Pythonová úloha:

Numerický výpočet výtoku intenzity gravitačného poľa $\vec{g}$ vytvoreného telesom o hmotnosti $M = 2kg$, ktoré je umiestnené v bode $(1m, 0,0)$ zo sféry o polomere $R = 3m$ a centrom v počiatku.

Výpočet urobiť vo sférických súradniciach tak, že plochu sféry vykachličkujeme sférickými kachličkami (vysvetlené bude ďalej)

Sférické súradnice a integrovanie v nich musí fyzik suverénne ovládať.

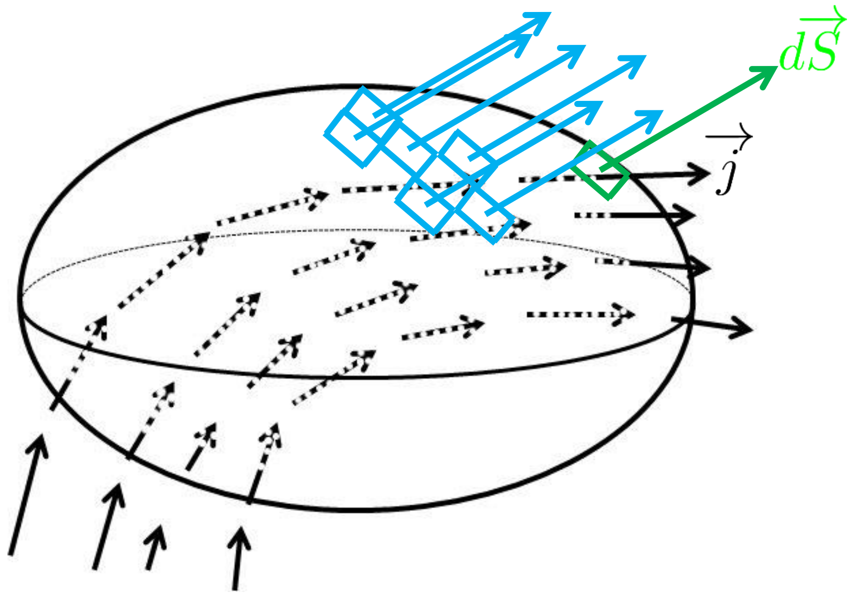
Najprv stručne pripomenieme dva slajdy z prednášok, kde sa hovorí o výtoku z uzavretej plochy a Gaussova veta pre gravitačné pole, potom vysvetlíme sférické kachličkovanie sféry.

Polotovar je pripravený v súbore GaussovaVeta.py. Doplňte tam chýbajúce príkazy a spustite. Programy začínajú byť náročnejšie, preštudujte si celý program a podumajte nad každým riadkom. Dosť sa tak naučíte.

Pre zaujímavosť samostatne doplňte program tak, aby vyrátal aj povrch sféry, nielen výtok poľa. A skontrolujte, či vyjde $4\pi R^2$.

Slajd z prednášky

Nový pojem: výtok vektora z uzavretej plochy



Mám vektorové pole prúdovej hustoty. Myslím si v priestore uzavretú plochu. Prúd na niektorých miestach do plochy vteká, inde vyteká. **Vtekanie budem považovať za záporné vytekanie** (**skalárny súčin to zariadi**) a budem počítať celkový výtok prúdu cez celú uzavretú plochu. **Povrch plochy "vykachličkujem" infinitezimálnymi plôškami. Prúd cez jednu takú plôšku je** $\vec{j}.\vec{dS}$ Celkový prúd vytekajúci z uzavretej plochy je teda

$$I = \sum_{\text{cez všetky plôšky}} \vec{j}.\vec{dS} \equiv \oint_{\text{po ploche}} \vec{j}.\vec{dS}$$

krúžok cez integrál znamená, že integračná plocha je uzavretá

Slajd z prednášky

Výtok intenzity gravitačného poľa z uzavretej plochy

Uvažujme gravitačné pole budené bodovým telesom umiestneným v počiatku súradnicovej sústavy. To pole je dané vzorcom

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G\frac{M}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

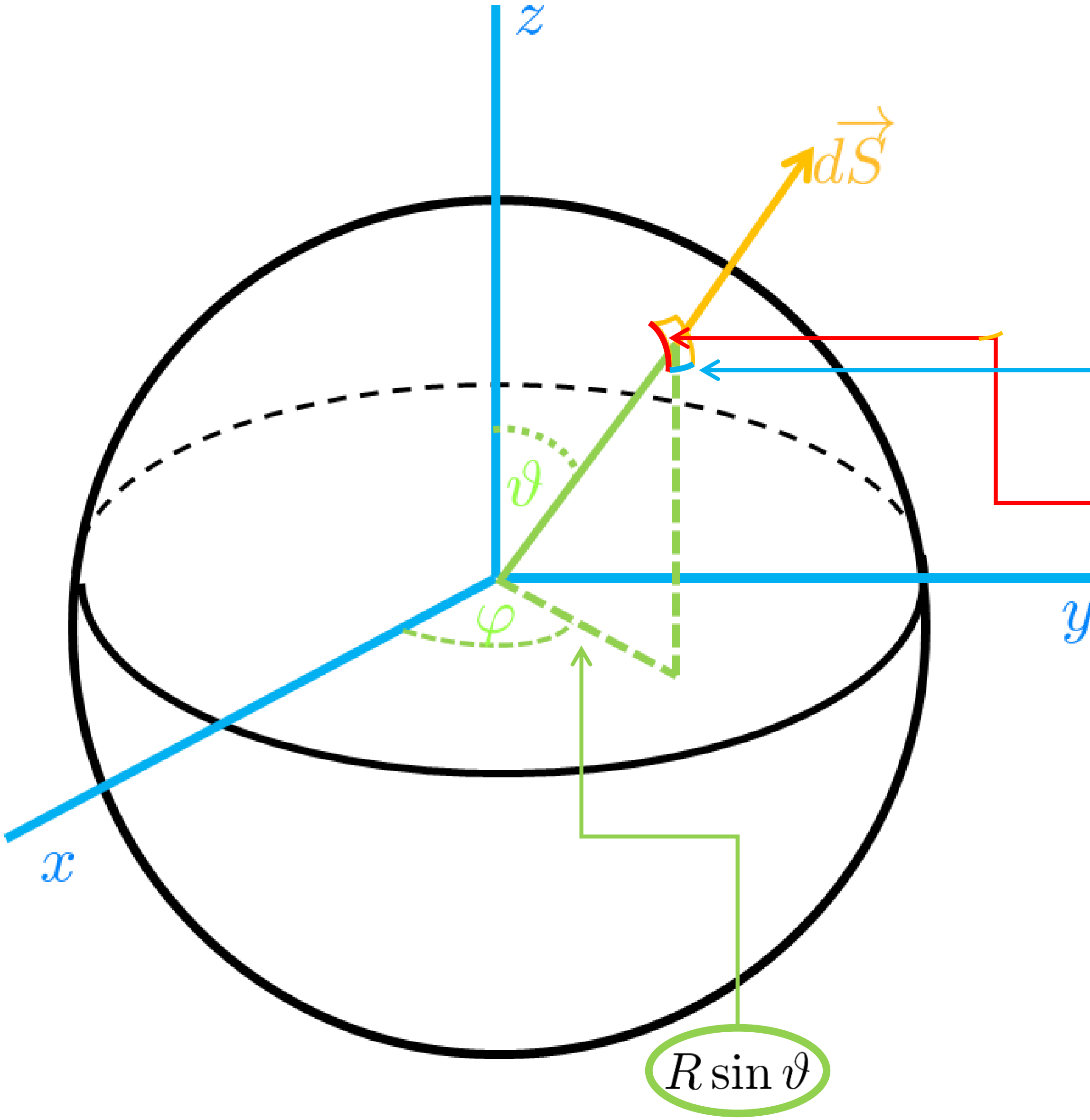
Porovnajme to so vzorcom pre fontánu

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi}\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

zjavne teda pre naše gravitačné pole platí

$$\oint_{\text{po ploche}} \vec{g}.d\vec{S} = \begin{cases} 0 & \text{ak sa počiatok nenachádza vnútri plochy} \\ -4\pi G M & \text{ak sa počiatok nachádza vnútri plochy} \end{cases}$$

Kachličkovanie sféry



Súradnice bodu na sfére

$$x = R\sin\vartheta\cos\varphi$$
$$y = R\sin\vartheta\sin\varphi$$
$$z = R\cos\vartheta$$

Obsahy plôšky

$$|\vec{dS}| = R d\vartheta \times R\sin\vartheta\, d\varphi$$
$$|\vec{dS}| = R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

Komponenty vektora $\vec{dS}$

$$\vec{dS}_x = |\vec{dS}|\sin\vartheta\cos\varphi$$
$$\vec{dS}_y = |\vec{dS}|\sin\vartheta\sin\varphi$$
$$\vec{dS}_z = |\vec{dS}|\cos\vartheta$$