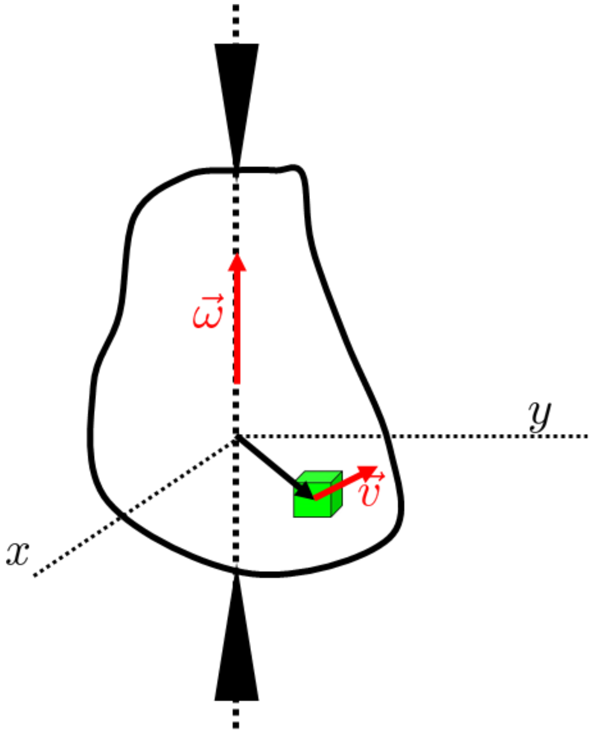
Pythonová úloha:

Numerický výpočet momentu zotrvačnosti gule

Najprv zopakujeme trochu teórie, potom urobíme na ukážku dva analytické výpočty. V oboch sa počítajú určité integtrály. Ak ešte máte problémy s chápaním analytického počítania integrálov, môžete sa k analytickým výpočtom vrátiť neskôr. Pre numerický výpočet to nebudeme potrebovať, je to len ukážka analytického opočítania

Ale vráťte sa k tým analytickým počtom neskôr, musíte vedieť rátať integrály v sférických aj polárnych súradniciach, na tých ukážkach sa naučíte užitočné triky.



Celkový moment hybnosti telesa vzhľadom na os otáčania teda dostaneme ako súčet cez všetky objemové elementy telesa.

$$\vec{M} = \vec{\omega} \int dm(x^2 + y^2) = \vec{\omega} I$$

Označili sme

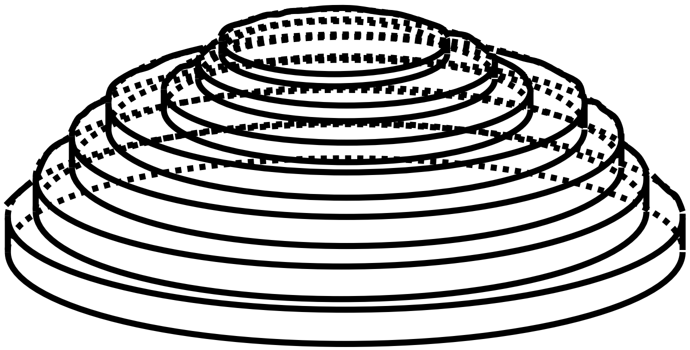
$$\boxed{I = \int dm(x^2 + y^2)}$$

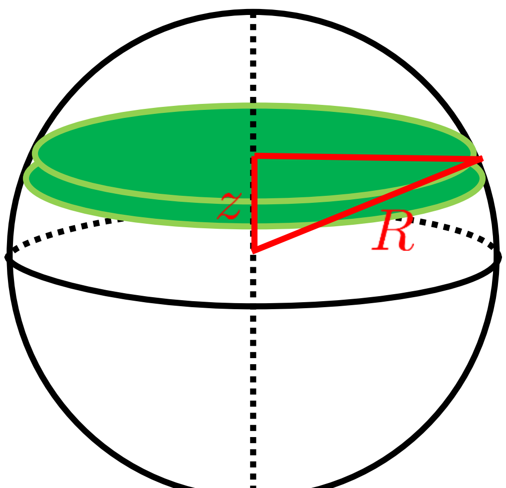
veličina I sa **volá moment zotrvačnosti telesa voči osi z** . dm je hmotnosť jednej „LEGO kocky“. Ten integrál píšeme najčastejšie ako integrál cez objem tak, že hmotnosť LEGO kocky píšeme ako hustota krát objem

$$I = \int \varrho(x^2 + y^2) dV$$

Ukážeme si niekoľko techník ako počítať analyticky moment zotrvačnosti gule voči osi prechádzajúcej jej stredom

Jeden nápad: Už poznáme moment zotrvačnosti valca. Poskladáme guľu z tenkých valcov (niečo ako CD disky rôznych priemerov od nulového až po maximálny. Tu je na ukážku niekoľko diskov zmenšujúcich sa priemerov.





Jedden z diskov, vypĺňajúcich sféru je zeleno na obrázku, jeho poloha je daná súradnicou z, jeho polomer je $\sqrt{R^2 - z^2}$, jeho výška je dz, jeho moment zotrvačnosti (ako valca) je

$$\delta I = \frac{1}{2}\delta m (R^2 - z^2)$$

kde δm je hmota valca, teda (ϱ je hustota gule)

$$\delta m = \varrho \pi (R^2 - z^2) dz$$

Moment zotrvačnosti celej gule bude preto

$$I = \int \delta m = \int_{-R}^{R} dz \varrho \pi \frac{1}{2}(R^2 - z^2)^2 = \frac{8}{15}\varrho R^5$$

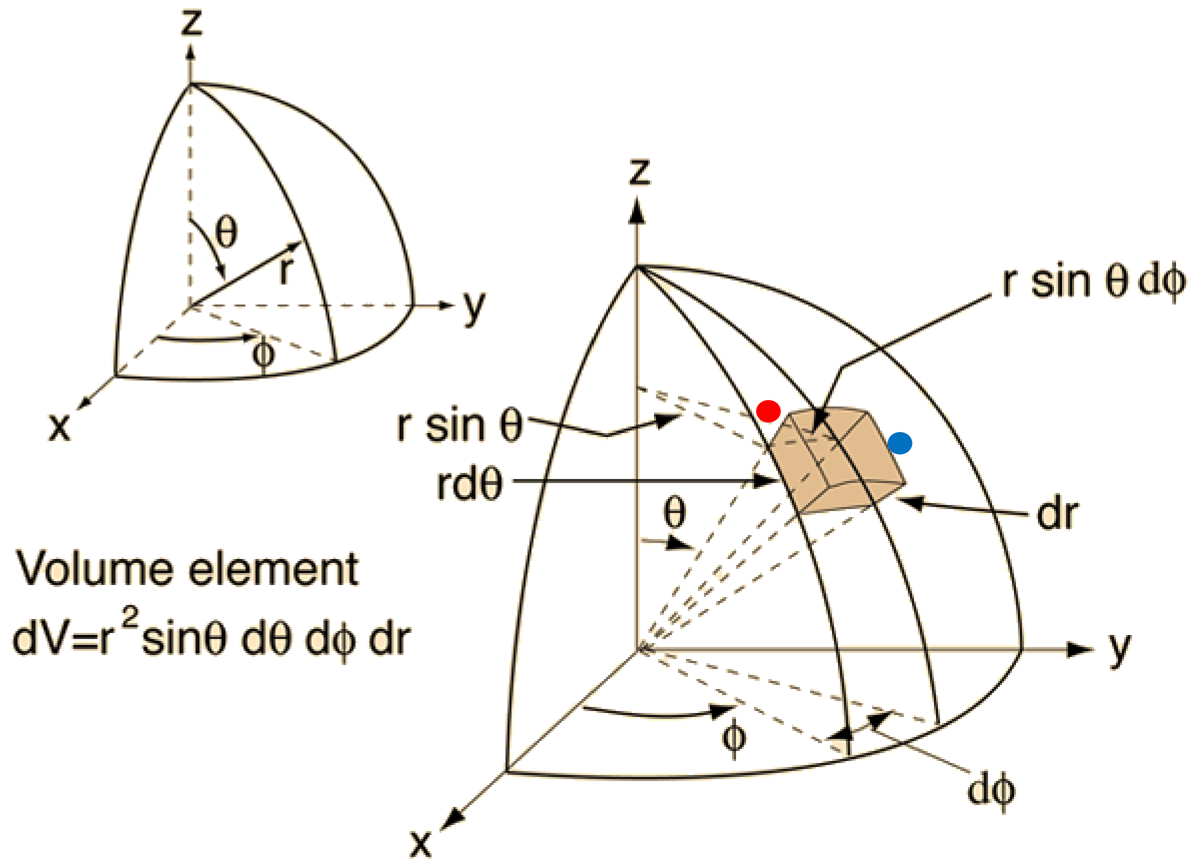
Hustota gule je

$$\varrho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

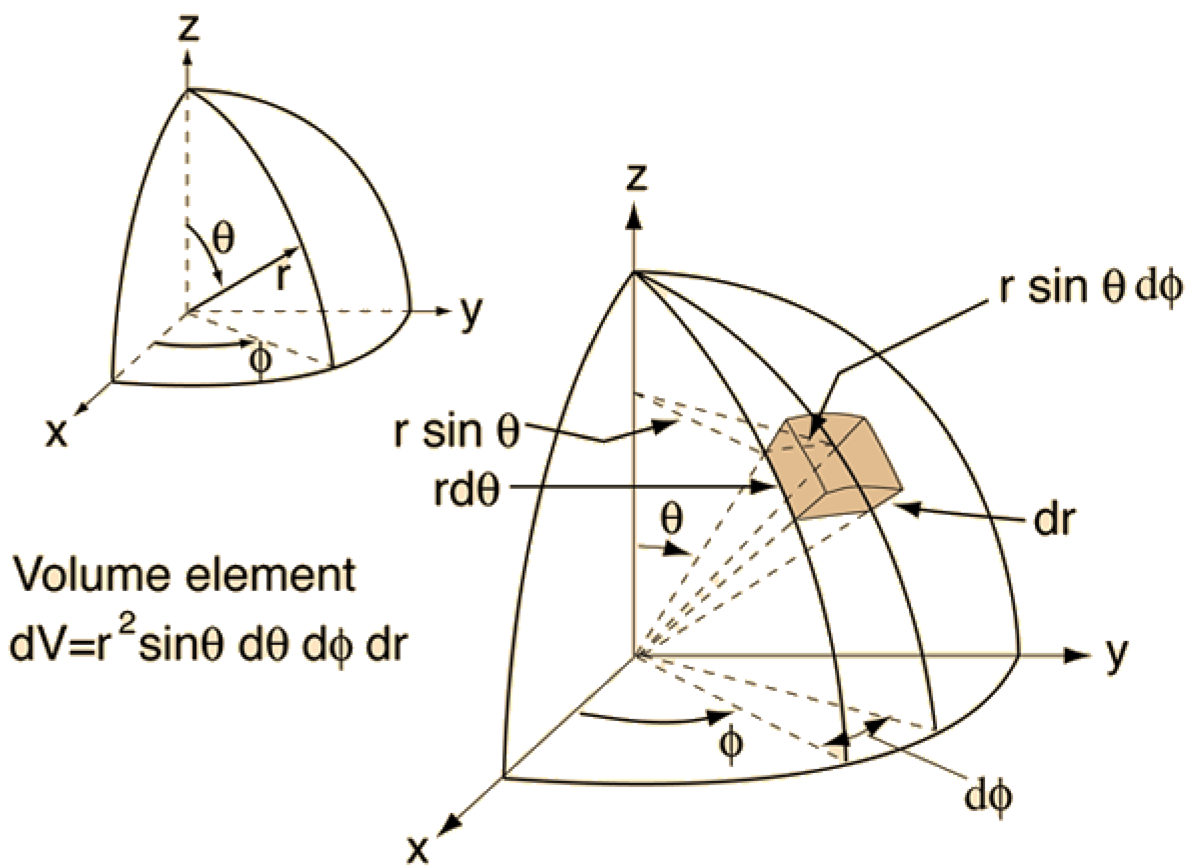
takže dostaneme

$$\boxed{I = \frac{2}{5} m R^2}$$

Iný spôsob je použiť sférické súradnice ako uvádzame tu nižšie.



Keď budeme rátať zotrvačnosť gule,, je praktickejšie vykockovať ju nie „rovnými“ LEGO-kockami ale „sférickými-LEGO-kockami“. Také sa v hračkárstve nepredávajú. Na obrázku je nakreslená jedna taká kocka. Jej červeno označený vrchol má sférické súradnice (r, Θ, ϕ) a modro označený vrchol súradnice $(r + dr, \Theta + d\Theta, \phi + d\phi)$. Preštudujte si poriadne obrázok, že ako dlhé sú „hrany“ sférickej LEGO kocky a zistíte, že objem tej kocky je $dV = r^2 \sin(\Theta)\, d\Theta d\phi dr$.



Sférické a kartézske súradnice súvisia takto

$$x = r \sin\Theta \cos\phi$$

$$y = r \cos\Theta \sin\phi$$

$$z = r \cos\Theta$$

Ako ukážku vypočítame najprv objem gule ako súčet objemíkov sférických LEGO kociek v guli

$$
\begin{aligned}
V = \int dV &= \int_0^R dr \int_0^\pi d\Theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin\Theta \\
&= \int_0^R dr \int_0^\pi d\Theta 2\pi r^2 \sin\Theta \\
&= \int_0^R 2\pi r^2 dr \int_0^\pi \sin\Theta d\Theta \\
&= \int_0^R 2\pi r^2 dr \left[-cos\Theta\right]_0^\pi \\
&= \int_0^R 4\pi r^2 dr = \frac{4}{3}\pi R^3
\end{aligned}
$$

Teraz vypočítame moment zotrvačnosti gule ako súčet príspevkov sférických LEGO kociek v guli (ϱ je hustota)

$$I = \int dV\, \varrho(x^2+y^2) = \varrho \int_0^R dr \int_0^\pi d\Theta \int_0^{2\pi} d\phi (r^2 \sin^2\Theta) r^2 \sin\Theta$$

$$= \varrho \int_0^R dr \int_0^\pi d\Theta 2\pi r^4 \sin^2\Theta \sin\Theta$$

$$= \varrho \int_0^R 2\pi r^4 dr \int_0^\pi \sin^2\Theta \sin\Theta d\Theta$$

$$= \varrho \int_0^R 2\pi r^4 dr \left[-\cos\Theta + \frac{1}{3}\cos^3\Theta\right]_0^\pi$$

$$= \varrho \int_0^R \frac{8}{3}\pi r^4 dr = \varrho \frac{8}{15}\pi R^5$$

Hustota gule je

$$\varrho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

takže dostaneme

$$I = \frac{2}{5} m R^2$$

Numerický výpočet

urobíme totálne surovým primitívnym spôsobom.

Sféru o polomere $R = 0.5$ si predstavíme vpísanú do kocky o hrane 1. Malými kockami o hrane $d = 0.01$ vyplníme celú opísanú kocku (je to spolu milión malých kociek). Niektoré z tých malých kociek ležia vnútri sféry, niektoré sú mimo nej. Pri výpočte postupne prejdeme cez všetky malé kocky, ale do výpočtu zaradíme len príspevky od tých malých kociek, o ktorých jednoduchý test povie, že ležia vnútri veľkej sféry. Alplikujeme vzorec

$$I = \int dm(x^2 + y^2)$$

ktorý ale interpretujeme tak, že je to „suma cez všetky malé kocky, ktoré ležia vnútri sféry“.
Pripravený je pythonovský „polotovar“ Zotrvacnost.py. Doplňte resp. opravte vyznačene riadky.