikovať objav“ keď odhad „hanby z ohlásenia objavu neexistujúcej častice“ bude menší ako zodpovedajúci úrovni aspoň 5σ.



Modelový príklad: hracia kocka

Uvažujme nulovú hypotézu:
Pravdepodobnosť, že pri hode kockou padne 6 je 1/6

Ako sa toto falzifikuje? Urobím N hodov a zistím koľkokrát padlo číslo 6, označím to ako N_6.
Vypočítam náhodnú hodnotu

$$x = \frac{N_6}{N} - \frac{1}{6}$$

teda pozorovanú odchýlku od teoreticky očakávanej hodnoty 1/6.
Pre veľké počty pokusov možno považovať veličinu x za spojitú náhodnú veličinu, takže potrebujem vypočítať hustotu pravdepodobnosti pozorovať odchýlku x pri N pokusoch za predpokladu, že platí nulová hypotéza (prezumpcia nevinu), teda že skutočná hodnota pravdepodobnosti je naozaj 1/6.
Pre diskrétnu hodnotu pravdepodobnosti hodnoty N_6 platí (binomické rozdelenie)

$$p(N_6) = \binom{N}{N_6} \left(\frac{1}{6}\right)^{N_6} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-N_6}$$

Po nejakom hľadaní si môžete vygoogliť približný vzorec, ktorý z binomického rozdelenie pre N_6 vyplýva pre hustotu pravdepodobnosti veličiny

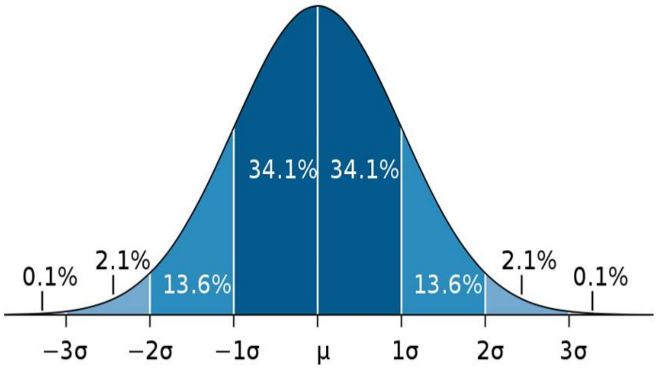
$$x = \frac{N_6}{N} - \frac{1}{6}$$

je to

$$\varrho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{5}{36N}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\frac{5}{36N}}\right)$$

Stredná hodnota x je nula, štandardná odchýlka x je $\sigma = \sqrt{\frac{5}{36N}}$

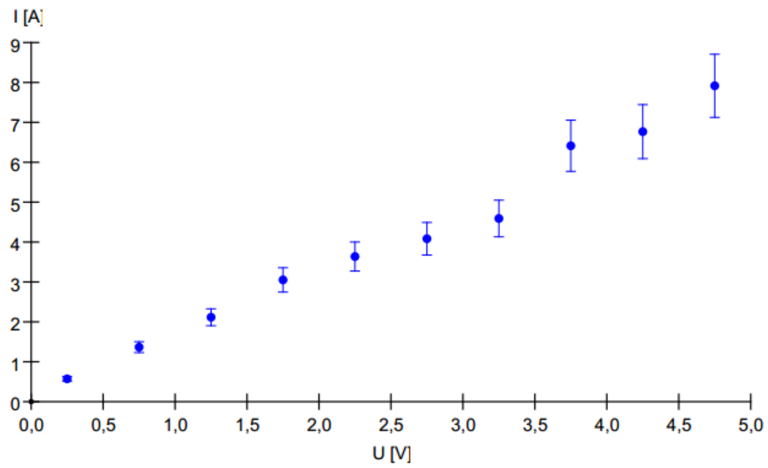
Ak nameriam x „dosť" odlišné od nuly, budem mať tendenciu prehlásiť, že som nulovú hypotézu falzifikoval. Pravdepodobnosť „možnej hanby" určím z grafu



Iný príklad

Nulová hypotéza: Platí Ohmov zákon, teda prúd je priamo úmerný napätiu

Ako sa toto dá falzifikovať. Urobím meranie



Budem testovať konzistentnosť meraní so zákonom

$$I = \frac{1}{R}U$$

Mám namerané dvojice hodnôt (U_i, I_i). Hodnoty I_i majú neistoty σ_i.
Neistoty sú na grafe znázornené ako zvislé čiarky pri nameraných bodoch.
Nepoznám hodnotu R.
Z nameraných hodnôt zostavím funkciu

$$\chi^2(R) = \sum_i \frac{(I_i - U_i/R)^2}{\sigma_i^2}$$

Je to vlastne normalizovaná suma kvadrátov „odchýlok od zákona".

Nájdem, pre akú hodnotu $\tilde{R}$ tá funkcia nadobúda minimum. To je hodnota, pre ktorú je nulová hypotéza „najmenej porušená". Ak nulovej hypotéze verím, potom som práve našiel najlepšiu hodnotu odporu R.

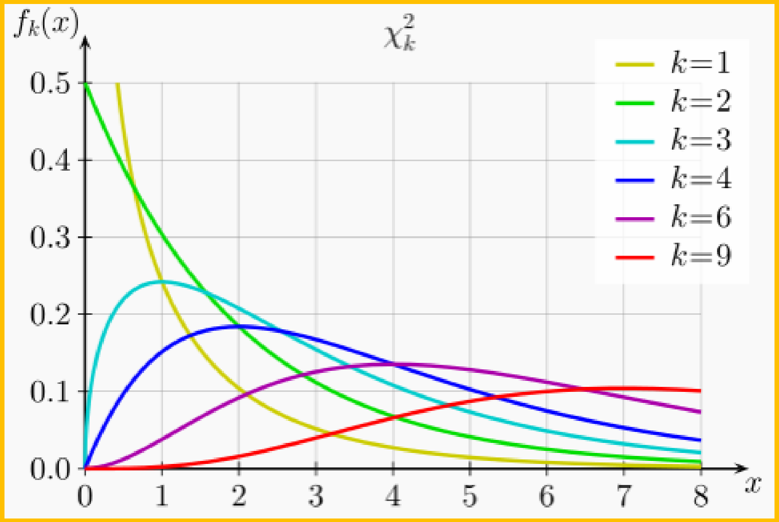
Vyčíslim hodnotu $$\chi^2(\tilde{R}) = \sum_i \frac{(I_i - U_i/\tilde{R})^2}{\sigma_i^2}$$

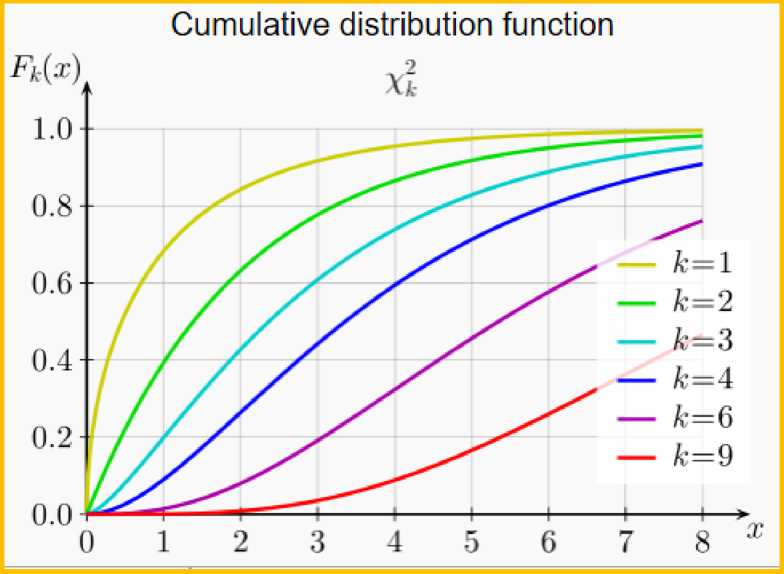
Keby Ohmov zákon platil a merania by nemali náhodné chyby, potom by tá hodnota bola $\chi^2(\tilde{R}) = 0$. Ale merania majú náhodné chyby, typicky očakávam že každý z čitateľov nadobúda hodnotu σ_i^2. Ak bolo n meraní, potom čakám, že dostanem $\chi^2(\tilde{R}) = n$. Ak dostanem hodnotu „o dosť väčšiu ako n, budem mať tendenciu prehlásiť, že Ohmov zákon neplatí.

Ako ale odhadnem „pravdepodobnosť možnej hanby“? Takto.

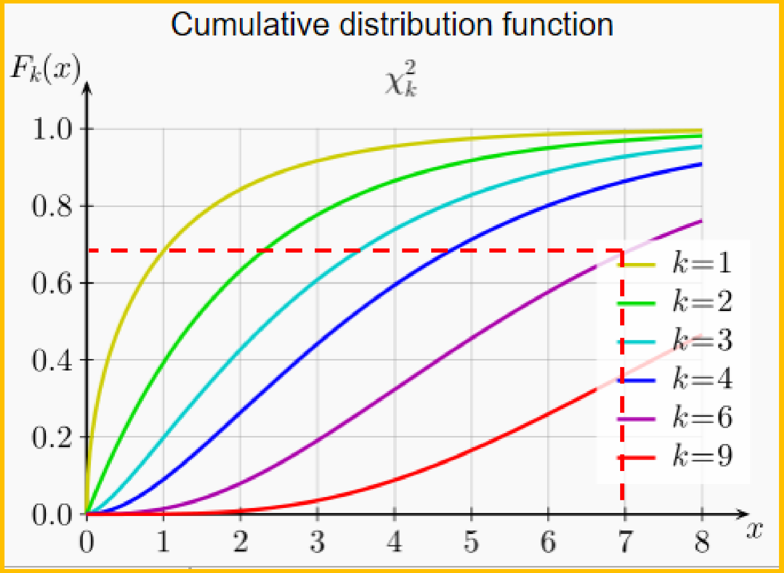
Namerané hodnoty sú náhodné čísla, preto aj z nich vypočítané číslo χ^2 je náhodné číslo.

Požiadam matematických štatistikov, aby našli hustotu pravdepodobnosti náhodnej veličiny χ^2. Oni povedia, že tú hustotu teoreticky poznajú, je to **chikvadrát-rozdelenie pre $(n-1)$ stupňov voľnosti**.





Na obrázkoch je počet stupňov voľnosti označený ako k



Príklad

Mám 7 meraní a dostal som hodnotu $\chi^2(\tilde{R}) = 7$. Mám prehlásiť, že som falzifikoval zákon?

Na krivke pre $k = 6$ odčítam pravdepodobnosť namerať hodnotu menšiu ako 7, je to okolo 0.68. Teda pravdepodobnosť, že zákon je platný a niekto nameria hodnou viac ako 7 čisto ako dôsledok štatistických fluktuácii je 0.32.

Teda ak by som pri hodnote $\chi^2(\tilde{R}) = 7$ prehlásil, že som falzifikoval zákon priamej úmernosti, pravdepodobnosť, že si urobím hanbu odhadujem ako 0.32. To je strašne veľa. Nevydám oznam o falzifikácii.

- Čo sa vo fyzike myslí tým, že teória má byť falzifikovateľná
- Uveďte nejaký argument, prečo priemer z 10 meraní by mal byť presnejší ako jedno meranie
- Ak zvýšime počet meraní 100 krát, ako sa zmení presnosť priemeru z meraní
- Aká je približne hodnota spoľahlivosti pre interval plus/mínus sigma a plus/mínus 2 sigma

Nová SI

- The Planck constant h is exactly $6.626\ 070\ 15 \times 10^{-34}$ joule-second (J⋅s).
- The elementary charge e is exactly $1.602\ 176\ 634 \times 10^{-19}$ coulomb (C).
- The Boltzmann constant k is exactly $1.380\ 649 \times 10^{-23}$ joule per kelvin ($J{\cdot}K^{-1}$).
- The Avogadro constant N_A is exactly $6.022\ 140\ 76 \times 10^{23}$ reciprocal mole (mol^{-1}).

- The speed of light c is exactly 299 792 458 metres per second ($m{\cdot}s^{-1}$).
- The ground state hyperfine structure transition frequency of the caesium-133 atom $\Delta\nu_{Cs}$ is exactly 9 192 631 770 hertz (Hz).
- The luminous efficacy K_{cd} of monochromatic radiation of frequency 540×10^{12} Hz is exactly 683 lumens per watt ($lm{\cdot}W^{-1}$).

- **2019 definition:** The second, symbol s, is the SI unit of time. It is defined by taking the fixed numerical value of the caesium frequency $\Delta\nu_{Cs}$, the unperturbed ground-state hyperfine transition frequency of the caesium-133 atom, to be 9 192 631 770 when expressed in the unit Hz, which is equal to s^{-1}.

- **2019 definition:** The metre, symbol m, is the SI unit of length. It is defined by taking the fixed numerical value of the speed of light in vacuum c to be 299 792 458 when expressed in the unit $m \cdot s^{-1}$, where the second is defined in terms of the caesium frequency $\Delta\nu_{Cs}$.

- **2019 definition:** The kilogram, symbol kg, is the SI unit of mass. It is defined by taking the fixed numerical value of the Planck constant h to be $6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$ when expressed in the unit $J \cdot s$, which is equal to $kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$, where the metre and the second are defined in terms

- **2019 definition:** The ampere, symbol A, is the SI unit of electric current. It is defined by taking the fixed numerical value of the elementary charge e to be $1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$ when expressed in the unit C, which is equal to $A \cdot s$, where the second is defined in terms of $\Delta\nu_{Cs}$.

- **2019 definition:** The kelvin, symbol K, is the SI unit of thermodynamic temperature. It is defined by taking the fixed numerical value of the Boltzmann constant k to be $1.380\,649 \times 10^{-23}$ when expressed in the unit $J \cdot K^{-1}$, which is equal to $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$, where the kilogram, metre and second are defined in terms of h, c and $\Delta\nu_{Cs}$.

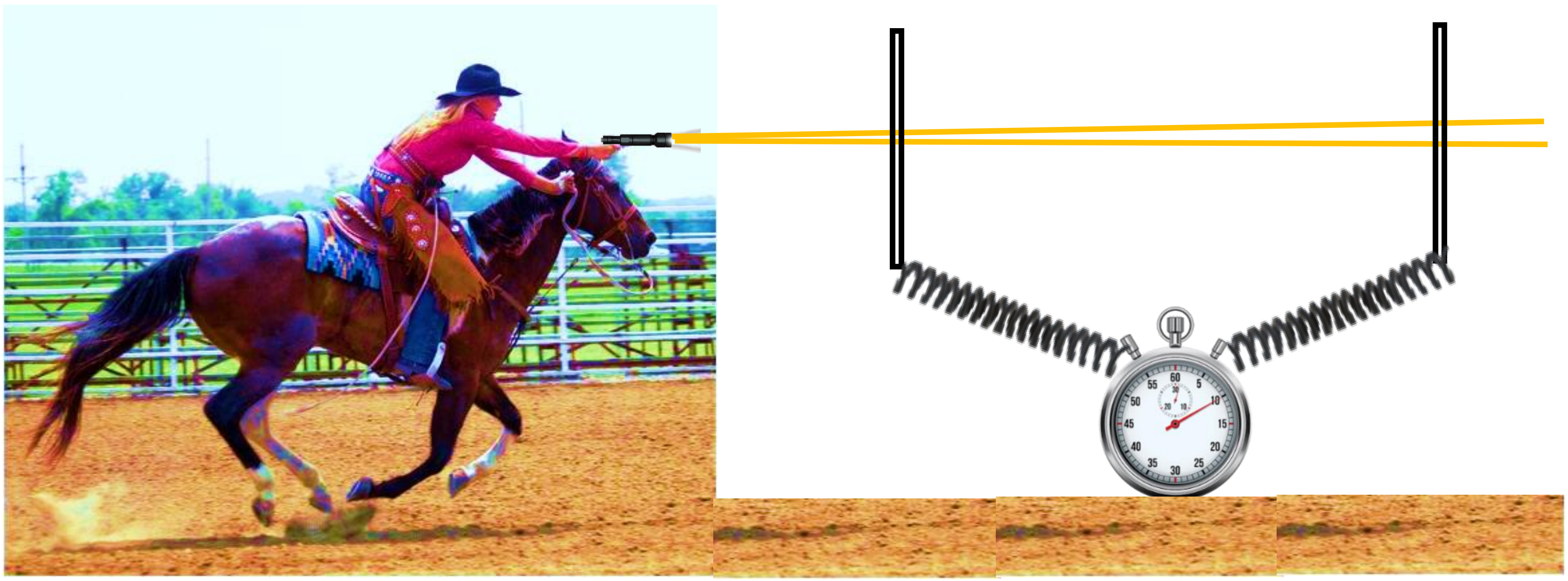
- **2019 definition:**[7]:22 The mole, symbol mol, is the SI unit of amount of substance. One mole contains exactly $6.022\,140\,76 \times 10^{23}$ elementary entities. This number is the fixed numerical value of the Avogadro constant, N_A, when expressed in the unit mol^{-1} and is called the Avogadro number.[7][45] The amount of substance, symbol n, of a system is a measure of the number of specified elementary entities. An elementary entity may be an atom, a molecule, an ion, an electron, any other particle or specified group of particles.

Elementy špeciálnej teórie relativity

Experimentálny fakt:

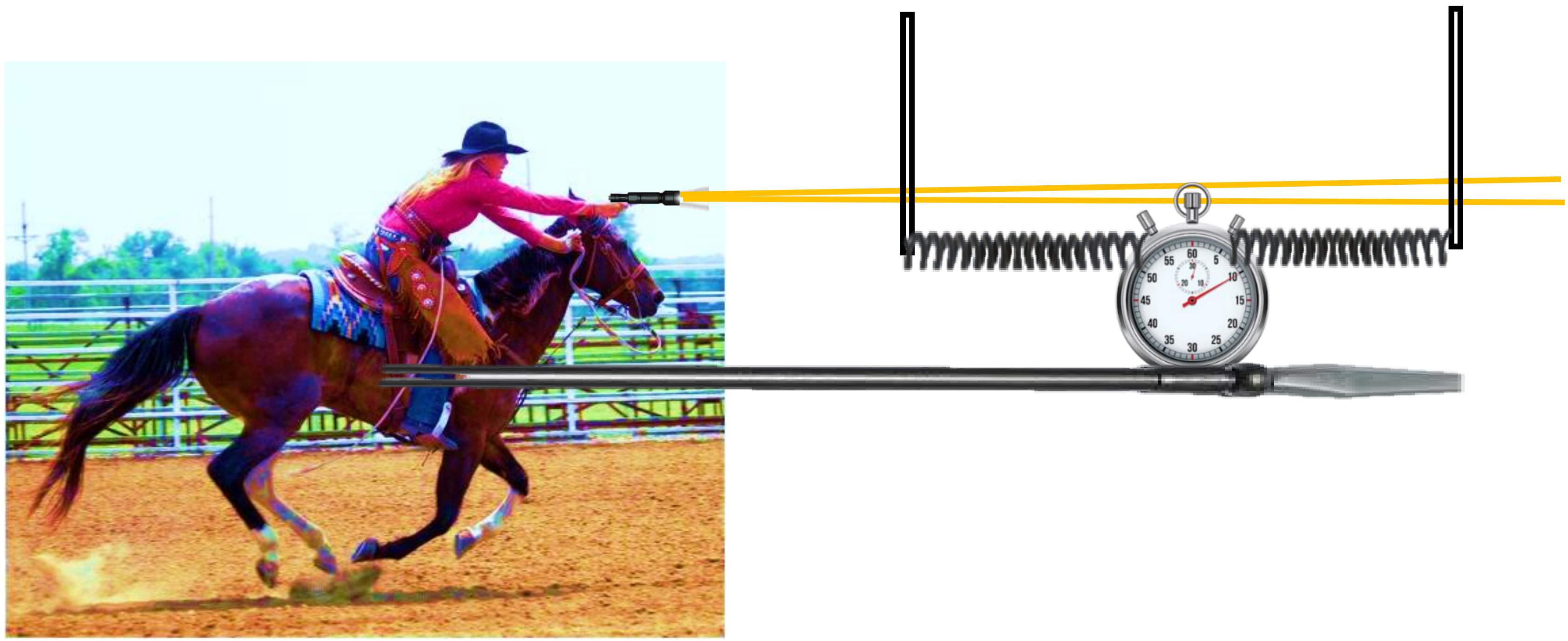
Rýchlosť svetelného lúča je voči ľubovoľnej inerciálnej súradnicovej sústave rovnaká a je 299 792 458 kms^{-1}.

Rýchlosť svetelného lúča je voči ľubovoľnej inerciálnej súradnicovej sústave rovnaká a je 299 792 458 kms^{-1}.



Rýchlosť lúča odmeraná na pevnej zemi **299 792 458 kms^{-1}.**

Rýchlosť svetelného lúča je voči ľubovoľnej inerciálnej súradnicovej sústave rovnaká a je 299 792 458 kms^{-1}.



Rýchlosť lúča odmeraná na pohybujúcom sa koni **299 792 458 kms^{-1}.**

Zdravý rozum: nie je možné aby rýchlosť pohybujúceho sa objektu bola rovnaká voči dvom navzájom sa pohybujúcim pozorovateľom

Experimentálny fakt: Rýchlosť svetelného lúča je voči ľubovoľnej inerciálnej súradnicovej sústave rovnaká a je 299 792 458 ms^{-1}.

Zdravý rozum nás pletie, ak sa jedná o rýchlosti blízke k rýchlosti svetla.

Moderný príklad merania rýchlosti svetla,GPS:

Satelit je vo vzdialenosti 20000 km od Zeme, jeho rýchlosť je 3 km/s to je 1/100000 rýchlosti svetla. Vzdialenosť od satelitu sa meria časom cez rýchlosť svetla. Keby rýchlosť signálu zo satelitu závisela na rýchlosti satelitu ale prepočítavali sme to podľa Einsteina, tak by chyba vzdialenosti bola 20000/100000 km to je 200 m. Poloha je GPS určená na 10 m ľahko, takže svetlo naozaj ide rovnakou rýchlosťou, či je vyslané z hýbuceho sa zdroja alebo stojaceho zdroja. Presnejšia analýza faktov o GPS hovorí, že rýchlosť svetla je vždy rovnaká s presnosťou 12 m/s. (Pozri v knihe F.Selleri Open Questions in Relativistic Physics.)

Ešte jeden príklad:

Stačí ísť na exkurziu k urýchľovaču.
Treba sa tam napríklad pozrieť na rozpad častice piónu. Rozpadá sa na dva fotóny. Ak pión stojí, tie dva fotóny letia oproti sebe rýchlosťou svetla c. V laboratóriu sú však dnes už bežné pióny, pohybujúce sa rýchlosťou 0,999 999 c. Ak sa takýto pión rozpadne na dva fotóny, potom nepozorujeme, že by sa jeden z nich pohyboval rýchlosťou 1,999999 c a druhý iba 0,000001 c (= 300 m/s!, taký efekt by naozaj nebolo ťažké pozorovať). Naopak, oba fotóny majú experimentálne rýchlosť c.

Záver: treba prehodnotiť zdravý rozum, **nanovo predumať všetko o meraní polohy a času**. To je to, čo urobil Einstein v roku 1905.

Einsteinova špeciálna teória relativity je založená na dvoch fundamentálnych princípoch

- **Princíp relativity**: Nijakým experimentom nemožno rozhodnúť, ktorá z dvoch navzájom sa pohybujúcich inerciálnych sústav sa hýbe a ktorá stojí.
- **Princíp rovnakej rýchlosti svetla**: Daný svetelný lúč sa šíri (vo vákuu) voči ľubovoľnej inerciálnej sústave rovnakou rýchlosťou 299 792 458 ms^{-1}.

Tieto princípy sú zovšeobecnenia mnohých experimentálnych pozorovaní. Nie sú to nejaké logické postuláty. Svet by (možno) mohol „byť urobený“ aj inak, že by tieto princípy neplatili. Ich pravdivosť nevieme dokázať v zmysle matematického dôkazu. Máme však takú skúsenosť, že všetko, čo z týchto princípov „odvodíme“ ako predpovedaný výsledok nejakého experimentu, sa ukáže ako „pravdivé“, teda že vykonaný experiment dá výsledky v súlade s našou predpoveďou.

Opakovanie:

stav fyzikálneho systém v istom okamihu sa dá zachytiť na papier a podľa toho papiera ten stav inokedy (úplne) zrekonštruovať

Fyziku sme začali diskutovať tvrdením, že fyzika zachytáva nejaký okamih. Okamih je to, čo sa deje „naraz".

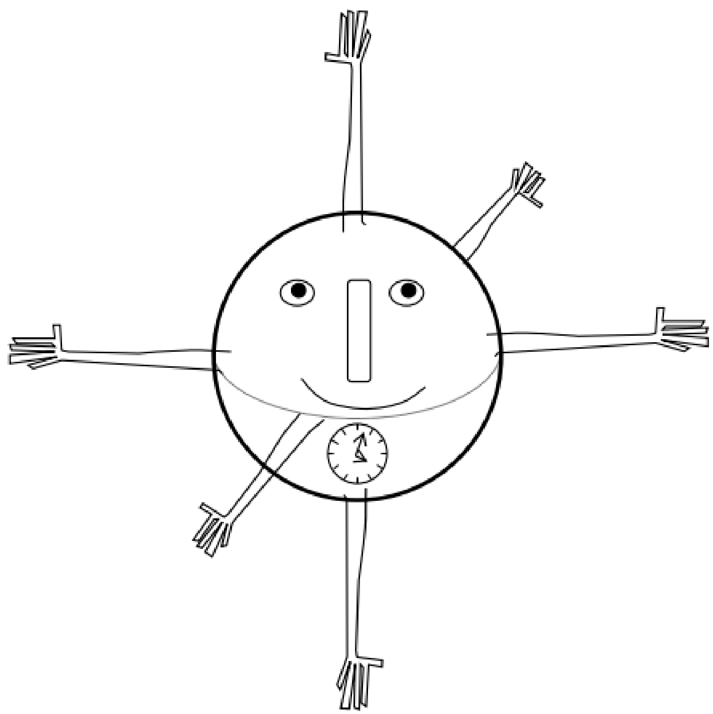
Treba začať tak, že poriadne predumáme, **čo to je „naraz"**. Nevystačíme s intuitívnym chápaním, musíme objektívne definovať pojem naraz.

Čo je to naraz?

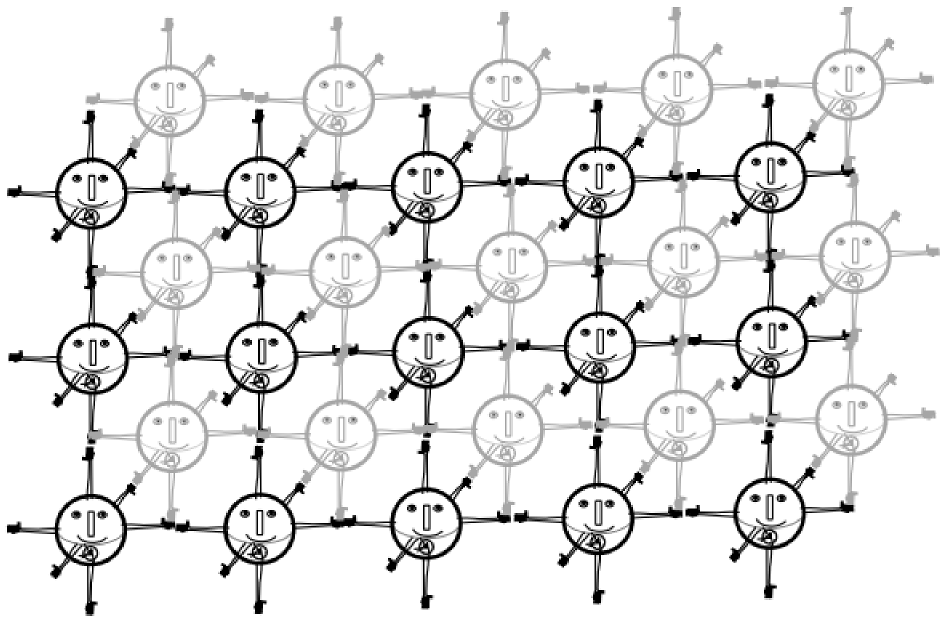
Puding Pani Elvisovej

Pojem „naraz“ objektivizoval Einstein definíciou vzhľadom k nejakej súradnicovej sústave, tvorenej „súradnicovými trpaslíkmi“ ktorí všetci majú lokálne hodiny a tie sú navzájom synchronizované.

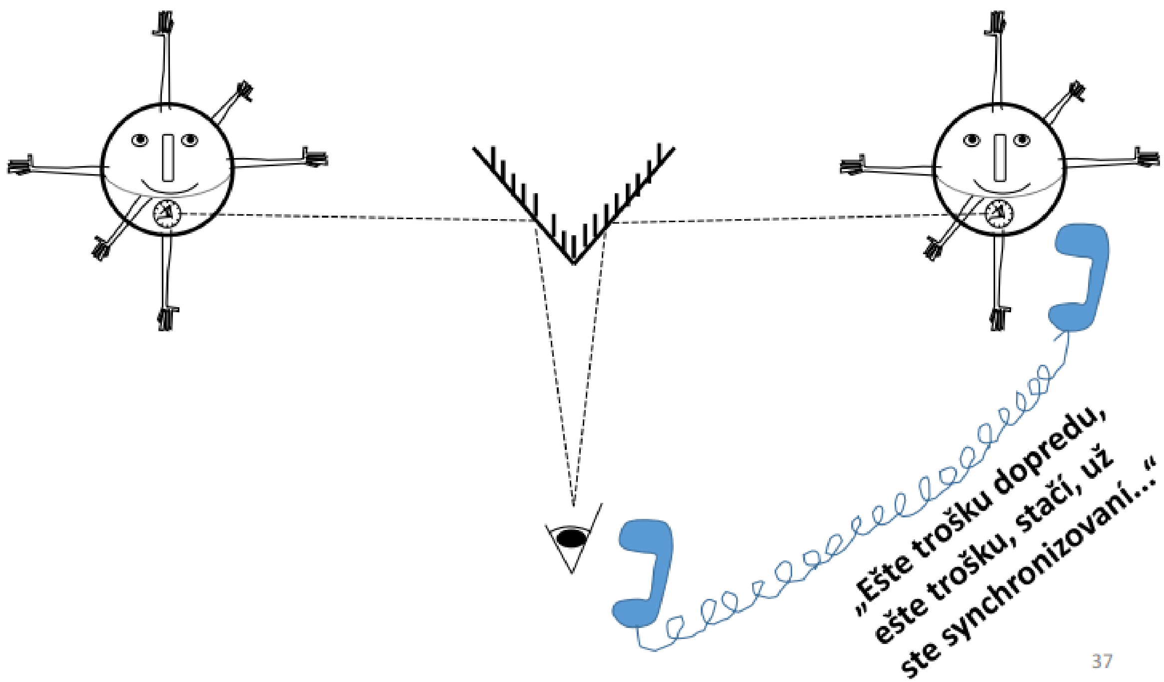
Súradnicový trpaslík (má 6 rúk a hodinky)



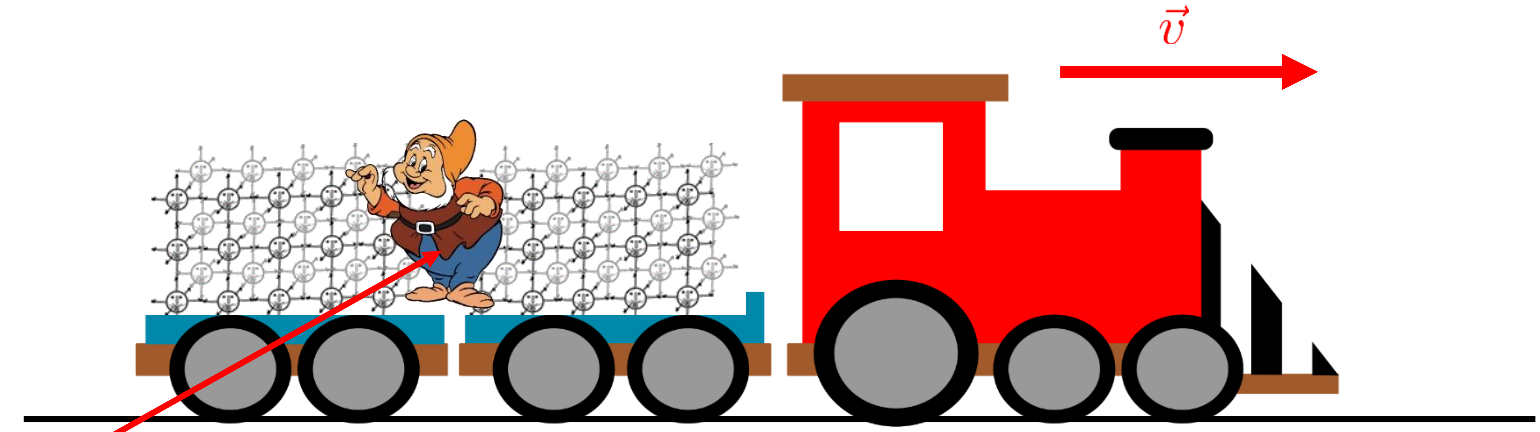
Súradnicová sústava tvorená systémom navzájom nehybných „súradnicových trpaslíkov“



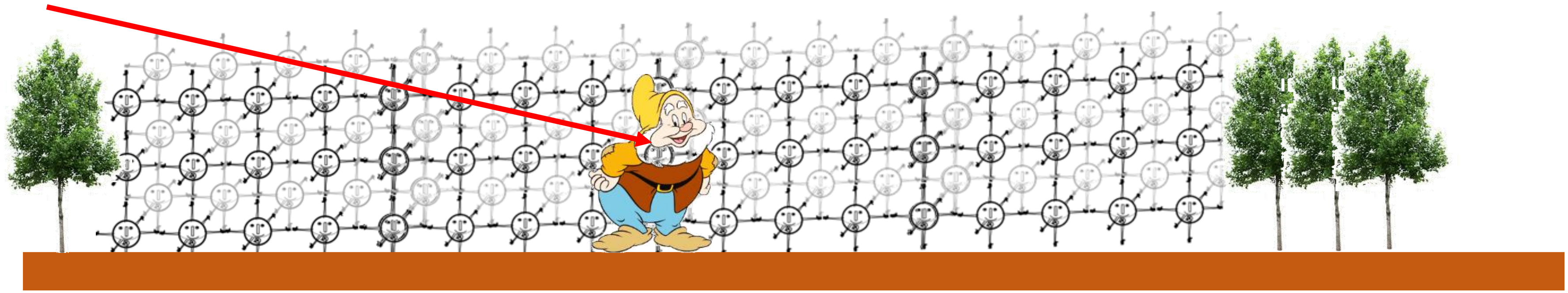
Synchronizácia hodín



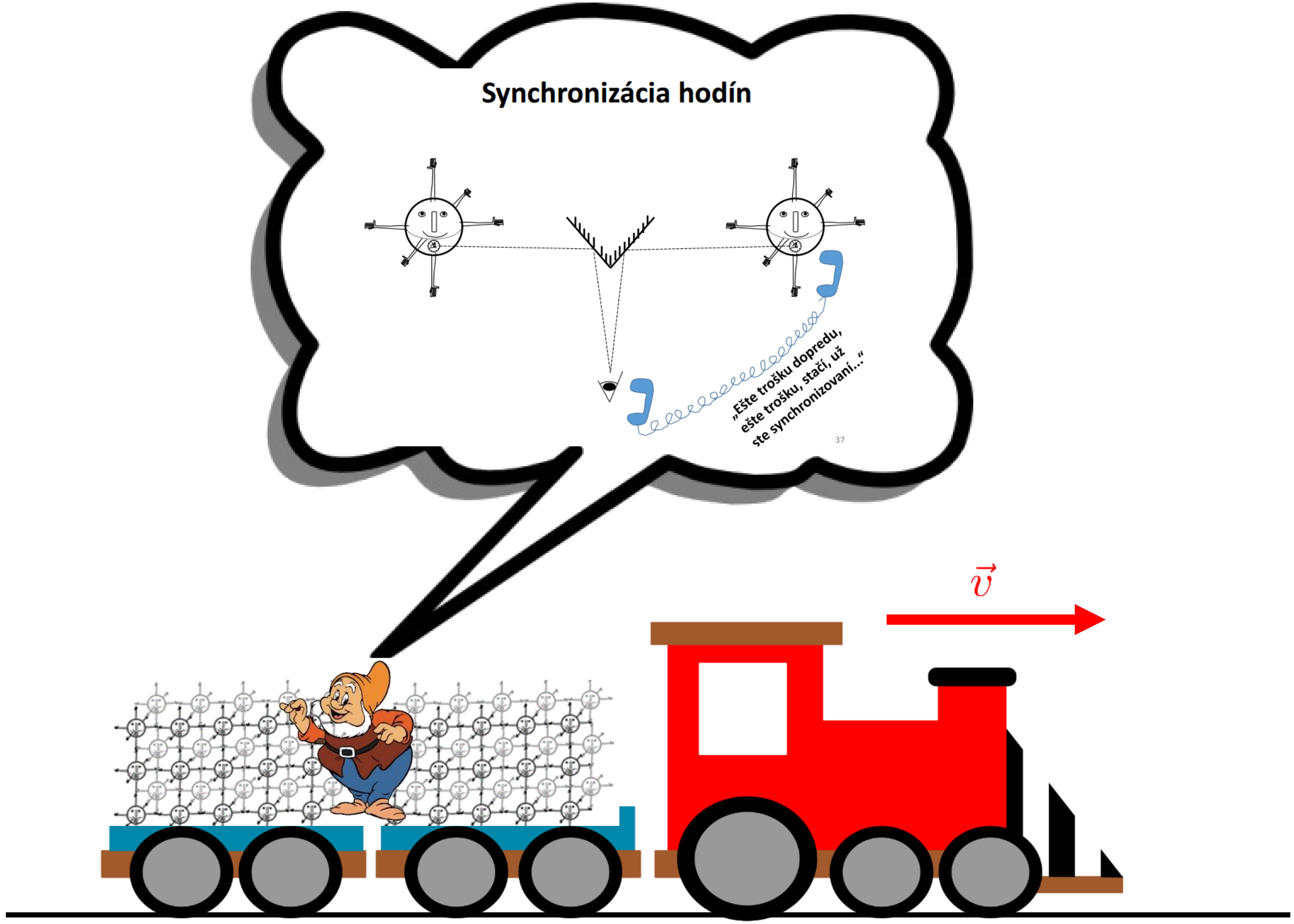
Dve inerciálne sústavy, navzájom sa pohybujúce: vlak a stanica



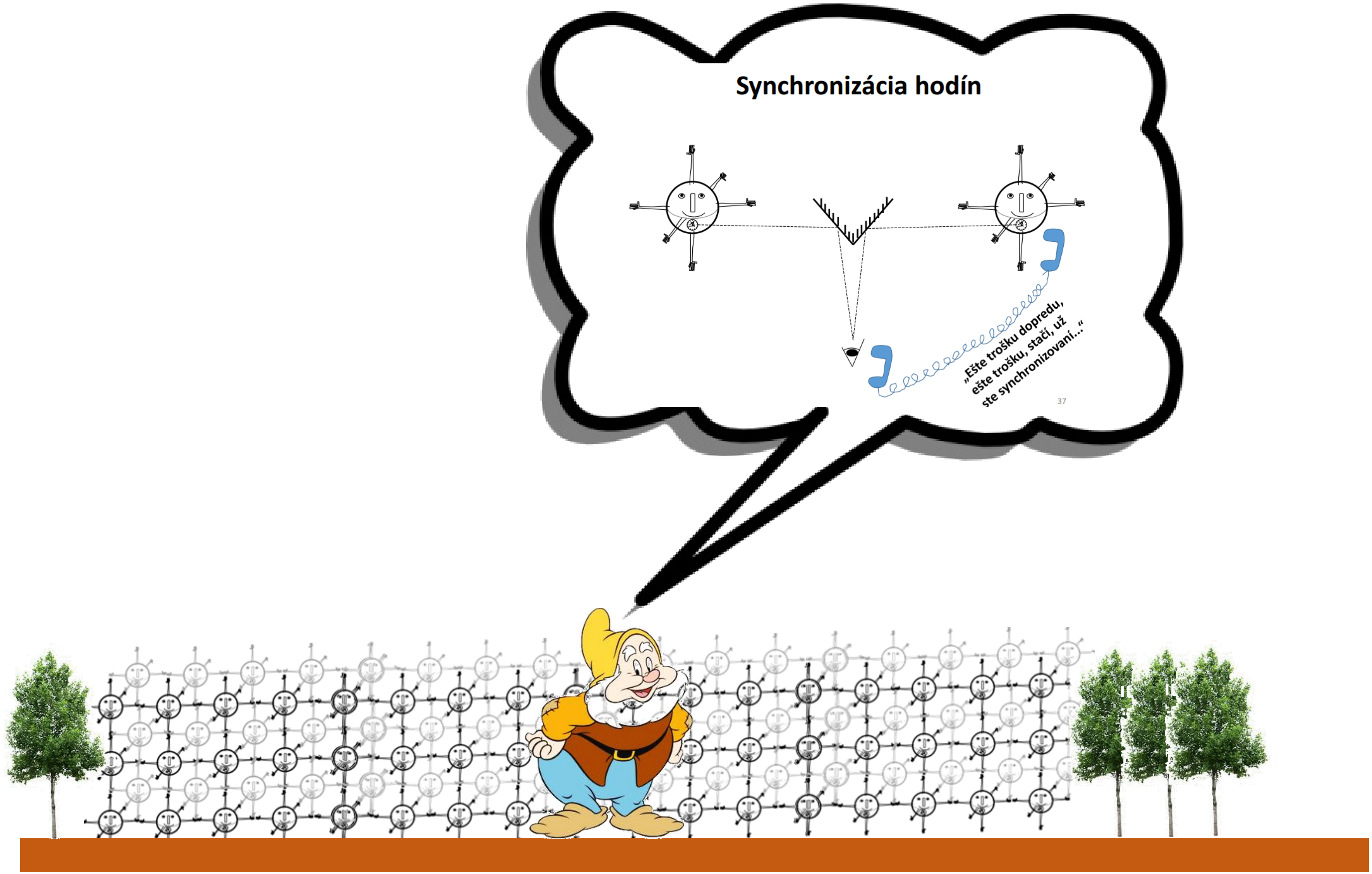
šéftrpaslík: nemeria, len zbiera hlásenia od súradnicových trpaslíkov a analyzuje



každý súradnicový trpaslík má hodiny



Šéftrpaslík synchronizuje hodiny súradnicových trpaslíkov sediacich vo vlaku, ktorí sa nepohybujú ani voči sebe ani voči vlaku ani voči vlakovému šéftrpaslíkovi



Šéftrpaslík synchronizuje hodiny súradnicových trpaslíkov sediacich na stanici, ktorí sa nepohybujú ani voči sebe ani voči stanici ani voči staničnému šéftrpaslíkovi

Synchronizácia hodín v rámci jednej inerciálnej súradnicovej sústavy umožňuje definovať pojem „naraz“ pre tú sústavu.

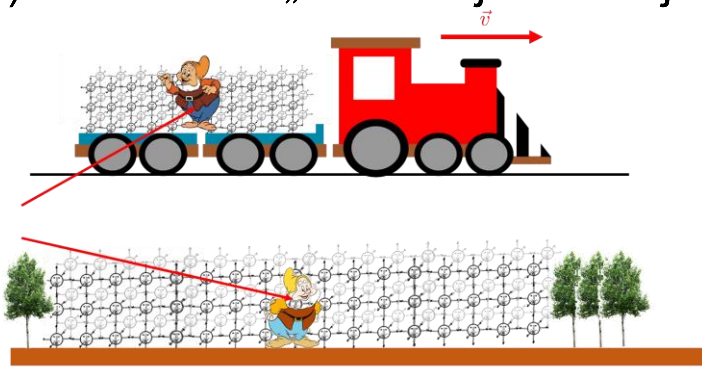
Kľúčovým pojmom teórie relativity je **udalosť (angl. event)**. Fyzikálne javy, pozorovania, môžeme popísať ako sekvencie lokálnych udalostí, ktoré sa odohrali na konkrétnom mieste v konkrétnom čase. Príklady udalostí: zrážka dvoch častíc, rozsvietenie žiarovky, výbuch granátu, dopad kameňa na dno studne, prechod lopty vrcholom dráhy pri šikmom vrhu, ...

Udalosť je miestne lokálna. Prebehne teda v istom čase v blízkosti nejakého súradnicového trpaslíka. Meno toho trpaslíka definuje „miesto kde nastala tá udalosť“. „Meno trpaslíka“ je tvorené trojicou čísel (x, y, z). V čase, keď udalosť nastala, sa „miestne príslušný“ trpaslík pozrie na svoje hodinky a ich údaj nazve že je to „čas, kedy tá udalosť nastala“.

Miestne príslušný trpaslík vyhotoví záznam o udalosti, ktorý pozostáva z **„popisu aká udalosť to bola“ (dopad kameňa) a štvorice čísel (t, x, y, z),** udávajúcich čas a miesto udalosti. Záznamy o udalostiach posielajú trpaslíci do centra súradnicovému šéftrpaslíkovi, ktorý záznamy zhromažďuje a fyzikálne analyzuje. Udalosti, ktoré na zázname majú **rovnaký údaj t,** sa definitoricky stali naraz (teda v jednom okamihu), i keď prípadne na dvoch rôznych miestach. Tým je pojem „naraz“ definovaný v rámci jedenej inerciálnej sústavy trpaslíkov.

Relatívnosť súčasnosti

Vyšetrime teraz, či dve udalosti, ktoré sa odohrali v nejakej súradnicovej sústave (napríklad staničnej) „naraz“, ale na rôznych miestach (teda vedľa rôznych súradnicových trpaslíkov) sa odohrali „naraz“ aj voči inej súradnicovej sústave (napríklad vlakovej).



každý súradnicový trpaslík má hodiny

Nazvime tie dve udalosti A a B. Udalosť A je súmiestna s jedným trpaslíkom staničnej sústavy a jedným trpaslíkom vlakovej sústavy. Hodiny trpaslíkov v dvoch rôznych sústavách nie sú navzájom synchronizované, takže čas udalosti A bude nejaká hodnota t_A vo vlakovej sústave a v princípe možno iná hodnota t'_A vo staničnej sústave. Udalosti B budú analogicky zodpovedať údaje t_B, t'_B. Predpokladajme, že udalosti A,B sú vo vlaku vyhodnotené ako súčasné (stali sa „naraz“), teda že $t_A = t_B$. **Otázka je, či potom platí aj $t'_A = t'_B$??? Teda budú pokladané za súčasné aj na stanici ???** Dali sme tam veľa otáznikov, aby sme zdôraznili, že to, čo sa nám intuitívne javí ako samozrejme správne, experimentálne správne nemusí byť. Einstein si to uvedomil ako prvý, analyzoval jednoduchý príklad.

Relatívnosť súčasnosti

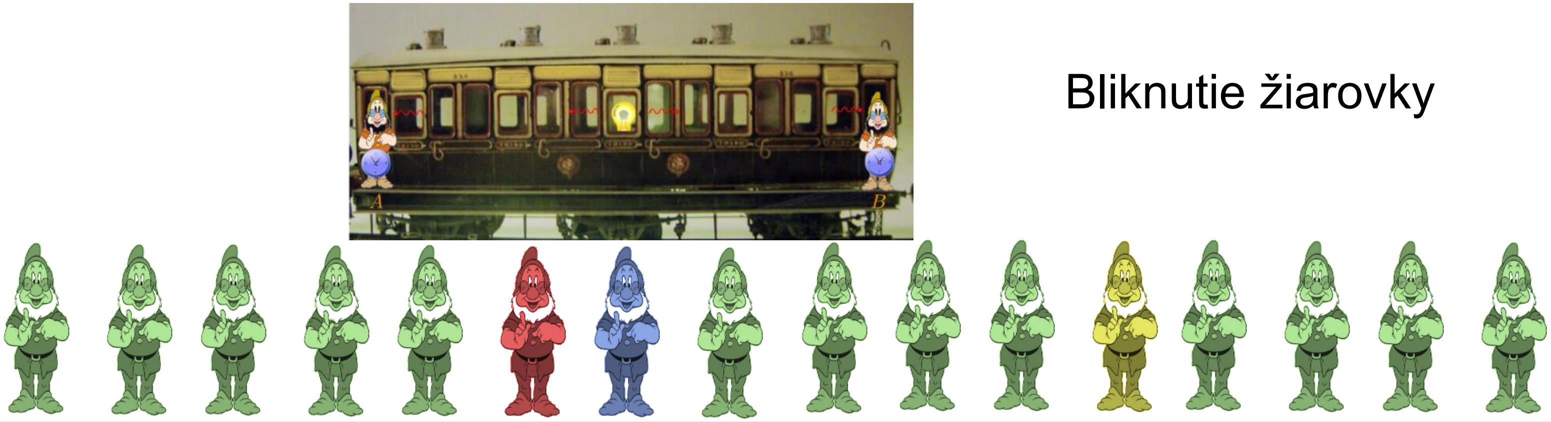
Presne v strede pohybujúceho sa vagóna blikne žiarovka. Svetlo po nejakom čase dorazí k zadnej stene vagóna (to je udalosť A) a k prednej stene vagóna (to je udalosť B). Z toho, akú procedúru sme použili pre synchronizáciu hodín trpaslíkov vo vlaku je zrejmé, že hodiny vlakových trpaslíkov budú ukazovať pri dorazení svetelného signálu rovnaké časy. Trpaslíci vo vagóne teda povedia, že svetlo dorazilo dopredu a dozadu **súčasne**. Pozrime sa teraz na to, čo budú hovoriť staniční trpaslíci o tých istých udalostiach A,B.

Relatívnosť súčasnosti

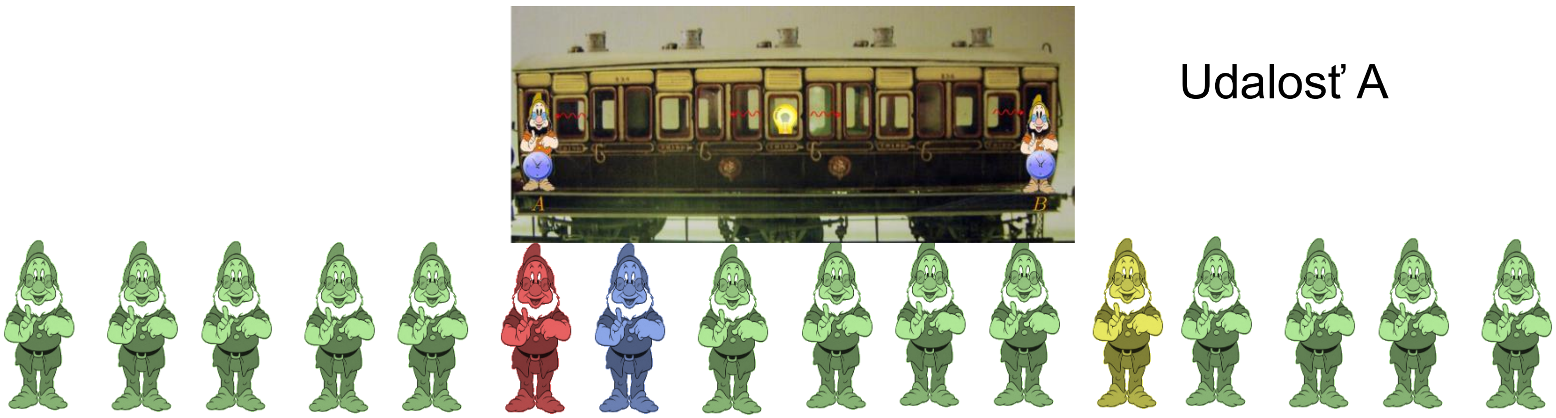
Modrou farbou sme nakreslili staničného trpaslíka, ktorý videl bliknutie žiarovky uprostred vagóna, keď ho žiarovka práve míňala. Červený staničný trpaslík je ten, ktorý uvidel zadnú stenu vagóna, keď k nej dorazilo svetlom, to je udalosť A. Žltý staničný trpaslík je ten, ktorý uvidí prednú stenu vagóna, keď k nej dorazí svetlo, to je udalosť B. Otázka je, čo ukazujú hodiny červeného a žltého trpaslíka pre udalosti A a B. Je zrejmé, že zadné stena ide oproti svetlu, predná stena uteká pred ním. Hodiny žltého trpaslíka preto budú zjavne ukazovať väčší čas pri udalosti B ako ukazovali hodiny červeného trpaslíka pri udalosti A. Staniční trpaslíci preto vyhodnotia udalosti A a B ako nesúčasné, budú hovoriť , že **nenastali naraz**. Pre presný výpočet nemáme zatiaľ dosť vedomostí.

Záver: nie je možné definovať pojmy **súčasnosť, naraz, teraz, okamih ...** tak, aby dve nesúmiestne udalosti boli rovnako vyhodnotené vo všetkých súradnicových sústavách. Pojem súčasnosť teda nie je absolútny, vyhodnotenie závisí od toho, voči ktorej sústave sa robí. **Pojem súčasnosť je teda relatívny**, vzťahuje sa na nejakú sústavu

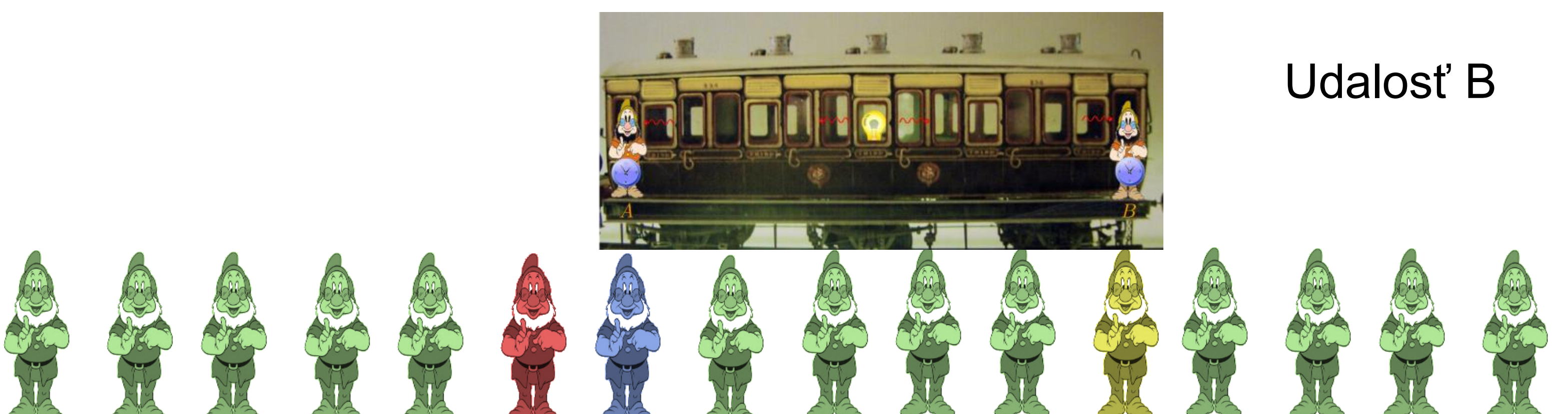
Bliknutie žiarovky

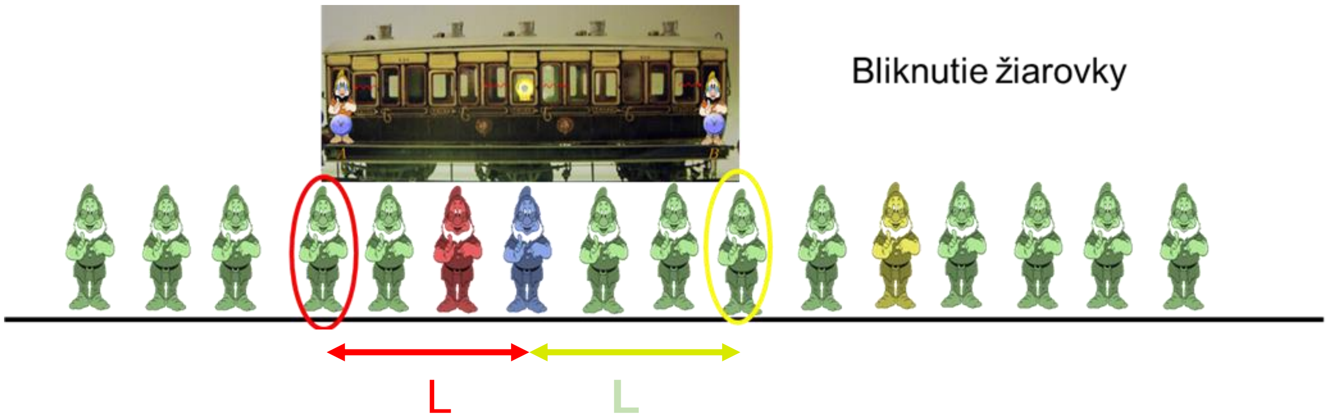


Udalosť A

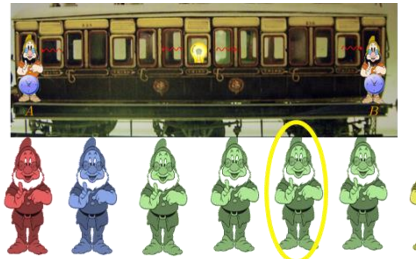


Udalosť B



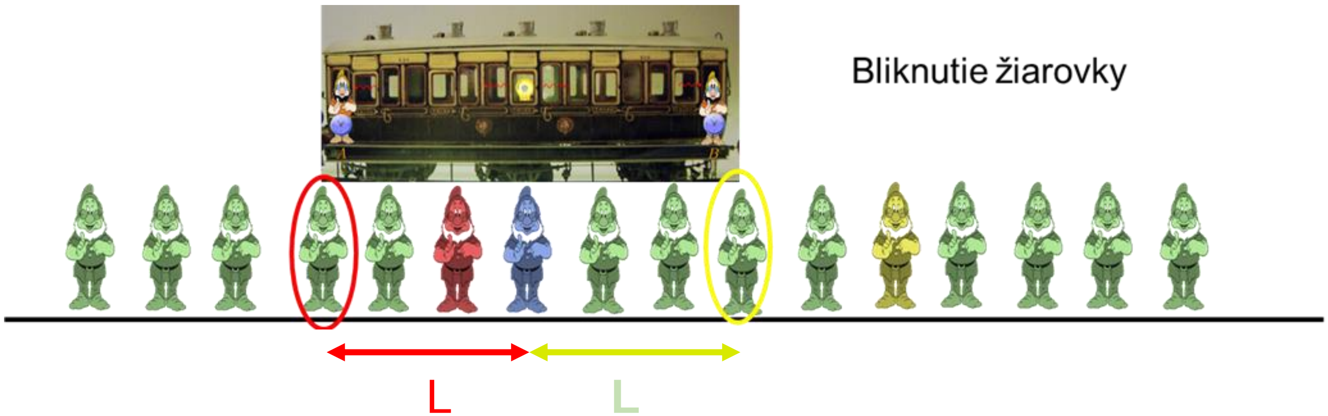


Prediskutujeme pohľad zo stanice, čo hlásia staniční trpaslíci.
Modrý trpaslík hlási !vidím bliknutie žiarovky v strede vagóna, moje hodiny ukazujú čas (napríklad) 11:22:34
Staniční trpaslíci majú synchronizovaný čas, červeno zakrúžkovaný je trpaslík, ktorý vidí okolo seba prechádzať zadnú stenu presne vtedy, keď jeho hodiny ukazujú 11:22:34 a žlto zakrúžkovaný je trpaslík, ktorý vidí okolo seba prechádzať prednú stenu presne o 11:22:34.
Vzdialenosť medzi modrým a červeno zakrúžkovaným je L, vzdialenosť medzi modrým a žlto zakrúžkovaným je tiež L.
Pýtame sa o koľkej (z hľadiska stanice) narazí fotón zo žiarovky na zadnú stenu.
Fotón letí dozadu rýchlosťou c, stena oproti nemu rýchlosťou v. Spolu musia prekonať vzdialenosť L potrebujú na to čas $L/(c+v)$, teda hodiny červeného trpaslíka, ktorý

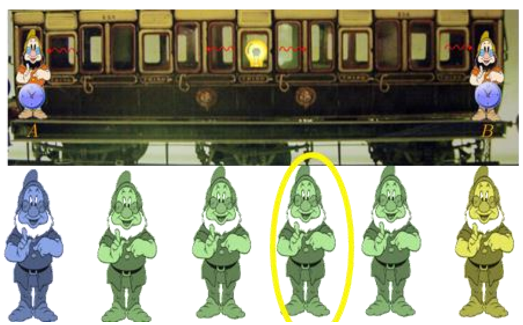


vidí dopad fotónu na zadnú stenu budú ukazovať čas 11:22:34+$L/(c+v)$.

Bliknutie žiarovky



Teraz sa pýtajme o koľkej (z hľadiska stanice) narazí fotón zo žiarovky na prednú stenu. Fotón letí dopredu rýchlosťou c, stena rovnako dopredu uteká rýchlosťou v. Stena má na začiatku „náskok“ L, preto fotón „dolapí“ prednú stenu za čas $L/(c-v)$ teda hodiny žltého trpaslíka, ktorý vidí dopad fotónu na prednú stenu budú ukazovať čas 11:22:34+$L/(c-v)$.



Staničný šéftrpaslík teda vyhodnotí udalosti takto

- fotón dopadol na zadnú stenu o 11:22:34+$L/(c+v)$.
- fotón dopadol na prednú stenu o 11:22:34+$L/(c-v)$.

Záver staničného šéftrpaslíka teda bude: dopady fotónov na prednú a zadnú stenu **nie sú súčasné udalosti**. Videli sme ale, že záver vlakového šéftrpaslíka bude: dopady fotónov na prednú a zadnú stenu **sú súčasné udalosti**.

Poznámka (predbiehajúc výklad) Staniční trpaslíci nazvú dĺžku $2L$ dĺžkou pohybujúceho sa vagóna. Je to **vzdialenosť zakrúžkovanyých trpaslíkov**.

Meranie časového intervalu, doba trvania fyzikálneho deja

Už sme sa stretli s pojmom udalosť. To je krátkotrvajúci fyzikálny jav, ktorý sa celý odohrá na jednom mieste a v priebehu krátkeho (infinitezimálneho) časového intervalu, teda v „jednom okamihu“.
Sú aj komplexnejšie fyzikálne javy, špeciálne sa teraz budeme zaoberať javmi, ktoré **začínajú v nejakom okamihu na jednom mieste a končia v inom (neskoršom) okamihu na inom mieste**. Sú to **nelokálne** deje.

Budeme pracovať na definícii pojmu „doba trvania nelokálneho deja“.

Ak je nejaký dej lokálny, teda začína a končí na jednom mieste, potom jeho doba trvanie je určená ľahko. Predovšetkým pojem „na jednom mieste“ sa zjavne viaže na nejakú súradnicovú sústavu. V inej sústave, ktorá sa voči uvažovanej pohybuje, by už nekončil na tom mieste, kde začal. Ak začiatok a koniec sú na jednom mieste, potom je na tom mieste aj súradnicový trpaslík, ktorý má hodiny. Meranie doby lokálneho deja je potom ľahké. Lokálne príslušný trpaslík sa pozrie na hodiny, keď dej začne a potom znovu, keď dej skončí. Namerané časové údaje odčíta a to, čo dostane sa nazve **„doba trvania lokálneho deja“**.

Meranie časového intervalu, doba trvania nelokálneho deja

Dej, ktorý je nelokálny voči nejakej súradnicovej sústave začína a končí na iných miestach, teda vedľa dvoch súradnicových trpaslíkov. V rámci súradnicovej sústavy majú trpaslíci hodiny synchronizované, preto meranie doby deja voči nejakej súradnicovej sústave triviálne definujeme takto.

Trpaslík lokálne príslušný začiatku deja sa pozrie na svoje hodiny pri začiatku. Trpaslík lokálne príslušný koncu deja sa pozrie na svoje hodiny pri konci. Svoje údaje nahlásia svojmu súradnicovému šéftrpaslíkovi. Ten prijaté časové údaje odčíta a rozdiel nazve „**doba trvania nelokálneho deja**“.

Všimnime si, že meranie nijako nie je ovplyvnené tým, ako sa hlásenia lokálne príslušných trpaslíkov zdržia cestou k šéftrpaslíkovi.

Toto býval problém historického merania doby šprintov v atletike. Rozhodcovia so stopkami sedeli v cieli ale štart bol inde. Štartovalo sa výstrelom a rozhodcovia mali inštrukciu aby spustili stopky nie až keď počujú zvuk výstrelu ale už vtedy, keď uvidia dym zo štartovacej pištole. Problém bol v tom, že sa doba trvania nelokálneho deja merala na jedných stopkách (hodinách). Podľa Einsteina sa má správne merať na **dvoch synchronizovaných hodinách**.

Všimnime si ešte, že doba „**návod na meranie nelokálneho deja**“ **je presne rovnaký v každej súradnicovej sústave**. Dej nijako nemusí súvisieť s konkrétnou súradnicovou sústavou, podstatné je iba to, že je **ohraničený dvoma udalosťami**.

Meranie časového intervalu, vlastný čas

Pre niektoré deje však existuje jedna význačná súradnicová sústava, v ktorej dej prebieha na jednom mieste a teda špeciálne začína a končí na jednom mieste. Doba trvania takého deja je v tej sústave odmerateľná jedným trpaslíkom, teda jednými hodinami. Čas trvania deja takto odmeraný sa volá **vlastný čas trvania deja.**

V každej inej súradnicovej sústave, ktorá sa voči tej význačnej pohybuje treba na odmeranie trvania toho deja dvoch trpaslíkov a dvojo hodín.

Otázka, či čas trvanie deja takto nameraný v inej sústave je alebo nie je rovnaký ako vlastný čas, vyžaduje starostlivé preskúmanie a intuitívna odpoveď na ňu môže byť nesprávna.

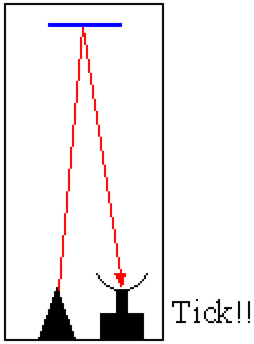
Naša intuícia nás môže sklamať, ak tá druhá sústava sa pohybuje veľmi rýchlo, rýchlosťou porovnateľnou s rýchlosťou svetla.

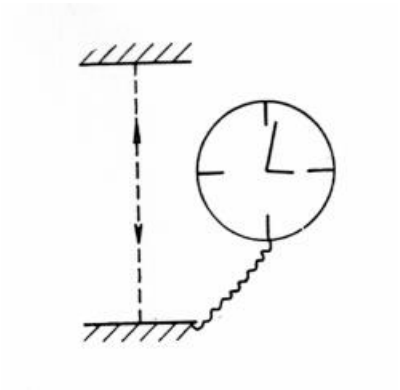
Budeme sa podrobne venovať tejto otázke pre špeciálny dej: **jedno tiknutie hodín**.

Hodiny

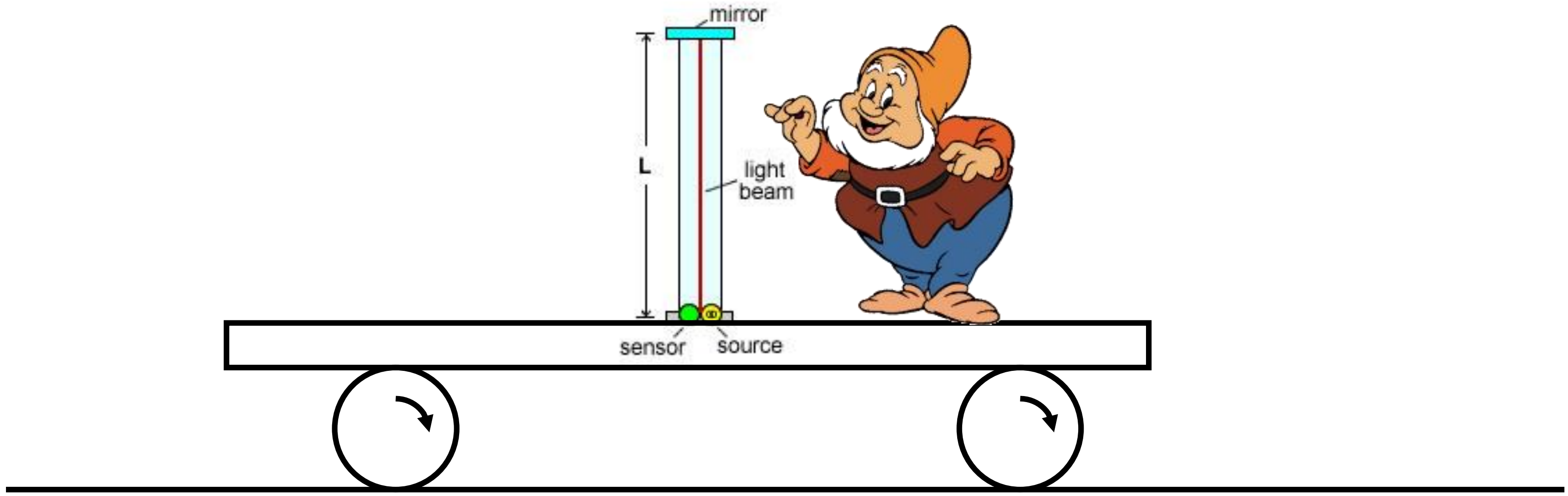
Hodiny slúžia na meranie časových intervalov. Ukazujú síce aj momentálny časový okamih, ale aj to je len interval od nejakej dohodnutej udalosti, pre počítačové hodiny je to často od 1.1.1970. Ako hodiny možno v princípe použiť hocijaký dej, „ktorý pravidelne (rovnomerne) tiká“. Ako sa dá testovať pravidelnosť tikania, o tom sme sa bavili v zimnom semestri.
Presné hodiny sú často veľmi zložité zariadenia, analyzovať ich z pohľadu dvoch rôznych inerciálnych sústav je netriviálne.

Einstein vymyslel jednoduchý dobre analyzovateľný model hodín, svetelné hodiny. Realizované ako fotón chodiaci hore-dole medzi dvoma paralelnými zrkadlami, alebo fotón vyžiarený zo zdroja a prijatý po odraze od protiľahlého zrkadla fotónkou. Jedna cesta fotónu hore a dolu znamená jedno tiknutie. Elektronický mechanizmus, počítajúci jednotlivé tiknutia už nie je pre relativistickú analýzu dôležité, podstatné je iba, že počítadlo sa dá elektroinžiniersky v princípe vyrobiť.





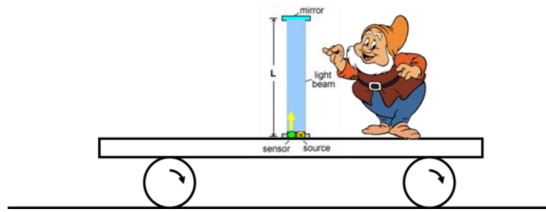
Einsteinove hodiny vo vlaku



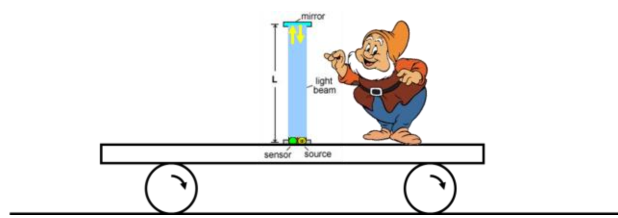
Trpaslík sa vezie vo vlaku, vedľa neho stoja vo vagóne Einsteinove svetelné hodiny, trpaslík počíta ich tiknutia. Zistí (definuje), že jedno tiknutie trvá dobu

$$\tau = \frac{2L}{c}$$

Podľa predchádzajúcej diskusie sa títo doba volá **vlastný čas jedného tiknutia hodín.**

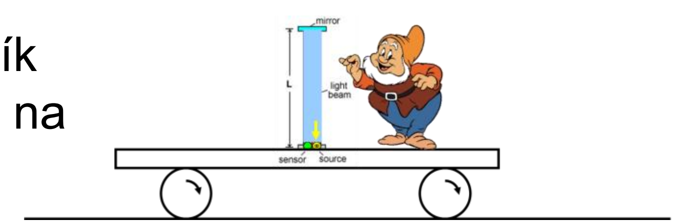


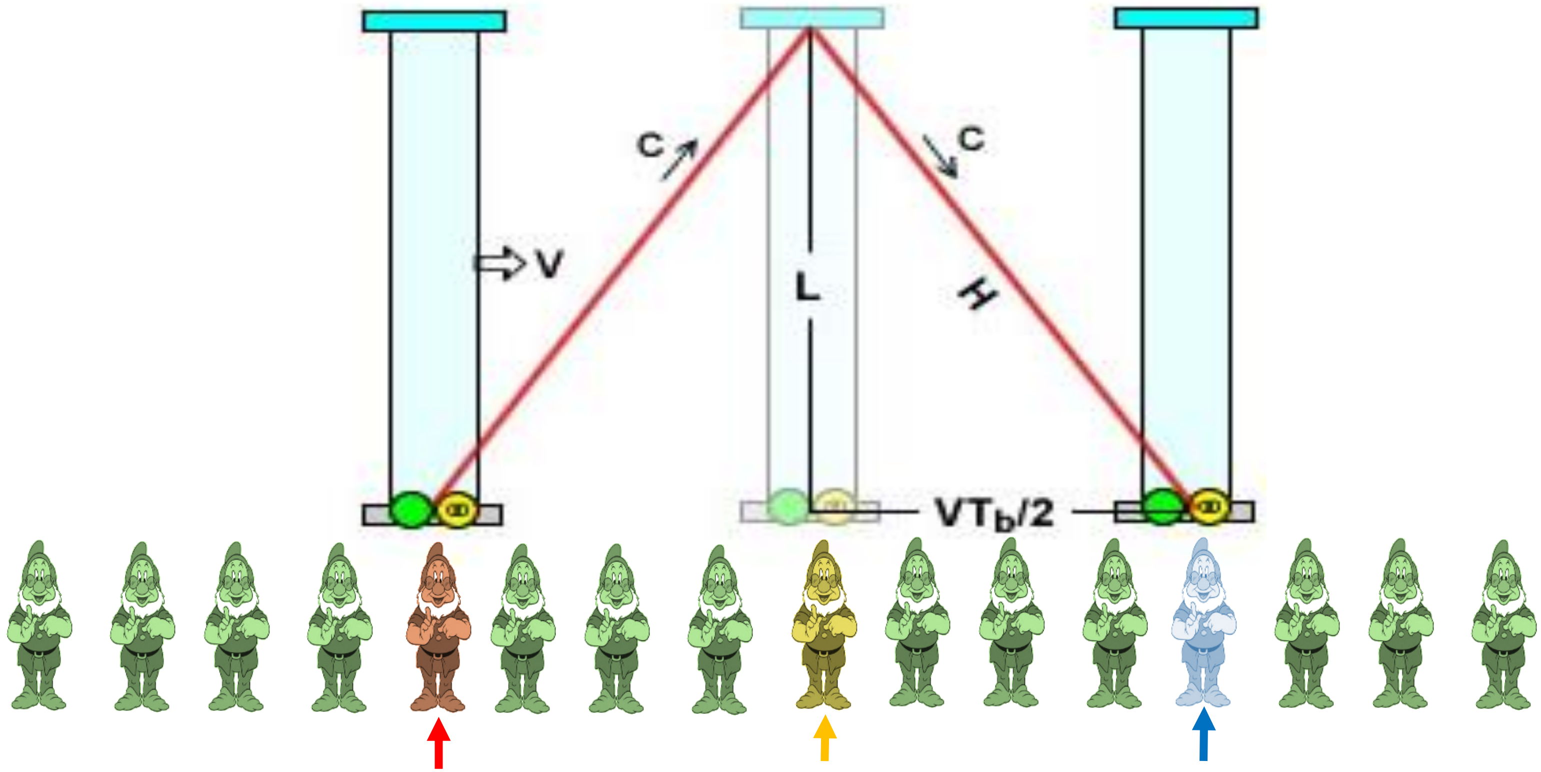
Červený staničný trpaslík vidí, že fotón štartuje na spodnom zrkadle



Žltý staničný trpaslík vidí, že fotón sa odráža na hornom zrkadle

Modrý staničný trpaslík vidí, že fotón pristáva na spodnom zrkadle





Čo vidia staniční trpaslíci? Že fotón cestuje šikmo. Červený trpaslík si poznamená čas t_1, keď okolo neho letia hodiny a modrý si poznačí čas t_3, keď letia okolo neho. Šéftrpaslík odčíta tie dva časy, ktoré dostal v hláseniach: $T_b = t_3 - t_1$. A bude tvrdiť: jedno tiknutie hodín vo vlaku trvá podľa mňa čas T_b. Podľa obrázku fotón z pohľadu stanice vykoná dráhu $2\sqrt{L^2 + (vT_b/2)^2} = cT_b$ a odtiaľ úpravou dostaneme

$$\tau = \frac{2L}{c} = T_b\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < T_b$$

Animácia: http://galileoandeinstein.physics.virginia.edu/more_stuff/flashlets/lightclock.swf

Dilatácia času

Čo sme to dostali? $$\tau = \frac{2L}{c} = T_b\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < T_b$$

Trpaslíci na stanici povedia: „Hodiny vo vlaku tikajú pomalšie, ako by také hodiny tikali u nás na stanici.“ Alebo použijú ešte menej opatrnú formuláciu: „Čas vo vlaku plynie pomalšie ako u nás na stanici.“

Hovorí sa tomu **dilatácia času**.

Keď takéto vety počuje nepoučený poslucháč, pomýli ho to a hneď vymyslí kontrapríklad: Veď z pohľadu vlakových trpaslíkov je to tak, že stanica s pohybuje a vlak stojí, preto my by sme mali dospieť k opačnému záveru, že čas na stanici plynie pomalšie ako u nás vo vlaku. No a oboje nemôže byť pravda, z čoho vyplýva že dilatácia času neexistuje.

Argumentácia naznačuje, že situácia vlak versus stanica musí byť symetrická. Ale nie je to pravda. My sme porovnávali jedny hodiny vo vlaku s dvoma hodinami na stanici. Tiknutie vlakových hodín malo svoj začiatok a koniec na jednom mieste vo vlaku ale na dvoch rôznych miestach na stanici. **Vlaková sústava je význačná pre hodiny stojace na jednom mieste vo vlaku**. Symetria vlak versus stanica sa nekoná.

Dilatácia času

Iný argument hovorí: toto ste skúmali nejaké divné svetelné hodiny. Normálne hodiny by sa tak nesprávali.

Ale správali. Keby si trpaslík zobral spolu so svetelnými hodinami aj „normálne hodiny“ a tie by sa nesprávali rovnako ako tie svetelné, potom by trpaslík pozoroval že sa postupne viac a viac rozchádzajú. A z toho by usúdil, že jeho sústava sa pohybuje. A to je spor s postulátom relativity. Takže aj biologické hodiny budú „tikať rovnako ako svetelné“. Trpaslík sa musí holiť rovnako často vo vlaku ako na stanici, inak by poznal, že sa pohybuje

- **Princíp relativity**: Nijakým experimentom nemožno rozhodnúť, ktorá z dvoch navzájom sa pohybujúcich inerciálnych sústav sa hýbe a ktorá stojí.

Ďalší argument je **paradox dvojčiat**. Jedno dvojča ostane na stanici, druhé nasadne do vlaku, odcestuje a potom sa vráti a podľa Einsteina by malo byť mladšie ako jeho dvojča, čo ostalo na stanici. A to už porovnávam „jedny hodiny s jednými hodinami“. Situácia je symetrická, dilatácia času nemôže byť pravda.
Ale je. Dvojča vo vlaku vie, že to ono bolo na ceste a nie dvojča na stanici, ktoré „sa vrátilo aj so stanicou“. Vrátiť sa nedá, ak vlak koná len rovnomerný priamočiary pohyb. Musí zabrzdiť a urýchliť v opačnom smere. Počas brzdenia hodí pasažierov o stenu, takže oni vedia, že sa brzdilo. **Zrýchlený pohyb sa rozpoznať dá**. To nie je v spore s princípom relativity

Kontrakcia dĺžok

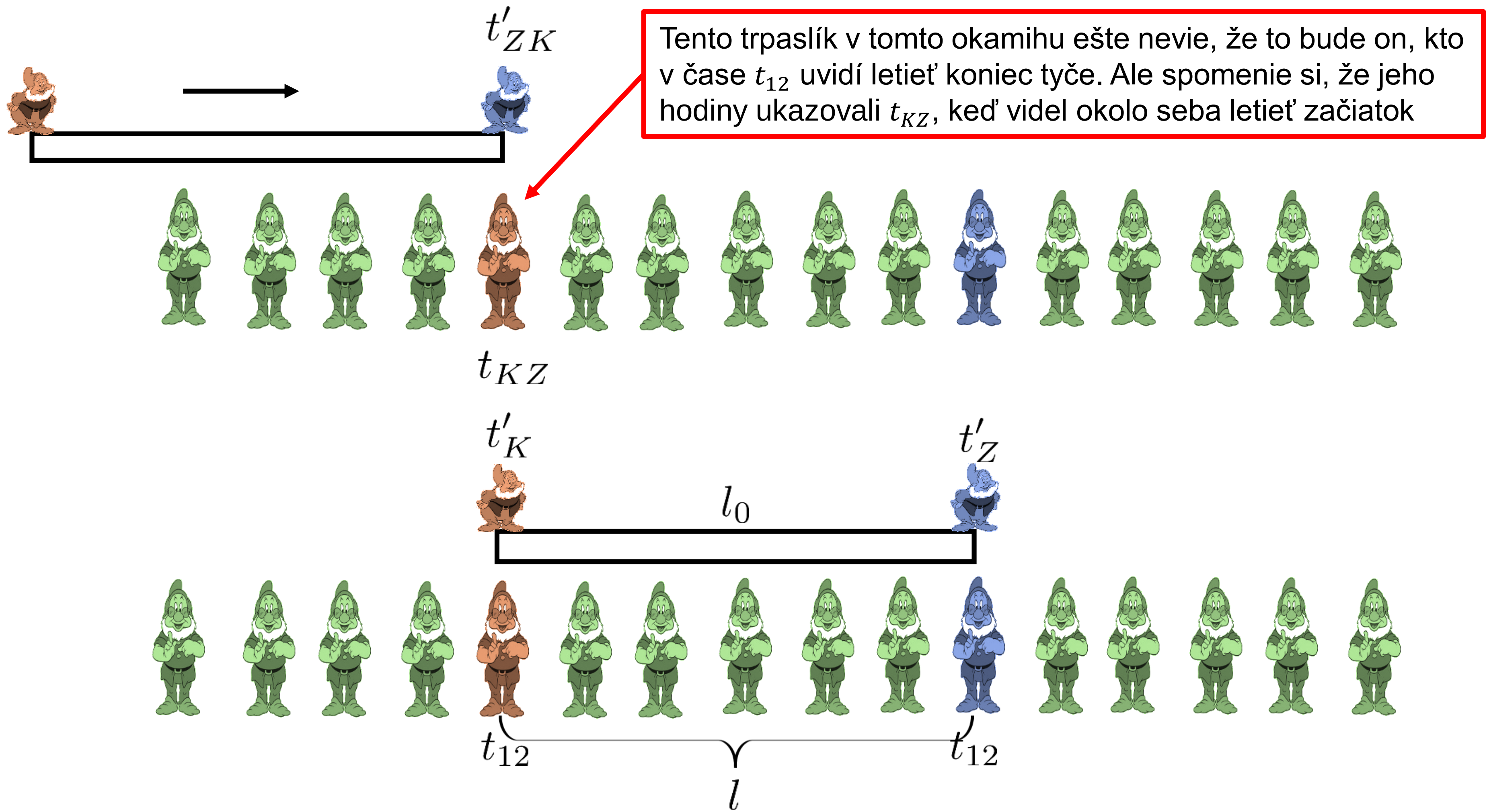
Ako sa meria dĺžka stojacej tyče je jasné. Napríklad postupne prikladám metrovú tyč. Mám na to dosť času, lebo tyč stojí. Iná možnosť je požiadať trpaslíkov, ktorí stoja pri začiatku a konci tyče aby mi poslali svoje súradnice. Súradnice odčítam a mám dĺžku tyče.

Ako sa meria dĺžka letiacej tyče, to si treba poriadne premyslieť. K letiacej tyči neviem dobre prikladať metrovú tyč.

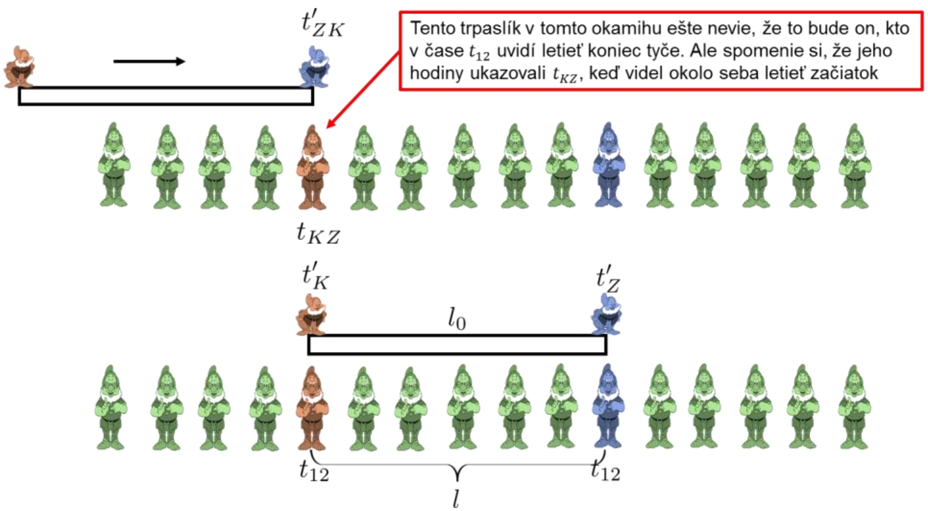
Jedna možnosť je takáto. Dám inštrukcie svojim (stojacim) trpaslíkom. Trpaslík, ktorý uvidí presne o dvanástej letieť okolo seba začiatok tyče zdvihne pravú ruku. Trpaslík, ktorý vidí okolo seba presne o dvanástej letieť koniec tyče zdvihne ľavú ruku. Ostatní nerobia nič. Trpaslíci so zdvihnutými rukami sú **moje nepohybujúce sa značky začiatku a konca tyče**, odmeriam ich vzdialenosť ako keby to bola stojaca tyč a to **definujem**, že je dĺžka letiacej tyče. Kľúčová požiadavka je, že **ide o súčasnú polohu začiatku a konca tyče**. Ale súčasnosť nie je absolútna, takže nemusím sa diviť, ak meraním zistím inú dĺžku, ako by som zistil, keby tá tyč stála.

Kontrakcia dĺžok

Ideme vypočítať dĺžku letiacej tyče. NA začiatku aj konci tyče sedia vo vlaku dvaja trpaslíci Na obrázkoch sú označené časy, ktoré vidia jednotliví trpaslíci v okamihoch naznačených na obrázkoch



Kontrakcia dĺžok



l_0 je dĺžka stojacej tyče ako ju namerajú vlakoví trpaslíci
l je dĺžka letiacej tyče ako ju namerajú staniční trpaslíci

$$l_0 = v(t'_K - t'_{ZK})$$ vlakoví trpaslíci namerajú červenému staničnému rýchlosť v

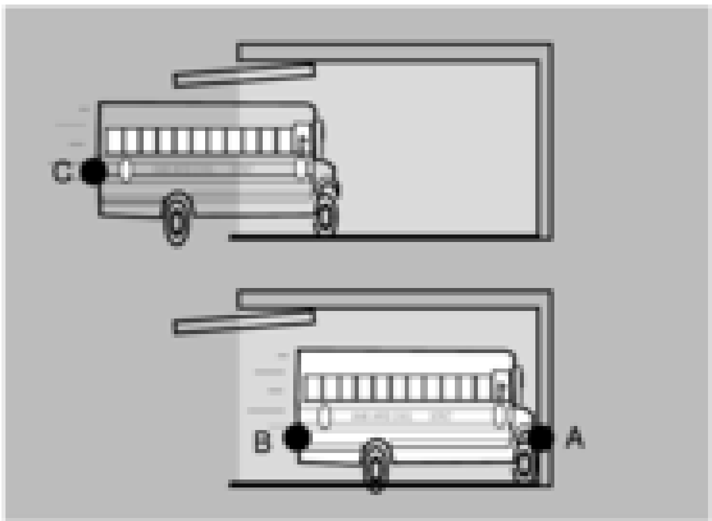
$$l = v(t_{12} - t_{KZ})$$ staniční trpaslíci namerajú modrému vlakovému rýchlosť v

$$t_{12} - t_{KZ} = (t'_K - t'_{ZK})\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$ dvaja vlakoví trpaslíci zistia, že jednému červenému staničnému tikajú hodiny pomalšie (dilatácia času na stanici z pohľadu vlaku)

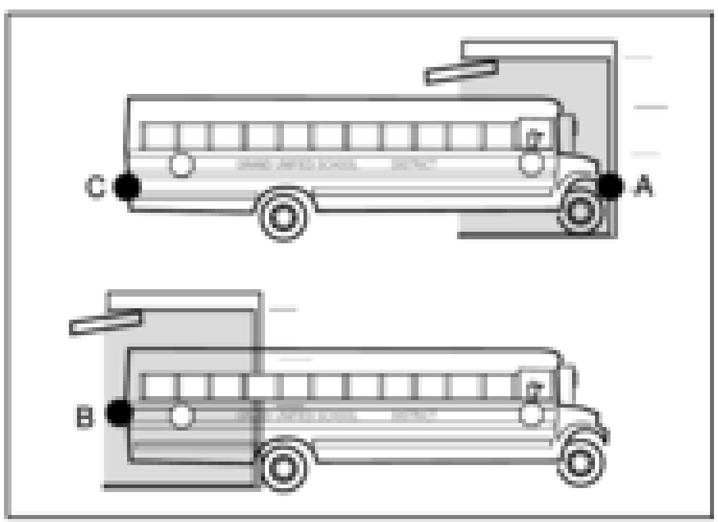
$$\boxed{l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Staniční trpaslíci namerajú, že tyč je kratšia: kontrakcia dĺžok

Dlhé auto v krátkej garáži



Ako to vyzerá z pohľadu garážmajstra



Ako to vyzerá z pohľadu šoféra

Udalosti vo vlaku a na stanici: prekladový slovník

Udalosť videná zo stanice: x, t
Udalosť videná z vlaku: x', t'
Koordinácia súradníc a časov je takáto $(x = 0, t = 0) \iff (x' = 0, t' = 0)$

Prekladový slovník
$$\boxed{\begin{aligned} x &= ax' + bt' \\ t &= At' + Bx' \end{aligned}}$$

Sledujem zo stanice bod $x' = 0$: $\quad x = vt$
Keď bod $x' = 0$ je totožný s bodom x, čo vtedy ukazujú jeho hodiny $t' =$?
Dilatácia času
$$t' = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$x = ax' + bt'$$
$$vt = a.0 + bt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \implies \boxed{b = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

$$t = At' + Bx'$$
$$t = At\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + B.0 \implies \boxed{A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

Udalosti vo vlaku a na stanici: prekladový slovník

$$x = ax' + \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}t'$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}t' + Bx'$$

Sledujem z vlaku bod $x = 0$ stanice: $x' = -vt'$

Dilatácia času

$$t = t'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$0 = -avt' + \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}t' \implies a = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

Sledujem z vlaku bod $x = 0$ stanice:

Dilatácia času

$$t'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}t' - Bvt'$$

$$B = \frac{\frac{v}{c2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

Udalosti vo vlaku a na stanici: prekladový slovník

Lorentzove transformácie

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Relatívna rýchlosť

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Z vlaku sledujem časticu, hýbe sa rýchlosťou w'. Akú rýchlosť w uvidím zo stanice?

$$x' = w't'$$

$$x = \frac{w't' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}w't'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{w = \frac{x}{t} = \frac{w' + v}{1 + \frac{vw'}{c^2}}}$$

Skladanie rýchlostí podľa Einsteina, Galileo by mal iba $w = w' + v$

Pre $w' = c$ dostanem $w = c$. Rýchlosť svetla je v oboch sústavách rovnaká.

Námietka proti Einsteinovi: konštantná sila →konštantné zrýchlenie → prekročím c

Ako vyzerá Newtonova pohybová rovnica v teórii relativity?

Napíšem ju štandardne vo vlaku, z ktorého vidím časticu hýbať sa veľmi pomaly, ideálne tak že v danom okamihu častica stojí.

Riešim teda úlohu ako bude zo stanice vyzerať pohybová rovnica pre pohyb častice,

$$v(t)$$

pričom častica túto rýchlosť postupne získava pôsobením konštantnej sily.

Častica koná nerovnomerný pohyb, ale môžem nasadnúť do inerciálneho vlaku, ktorý sa v čase t, hýbe práve rýchlosťou $v(t)$. V tom vlaku bude častica stáť a jej rýchlosť sa zmení za čas dt' o malú hodnotu

$$dv' = \frac{1}{m} f dt'$$

Zatiaľ na stanici uplynie doba

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Po uplynutí tejto doby bude mať častica voči stanici rýchlosť

$$v(t + dt) = \frac{v(t) + dv'}{1 + \frac{v' v(t)}{c^2}}$$

$$v(t+dt) = \frac{v(t)+dv'}{1+\frac{dv'v(t)}{c^2}} \approx (v(t)+dv')(1-\frac{dv'v(t)}{c^2}) \approx v(t)+dv' - dv'\frac{v^2(t)}{c^2}$$

$$dv = dv'(1-\frac{v^2(t)}{c^2}) = \frac{f}{m}dt'(1-\frac{v^2(t)}{c^2}) = \frac{f}{m}dt\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}(1-\frac{v^2(t)}{c^2})$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{f}{m}\left(\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}\right)^3$$

$$m\frac{dv}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}^3} = f$$

Explicitným derivovaním sa možno presvedčiť, že je to to isté ako

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}v\right) = f$$

Táto rovnica pripomína rovnicu

$$\frac{dp}{dt} = f$$

$$\frac{dp}{dt} = f$$

$$p = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v$$

Toto je vzorec pre hybnosť, ak prijmeme hypotézu, že hmotnosť častice závisí na rýchlosti. Pre jednoznačnosť potom často namiesto m píšeme m_0, aby sme zvýraznili, že ide o pokojovú hmotnosť

$$p = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v$$

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

Kinetická energia

$$\frac{dp}{dt} = f \qquad\qquad p = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}v$$

Vypočítame prácu, ktorú vykoná sila urýchľujúca časticu z kľudu.

$$W_k = \int_0^t fvdt = \int_0^t \frac{dp}{dt}vdt = \int_0^p vdp = \int_0^v v\frac{dp}{dv}dv = [vp]_0^v - \int_0^v pdv$$

$$W_k = pv - \int_0^v \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}dv = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + m_0 c^2 \left[\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right]_0^v$$

$$W_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(\frac{v^2}{c^2} + 1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - m_0 c^2$$

$$\boxed{W_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2}$$

Pre malé rýchlosti dostanem približne

$$W_k \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) - m_0 c^2 = \boxed{\frac{1}{2} m_0 v^2}$$

$$\boldsymbol{E = mc^2}$$

$$W_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2$$

Ak častica žije nemenne večne, odčítanie konštanty $m_0 c^2$ nemá žiaden fyzikálny význam a môžeme kľudne používať vzorec

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2$$

Ak je častica nezničiteľná a netransformovateľná na inú časticu alebo iný fyzikálny objekt, potom je energia nemôže nijako klesnúť pod minimálnu (kľudovú) energiu

$$E_0 = m_0 c^2$$

a v takom prípade (ak zabudneme na všeobecnú teóriu relativity) nemožno túto energiu nijako využiť ani zistiť.

$E = mc^2$ pre fotón

Fotón je fyzikálny pojem, ktorý nie je ľahko porozumiteľný bez príslušného technického aparátu kvantovej teórie poľa. S prijateľnou didaktickou licenciou sa však dá povedať, že fotón je častica, ktorá sa dá chápať ako „nositeľ energie" svetla, svetelného lúča. Celková energia prenášaná svetelným lúčom sa dá chápať ako súčet energií prenášaných jednotlivými fotónmi lúča.

Fotóny teoretickou analýzou fotoefektu „objavil" Einstein, ktorý zistil, že energia svetelného lúča – vlny o frekvencii ω sa v interakcii s nábojmi pohlcuje „po kúskoch" rovnakej veľkosti $E = \hbar\omega$, a to tak, že sa vždy pohltí „celý fotón", ktorý nesie energiuň

$$\boxed{E = \hbar\omega}$$

To že svetelný lúč prenáša energiu je zrejmé, všetci žijeme z energioe, ktoú na Zem prináša slnečné svetlo.
Menej známy fakt je, že svetený lúč, a teda aj **každý fotón, prenáša aj hybnosť**.

$E = mc^2$

$$W_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2$$

Ak častica žije nemenne večne, odčítanie konštanty $m_0 c^2$ nemá žiaden fyzikálny význam a môžeme kľudne používať vzorec

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2$$

Ak je častica nezničiteľná a netransformovateľná na inú časticu alebo iný fyzikálny objekt, potom je energia nemôže nijako klesnúť pod minimálnu (kľudovú) energiu

$$E_0 = m_0 c^2$$

a v takom prípade (ak zabudneme na všeobecnú teóriu relativity) nemožno túto energiu nijako využiť ani zistiť.

$E = mc^2$ pre fotón

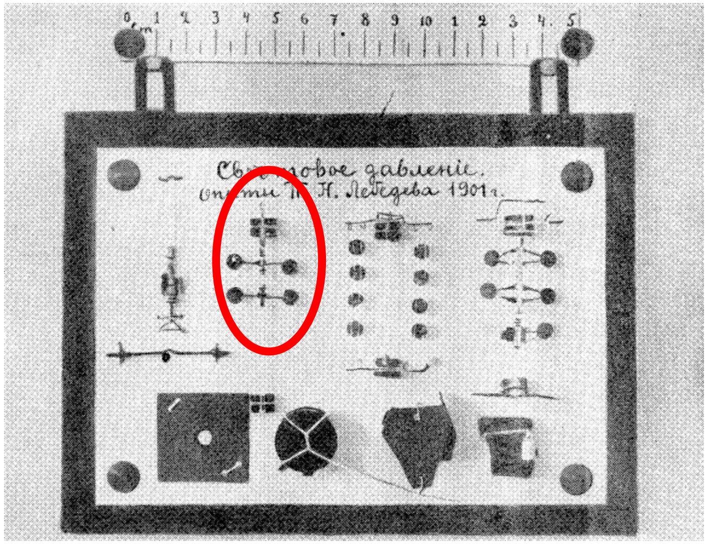
Fotón je fyzikálny pojem, ktorý nie je ľahko porozumiteľný bez príslušného technického aparátu kvantovej teórie poľa. S prijateľnou didaktickou licenciou sa však dá povedať, že fotón je častica, ktorá sa dá chápať ako „nositeľ energie“ svetla, svetelného lúča. Celková energia prenášaná svetelným lúčom sa dá chápať ako súčet energií prenášaných jednotlivými fotónmi lúča.

Fotóny teoretickou analýzou fotoefektu „objavil“ Einstein, ktorý zistil, že energia svetelného lúča – vlny o frekvencii ω sa v interakcii s nábojmi pohlcuje „po kúskoch“ rovnakej veľkosti $E = \hbar\omega$, a to tak, že sa vždy pohltí „celý fotón“, ktorý nesie energiuň

$$\boxed{E = \hbar\omega}$$

To že svetelný lúč prenáša energiu je zrejmé, všetci žijeme z energie, ktoú na Zem prináša slnečné svetlo.
Menej známy fakt je, že svetený lúč, a teda aj **každý fotón, prenáša aj hybnosť**.

$E = mc^2$ pre fotón: svetelný tlak overený Lebedevom



Na ľavom obrázku je Crookesov rádiometer, zariadenie, ktoré neregistruje svetelný tlak ale energiu svetelného lúča, ktorý zohrieva vrtuľku v banke so zriedeným plynom. Listy vrtuľky majú jeden povrch čierny a druhý biely, preto inak pohlcujú svetelnú energiu a inak odovzdávajú energiu molekulám zriedeného plynu, čo vrtuľky elegantne roztočí. Uvádzame Crookesov pokus preto, lebo často sa mýli s Lebedevovým pokusom na meranie svetelného tlaku. Lebedevov poklus sa dosť podobá na Crookesov, ale je oveľa premakanejší, pretože efekt svetelného tlaku je oveľa slabší. Tiež používa vrtuľky, ale vo vysokom vákuu, aby nebolo rušenie tepelným pohybom molekúl. Pri dopade svetla fotóny odovzdajú vrtuľkám hybnosť, čo ich otočí. Na pravom obrázku sú originálne Lebedevove vrtuľky

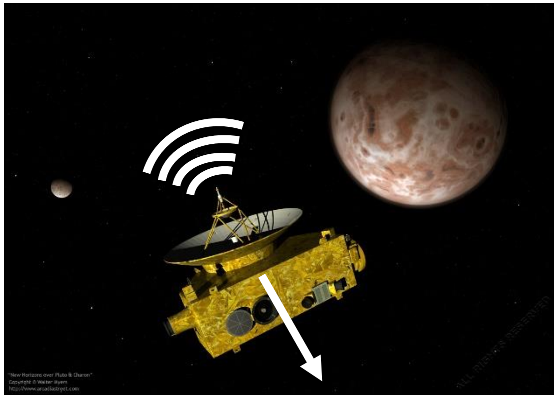
Svetlo (fotón) je teda nositeľom aj hybnosti, čo vyplýva dokonca už z klasickej (nekvantovej) teórie elektromagnetického poľa (z Maxwellových rovníc). Medzi energiou fotónu a hybnosťou fotónu je jednoduchý vzťah,

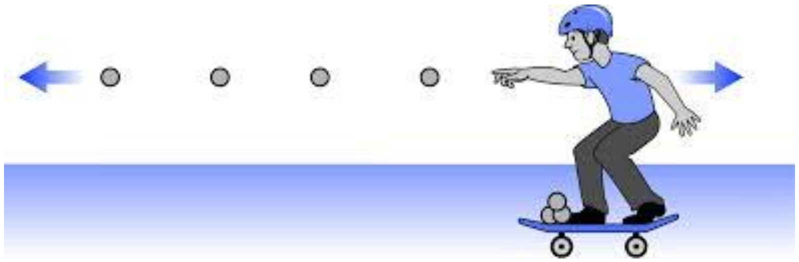
$$E = cp$$

kde c je rýchlosť svetla.

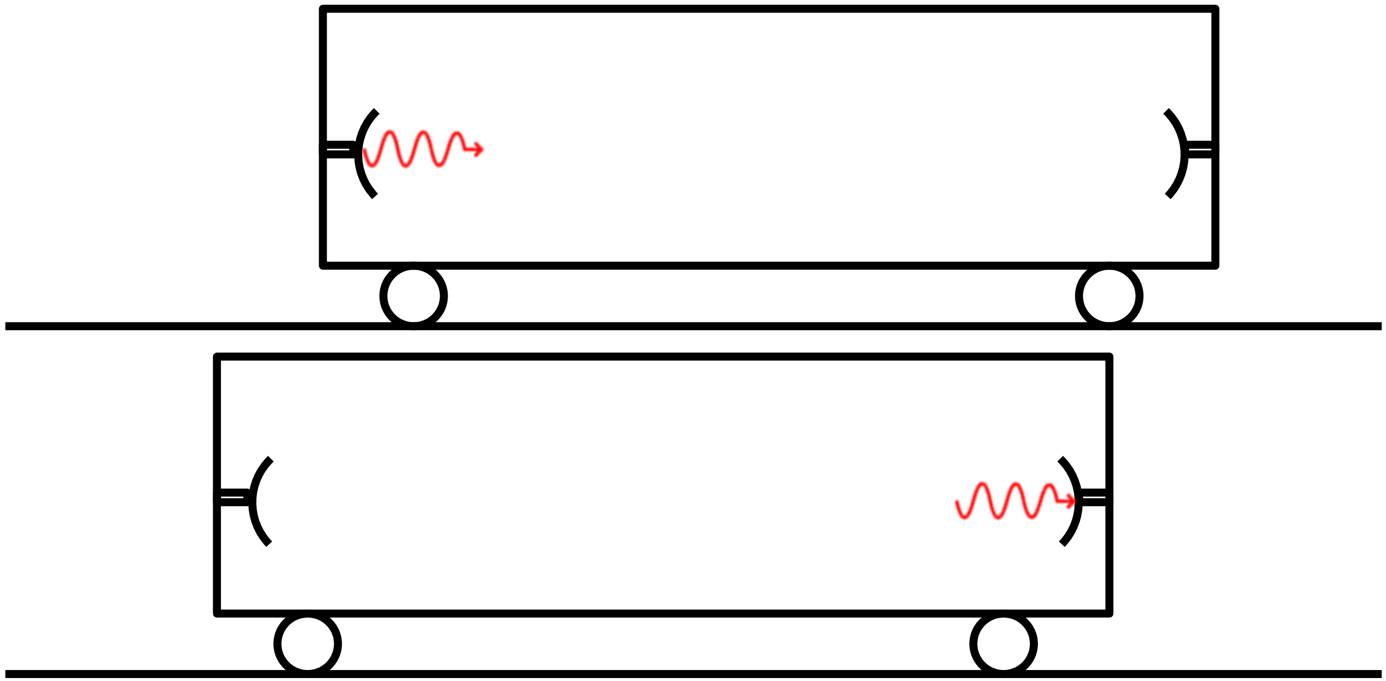
Svetelný tlak má rôzne, dobre pozorovateľné dôsledky. Tlak slnečného svetla napríklad vytvára „chvost kométy“, ktorý smeruje „od slnka“.

Kozmická loď vysielajúca svojou parabolou elektromagnetické vlny na Zem odovzdáva Zemi hybnosť a podľa zákona o zachovaní hybnosti musí tým sama získať hybnosť v opačnom smere. Podobne ako chlapec na skateboarde, keď odhodí loptu, pohne sa v opačnom smere.



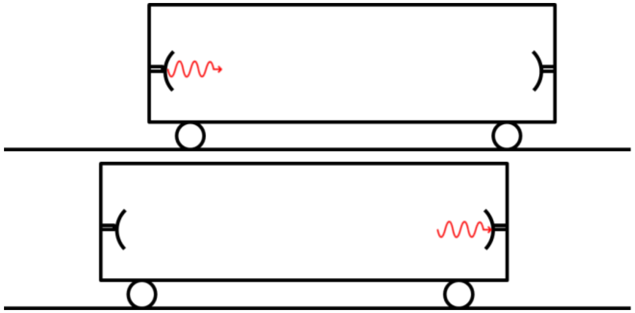


$E = mc^2$ pre fotón: Einsteinov vagón



Anténa vyžiari fotón, vagón získa hybnosť v opačnom smere a začne sa pohybovať. Keď protiľahlá anténa pohltí fotón, vagón získa hybnosť v smere letu fotónu, presne opačnú ako predtým a teda sa zastaví. Ťažisko celého systému „vagón plus fotón“ sa nesmie pohnúť, ale ťažisko vagóna sa posunulo, preto prenosom fotónu muselo dôjsť k prenosu hmotnosti.

$\boldsymbol{E = mc^2}$ pre fotón: Einsteinov vagón

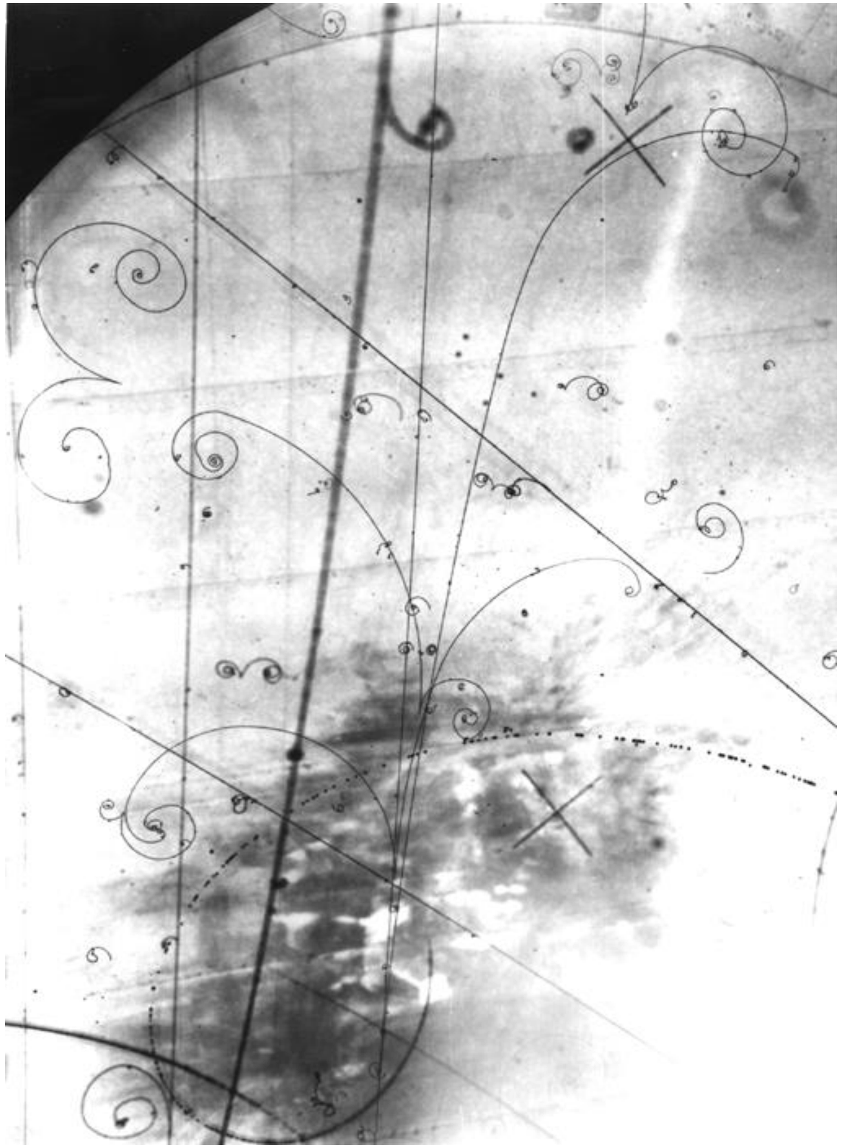


Vagón má dĺžku L, hmotnosť M. Fotón má hybnosť p, letí dobu L/c.
Vagón získa hybnosť $Mv = p$
Ťažisko vagóna sa posunie o vzdialenosť $\frac{p}{M}\frac{L}{c}$
Fotón sa posunie o L
Aby sa celkové ťažisko neposunulo, musí mať fotón hmotnosť m tyakú aby platilo

$$M\frac{p}{M}\frac{L}{c} = mL$$

$$m = \frac{p}{c} = \frac{E}{c^2}$$

$$\boxed{E = mc^2}$$



Snímka z bublinovej komory

$$E > 2m_ec^2$$

Snímka z bublinovej komory, vytvorenie páru elektrón pozitrón

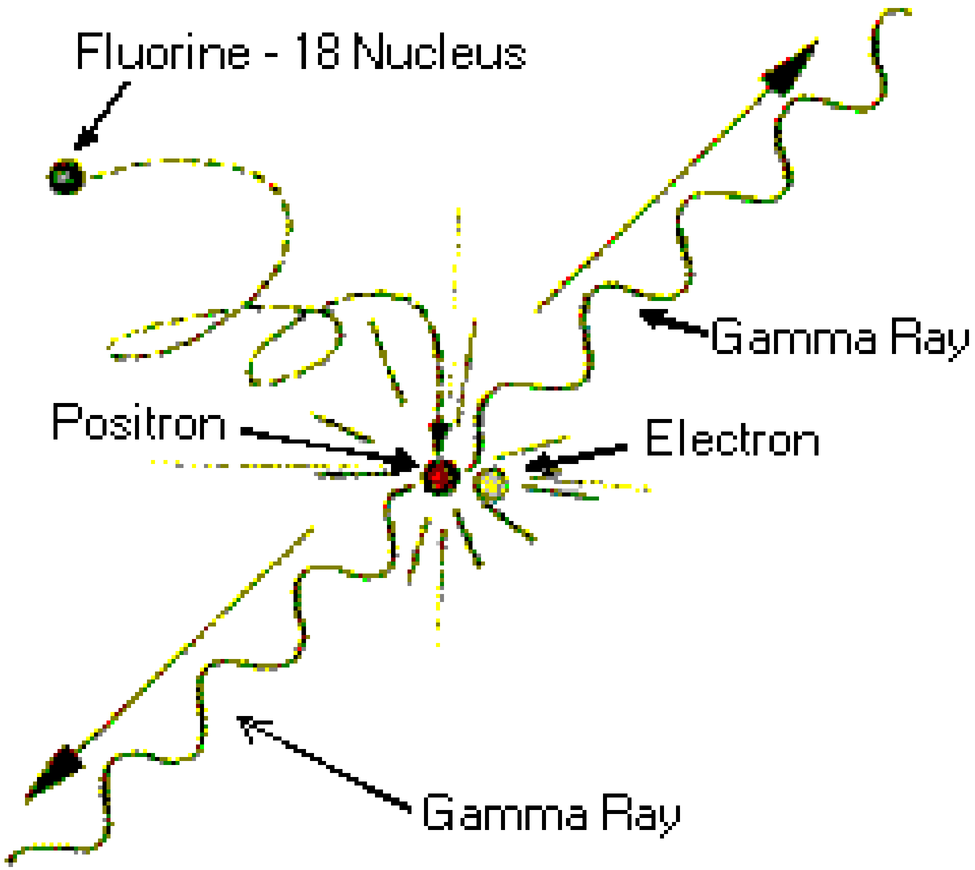
- Vzorce Lorentzovej transformácie
- Relativistický vzorec pre hybnosť častice
- Einsteinov vzorec pre energiu častice
- Prečo v teórii relativity nemôže pre relatívnu rýchlosť voči dvom rozličným súradnicovým sústavám platiť Galileov vzorec $w = w' + v$

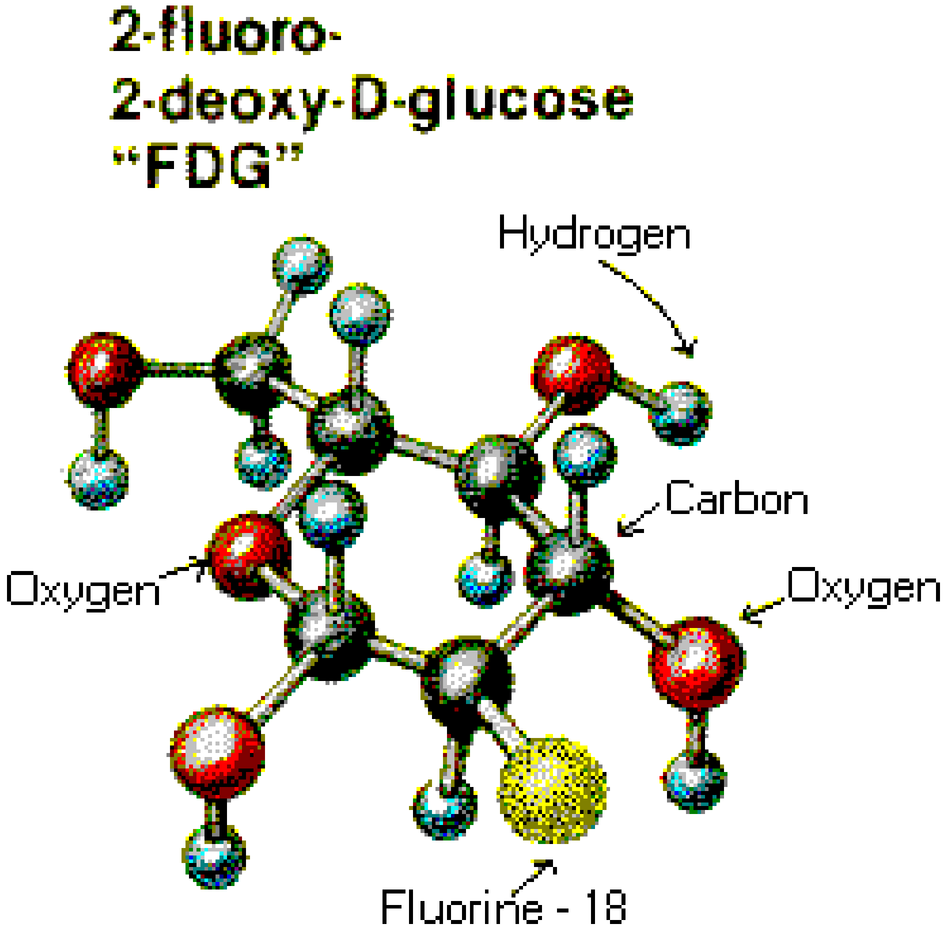
Elektrón pozitrónová anihilácia

$$e^{+} + e^{-} \rightarrow 2\,\gamma$$

PET – Pozitrónová emisná tomografia

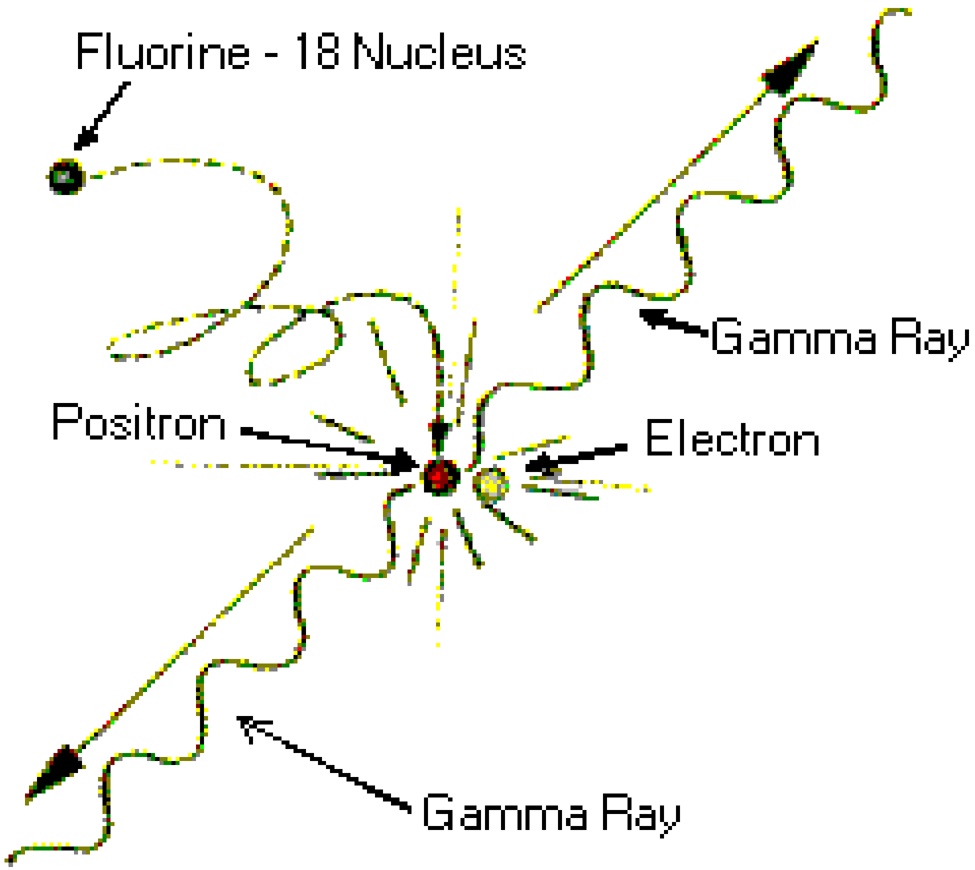
Positron Emission Tomography

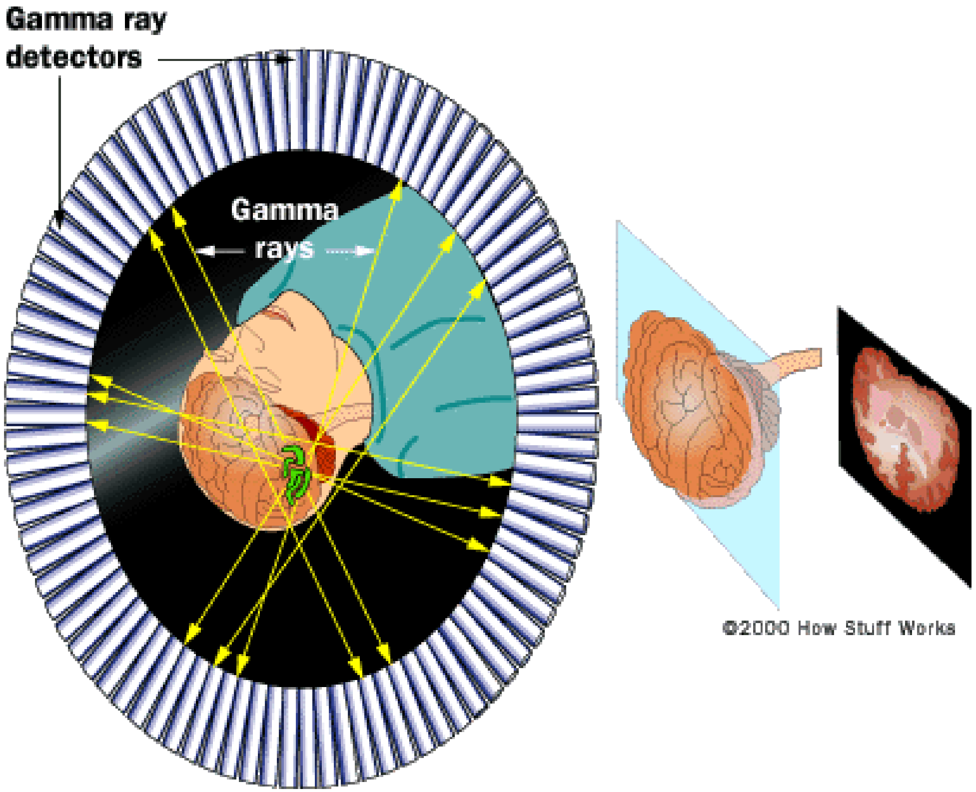


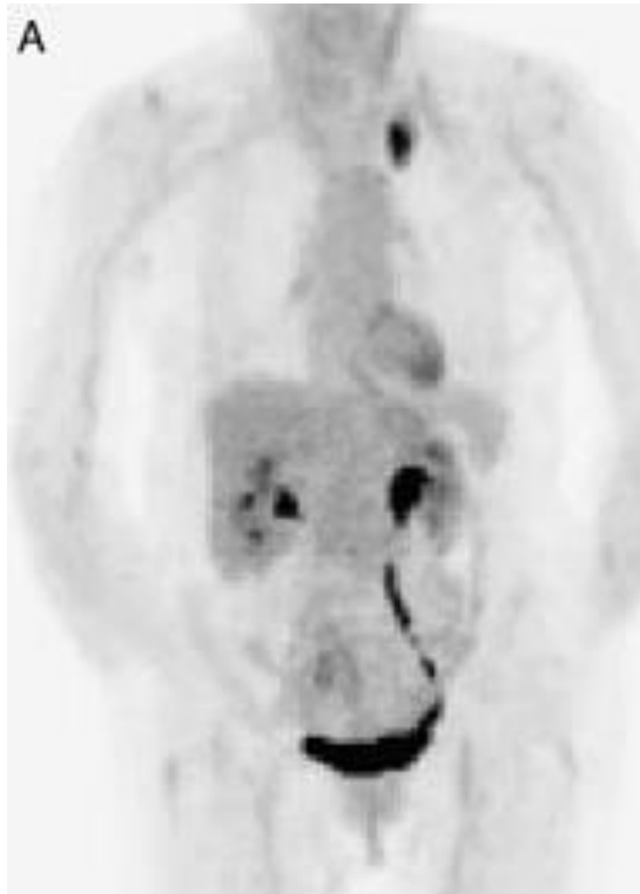


$$^{18}F \longrightarrow {}^{18}O + e^{+} + \nu_e$$

Positron Emission Tomography




Gamma ray
detectors
Gamma
rays
©2000 How Stuff Works

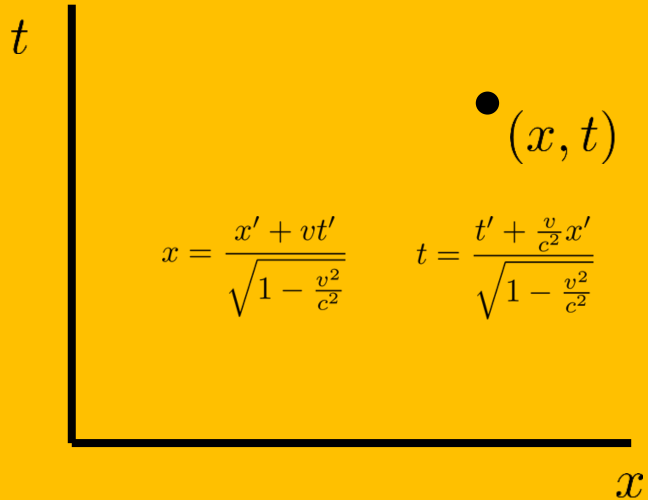

A

Priestoročas

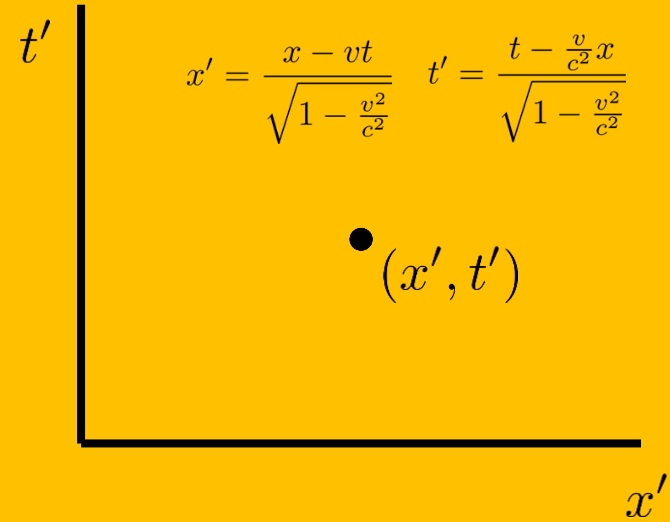
Udalosť (x, t)

Udalosti zodpovedá bod v abstraktnom x, t priestore, ktorému hovoríme priestoročas

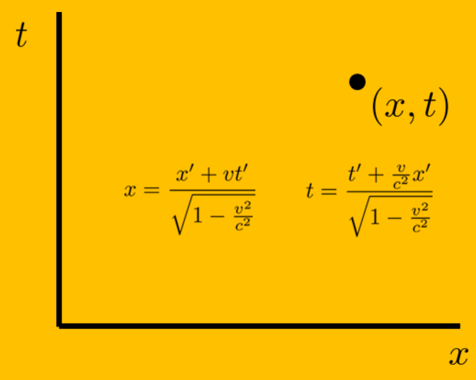
Vizualizácia udalostí: tá istá udalosť zaznamenaná na stanici a vo vlaku



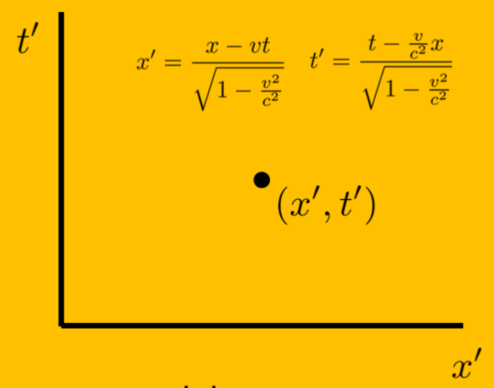
na stanici



vo vlaku



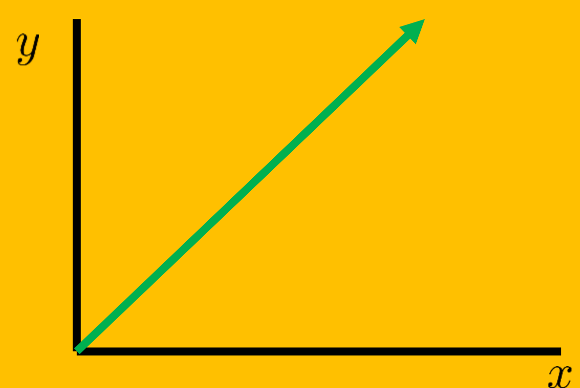
na stanici

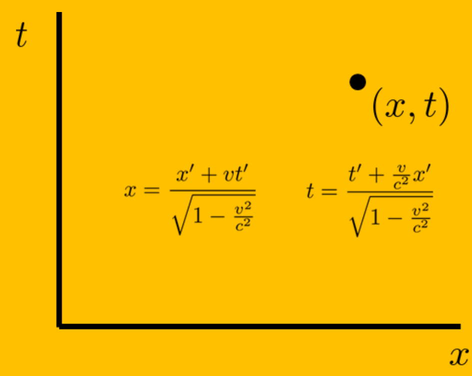


vo vlaku

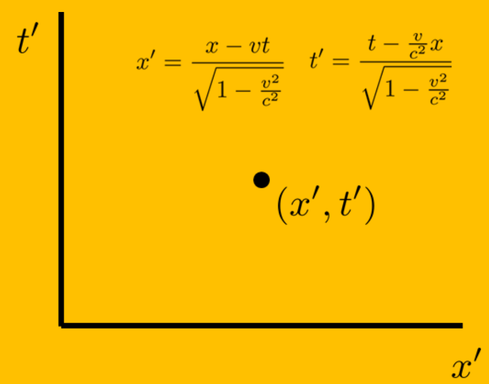
Tá istá udalosť má iné „súradnice“ pre pozorovateľa na stanici a vo vlaku.

Analógia
Ten istý vektor má iné „súradnice“ pre pozorovateľov navzájom otočených





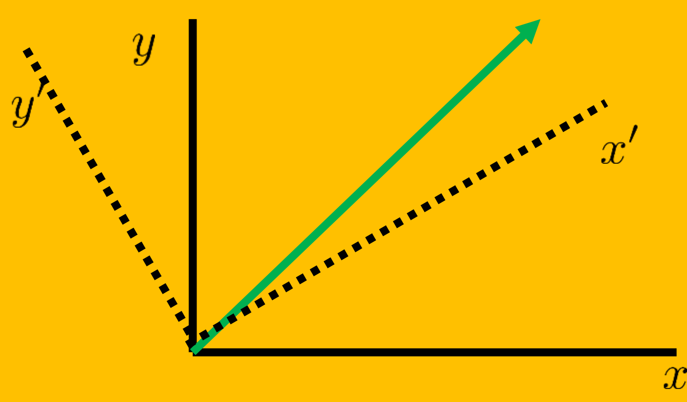
na stanici

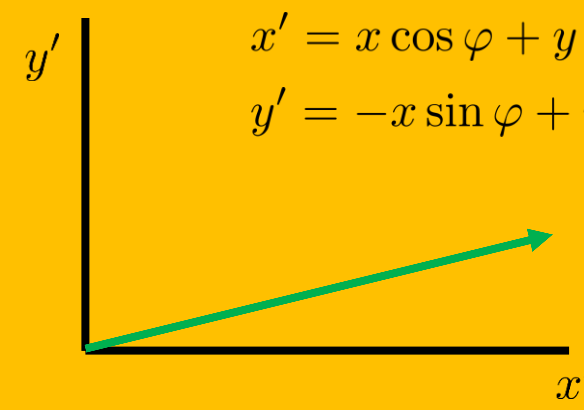


vo vlaku

Tá istá udalosť má iné „súradnice“ pre pozorovateľa na stanici a vo vlaku.

Analógia
Ten istý vektor má iné „súradnice“ pre pozorovateľov navzájom otočených





$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi$$
$$y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Hyperbolické funkcie

$$\cosh\eta = \frac{1}{2}(\exp(\eta) + \exp(-\eta)) \qquad \sinh\eta = \frac{1}{2}(\exp(\eta) - \exp(-\eta))$$

$$\cosh^2\eta - \sinh^2\eta = 1$$

Niekto si všimol, že sa Lorentzova transformácia dá napísať ako

$$\boxed{x' = x\cosh\eta - ct\sinh\eta \qquad ct' = -x\sinh\eta + ct\cosh\eta}$$

kde

$$\frac{v}{c} = \frac{\sinh\eta}{\cosh\eta} = \frac{\exp(\eta) - \exp(-\eta)}{\exp(\eta) + \exp(-\eta)} = \frac{\exp(2\eta) - 1}{\exp(2\eta) + 1}$$

$$\exp(2\eta)(1 - \frac{v}{c}) = 1 + \frac{v}{c}$$

$$\boxed{\eta = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$

$$x' = x\cosh\eta - ct\sinh\eta \qquad ct' = -x\sinh\eta + ct\cosh\eta$$

$$\cosh^2\eta - \sinh^2\eta = 1$$

Dôsledok

$$\begin{aligned}(ct')^2 - x'^2 &= x^2\sinh^2\eta - 2xct\sinh\eta\cosh\eta + (ct)^2\cosh^2\eta \\ &\quad - x^2\cosh^2\eta + 2xct\cosh\eta\sinh\eta - (ct)^2\sinh^2\eta \\ &= (ct)^2 - x^2\end{aligned}$$

Invariantná kombinácia zo súradníc udalosti

$$\boxed{(ct')^2 - x'^2 = (ct)^2 - x^2}$$

pripomína Pytagorovu vetu ale s divným znamienkom

Energia a hybnosť

Rýchlosť častice videná z vlaku (w')a zo stanice (w):

$$w = \frac{w' + v}{1 + \frac{vw'}{c^2}}$$

Hybnosť a energia videná z vlaku

$$p' = \frac{m_0 w'}{\sqrt{1 - \frac{w'^2}{c^2}}} \quad E' = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{w'^2}{c^2}}}$$

Hybnosť a energia videná zo stanice

$$p = \frac{m_0 w}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}$$

Prácne možno overiť, že platí invariantný vzťah

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{E'^2}{c^2} - p'^2 = (m_0 c)^2$$

a Lorentzova transformácia pre energiu a hybnosť

$$\boxed{\frac{E'}{c} = \frac{E}{c}\cosh\eta - p\sinh\eta \qquad p' = -\frac{E}{c}\sinh\eta + p\cosh\eta}$$

Záverečné poznámky

- Náš svet je priestorovo trojrozmerný, tu sme si všímali „len jedny koľajnice a na nich vlaky“. Vlaky jazdia v princípe vo všetkých smeroch, takže Lorentzove transformácie sú všeobecnejšie.
- Pri porovnávaní s vlakom, ktorý ide v smere osi x sa súradnice y, z netransformujú, teda Lorentzove transformácie vo štvorrozmernom priestoročase majú vtedy tvar

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad y' = y \qquad z' = z$$

- V štvorrozmernom priestoročase platí „podivná Pytagorova veta“ so zápornými znamienkami, takže pri takej transformácii sa zachováva „pseudoveľkosť štvorvektora“

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (ct')^2 - x'^2 - y'^2 - y'^2$$

- Pre štvorvektor energie – hybnosti

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = (m_0 c)^2$$

- Vzorec pre relatívnu rýchlosť, ak táto nemá smer osi x je komplikovanejší (vyhľadajte si napríklad vo Wikipédii)

Fyzika na prelome 19. a 20. storočia

- objavuje sa mikrosvet na úrovni nm
- molekuly a atómy ako herci v termodynamike a štatistickej fyzike sa objavili okolo 1860 a definitívne sa tam usadili po Einsteinovej práci o Brownovom pohybe 1905
- 1897 objavený elekrón J.J.Thomson
- 1912 Rutherford objavil atómové jadro, čo viedlo na planetárny model atómu
- 1842 A.Comte: nikdy nebudeme vedieť chemické zloženie planét a hviezd
- okolo 1860 Kirchhoff zákony o spektrách plynov a hviezdy boli skúmateľné: 1868 P.Janssen objavil hélium na Slnku, ktoré až v roku 1895 bolo potvrdené na Zemi.

Záhadná diskrétnosť mikrosveta

Záhadná rovnakosť atómov

Planetárny model atómov: elektróny obiehajú okolo jadra ako planéty okolo Slnka

Lenže nik si nemyslí, že keby sa našlo niekde vo vesmíre hviezda podobná Slnku a pri nej planéta podobná Zemi, tak by vzdialenosť tej planéty od hviezdy mala byť presne rovnaká ako v našej sústave vzdialenosť Zeme od Slnka.

Ale v atómovom svete je to tak! Atóm vodíka vyrobený vo Viedni napríklad elektrolýzou vody je presne rovnaký ako atóm vodíka vyrobený v Bratislave úplne inou technológiou, napríklad reakciou zinku a kyseliny sírovej. Je nanajvýš podivné, že elektróny vo vodíku obiehajú okolo jadra „presne v tej istej vzdialenosti“. Tak to vyzeralo vyjadrené v reči Newtonovej mechaniky.

V spojitom svete častíc, ktoré sa riadia zákonmi Newtonovej mechaniky, možno len o máličko zmeniť počiatočné podmienky a rovnice „si nájdu“ príslušné riešenie, ktoré bude tiež fungovať.

Keby prišiel veľký asteroid a narazil do Zeme, tak to bude mať katastrofálne následky pre život na Zemi, ale z vesmírneho hľadiska len Zem začne obiehať okolo Slnka po trochu inej elipse.

Bombardovanie veľkými telesami vo svete planét je našťastie zriedkavé, ale v mikrosvete veľmi časté, kvôli tepelnému pohybu molekúl a atómov.

Takže je naozaj extrémne čudné že všetky atómy toho istého prvku sú presne rovnaké.

Tepelný pohyb atómov

Okolo roku 1860 Maxwell a Boltzmann prišli s myšlienkou, že vlastnosti plynov ako tlak a teplota sa dajú vysvetliť predpokladom o chaotickom tepelnom pohybe molekúl. Tak tlak vzniká v dôsledku stáleho narážania molekúl plynu na steny nádoby, mechanizmom podobným ako v akčnom filme: keď projektily zasiahnu zločinca, tak toho zločinca až tak odhodí dozadu pod vplyvom tých nárazov.

O pohybe molekúl sa predpokladá, že je chaotický, podlieha pravdepodobnostným zákonom. Takže keď „ulovím nejakú molekulu“ neviem deterministicky určiť akú rýchlosť jej nameriam. Rýchlosť molekúl sa správa ako náhodný vektor (resp. tri náhodné priemety rýchlosti). Keďže ide o spojité náhodné veličiny, musíme pravdepodobnosť popisovať pomocou hustoty pravdepodobnosti. Explicitný tvar objavil Maxwell:

Maxwellovo rozdelenie rýchlostí

$$\rho(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\right)$$

To umožňuje vypočítať strednú kinetickú energiu molekúl a dostane sa

$$\overline{E_{\mathrm{kin}}} = \overline{\frac{1}{2} m \vec{v}^2} = \frac{3}{2} kT$$

Hodnoty $\overline{E_{\mathrm{kin}}}$: pri izbovej teplote typicky 0.02 eV, pri 12000K: 1 eV
Na rozbitie (ionizáciu) atómu vodíka treba 13.6 eV. Za normálnych podmienok je teda len zanedbateľné percento atómov vodíka ionizovaných.

Ale bombardovanie molekulami s energiou 0.02 eV by sa malo prejaviť zmenami trajektórie elektrónu okolo jadra a teda nie všetky vodíky by mali byť rovnaké

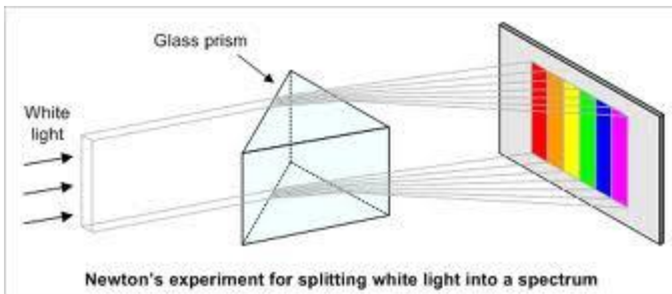
Záver:

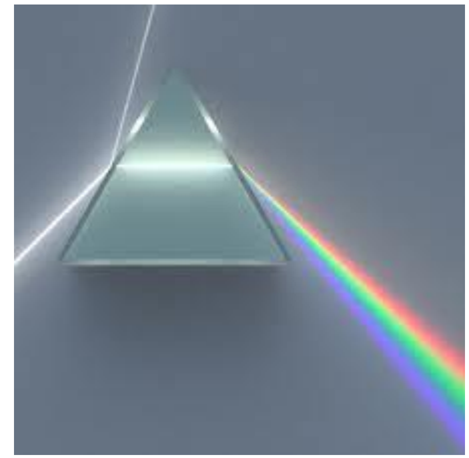
Vyzerá to tak, ako keby elektrón obiehajúci okolo jadra nemohol zmeniť svoju energiu „ len o trošku“.

Záhadná diskrétnosť mikrosveta

Diskrétne spektrá atómov

Spektrálny rozklad svetla (Newton)





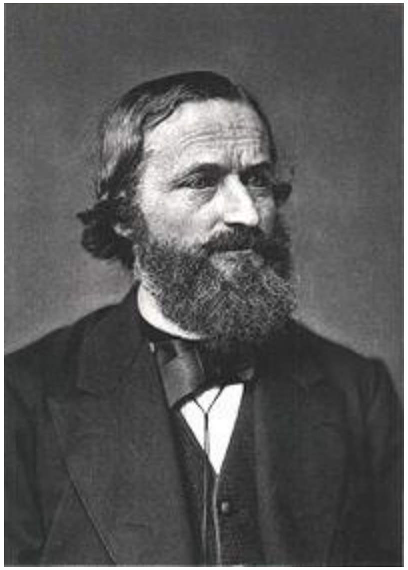
Spektrum svetla vydávané rozpáleným tuhým telesom

Spektrum atómu vodíka

Elektrická výbojka plnená vodíkom
Niečo ako horské slnko, ktoré môže byť plnené ortuťovými parami.

Hydrogen lamp set

....planets..... we can never known anything of their chemical or mineralogical structure
Auguste Comte, The Positive Philosophy, Book II, Chapter 1 (1842)



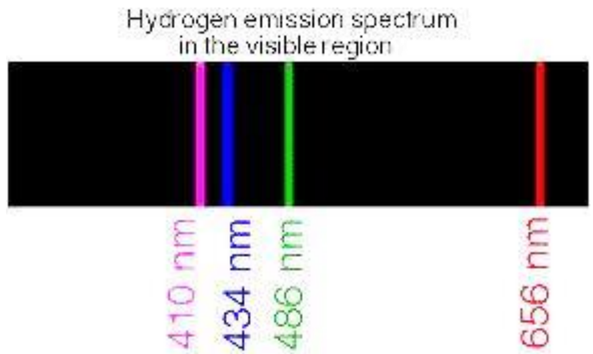
G.R.Kirchhoff okolo 1860
spektrálna analýza chemického zloženia

1868 P.Janssen objavil na Slnku spektrum na Zemi neznámeho plynu (hélium), ktorý bol na Zemi potvrdený až po 30 rokoch

spektrum hélia

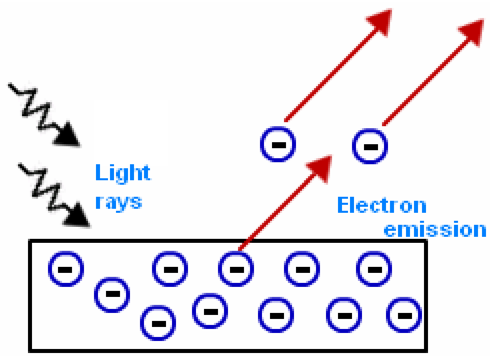
Záhadná diskrétnosť mikrosveta

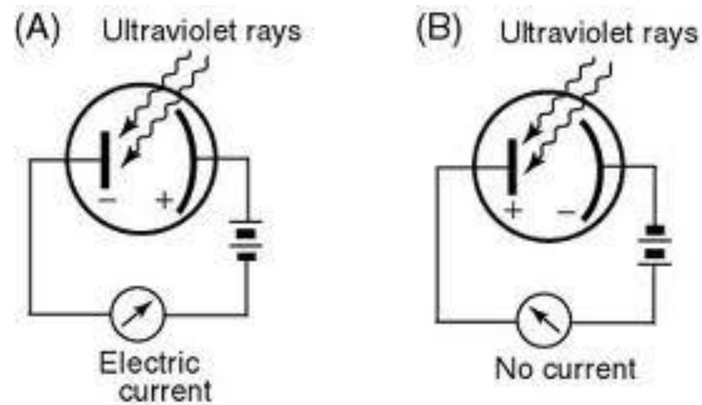
Diskrétne spektrá atómov



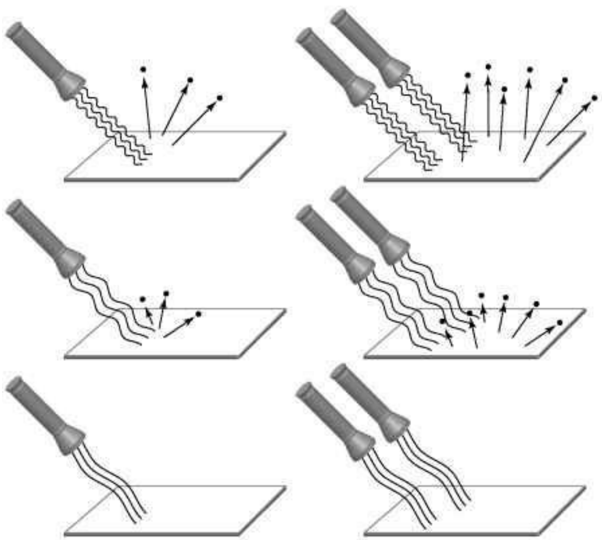
Ak atóm vyžiari svetlo, musí zmeniť svoj stav, lebo vyžiaril nejakú energiu, teda jeho energia po vyžiarení musí byť iná ako pred vyžiarením.
Ale prečo je frekvencia diskrétna. Čo to hovorí o stavoch atómov.
Odpoveď: Einstein v teórii fotoefektu.

Einstein a fotoefekt



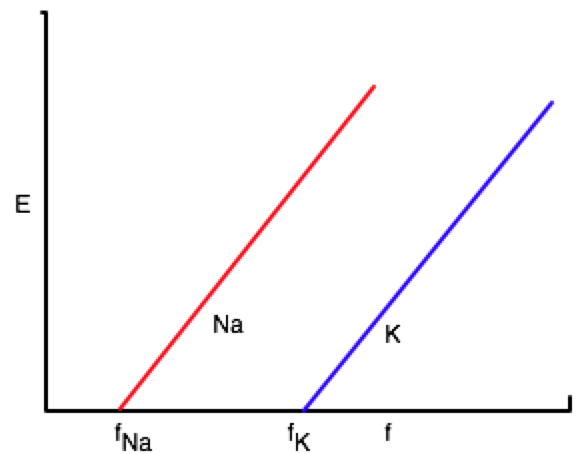


Fotoefekt: dopadom svetla na **kov možno z neho vyraziť elektróny do okolitého priestoru (vákua). Ak** je na blízku kladná elektróda, tá elektróny pritiahne, teda vákuom prechádza prúd. Pri opačnej polarite elektród prúd neprechádza. Ale ak je „protinapätie“ malé, nejaké elektróny prejdú, z čoho sa dá usúdiť, že boli nielen vytrhnuté z kovu ale dostali ešte aj nejakú rýchlosť (kinetickú energiu) takže treba vykonať nejakú prácu, aby nedoleteli. Môžem odmerať koľko „záporných voltov“ je treba aby nedoleteli a tým odmeriam energiu, s ktorou boli vystrelené.



Závery na základe experimentov:

- sú tam nejaké elementárne procesy
- energia odovzdaná elektrónu v jednom elementárnom procese závisí len na frekvencii svetla, nie na jeho intenzite
- väčšia intenzita sa prejaví len zvýšením počtu elementárnych procesov



energia je úmerná frekvencii

Einstein:

- elementárny proces je pohltenie svetelného kvanta elektrónom
- energia svetelného kvanta je úmerná frekvencii svetla

$$E = \hbar\omega$$

Values of $\hbar$	Units
$1.054\,571\,726(47) \times 10^{-34}$	J·s
$6.582\,119\,28(15) \times 10^{-16}$	eV·s

Aby elektrón vôbec vyletel (s nulovou kinetickou energiou) musí platiť

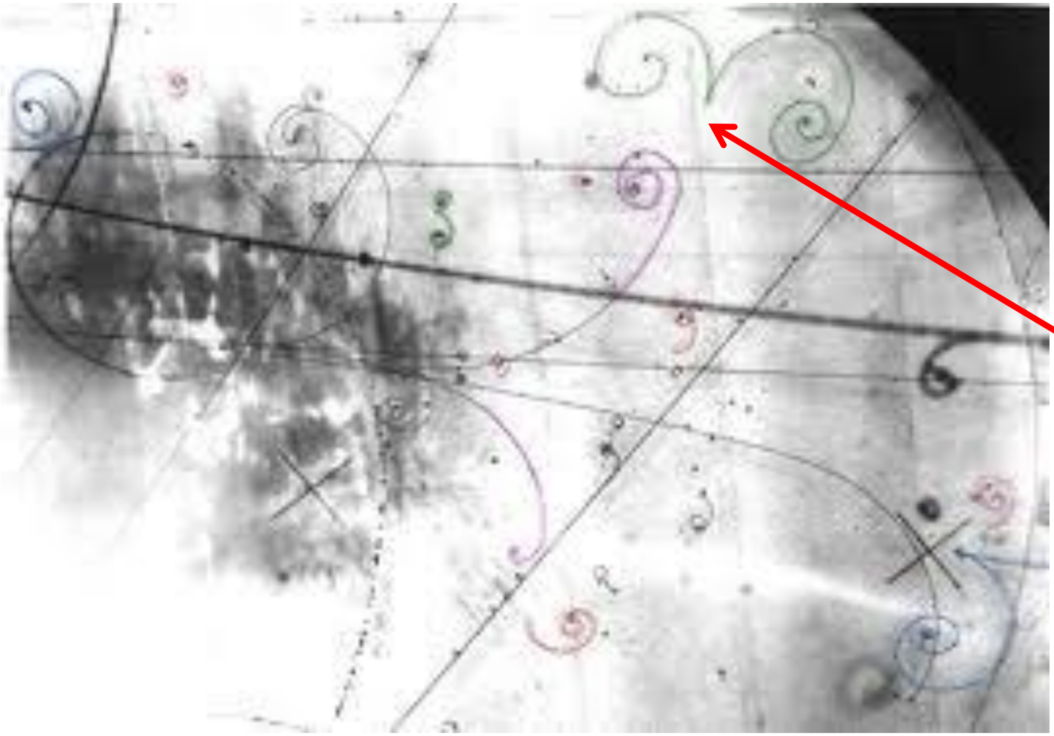
$$E = \hbar\omega > W$$

kde W je tzv. výstupná práca potrebná pre vytrhnutie elektrónu z daného kovu. Pre Na je to 2.36 eV, pre Cu okolo 5 eV.
Pre Na treba 525 nm (viditeľné) pre Cu 250 nm (ultrafialové)

Prenos energie svetla sa deje po kvantách – fotóny.
Energiu jedného fotónu určuje frekvencia svetla

$$E = \hbar\omega$$

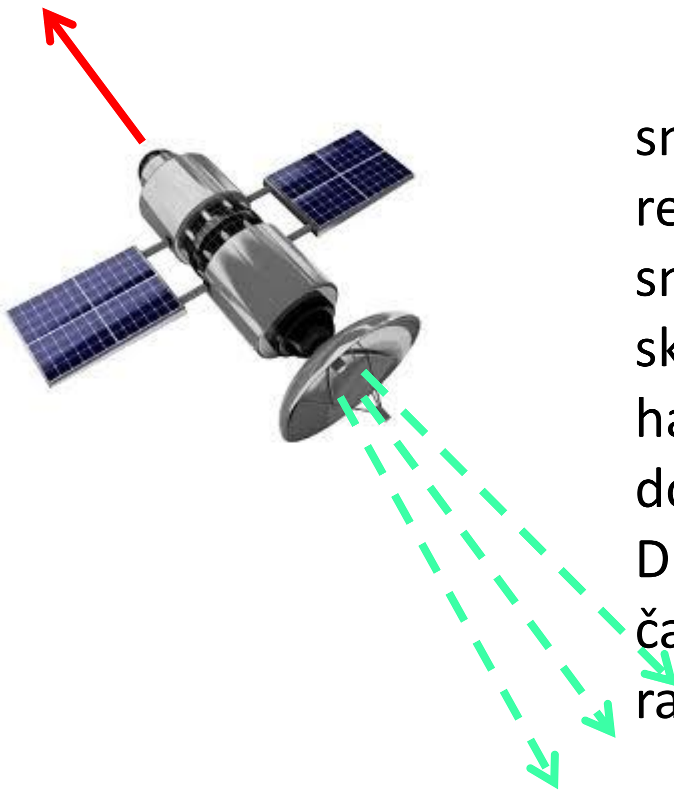
Intenzívnejšie svetlo rovnakej frekvencie: prúd väčšieho počtu fotónov, každý fotón má rovnakú energiu ako pri nižšej intenzite.



Fotón možno „vidieť“, ako vyrobí pár elektrón pozitrón v bublinovej komore

fotón -> elektrón+pozitrón

Svetlo prenáša nielen energiu ale aj hybnosť.



smerové vysielanie signálu spôsobuje reakčný pohyb satelitu v opačnom smere, podobne ako keď na skateboarde striekam vodovodnou hadicou dopredu, začnem sa hýbať dozadu

Dráhu vysielajúceho satelitu treba z času na čas korigovať malými raketovými motormi

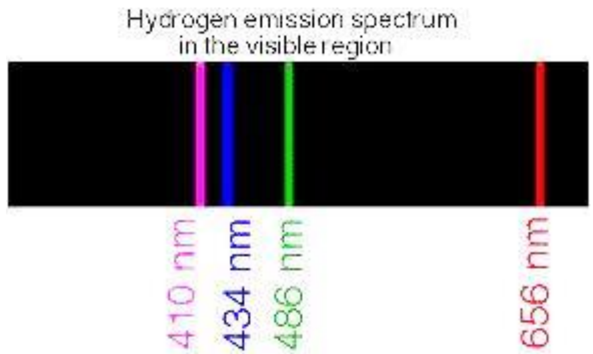
Záver: fotón má nielen energiu ale aj hybnosť

$$E = \hbar\omega \qquad p = \hbar\frac{\omega}{c} = \hbar k = \hbar\frac{2\pi}{\lambda}$$

Vlna v smere osi x: $$E_y(t,x) = E_0 \exp(-\hat{i}\omega t + \hat{i}kx)$$

Záhadná diskrétnosť mikrosveta

Diskrétne spektrá atómov



Ak atóm vyžiari svetlo, musí zmeniť svoj stav, lebo vyžiaril fotón, teda nejakú energiu, teda jeho energia po vyžiarení musí byť iná ako pred vyžiarením.
Vidno ale že atóm vie vyžarovať len celkom určité diskrétne frekvencie, teda fotóny len celkom určitých diskrétnych energií.
Teda rozdiely energií atómových stavov sú len celkom určité diskrétne čísla.

Energie atómových stavov sú teda len celkom určité diskrétne čísla

Diskrétne spektrá → diskrétne energie

Transition of n	3→2	4→2	5→2	6→2
Name	H-α	H-β	H-γ	H-δ
Wavelength (nm) [2]	656.3	486.1	434.1	410.2
Color	Red	Cyan	Blue	Violet

Empirický vzorec:

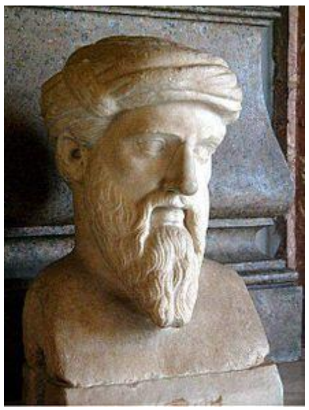
$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

Možné energie atómu vodíka: $$E_n = -\frac{13.6}{n^2}\mathrm{eV}$$

V spojitom svete sa objavujú diskrétne hodnoty veličín !!!!!
Diskrétne hodnoty sa dajú vyjadriť pomocou celých čísel
(hovorí sa im kvantové čísla)

Ako je to možné, že celé čísla, ktoré ľudstvo pôvodne vymyslelo na počítanie dobytka hrajú úlohu vo "fyzikálnom zverinci"?

Prvý, kto sa tak prekvapil bol Pytagoras.



Tóny strún súzvučia, keď ich dĺžky
sú v pomere malých celých čísel
2:1 oktáva
3:2 čistá kvinta

Dnes rozumieme, ako sa objavujú celé čísla v porozumení zvuku struny:

Vlastnosti riešení vlnovej rovnice

Vlnová rovnica: okrajové podmienky

V rovnici pre zvukove vlny v jednorozmernej tyči sme mali okrajové podmienky takéto:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \text{ s okrajovou podmienkou } \; u(t,0) = u(t,L) = 0$$

Pre koaxiálny kábel ukončený odporom sme mali okrajovú podmienku takúto:

$$\frac{\partial^2 I(t,x)}{\partial t^2} = \frac{1}{\tilde{L}\tilde{C}} \frac{\partial^2 I(t,x)}{\partial x^2}$$ s okrajovou podmienkou $$-\frac{1}{\tilde{C}} \frac{\partial I}{\partial x} = R \frac{\partial I}{\partial t}$$

Parciálna diferenciálna rovnica teda potrebuje zadať **okrajové podmienky**, až **tie vyberú** z možných riešení to fyzikálne správne k danému problému.

Okrajové podmienky **môžu byť veľmi rôzne** od prípadu k prípadu, treba ich určiť na základe **dôkladnej fyzikálnej analýzy** toho, čo sa deje na okrajoch systému, ktorý skúmame.

Vlnová rovnica: analytické riešenie

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \text{ s okrajovou podmienkou } \; u(t,0) = u(t,L) = 0$$

Geniálny Fourierov nápad: hľadajme riešenie v tvare

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin(\frac{\pi n}{L} x)$$

Tým sa obmedzíme len na funkcie, ktoré automaticky spĺňajú okrajové podmienky

Po dosadení do vlnovej rovnice dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{c}_n(t) \sin(\frac{\pi n}{L} x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2 n^2 c^2}{L^2} c_n(t) \sin(\frac{\pi n}{L} x)$$

Z jednoznačnosti Fourierovho rozkladu dostaneme rovnice

$$\ddot{c}_n(t) = -\omega_n^2 c_n(t), \quad \text{kde} \quad \omega_n = \frac{\pi n c}{L}$$

Sú to rovnice nezávislých harmonických oscilátorov

$$\ddot{c}_n(t) = -\omega_n^2 c_n(t), \quad \text{kde} \quad \omega_n = \frac{\pi n c}{L}$$

všeobecné riešenie pre jeden oscilátor (teda konkrétne n) má tvar

$$c_n(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$$

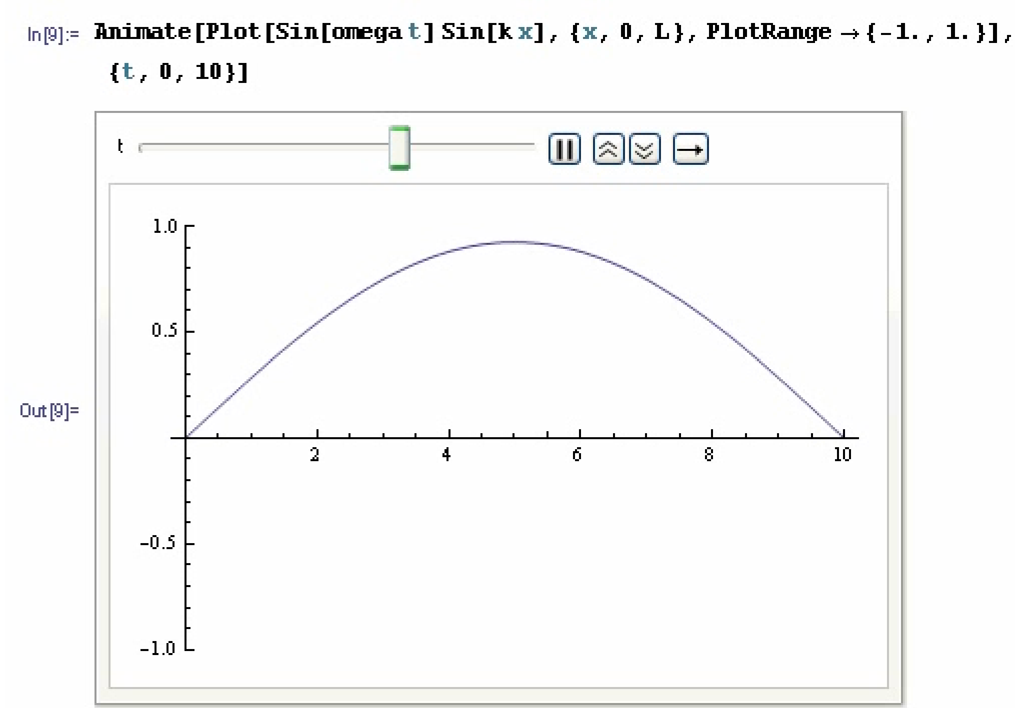
teda všeobecné riešenie vlnovej rovnice na intervale $\langle 0, L\rangle$ je

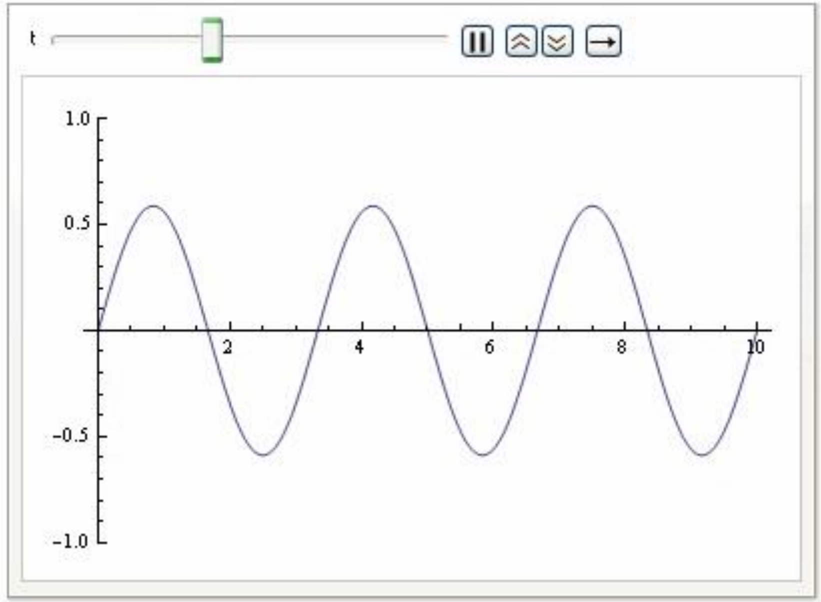
$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \sin(\frac{\pi n}{L} x), \quad \text{kde} \quad \omega_n = \frac{\pi n c}{L}$$

Vlnová rovnica: charakter riešení

Vyšetrime vlastnosti najjednoduchšieho riešenia

$$u(t,x) = \alpha_1 \cos(\omega_1 t) \sin(k_1 x)$$





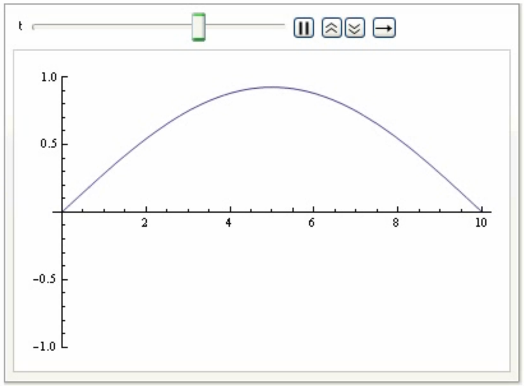
Video ukazuje, že každý rez tyče kmitá ako oscilátor, stále rovnakou frekvenciou a amplitúdou. Niektoré rezy tyče nekmitajú vôbec, to sú takzvané uzly. Riešenie

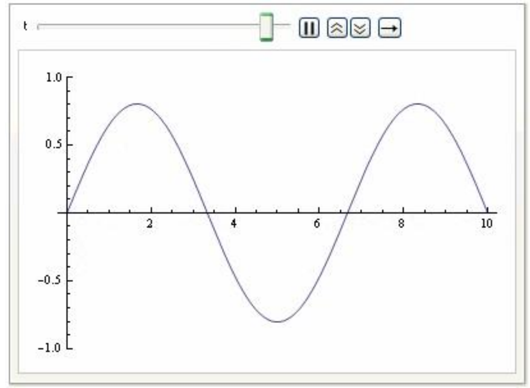
$$u(t,x) = \alpha_n \cos(\omega_n t)\sin(k_n x)$$

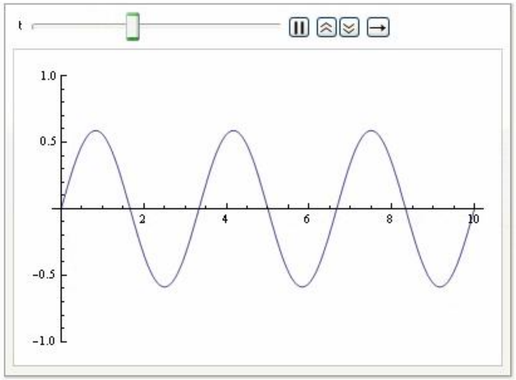
popisuje tzv. **stacionárne kmity tyče (stojatú vlnu).** Slovom stojatý máme na mysli to, že po tyči sa nepremiestňuje energia ani amplitúda oscilácií. Všimnime si, že stojatá vlna je monofrekvenčná, všetky body kmitajú jednou a tou istou frekvenciou

$$u(t,x) = \alpha_n \cos(\omega_n t)\sin(k_n x) \qquad k_n = \frac{\pi n}{L}, \quad \omega_n = c k_n$$

Out[9]=







$$k_1 = \frac{\pi}{L},\ \lambda_1 = 2L \qquad k_3 = \frac{3\pi}{L},\ \lambda_3 = \frac{2L}{3} \qquad k_6 = \frac{6\pi}{L},\ \lambda_3 = \frac{2L}{6}$$

Index n pri $k_n = \frac{\pi n}{L}$ určuje počet priestorových polperiód kmitov, súvis s vlnovou dĺžkou je

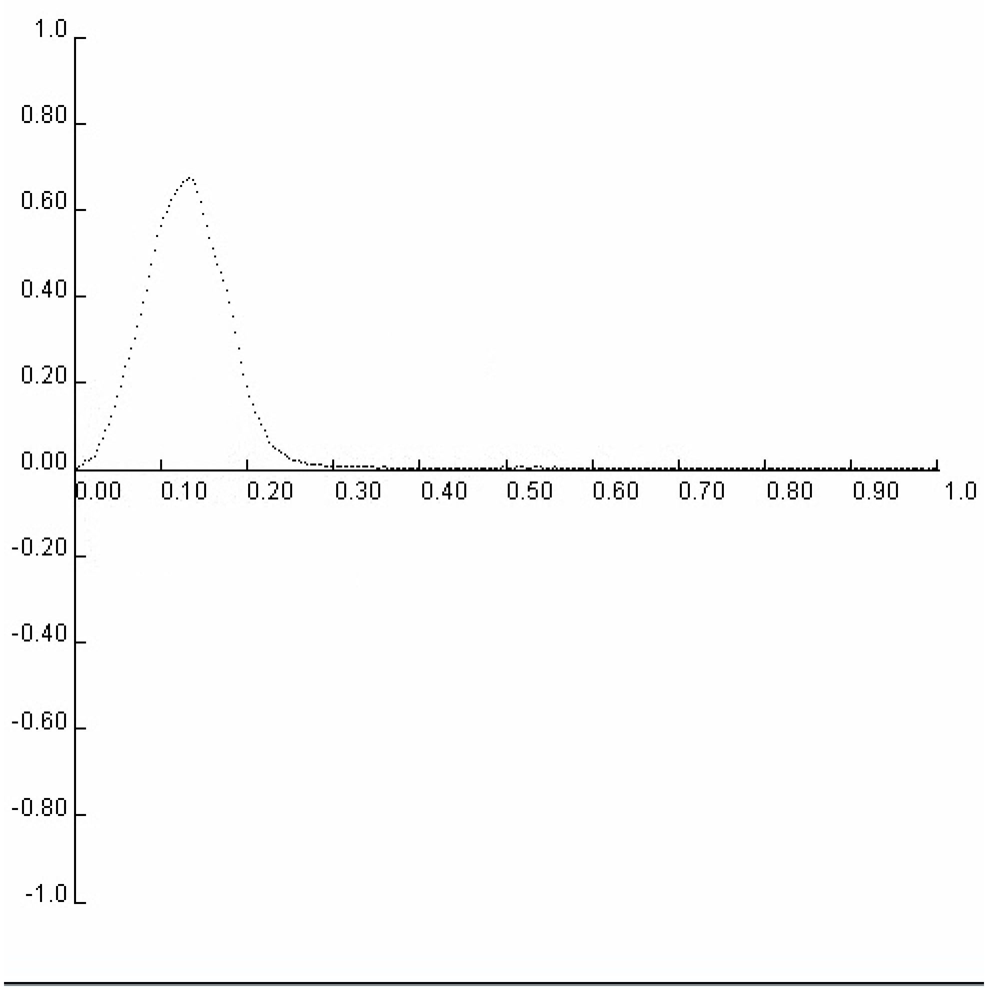
$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}$$

$$\omega_n = c k_n = c\frac{2\pi}{\lambda_n}$$

$$c = \frac{\omega_n \lambda_n}{2\pi} = \frac{2\pi}{T}\frac{\lambda_n}{2\pi} = \frac{\lambda_n}{T}$$

c má rozmer rýchlosti !

Ukážka nestacionárneho vlnenia
Na videu je pohybujúca sa vlna



Fourierovskou metódou sme hľadali riešenia už hneď vo veľmi špeciálnom tvare, lebo nulové okrajové podmienky nám to napovedali.

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin(\frac{\pi n}{L} x)$$

Skúsili sme to hľadať aj v menej špeciálnom tvare, ale takom, aby sme mali šancu, že vlastne nájdeme nový pseudofourierovský rozklad. Fourier bol založený na konkrétnych sínusovkách, ale naozaj esenciálne boli len nejaké ich vlastnosti. Skúsme vymenovať nejaké vlastnosti, ktoré by sa nám na špeciálnych riešeniach páčili:

- **časová a priestorová závislosť sú separované ako súčin dvoch funkcií, jednej len časovo závislej, druhej len priestorovo závislej**
- **splnené sú okrajové podmienky**
- **priestorové funkcie sú ortogonálne**
- **priestorové funkcie tvoria úplný systém, t.j. že hocijaká priestorová funkcia s požadovanými vlastnosťami sa dá napísať ako ich superpozícia**
- **časovo závislé časti tých špeciálnych funkcií sú monofrekvenčné**

Zopakujme si, čo sme už robili:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \text{ s okrajovou podmienkou } u(t,0) = u(t,L) = 0$$

Začnime prvou z tých vlastností, separáciou časovej a priestorovej závislosti. Hľadajme riešenie v tvare(nedbáme na okrajové podmienky):

$$u(t,x) = f(t)w(x)$$

Dosadíme do vlnovej rovnice:

$$w(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(t) = c^2 f(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}w(x)$$
$$\frac{1}{f(t)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(t) = c^2\frac{1}{w(x)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}w(x)$$

Ľavá strana závisí len od času, pravá len od súradnice, ale musia byť rovnaké pre každú hodnotu času a každú hodnotu súradnice. To je možné len tak, že obe strany sú rovné jednej a tej istej neznámej konštante, nazvime ju X. Dostali sme dve rovnice. Keď sme začali navyše žiadať, aby boli splnené okrajové podmienky, **ukázalo sa, že vhodné riešenia existujú len pre nejaké špeciálne diskrétne hodnoty konštanty X.**

Pri riešení vlnovej rovnice (alebo iných podobných parciálnych diferenciálnych rovníc) sa teda objavujú špeciálne stacionárne diskrétne riešenia.
Úloha na hľadanie istých špeciálnych (pre fyziku stacionárnych) riešení bola v matematike asi jediná známa úloha zo spojitej matematiky, ktorá viedla na diskrétne riešenia.

Lenže to bolo o vlnách a mikrosvet je vystavaný z častíc!

Pri svetle, o ktorom sa dokázalo, že je to vlnenie, sa ale prekvapivo objavili "časticové vlastnosti".

Myšlienka (de'Broglie): **čo ak častice majú naopak vlnové vlastnosti** a namiesto Newtonovými rovnicami sa majú popisovať ako vlnenie? Skúsme prekladový slovník, platný pre fotóny

$$E = \hbar\omega \qquad p = \hbar k = \hbar\frac{2\pi}{\lambda}$$

Ale čítajme ten slovník naopak, nie takto

$$E = \hbar\omega \qquad p = \hbar k = \hbar \frac{2\pi}{\lambda}$$

ale takto:

$$\omega = \frac{1}{\hbar} E \qquad k = \frac{1}{\hbar} p$$

teda skúsme časticu, ktorá má energiu E a hybnosť p považovať za vlnu s frekvenciou ω a vlnovým číslom k.

E.Schrödinger zobral tento nápad doslova a skúsil zostaviť pohybovú rovnicu pre častice ako rovnicu pre vlnenie.

Prvé, čo asi skúsil, bola obyčajná vlnová rovnica, ktorá by mohla popisovať voľnú časticu, na ktorú nič nepôsobí

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$$

Ak hľadáme riešenie, ktoré by malo zodpovedať častici s energiou E, potom by to riešenie malo mať určitú frekvenciu, teda malo by to byť monofrekvenčné riešenie. Predstavme si, že hľadáme riešenia, zodpovedajúce voľným časticiam uzavretým v "krabici", niečo ako ideálny plyn. Očakávame že príslušná de'Broglieho vlna bude nulová mimo krabice a teda aj na stenách. Také monofrekvenčné riešenia vlnovej rovnice poznáme, sú to Fourierove sinusovky tvaru

$$(a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \sin(\frac{\pi n}{L} x), \quad \text{kde} \quad \omega_n = \frac{\pi n c}{L}$$

Dostali sme diskrétne hodnoty energií $E_n = \hbar \omega_n = \frac{\pi n c}{L}$

Súčasne aj diskrétne hodnoty hybností $p_n = \hbar k_n = \frac{\pi n}{L}$

$$E_n = \hbar\omega_n = \frac{\pi n c}{L} \qquad\qquad p_n = \hbar k_n = \frac{\pi n}{L}$$

Lenže odtiaľ dostávame nejaký divný súvis medzi energiou a hybnosťou

$$E_n = c\, p_n$$

Asi ale **nechceme "zrušiť celého Newtona".** Chceme si dovoliť modifikovať Newtona pre mikrosvet (pre častice s malými hmotnosťami a malými energiami, rádove eV) ale pre veľké energie by mal ostať platný (aspoň ako priblíženie) starý dobrý Newton.

Takže páčilo by sa nám, aby pre veľké energie (teda veľké n) platilo čosi ako

$$E_n = \frac{1}{2m} p_n^2$$

ale obyčajná vlnová rovnica dáva pre malé aj veľké n stále rovnako

$$E_n = c\, p_n$$

Prečo dostávame taký vzťah?
Lebo keď hľadáme riešenie vlnovej rovnice

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$$

v separovanom tvare

$$u(t,x) = f(t)w(x)$$

dostaneme dve rovnice

$$\frac{1}{f(t)}\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t) = c^2 \frac{1}{w(x)}\frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x) = X$$

V obidvoch rovniciach sú druhé derivácie, takže dostaneme „oscilátorové riešenia“ typu $u(t,x) = \sin(\omega t)\sin(kx)$ a druhé derivácie z toho vyrobia $\omega^2 = c^2 k^2$ resp $E^2 = c^2 p^2$

teda kvadrát v energii aj hybnosti. Kvadrát pochádza z toho že je tam druhá derivácia.

My potrebujeme $$E = \frac{1}{2m}p^2$$

teda lineárne v energii, kvadraticky v hybnosti. Nápad na zmenu je jednoduchý, skúsiť rovnicu , kde bude prvá derivácia podľa času a druhá derivácia podľa súradníc. Naivný nápad skúsiť rovnicu

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$$

ale nebude fungovať. Separované riešenia typu $u(t,x) = f(t)w(x)$ dajú

$$\frac{1}{f(t)}\frac{\partial}{\partial t}f(t) = \alpha \frac{1}{w(x)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}w(x) = X$$

Lenže rovnica

$$\frac{\partial}{\partial t}f(t) = Xf(t)$$

nemá ako riešenie sínusovky ale reálne exponenciály a riešenia typu

$$f(t) = \exp(Xf(t))$$

sú neakceptovateľné tak pre záporné X (riešenie „vymrie“), ako aj pre kladné X (riešenie exponenciálne „vybuchne“).

Chceme teda zdanlivo nemožné, rovnicu s prvou deriváciou, ktorej riešenie je kmitanie, teda „imaginárna exponenciála“

Nápad: išlo by to, ale **v rovnici by museli byť komplexné čísla**. Čo tak skúsiť rovnicu

$$\hat{i}\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$$

to povedie na

$$\frac{\partial}{\partial t}f(t) = -\hat{i}Xf(t)$$

s riešením

$$f(t) = \exp(-iXt)$$

Takže nakoniec dostaneme vlnu typu

$$u(t,x) = \exp(-\hat{i}\omega t)\sin(kx)$$

a vzťah

$$\omega = -\alpha k^2 \quad \text{resp.} \quad E = -\alpha\frac{1}{\hbar}p^2$$

šikovne ešte definujeme

$$\alpha = -\frac{\hbar}{2m}$$

a dostaneme (použijúc obvyklé označenie ψ namiesto u)

$$\hat{i}\hbar\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x^2}$$

Toto je Schrödingerova rovnica (v jednorozmernom svete), základná rovnica kvantovej mechaniky. Práve sme boli svedkami jej zrodu.

Záver: s časticou nejako súvisí komplexná vlna, ktorá spĺňa Schrödingerovu rovnicu.

Pozoruhodné: ako keby sme tvrdili, že príroda vie, čo sú to komplexné čísla a používa ich.

My sme už používali komplexné čísla, ale bol to len taký **matematický trik**, aby sme nemali starosti s goniometrickými vzťahmi. Písali sme komplexné exponenciály ale chápali sme to tak, že fyzikálny význam majú len ich reálne časti.

Toto je iné: de'Broglieho vlna je naozaj komplexná.

$$\hat{i}\hbar\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x^2}$$

Čo hovorí Schrödingerova rovnica o voľných časticiach (ideálnom plyne) v nádobe (kontajneri) v jednorozmernom svete? V jednorozmernom svete je kontajnerom úsečka (0,L). Monofrekvenčné riešenia poznáme, sú to Fourierove sínusovky

$$\psi(t,x) = \exp(-\hat{i}\omega_n t)\sin(\frac{\pi n}{L}x)$$

$$E_n = \hbar\omega_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2$$

V trojrozmernom svete bude mať Schrödingerova rovnica pre voľnú časticu tvar

$$\boxed{\hat{i}\hbar\frac{\partial\psi(t,x,y,z)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi(t,x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi(t,x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi(t,x,y,z)}{\partial z^2}\right)}$$

Hodnoty energií zodpovedajúcich stacionárnym stavom voľnej častice v nádobe tvaru kocky o hrane L budú

$$E_{ijk} = \hbar\omega_{ijk} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}(i^2 + j^2 + k^2) \qquad (1)$$

Znamená to toto: ak mám nádobu plnú častíc, vyberiem si jednu z nich a odmeriam jej energiu (podobne ako policajti radarom odmerajú rýchlosť auta na diaľnici, ktoré si vybrali), potom meraním získaná hodnota energie bude rovná niektorej z hodnôt (1), teda že existujú celé čísla i,j,k také, že nameraná hodnota bude rovná E_{ijk}

Správnosť formuly pre možné hodnoty energií častíc (takmer) ideálneho plynu sa dá experimentálne overiť. Závisia na nej niektoré jemné predpovede teórie o predpokladaných vlastnostiach plynov a vychádza to správne.

Schrödinger teda napísal rovnicu pre voľnú časticu

$$\hat{i}\hbar\frac{\partial\psi(t,\vec{r})}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi(t,\vec{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi(t,\vec{r})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi(t,\vec{r})}{\partial z^2}\right)$$

Otázka znela, ako napísať rovnicu pre niečo zaujímavejšie, napríklad pre elektrón „obiehajúci okolo jadra“ v atóme vodíka

Uhádnutie správnej rovnice bolo geniálne: Rovnica pre voľnú časticu je symbolickým zapísaním vzťahu

$$E = \frac{1}{2m}p^2$$

Derivácia podľa času totiž z vlny „vytiahne“ energiu a druhé derivácie podľa súradníc kvadráty komponent hybnosti. Pre elektrón v poli jadra pribudne klasicky do vzťahu pre energiu ešte potenciálna energia elektrónu v Coulombovom elektrickom poli jadra, klasický vzťah je

$$E = \frac{1}{2m}p^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

Schrödinger teda odvážne napísal rovnicu

$$\boxed{\hat{i}\hbar\frac{\partial\psi(t,\vec{r})}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi(t,\vec{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi(t,\vec{r})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi(t,\vec{r})}{\partial z^2}\right) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}\psi(t,\vec{r})}$$

A stal sa zázrak: ak hľadáme riešenie tej rovnice v tvare

$$\psi(t,\vec{r}) = \exp(-\hat{i}\frac{E}{\hbar}t)\Phi(\vec{r})$$

a požadujeme okrajové podmienky tak, že chceme aby funkcia $\Phi(\vec{r})$ dostatočne rýchlo v nekonečne klesala k nule, zistíme, že také riešenie neexistuje pre ľubovoľné číslo E. Existuje len pre nejaké vybrané diskrétne hodnoty, konkrétne pre hodnoty

$$\boxed{E_n = -\frac{13.6}{n^2}\mathrm{eV}}$$

To bol gól !

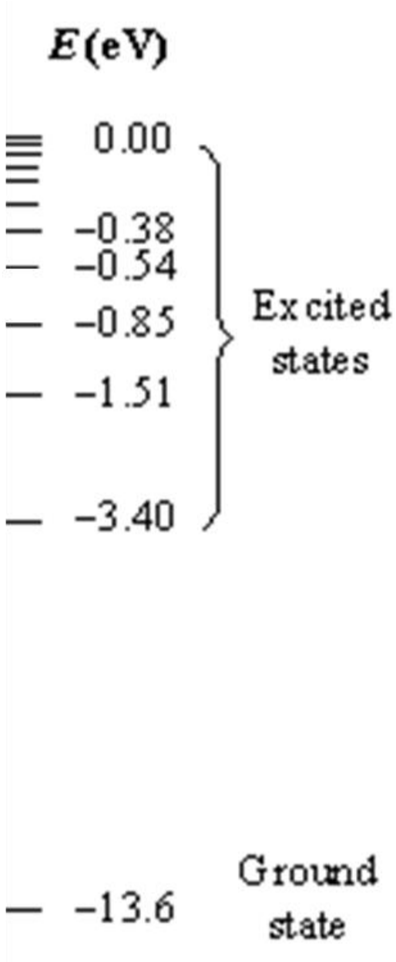
Ostáva otázka:

Tá vlnová funkcia v prírode naozaj niekde je? Vo filozofickom zmysle „existencie“.

Odpoveď: **zdá sa, že nie**. Je to zrejme len pomocný matematický pojem. Častice sa nestali po objave kvantovej mechaniky vlnami.
Názov častica ostáva primeraný, vlna len slúži na predpoveď budúcnosti v nasledovnom zmysle.

Vlnová funkcia $\psi(t,\vec{r})$ slúži na výpočet hustoty pravdepodobnosti, kde v priestore očakávam nájsť časticu v čase t.
Presnejšie takto: poloha častice v čase t je predpovedateľná len pravdepodobnostným spôsobom. Jej poloha $\vec{r}$ je náhodnou veličinou charakterizovanou v čase t hustotou pravdepodobnosti

$$\boxed{\rho(t,\vec{r}) = |\psi(t,\vec{r})|^2}$$

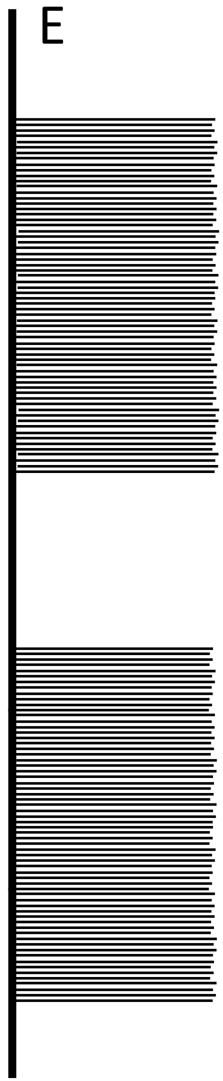


Schrodingerova rovnica umožňuje predpovedať možné energie elektrónov viazaných pri jadre vodíka.

Podobne vieme dnes vypočítať možné energie elektrónov v zložitých atómoch a molekulách.

Ba vieme niečo povedať aj o možných energiách elektrónov v tuhých látkach.

Povieme si niečo kvalitatívne o vodičoch, nevodičoch a polovodičoch

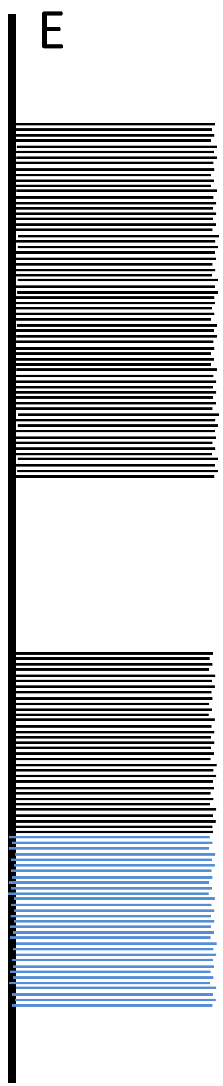


Typicky energetické spektrum tuhej látky vyzerá ako na obrázku. Na osi energií sú oblasti husto zaplnené hodnotami "povolených energií" striedavo s oblasťami, kde sa nevyskytuje žiadna "povolená energia". Upozornime ešte, že čiara na obrázku zodpovedá možnej hodnote energie, nie jednému možnému stavu. V skutočnosti často existuje veľa rozličných stavov, ktorým zodpovedá jediná energetická hladina. Hladiny sú v skutočnosti extrémne husto vedľa seba, takže vzniká dojem "energetického pásu".

Hovorí sa o pásovom energetickom spektre a o povolených a zakázaných pásoch.

Druhým kľúčovým faktom pre pochopenie druhov vodivosti je Pauliho princíp. Podľa neho môže byt v určitom stave nanajvýš jeden elektrón.

Vodič

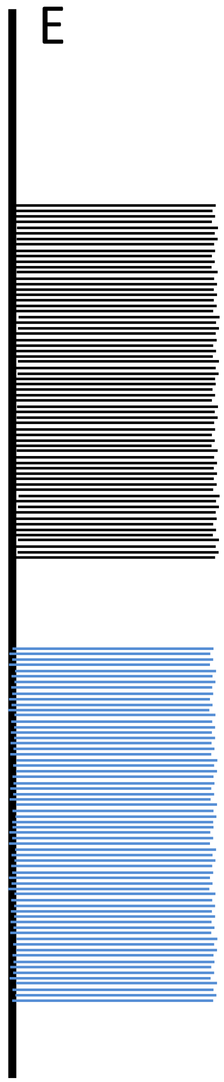


Vedenia elektrického prúdu sa v tuhej látke zúčastňujú len valenčné elektróny, ktoré sa stávajú spoločnými pre všetky atómy mriežky. To, čo máme nakreslené sú hladiny týchto spoločných valenčných elektrónov.

Nech tých elektrónov je N. Spočítame, koľko stavov zodpovedá energetickým hladinám v spodnom páse. Vo vodiči je tých stavov spravidla 2N. Znamená to, že elektróny majú k dispozícii viac stavov ako je ich počet. Pri normálnych teplotách obsadia tie elektróny N stavov s najnižšími hodnotami energií (tie sú na obrázku nakreslené modro). Ak sa na vzorku pripojí napätie, elektrónom o trošku zvýši energiu. Umožnené je to tým, že sú k dispozícii stavy s len o trochu vyššími energiami ako majú tie obsadené. Elektróny, ktoré preskočia do stavov s mierne vyššími energiami sú tie, ktoré sa zúčastnia vedenia elektrického prúdu.

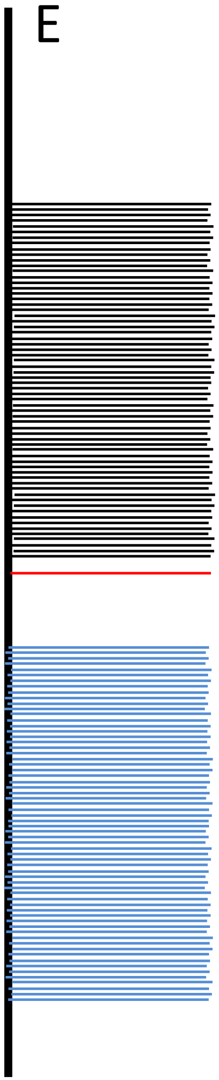
Nevodič

Valenčných elektrónov je N. Spočítame, koľko stavov zodpovedá energetickým hladinám v spodnom páse. Vo nevodiči je tých stavov spravidla N. Znamená to, že elektróny majú k dispozícii práve toľko stavov z nižšími energiami, koľko ich je. Pri normálnych teplotách obsadia tie elektróny všetkých N stavov s najnižšími hodnotami energií (tie sú na obrázku nakreslené modro). Lebo podľa Pauliho princípu nemôžu dva elektróny zdieľať spolu jeden stav. Ak sa na vzorku pripojí napätie, elektrónom "by chcelo" o trošku zvýšiť energiu (aby mohli viesť elektrický prúd). Ale nedá sa. Najnižšia energia, ktorá by sa musela dodať elektrónu, je daná šírkou zakázaného pása. Zakázaný pás je v prípade nevodičov veľmi široký, niet dosť energie na jeho prekonanie. Vzorkou nebude prechádzať prúd.



Polovodič

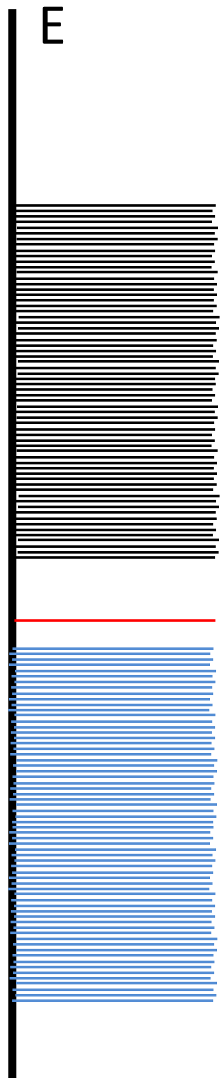
Situácia je podobná ako v nevodiči. Len šírka zakázaného pása je menšia. Znamená to, že aj pri normálnych teplotách môžu niektoré elektróny získať v zrážkach s tepelne sa pohybujúcimi atómami mriežky dostatočnú energiu aby prekonali zakázaný pás a ocitnú sa v hornom vodivostnom páse. Potom môžu už ľahko získať ešte dodatočnú energiu od elektrického poľa a zúčastniť sa vedenia prúdu. Takých elektrónov je ale veľmi málo, preto polovodič je zlý vodič elektrického prúdu



Polovodič typu N

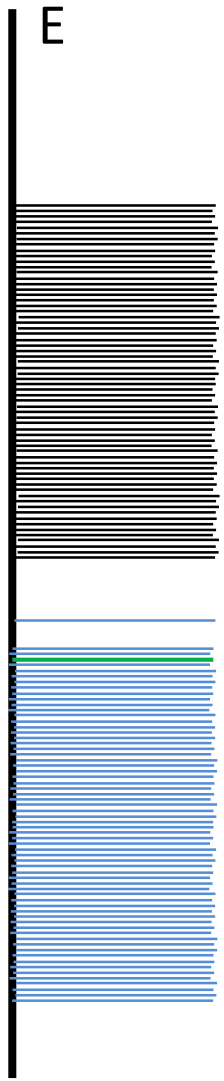
Polovodič typu N vznikne, ak do čistého polovodiča, napríklad kryštálu 4-mocného kremíka pridáme "ako nečistoty" 5-mocné atómy napríklad fosforu. Na spektre vzniknutej vzorky sa to prejaví tak, že sa objavia energetické hladiny v predtým zakázanom páse, a to blízko spodného okraja vodivostného pása (na obr. červeno). Volajú sa donorové hladiny a pri veľmi nízkych teplotách sú obsadené elektrónmi. Ale pri normálnych teplotách donorové elektróny ľahko získajú tepelnú energiu, ktorá ich vyhodí až do vodivostého pása. Elektróny donorových hladín sa zúčastňujú vedenia prúdu, vodivosť je tým väčšia, čím viac prímesových atómov do vzorky pridáme.

Polovodič typu P



Polovodič typu P vznikne, ak do čistého polovodiča, napríklad kryštálu 4-mocného kremíka pridáme "ako nečistoty" 3-mocné atómy napríklad hliníka. Na spektre vzniknutej vzorky sa to prejaví tak, že sa objavia energetické hladiny v predtým zakázanom páse, a to blízko horného okraja obsadeného valenčného pása (na obr. červeno). Volajú sa akceptorové hladiny a pri veľmi nízkych teplotách nie sú obsadené elektrónmi. Ale pri normálnych teplotách elektróny valenčného pása ľahko získajú tepelnú energiu a obsadia akceptorové hladiny.

Polovodič typu P



Polovodič typu P vznikne, ak do čistého polovodiča, napríklad kryštálu 4-mocného kremíka pridáme "ako nečistoty" 3-mocné atómy napríklad hliníka. Na spektre vzniknutej vzorky sa to prejaví tak, že sa objavia energetické hladiny v predtým zakázanom páse, a to blízko horného okraja obsadeného valenčného pása (na obr. červeno). Volajú sa akceptorové hladiny a pri veľmi nízkych teplotách nie sú obsadené elektrónmi. Ale pri normálnych teplotách elektróny valenčného pása ľahko získajú tepelnú energiu a obsadia akceptorové hladiny.

Tým vo valenčnom páse vznikne neobsadený stav "diera„ (na obr. zeleno). Do toho neobsadeneého stavu môže pod vplyvom napätia preskočiť iný valenčný elektrón a diera sa objaví na inom mieste. Vzniknutý pohyb elektrónov vyvoláva efektívne dojem, ako keby prúd viedli kladne nabité diery.

Continuous spectrum

Emission lines

Absorption lines