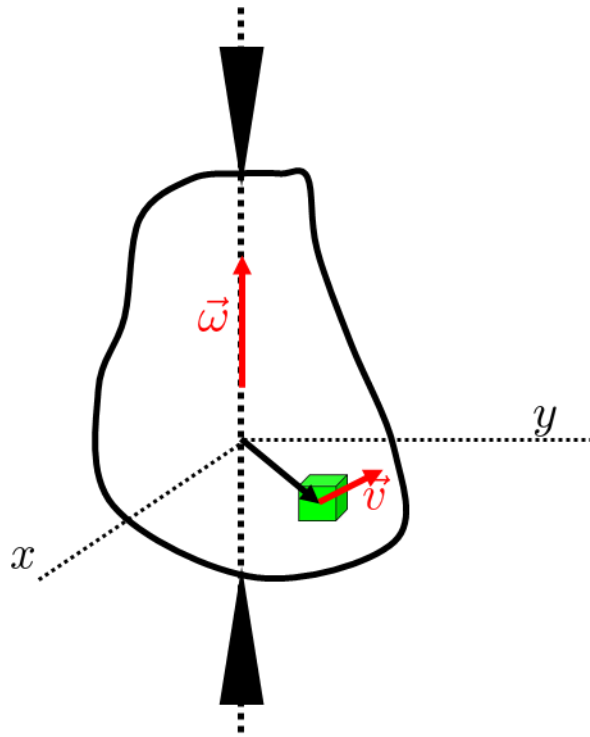


Pythonová úloha:

Numerický výpočet momentu zotrvačnosti gule, ale tentokrát tyak, že sféru vykokujeme malými sférickými LEGO-kockami

Najprv zopakujeme analytický výpočet vo sférických súradniciach, potom „to isté urobíme numericky v Pythone

**Sférické súradnice a integrovanie v nich musí fyzik suverénne ovládať.**



Celkový moment hybnosti telesa vzhľadom na os otáčania teda dostaneme ako súčet cez všetky objemové elementy telesa.

$$\vec{M} = \vec{\omega} \int dm(x^2 + y^2) = \vec{\omega} I$$

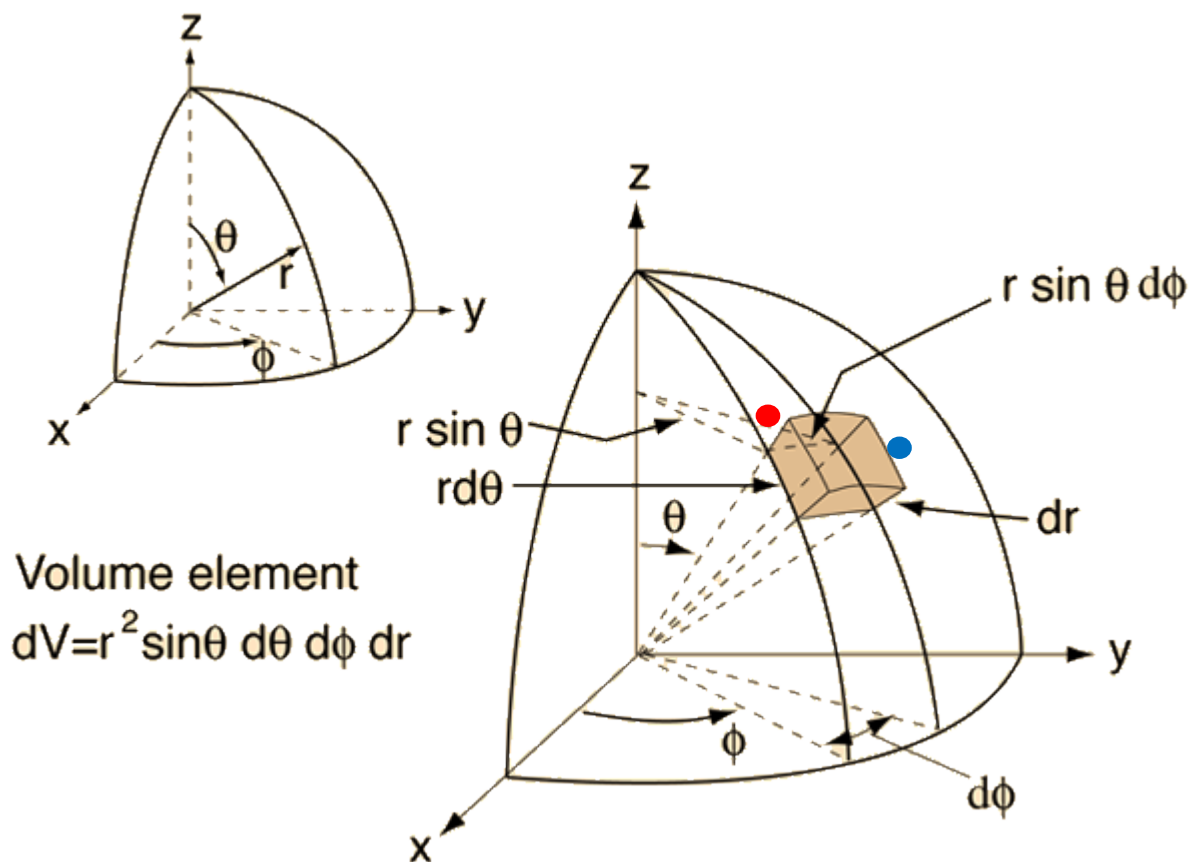
Označili sme

$$I = \int dm(x^2 + y^2)$$

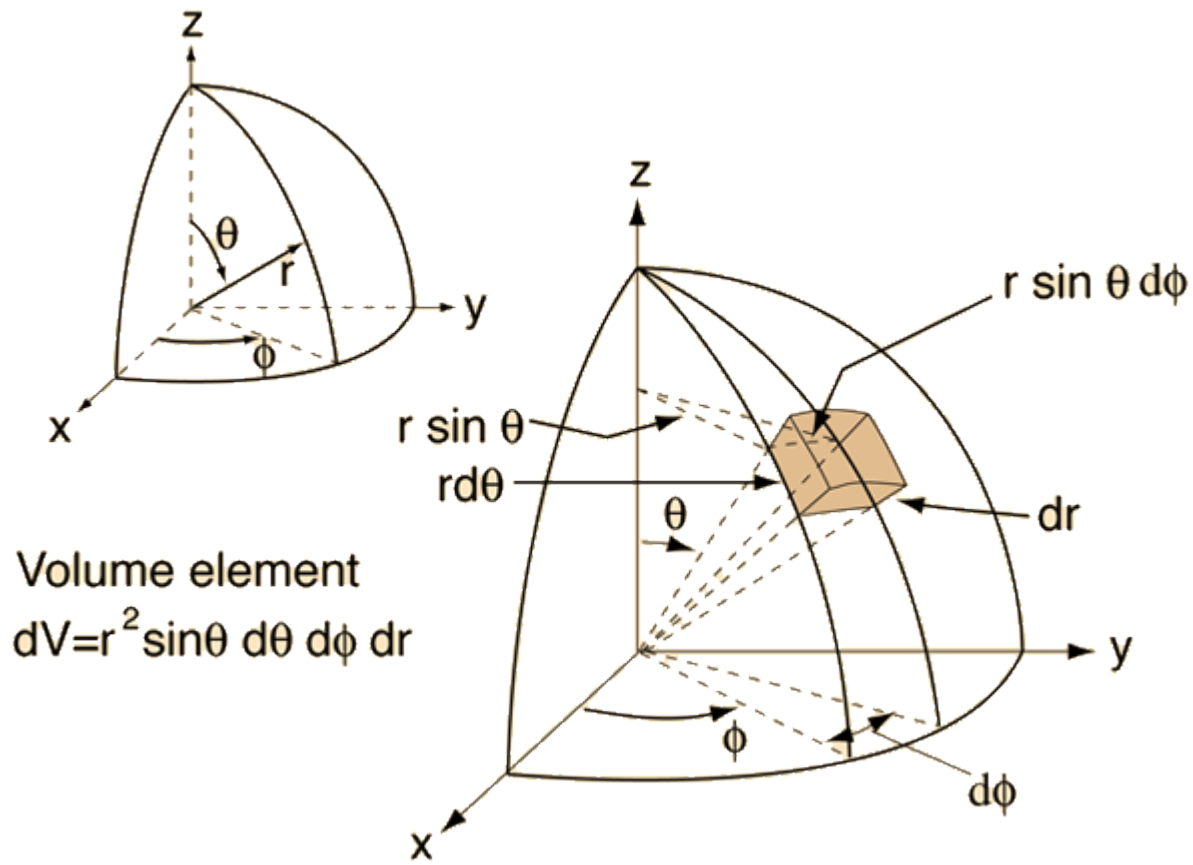
veličina  $I$  sa **volá moment zotrvačnosti telesa voči osi z**.  $dm$  je hmotnosť jednej „LEGO kocky“. Ten integrál píšeme najčastejšie ako integrál cez objem tak, že hmotnosť LEGO kocky píšeme ako hustota krát objem

$$I = \int \rho(x^2 + y^2) dV$$

Iný spôsob je použiť sférické súradnice ako uvádzame tu nižšie.



Keď budeme rátať zotrvačnosť gule, je praktickejšie vykockovať ju nie „rovnými“ LEGO-kockami ale „sférickými-LEGO-kockami“. Také sa v hračkárstve nepredávajú. Na obrázku je nakreslená jedna taká kocka. Jej červeno označený vrchol má sférické súradnice  $(r, \theta, \phi)$  a modro označený vrchol súradnice  $(r + dr, \theta + d\theta, \phi + d\phi)$ . Preštudujte si poriadne obrázok, že ako dlhé sú „hrany“ sférickej LEGO kocky a zistíte, že objem tej kocky je  $dV = r^2 \sin(\theta) \, d\theta \, d\phi \, dr$ .



Sférické a kartézske súradnice súvisia takto

$$x = r \sin \Theta \cos \phi$$

$$y = r \cos \Theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \Theta$$

Ako ukážku vypočítame najprv objem gule ako súčet objemíkov sférických LEGO kociek v guli

$$\begin{aligned} V &= \int dV = \int_0^R dr \int_0^\pi d\Theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin \Theta \\ &= \int_0^R dr \int_0^\pi d\Theta 2\pi r^2 \sin \Theta \\ &= \int_0^R 2\pi r^2 dr \int_0^\pi \sin \Theta d\Theta \\ &= \int_0^R 2\pi r^2 dr [-\cos \Theta]_0^\pi \\ &= \int_0^R 4\pi r^2 dr = \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

Teraz vypočítame moment zotrvačnosti gule ako súčet príspevkov sférických LEGO kociek v guli ( $\rho$  je hustota)

$$\begin{aligned} I &= \int dV \rho(x^2 + y^2) = \rho \int_0^R dr \int_0^\pi d\Theta \int_0^{2\pi} d\phi (r^2 \sin^2 \Theta) r^2 \sin \Theta \\ &= \rho \int_0^R dr \int_0^\pi d\Theta 2\pi r^4 \sin^2 \Theta \sin \Theta \\ &= \rho \int_0^R 2\pi r^4 dr \int_0^\pi \sin^2 \Theta \sin \Theta d\Theta \\ &= \rho \int_0^R 2\pi r^4 dr \left[ -\cos \Theta + \frac{1}{3} \cos^3 \Theta \right]_0^\pi \\ &= \rho \int_0^R \frac{8}{3} \pi r^4 dr = \rho \frac{8}{15} \pi R^5 \end{aligned}$$

Hustota gule je

$$\rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

takže dostaneme

$$I = \frac{2}{5} m R^2$$

## Numerický výpočet

urobíme totálne surovým primitívnym spôsobom.

Sféru o polomere  $R = 0.5$  vyplníme malými sférickými LEGO kockami tak, že súradnice  $(r, \Theta, \phi)$  rozsekáme každú na 100 malých intervalíkov, čím vznikne vnútri gule 1000000 malých sférických LEGO kociek.

$$I = \int dm(x^2 + y^2)$$

pričom hmotnosť malej LEGO kocky píšeme ako

$$dm = \rho dV = \rho * r^2 \sin \Theta d\Theta d\phi dr$$

Pripravený je pythonovský „polotovar“ `ZotrvacnostSfericky.py`. Doplňte vyznačený riadok.

**Starostlivo si prečítajte celý program, aby ste lepšie pochopili nielen numerické integrovanie vo sférických súradniciach ale aj analytické.**