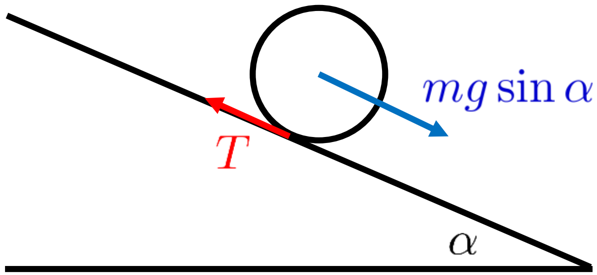
Úloha: valiaci sa valec.

Toto je podrobne spracovaná argumentácia, že postup, ktorý sme na cvičeniach póužívali intuitívne, je oprávnený.



- koná postupný aj rotačný pohyb
- laboratórna sústava spojená s naklonenou rovinou je inerciálna
- v lab. sústave neexistuje pevná os, okolo ktorej by valec rotoval
- preto treba postup poriadnejšie predumať, lebo vzorec pre moment hybnosti rotujúceho telesa $J\omega$ sme odvodili pre teleso rotujúce okolo pevnej osi.

- moment hybnosti je veličina, definovaná vzhľadom na nejaký zvolený bod
- momenty hybnosti voči dvom rôznym bodom vo všeobecnosti nie sú rovnaké
- moment hybnosti je dôležitý napríklad kvôli zákonu zachovania momentu hybnosti
- zákon zachovania obsahuje v sebe to, že moment hybnosti sa vypočítava v rôznych okamihoch a má vyjsť to isté
- ale vtedy treba v tých rôznych okamihoch vyčísľovať moment hybnosti **voči tomu istému bodu**, teda stojacemu bodu v súradnicovej sústave, kde to celé riešim
- moment hybnosti je stavová veličina, keď poznám pre nejaký okamih hodnoty premenných, ktoré definujú stav, potom pomocou tých premenných sa musí dať vyjadriť aj moment hybnosti v danom okamihu

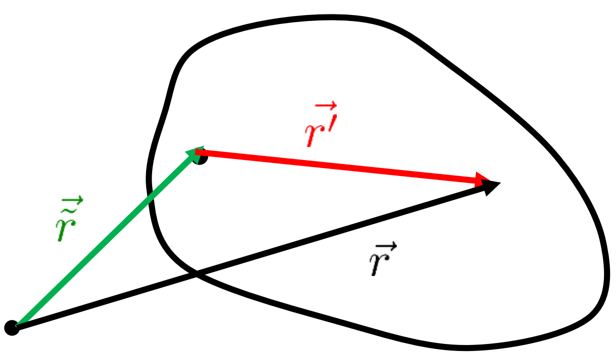
stav tuhého telesa je určený takto

- poloha $\vec{\tilde{r}}$ nejakého jeho referenčného bodu
- rýchlosť $\vec{\tilde{v}}$ toho referenčného bodu
- natočenie telesa voči referenčnému natočeniu dané nejakou rotačnou maticou
- uhlová rýchlosť telesa $\vec{\omega}$

Uhlová rýchlosť $\vec{\omega}$ je nezávislá na voľbe referenčného bodu, pre jej určenie netreba voliť žiadnu „os rotácie“, je jednoznačne určená stavom telesa.

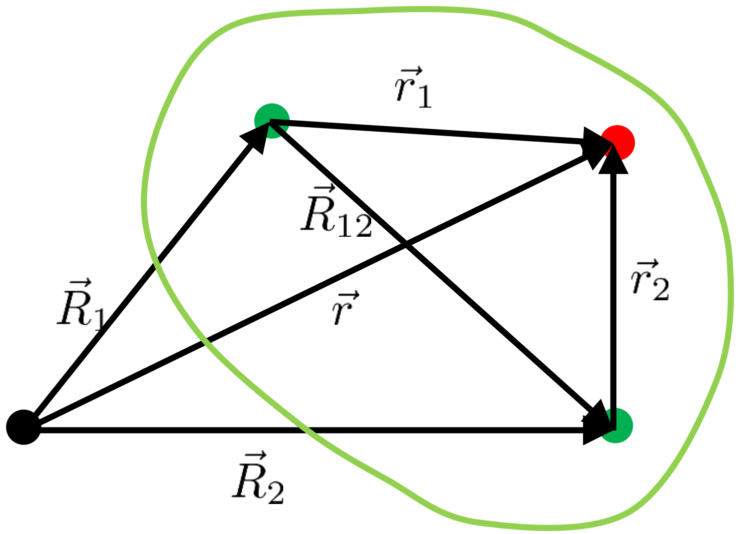
Jej význam je takýto

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\tilde{r}} + \omega \times \vec{r'}}$$



Dobrá rada: **ak tomu niečo nebráni, zvoľte sa za referenčný bod ťažisko**

Dôkaz, že uhlová rýchlosť nezávisí na voľbe referenčného bodu



- čierny bod je počiatok súradnicovej sústavy
- červený bod je ľubovoľný bod telesa
- zelené body sú dva rôzne zvolené referenčné body telesa

Teleso je tuhé, takže vektory $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ pri pohybe telesa nemenia svoju veľkosť, iba smer, teda rotujú. Rýchlosť červeného bodu vyjedríme raz odvolávajúc sa na prvý a raz na druhý referenčný bod. Dostaneme:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}}_1 + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 = \dot{\vec{R}}_2 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2$$

Rýchlosť zeleného bodu 2 sa dá vyjadriť pomocou refferenčného bodu 1, teda
$$\dot{\vec{R}}_2 = \dot{\vec{R}}_1 + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{12}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}}_1 + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 = \dot{\vec{R}}_1 + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{12} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 = \dot{\vec{R}}_1 + \vec{\omega}_1 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2$$

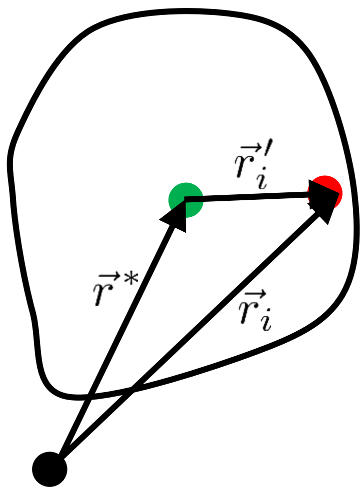
Porovnaním začiatku a konca dostaneme $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2$.

Platí tvrdenie (dokážme ho na ďalšom slajde)

Ak vyčísľujeme moment hybnosti tuhého telesa voči osi, ktorá prechádza ťažiskom, potom dostaneme vzorec, ktorý vyjadruje moment hybnosti pomocou ω rovnakým vzorcom pre stojace aj hýbuce sa ťažisko.

Moment hybnosti voči osi prechádzajúcej ťažiskom je stavová veličina vyjadrujúca sa rovnakým vzorcom zo stavových premenných a preto nevadí, že ho vyčísľujeme v každom okamihu voči inej polohe ťažiska v laboratórnej sústave.

Dôkaz tvrdenia o osi, prechádzajúcej ťažiskom



zelený bod je ťažisko
čierny bod je počiatok súradnicovej sústavy
červený bod je i-ty bod telesa.

Moment hybnosti červeného bodu vzhľadom na zelený bod je

$$\vec{r}_i^{\,\prime} \times m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{r}_i^{\,\prime} \times m_i(\dot{\vec{r}}^* + \vec{\omega} \times \vec{r}_i^{\,\prime})$$

Celkový moment hybnosti dostaneme sumovaním

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i^{\,\prime} \times m_i(\dot{\vec{r}}^* + \vec{\omega} \times \vec{r}_i^{\,\prime}) = (\sum_i m_i \vec{r}_i^{\,\prime}) \times \dot{\vec{r}}^* + \sum_i \vec{r}_i^{\,\prime} \times (m_i \vec{\omega} \times \vec{r}_i^{\,\prime})$$

Suma v prvej zátvorke je ale rovná nule, lebo vyjadruje v podstate polohu ťažiska voči ťažisku, čo je nulový vektor. Dostaneme teda

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i^{\,\prime} \times (m_i \vec{\omega} \times \vec{r}_i^{\,\prime})$$

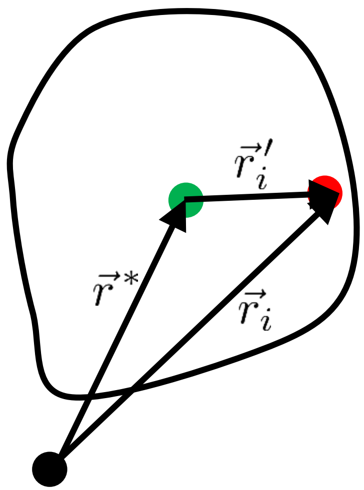
Toto je ale úplne rovnaké ako vzorec pre moment hybnosti telesa rotujúceho okolo pevnej osi prechádzajúcej ťažiskom.

Iná dobrá technika v laboratórnej sústave je vyčísľovať v istom okamihu moment hybnosti telesa voči osi, prechádzajúcej bodom telesa, ktorý má **v danom momente nulovú rýchlosť v laboratórnej sústave**

Vtedy dostaneme vzorec, ktorý je rovnaký ako pre telseo rotujúci okolo trvale pevnej osi, teda $J\omega$.

A to zase vyjadruje moment hybnosti vzorcom, ktorý to vyjadruje pomocou stav-definujúcich veličín rovnako v každom okamihu.

Dôkaz tvrdenia o osi, prechádzajúcej bodom v danom okamihu nehybným



zelený bod je momentálne nehybný bod telesa
čierny bod je počiatok súradnicovej sústavy
červený bod je i-ty bod telesa.

Moment hybnosti červeného bodu vzhľadom na zelený bod je

$$\vec{r}_i^{\,\prime} \times m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{r}_i^{\,\prime} \times m_i (\dot{\vec{r}}^{*} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i^{\,\prime})$$

Celkový moment hybnosti dostaneme sumovaním

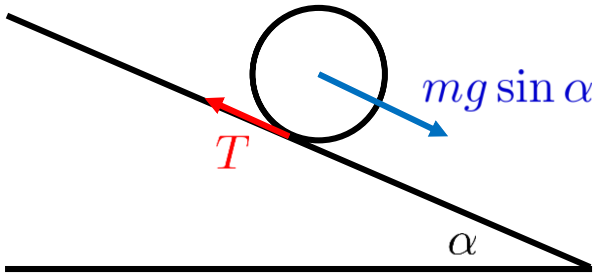
$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i^{\,\prime} \times m_i (\dot{\vec{r}}^{*} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i^{\,\prime}) = \sum_i \vec{r}_i^{\,\prime} \times (m_i \vec{\omega} \times \vec{r}_i^{\,\prime})$$

Prvý sčítanec vypadol, pretože zelený mod je v uvažovanom momente nehybný a teda v tom momente $\dot{\vec{r}}^{*} = 0$

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i^{\,\prime} \times (m_i \vec{\omega} \times \vec{r}_i^{\,\prime})$$

Toto je ale úplne rovnaké ako vzorec pre moment hybnosti telesa rotujúceho okolo pevnej osi prechádzajúcej uvažovaným bodom.

Prechod do neinerciálnej sústavy



Možno najjednoduchší trik, ak riešiť úlohu „valiaci sa valec“ je prechod do neinerciálnej sústavy. Nasadnem do vlaku, ktorý sa hýbe dolu naklonenou rovinou tak, že ťažisko valca voči vlaku stojí. To čo uvidím z takého vlaku je rotujúci valec, ktorého ťažisko stojí ale sa otgáča preto, že naklonená rovina sa pod valcompohybuje smerom nahor a valec trením roztáča.
Vlak je neinerciálna sústava, ktorá sa hýbe len postupným pohybom, nerotuje. Preto sa v Newtonovžých rovniciach objaví jediná zotrvačná sila od postupného zrýchlenia.

Odvodíme vzorce pre molment hybnosti v tejto neinerciálnej sústave. V podstate zopakujeme odvoidenie založené na sčítaní Newtonových rovníc pre všetky body telesa ale s tým, že vo vzorcoch nbude aj zotrvačná sila.

Napíšme teraz Newtonove rovnice v neinerciálnej sústave, pohybujúcej sa postupným pohybom (bez rotácií) so zrýchlením $\vec{a}_0$. Pribudne zotrvačná sila

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = -m_i\vec{a}_0 + \vec{F}_i(\vec{r}_i, \vec{v}_i) + \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{v}_i, \vec{v}_j)$$

$$\sum_i m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = -\sum_i m_i\vec{a}_0 + \sum_i \vec{F}_i(\vec{r}_i, \vec{v}_i) + \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{v}_i, \vec{v}_j)$$

Dvojitá suma vnútorných síl napravo je rovná nule kvôli princípu akcie a reakcie, takže dostaneme

$$\sum_i m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = -\sum_i m_i\vec{a}_0 + \sum_i \vec{F}_i(\vec{r}_i, \vec{v}_i)$$

$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i\vec{v}_i = -\sum_i m_i\vec{a}_0 + \sum_i \vec{F}_i(\vec{r}_i, \vec{v}_i)$$

Suma naľavo je súčet hybností všetkých častíc, teda celková hybnosť sústavy

$$\vec{P} = \sum_i m_i\vec{v}_i$$

Suma napravo je vektorový súčet všetkých vonkajších síl a zotrvačnej sily, teda čosi ako celková vonkajšia sila, pôsobiaca na sústavu

$$\vec{F} = -\sum_i m_i\vec{a}_0 + \sum_i \vec{F}_i(\vec{r}_i, \vec{v}_i)$$

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F} - M\vec{a}_0$$

Pokúsime sa lepšie „precítit"", čo tá rovnica znamená, upravíme preto výraz pre celkovú hybnosť

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt}\sum_i m_i \vec{r}_i = \sum_i m_i \frac{d}{dt}\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

Označme celkovú hmotnosť sústavy ako m, teda $m = \sum m_i$
a zaveďme označenie

$$\boxed{\vec{R}^* = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec{r}_i}$$

Symbol $\vec{R}^*$ je polohový vektor hmotného stredu (ťažíska) sústavy.

Prepíšeme teraz rovnicu $\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F} - M\vec{a}_0$

využijúc polohový vektor hmotného stredu: $\vec{P} = m\frac{d}{dt}\vec{R}^*$

$$\frac{d}{dt}m\frac{d}{dt}\vec{R}^* = \vec{F} - M\vec{a}_0$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{R}^* = \vec{F} - M\vec{a}_0$$

Práve sme odvodili vetu o hmotnom strede v neineriálnej sústave:
Hmotný stred sústavy sa pohybuje v uvažovanej neinerciálnej sústave akoby to bol hmotný bod, v ktorom je sústredená celá hmotnosť systému a pôsobila by naň sila rovná vektorovému súčtu všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavua a celková zotrvačná sila.

Využitie techniky momentov hybnosti a sily v jednoduchej neinerciálnej sústave

Vychádzajme z pohybových rovníc pre sústavu častíc, ale najprv každú rovnicu vektorovo vynásobme polohovým vektorom a až potom sčítajme

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = -m_i\vec{a}_0 + \vec{F}_i(\vec{r}_i, \vec{v}_i) + \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{v}_i, \vec{v}_j)$$

$$\vec{r}_i \times m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = -\vec{r}_i \times m_i\vec{a}_0 + \vec{r}_i \times \vec{F}_i(\vec{r}_i, \vec{v}_i) + \vec{r}_i \times \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{v}_i, \vec{v}_j)$$

$$\sum_i \vec{r}_i \times m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = -(\sum_i m_i\vec{r}_i) \times \vec{a}_0 + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i(\vec{r}_i, \vec{v}_i) + \sum_i \vec{r}_i \times \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{v}_i, \vec{v}_j)$$

$$\sum_i \vec{r}_i \times m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = -M\vec{R}^* \times \vec{a}_0 + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i(\vec{r}_i, \vec{v}_i)$$

$$\frac{d}{dt}\sum_i \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i = -M\vec{R}^* \times \vec{a}_0 + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i(\vec{r}_i, \vec{v}_i)$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = -M\vec{R}^* \times \vec{a}_0 + \vec{\tau}$$

Oproti podobnému vzorcu pre inerciálnu sústavu pribudol **moment zotrvačných síl**. **Vypočíta sa tak, ako keby celková zotrvačná sila mala pôsobisko v ťažisku telesa.**