UNIVERZITA KOMENSKÉHO BRATISLAVA

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Katedra teoretickej a matematickej fyziky

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bratislava 2002 **Vladimír Marko**

UNIVERZITA KOMENSKÉHO BRATISLAVA

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Katedra teoretickej a matematickej fyziky

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Rozklady Diracovho operátora

diplomant: Vladimír Marko
školiteľ: RNDr. Marián Fecko, CSc

Touto cestou si dovoľujem poďakovať svojmu školiteľovi RNDr. Mariánovi Feckovi, CSc. za odborné konzultácie a cenné rady a pripomienky, ktoré mi pomohli pri vypracovaní tejto diplomovej práce.

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracoval sám a inú ako uvedenú literatúru som nepoužíval.

V Bratilave, 28. Novembra 2002 ....

ROZKLADY DIRACOVHO OPERÁTORA

Vladimír Marko

Obsah

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

ÚVOD

Od čias, Hermann Minkowski preformuloval Einsteinovu teóriu relativity do štvorrozmerného jazyka, v ktorom zjednotil čas a priestor do jedného objektu, fyzici často používajú miesto pôvodných Maxwellovych rovníc ich relativistický zápis pomocou 2-formy intenzity elektromagnetického poľa, prípadne 4-potenciálu. Na jednej strane je tento prístup prínosom vďaka zjednodušeniu manipulácie s týmito rovnicami pomocou aparátu diferenciálnej geometrie, na druhej strane však nevidno explicitne rozdelenie na elektrickú a magnetickú časť, z ktorých vznikla Maxwellova teória. Na zistenie, aké elektrické, resp. magnetické, pole môže daný pozorovateľ namerať, ale i na výpočty rôznych veličín závislých od pozorovateľa v iných teóriách, sa používa práve aparát $3+1$ rozkladov.

Ďaľšou motiváciou rozkladov je pozorovanie, že niektoré operátory na podvarietách, resp. faktor-varietách, možno počítať pomocou ich ekvivalentu na pôvodnej variete. Keď napríklad napíšeme Laplaceov operátor Δ v trojrozmernom euklidovskom priestore E^3 pomocou sférických súradníc (r, ϑ, φ), nachádzame časť rovnakú ako pri Laplaceovom operátore na dvojrozmernej sfére S^2. Keď teda stotožníme funkcie na sfére s funkciami v E^3 nezávislými od r, môžeme Laplaceov operátor na sfére počítať po drobných úpravách (pozri príklad 1.6.2) pomocou jednoduchšieho Laplaceovho operátora v E^3. Obdobný postup možno aplikovať v mnohých ďalších prípadoch, napríklad pre homogénne priestory, kde úlohu väčšieho priestoru hrá grupa.

Prechod od nerelativistickej kvantovej mechaniky k relativistickej dal vzniknúť Kleinovej-Gordonovej rovnici, ktorá však bola diferenciálnou rovnicou druhého rádu, čo spôsobovalo isté ťažkosti. Tento problém vyriešil Paul Dirac zavedením operátora $\not{D} = \gamma^\mu \partial_\mu$, ktorého štvorec je D'Alembertov operátor $\Box$, a ktorý po ňom dostal meno. Ku Kleinovej-Gordonovu rovnici pribudla ako ďalšia fundamentálna rovnica Diracova rovnica (ktorej riešenia spĺňajú aj Kleinovu-Gordonovu rovnicu). Diracov operátor, neskôr zovšeobecnený na ľubovoľnú orientovateľnú varietu, zohráva dôležitú úlohu aj v kvantovej teórii poľa aj v čistej matematike (teórii konexí).

Vo svojej všeobecnej podobe sa Diracov operátor skladá z dvoch častí, vonkajšej kovariantnej derivácie, ktorá zo spinorového poľa vytvori 1-formu, a Cliffordovho súčinu, ktorý z tejto 1-formy spraví opäť spinorové pole. Samotný fakt, že medzivýsledok je 1-forma naznačuje možnosť štúdia jeho rozkladu. To bol aj pôvodný impulz zadania tejto diplomovej práce, motivovaný navyše ukážkou odvodenia Diracovho operátora na sfére S^2 z vnorenia do E^3 v článku *Field Theory an a Supersymetric Lattice* [4] od trojice autorov Grosse, Klimčík, Prešnajder.

Výsledný rozklad Diracovho operátora je v druhej kapitole spolu s nemenej dôležitou interpretáciou častí rozkladu, najmä horizontálneho Diracovho operátora.

Hlavné použitie na získanie Diracovho operátora na podvariete, či faktor-variete je demonštrované v príklade 2.5.1.

Alternatívny spôsob rozštiepenia D'Alembertovho operátora predstavuje operátor $d - \delta$ pôsobiaci na nehomogénne formy, na ktorých potom miesto Diracovej rovnice máme tzv. Diracovu-Kählerovu rovnicu. Tento popis fermiónov pomocou foriem má začiatky už v roku 1928 v článku *Zur Theorie des magnetischen Elektrons I.* [7] od Landaua a Ivanenka. Operátor $d - \delta$ je definovaný čisto v jazyku foriem a preto sa dá prirodzene rozložiť, čomu je venovaná tretia kapitola. V tomto prípade je váha skutočne najmä na interpretácii zložiek a následnom porovnaní s rozkladom Diracovho operátora.

Štruktúra práce.

Prvá kapitola sa venuje rozkladovému aparátu diferenciálnych foriem a uvádzané vzorce sú iba triviálnym zovšeobecnením vzťahov, ktoré možno nájsť napríklad v článku *On 3+1 decompositions with respect to an observer field* [1] od Mariána Fecka. Najzaujímavejšia je podkapitola 1.5, ktorá sa zaoberá možnosťou počítania Laplaceovho operátora na faktorizovanej variete pomocou Laplaceovho operátora na pôvodnej variete, ktorý môže byť niekedy jednoduchší ako ukazuje príklad 1.6.2. Táto časť, včetne príkladov, je tiež s miernymi modifikáciami prevzatá od Fecka.

Druhá kapitola sa začína popisom univerzálnej Cliffordovej algebry, ktorý je výberom dôležitých faktov z knihy *An Introduction to Spinors and Geometry with Applications in Physics* [2] od I.M.Benna a R.W.Tuckera, prípadne článku *Differential forms as spinors* [6] od W.Grafa. Tento prehľad zďaleka nie je vyčerpávajúci, zahŕňa iba údaje ktoré sú potrebné na definíciu spinorov, spinorových polí a grupy $Spin(r, s)$ a na správnu interpretáciu horizontálneho Diracovho a Diracovho-Kählerovho operátora.

Ďalej je definovaná spinová konexia, spinorová reprezentácia a v časti 2.3 samotný Diracov operátor v štandardne používanom tvare, najskôr v reči hlavnej $Spin(r, s)$-fibrácie $\mathbb{S}M$ variety M a potom aj zvyčajným spôsobom na M. Definícia na $\mathbb{S}M$ sa zvyčajne v literatúre v tejto forme nevyskytuje, s použitím $\mathbb{S}M$ sa však môžeme stretnúť napríklad v Espositovom článku *Dirac Operator and Spectral Geometry* [5] pri definící abstraktného Diracovho operátora.

Najdôležitejšou časťou tejto práce je podkapitola 2.4, v ktorej je za predpokladu existencie horizontálnych nadplôch vypočítaný rozklad Diracovho operátora. Jeho konkrétnu aplikáciu ukazuje príklad 2.5.1 na vnorení sféry S^2 do $E^3 \setminus \{0\}$. Podobné odvodenie Diracovho operátora na S^2 je urobené už v článku *Field Theory an a Supersymetric Lattice* [4], pridávame však interpretáciu odôvodnenú v časti 2.4. Problémy s rozkladom v prípade neintegrovateľnosti horizontálnej distribúcie ukazuje príklad 2.5.2 na Hopfovej fibrácii.

Tretia kapitola sa zaoberá Diracovym-Kählerovym operátorom, začínajúc explicitným súvisom s Diracovym operátorom. Časť 3.1 je prirodzeným zovšeobecnením výpočtov z článku *The Dirac Kähler Equation and Fermions on the Lattice* [3] od Bechera a Joosa, v ktorom je tento súvis rozobratý v plochom Minkowského priestore. Ako ukazuje časť 3.2, tieto operátory možno stotožniť na varietách, na ktorých existuje kovariantne konštantný spinor. Pre plochý Minkowského priestor triviálne existujú štyri lineárne nezávislé kovariantne konštantné spinory ako ukazuje príklad 3.6.1, čím je ešte zosilnený súvis s [3].

V podkapitole 3.3 sú zadefinované spinory a spinorové polia pre Diracov-Kählerov operátor podľa už spomínaných prác [2] a [6]. Nasledujúca časť 3.4 je jadrom tretej kapitoly a zaoberá sa samotným rozkladom Diracovho-Kählerovho operátora. Časť 3.5 je nakoniec venovaná porovnaniu s rozkladom Diracovho operátora.

KAPITOLA 1

ROZKLADY DIFERENCIÁLNYCH FORIEM A OPERÁTOROV

Ako sme spomenuli v úvode, napríklad 3+1 rozklady sa používajú v teórii relativity. Nás však bude zaujímať najmä použitie rozkladov na získanie operátorov na podvarietách pomocou ekvivalentov na pôvodnej variete. Tento prístup je demonštrovaný v príkladoch a s ich výnimkou je obsah tejto kapitoly iba prípravou pre rozklad Diracovho a Diracovho-Kählerovho operátora v druhej a tretej kapitole.

V tejto kapitole potrebujeme varietu M s metrickým tenzorom g signatúry (r, s) ($n := \dim M = r+s$, $r \geq 1$) a vektorové pole V (tzv. pole pozorovateľov) spĺňajúce $g(V, V) = 1$. Všetky konštrukcie sú lokálne.

1.1. Rozklad foriem.

Vektorové pole V v každom bode $x \in M$ vyčleňuje vertikálny podpriestor $\mathrm{Ver}_x M = \{\lambda V(x) | \lambda \in \mathbb{R}\}$ dotykového priestoru $T_x M$ a pomocou g je potom ohraničujúcou 1-formou $\tilde{V} = g(V, \cdot)$ daný aj horizontálny podpriestor $\mathrm{Hor}_x M = \{v \in T_x M | \tilde{V}(x) = 0\}$, t.j. ortogonálny doplnok. Zrejme $T_x M = \mathrm{Ver}_x M \oplus \mathrm{Hor}_x M$, čo nám umožňuje rozkladať vektory ($U = \mathrm{hor}\, U + \mathrm{ver}\, U$) a pobodovo aj vektorové polia a následne aj diferenciálne formy. Vďaka antisymetrii ľubovoľnej p-formy α po dosadení viac než jedného vertikálneho vektora dostávame totiž nulu a túto formu teda možno rozložiť ako

$$\alpha = \tilde{V} \wedge \hat{s} + \hat{r}\,, \tag{1.1.1}$$

kde $\hat{s}$ a $\hat{r}$ dávajú nulu už po dosadení jedného vertikálneho vektora, nazývame ich teda horizontálne. Ľahko nahliadneme, že

$$\hat{r} = i_V j_V \alpha \qquad \text{a} \qquad \hat{s} = i_V \alpha\,,$$

teda

$$\mathrm{hor} = i_V j_V \qquad \text{a} \qquad \mathrm{ver} = j_V i_V\,, \tag{1.1.2}$$

kde $i_W : \Lambda^p(M) \to \Lambda^{p-1}(M)$ a $j_W : \Lambda^p(M) \to \Lambda^{p+1}(M)$ sú štandardne definované vzťahmi

$$(i_W \alpha)(U, \dots) = \alpha(W, U, \dots)$$

a

$$j_W \alpha = \tilde{W} \wedge \alpha\,, \qquad \tilde{W} = g(W, \cdot)\,.$$

O operátoroch hor a ver sa dá ľahko presvedčiť, že sú projekčné a hor + ver = 1 (identita v $\Lambda^p(M)$). Poznamenajme ešte, že $\mathrm{hor}\, \alpha$ spĺňa

$$(\mathrm{hor}\, \alpha)(U, W, \dots) = \alpha(\mathrm{hor}\, U, \mathrm{hor}\, W, \dots)\,,$$

čo je štandardná definícia z teórie konexii na hlavných fibráciach. Rovnako teda rešpektuje lineárne kombinácie a súčin $\wedge$ v Cartanovej algebre, je teda homomorfizmom Cartanovej algebry foriem $\Lambda(M)$ a Cartanovej algebry horizontálnych foriem

$$\hat{\Lambda}(M) = \mathrm{hor}(\Lambda(M)) = \oplus_{p=0}^{n} \hat{\Lambda}^p(M)\,, \tag{1.1.3}$$

$$\hat{\Lambda}^p(M) = \mathrm{hor}(\Lambda^p(M)) = \{\alpha \in \Lambda^p(M) | \alpha = \mathrm{hor}\,\alpha\}\,.$$

1.2. Rozklad operátorov d a $*$.

Keď vieme rozkladať formy, ďalším krokom je rozklad operátorov pôsobiacich na formy (napr. vonkajšia derivácia a Hodgeov operátor $*$) v jazyku horizontálnych operátorov. Tieto však musíme najskôr zadefinovať.

Vonkajšia derivácia.

Pre vonkajšiu deriváciu formy $\tilde{V} \wedge \hat{s} + \hat{r}$ dostávame

$$d(\tilde{V} \wedge \hat{s} + \hat{r}) = d\tilde{V} \wedge \hat{s} - \tilde{V} \wedge d\hat{s} + d\hat{r}\,.$$

Rozklad 2-formy $d\tilde{V}$ je

$$d\tilde{V} = \tilde{V} \wedge \hat{a} + \hat{y}\,, \tag{1.2.1}$$

kde $\hat{a}$ a $\hat{y}$ sú kinematické charakteristiky poľa pozorovateľov (pozri dodatok A). $\hat{a} = g(a, \cdot) = g(\nabla_V V, \cdot)$ (kovariantná derivácia v Levi-Civitovej konexii) je 1-forma *zrýchlenia* a $\hat{y}$, forma *víru* (angl. vorticity form), vyjadruje mieru neintegrovateľnosti horizontálnej distribúcie. Definujeme ešte horizontálnu vonkajšiu deriváciu

$$\hat{d} = \mathrm{hor}\, d = i_V j_V d \tag{1.2.2}$$

a po úprave

$$\mathrm{ver}\, d\hat{r} = j_V i_V d\hat{r} = j_V (i_V d + d i_V)\hat{r} = \tilde{V} \wedge \mathcal{L}_V \hat{r}$$

dostávame pre vonkajšiu deriváciu

$$d(\tilde{V} \wedge \hat{s} + \hat{r}) = \tilde{V} \wedge (-\hat{d}\hat{s} + \hat{a} \wedge \hat{s} + \mathcal{L}_V \hat{r}) + (\hat{y} \wedge \hat{s} + \hat{d}\hat{r})\,. \tag{1.2.3}$$

Poznamenajme, že horizontálna vonkajšia derivácia nie je nilpotentná, ale (viď. dodatok B)

$$\hat{d}\hat{d}\hat{r} = -\hat{y} \wedge \mathcal{L}_V \hat{r}\,.$$

Hodgeov operátor $*$.

Z pôvodného metrického tenzora g sa na horizontálnom podpriestore indukuje metrický tenzor $\hat{g}$ signatúry $(r-1, s)$ daný vzťahom $g = \tilde{V} \otimes \tilde{V} + \hat{g}$. Keď ešte orientáciu bázy $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ horizontálneho podpriestoru ztotožníme s orientáciou bázy $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$, kde $e_0 = V$, máme všetky údaje na zostrojenie horizontálneho Hodgeovho operátora $\hat{*}$. Evidentne

$$*(\tilde{V} \wedge \hat{s}) = \hat{*}\hat{s}$$

a po porovnaní $*\hat{r}$ a $\tilde{V} \wedge \hat{*}r$ v ortonormálnej báze sa tieto líšia nanajvyš znamienkom, presnejšie

$$*\hat{r} = \tilde{V} \wedge \hat{*}\hat{\eta}\hat{r}\,,$$

kde $\hat{\eta}$ je hlavný automorfizmus foriem ($\eta\alpha = (-1)^{\deg \alpha}\alpha$) zúžený len na horizontálne formy. Spolu teda

$$*(\tilde{V} \wedge \hat{s} + \hat{r}) = \tilde{V} \wedge \hat{*}\hat{\eta}\hat{r} + \hat{*}\hat{s}\,. \tag{1.2.4}$$

1.3. Maticový zápis a ďalšie operátory.
Pre zprehľadnenie zápisu možno rozklad foriem napísať ako

$$\alpha = \tilde{V} \wedge \hat{s} + \hat{r} = (\,\tilde{V} \quad 1\,) \begin{pmatrix} \hat{s} \\ \hat{r} \end{pmatrix},$$

(vynechávame znamienko súčinu $\wedge$, ktoré sa implicitne predpokladá všade, kde sa násobia dve formy) čiže

$$\alpha \leftrightarrow \begin{pmatrix} \hat{s} \\ \hat{r} \end{pmatrix}.$$

Pre vonkajšiu deriváciu dostávame

$$d\alpha = (\,\tilde{V} \quad 1\,) \begin{pmatrix} -\hat{d}\hat{s} + \hat{a} \wedge \hat{s} + \mathcal{L}_V \hat{r} \\ \hat{y} \wedge \hat{s} + \hat{d}\hat{r} \end{pmatrix} = (\,\tilde{V} \quad 1\,) \begin{pmatrix} -\hat{d} + \hat{a} & \mathcal{L}_V \\ \hat{y} & \hat{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{s} \\ \hat{r} \end{pmatrix},$$

čiže

$$d \leftrightarrow \begin{pmatrix} -\hat{d} + \hat{a} & \mathcal{L}_V \\ \hat{y} & \hat{d} \end{pmatrix}.$$

Pomocou vzťahov $*^{-1} = \operatorname{sgn} g * \eta^{n+1}$, $\delta = *^{-1} d * \eta$ a $\mathcal{L}_V = di_V + i_V d$ už potom môžeme dokončiť výpočty a zosumarizovať výsledky

$$\eta \leftrightarrow \begin{pmatrix} -\hat{\eta} & 0 \\ 0 & \hat{\eta} \end{pmatrix}, \qquad * \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \hat{*}\hat{\eta} \\ \hat{*} & 0 \end{pmatrix}, \qquad *^{-1} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \hat{*}^{-1} \\ (-1)^{n+1} \hat{*}^{-1} \hat{\eta} & 0 \end{pmatrix},$$

$$i_V \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad j_V \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{hor} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$d \leftrightarrow \begin{pmatrix} -\hat{d} + \hat{a} & \mathcal{L}_V \\ \hat{y} & \hat{d} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{L}_V = i_V d + d i_V \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{L}_V & 0 \\ \hat{a} & \mathcal{L}_V \end{pmatrix} \tag{1.3.1}$$

a ($\hat{\delta} = \hat{*}^{-1} \hat{d} \hat{*} \hat{\eta}$)

$$\delta \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \hat{*}^{-1} \\ (-1)^{n+1} \hat{*}^{-1} \hat{\eta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\hat{d} + \hat{a} & \mathcal{L}_V \\ \hat{y} & \hat{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \hat{*}\hat{\eta} \\ \hat{*} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\hat{\eta} & 0 \\ 0 & \hat{\eta} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\hat{\delta} & \hat{*}^{-1} \hat{y} \hat{*} \\ -\hat{*}^{-1} \mathcal{L}_V \hat{*} & \hat{\delta} - \hat{*}^{-1} \hat{a} \hat{*} \hat{\eta} \end{pmatrix}. \tag{1.3.2}$$

Pre Laplaceov-deRhamov operátor $\Delta = -(d\delta + \delta d)$ rozklad dopadne

$$\Delta \leftrightarrow \begin{pmatrix} \hat{\Delta} + (\hat{a}\hat{\delta} + \hat{\delta}\hat{a}) + \mathcal{L}_V \tilde{\mathcal{L}}_V - \tilde{y}\hat{y} & \hat{d}\tilde{y} - \tilde{y}\hat{d} + \hat{\delta}\mathcal{L}_V - \mathcal{L}_V \hat{\delta} + \mathcal{L}_V \tilde{a} - \hat{a}\tilde{y} \\ \hat{d}\tilde{\mathcal{L}}_V - \tilde{\mathcal{L}}_V \hat{d} + \hat{y}\hat{\delta} - \hat{\delta}\hat{y} + \tilde{\mathcal{L}}_V \hat{a} + \tilde{a}\hat{y} & \hat{\Delta} + \hat{d}\tilde{a} + \tilde{a}\hat{d} + \tilde{\mathcal{L}}_V \mathcal{L}_V - \hat{y}\tilde{y} \end{pmatrix}, \tag{1.3.3}$$

kde $\tilde{a} = \hat{*}^{-1} \hat{a} \hat{*} \hat{\eta}$, $\tilde{y} = \hat{*}^{-1} \hat{y} \hat{*}$, $\tilde{\mathcal{L}}_V = \hat{*}^{-1} \mathcal{L}_V \hat{*}$ a $\hat{\Delta} = -(\hat{d}\hat{\delta} + \hat{\delta}\hat{d})$. Napríklad na funkciách ($\hat{s} = 0$, $\hat{r} = f$ a výsledok má tiež iba horizontálnu časť) dostávame

$$\Delta f = (\hat{\Delta} + \tilde{a}\hat{d} + \tilde{\mathcal{L}}_V \mathcal{L}_V) f = (\hat{\Delta} - a + \tilde{\mathcal{L}}_V \mathcal{L}_V) f. \tag{1.3.4}$$

Spomeňme nakoniec ešte involúciu ξ, definovanú vzťahom

$$(\xi\alpha)(X_1,\ldots,X_p)=\alpha(X_p,\ldots,X_1)\,. \tag{1.3.5}$$

Pre p-formu α platí aj

$$\xi\alpha=(-1)^{[p/2]}\alpha\,,$$

kde $[x]$ je dolná celá časť čísla x. Keď ešte prirodzeným spôsobom definujeme $\hat{\xi}$, ľahko nahliadneme, že rozklad operátora ξ je

$$\xi\leftrightarrow\begin{pmatrix}\hat\eta\hat\xi & 0\\ 0 & \hat\xi\end{pmatrix}. \tag{1.3.6}$$

1.4. $1+s$ **rozklad.**

Fyzikálne najzaujímavejší je prípad $r=1$, $s=3$, pozrime sa teda na jeho drobné zovšeobecnenie pre ľubovoľné n.

Pre $r=1$ je metrický tenzor $\hat g$ záporne definitný, možno teda definovať kladne definitný horizontálny metrický tenzor h vzťahom $g=\tilde V\otimes\tilde V-h$. Potom však máme iný ako pôvodne uvažovaný horizontálny Hodgeov operátor $\hat * \equiv \hat *_{\hat g}$, konkrétne $\hat *_h=\hat *_{\hat g}\hat\eta$ a teda aj

$$\hat *_h^{-1}=\mathrm{sgn}h\hat *_h\hat\eta^n=(-1)^s\mathrm{sgn}\hat g\hat *_{\hat g}\hat\eta^{n+1}=(-1)^s\hat *_{\hat g}^{-1}\hat\eta=(-1)^{n-1}\hat *_{\hat g}^{-1}\hat\eta$$

alebo naopak $\hat *_{\hat g}^{-1}=(-1)^{n-1}\hat *_h^{-1}\hat\eta$. Niektoré rozkladové vzorce sa teda zmenia, ide konkrétne o

$$*\leftrightarrow\begin{pmatrix}0 & \hat *_h\\ \hat *_h\hat\eta & 0\end{pmatrix},\qquad *^{-1}\leftrightarrow\begin{pmatrix}0 & (-1)^{n-1}\hat *_h^{-1}\hat\eta\\ \hat *_h^{-1} & 0\end{pmatrix},$$

$$\delta\leftrightarrow\begin{pmatrix}\hat\delta_h & \hat *_h^{-1}\hat y\hat *_h\\ -\hat *_h^{-1}\mathcal{L}_V\hat *_h & -\hat\delta_h+\hat *_h^{-1}\hat a\hat *_h\hat\eta\end{pmatrix},\qquad \delta_h=\hat *_h^{-1}d\hat *_h\hat\eta=-\delta_{\hat g}$$

a (bez indexu h na $\hat\Delta$, $\hat\delta$, $\tilde a$, $\tilde{\mathcal{L}}_V$ a $\tilde y$, aby sa to zmestilo do riadku)

$$\Delta\leftrightarrow\begin{pmatrix}-\hat\Delta-(\hat a\hat\delta+\hat\delta\hat a)+\mathcal{L}_V\tilde{\mathcal{L}}_V-\tilde y\hat y & \hat d\tilde y-\tilde y\hat d-\hat\delta\mathcal{L}_V+\mathcal{L}_V\hat\delta-\mathcal{L}_V\tilde a-\hat a\tilde y\\ \hat d\tilde{\mathcal{L}}_V-\tilde{\mathcal{L}}_V\hat d-\hat y\hat\delta+\hat\delta\hat y+\tilde{\mathcal{L}}_V\hat a-\tilde a\hat y & -\hat\Delta-\hat d\tilde a-\tilde a\hat d+\tilde{\mathcal{L}}_V\mathcal{L}_V-\hat y\tilde y\end{pmatrix}.$$

1.5. Laplaceov operátor na faktor-variete.

Uvažujme teraz varietu N, ktorej bodmi sú integrálne krivky poľa V. Formálne teda máme ďalšiu varietu N a projekciu $\pi:M\to N$, pre ktorú $\pi\circ\Phi_t=\pi$, kde Φ_t je tok generovaný poľom V. Zrejme

$$\mathrm{Hor}_xM\simeq T_{\pi(x)}N$$

a π_* je izomorfizmus týchto priestorov, inverzné zobrazenie je horizontálny zdvih, ktorý označíme π_x^* (index x označuje do ktorého bodu vektor zdvíhame). Potom môžeme definovať v $T_{\pi(x)}N$ metrický tenzor vzťahom

$$h_{\pi(x)}(U,W)=g(\pi_x^*U,\pi_x^*W)=\hat g(\pi_x^*U,\pi_x^*W)\,,\qquad U,V\in T_{\pi(x)}M\,,$$

čo môžeme po zohľadnení $g = \tilde{V} \otimes \tilde{V} + \hat{g}$ napísať aj ako

$$g_x = \tilde{V}(x) \otimes \tilde{V}(x) + \pi^* h_{\pi(x)} .$$

Takto definovaný metrický tenzor h však závisí od výberu bodu x vo fíbri nad $\pi(x)$. Jedinou výnimkou je prípad, keď sú zobrazenia

$$\pi_y^* \circ \pi_{x*} : \mathrm{Hor}_x M \to \mathrm{Hor}_y M \,, \qquad \pi(x) = \pi(y) \,,$$

izometrie týchto priestorov. Uvažujme však trochu všeobecnejšiu situáciu, keď sú to konformné zobrazenia. Potom na N existuje metrický tenzor h taký, že

$$g = \tilde{V} \otimes \tilde{V} + b^2 \pi^* h \,, \qquad 0 < b^2 \in \mathcal{F}(M) \,, \tag{1.5.1}$$

resp.

$$\hat{g} = b^2 \pi^* h \,.$$

Keďže už máme vzťah (1.3.4) medzi Δ a $\hat{\Delta}$, v ktorom navyše vypadne $\tilde{\mathcal{L}}_V \mathcal{L}_V f$, potrebujeme už len vzťah medzi $\hat{\Delta}\pi^* f$ a $\Delta_N f$ ($f \in \mathcal{F}(N)$), kde Δ_N je Laplaceov operátor na N. Na to potrebujeme vedieť, že pre p-formu α na n-rozmernom priestore platí

$$*_{\lambda^2 g} \alpha = \lambda^{n-2p} *_g \alpha \,,$$

$*$ je operátor prirodzený voči projekcii,

$$\pi^* \circ *_h = *_{\pi^* h} \circ \pi^* \,,$$

lebo π^* je izomorfizmus tenzorových algebier $T(\mathrm{Hor}_x M)$ a $T(T_{\pi(x)} N)$, a pre vonkajšie derivácie platí

$$\pi^* \circ d_N = d \circ \pi^* = \hat{d} \circ \pi^* \,.$$

Netriviálna je druhá rovnosť, ktorú však možno dokázať pomocou (1.2.3). Nakoľko pre $\alpha \in \Lambda^p(N)$ máme $\pi^* \alpha \in \hat{\Lambda}^p(M)$, dostávame

$$d\pi^* \alpha = \tilde{V} \wedge \mathcal{L}_V \pi^* \alpha + \hat{d}\pi^* \alpha = \hat{d}\pi^* \alpha \,,$$

lebo

$$\mathcal{L}_V \pi^* = \frac{d}{dt}\Big|_0 \Phi_t^* \pi^* = \frac{d}{dt}\Big|_0 (\pi \circ \Phi_t)^* = \frac{d}{dt}\Big|_0 \pi^* = 0 \,.$$

Potom už pre funkciu $f \in \mathcal{F}(N)$ máme

$$\begin{aligned}
\hat{\Delta}\pi^* f &= -\hat{\delta}\hat{d}\pi^* f = -\hat{*}^{-1}_{b^2\pi^* h} \hat{d} \hat{*}_{b^2 \pi^* h} \hat{\eta} \hat{d}\pi^* f = -b^{1-n} *^{-1}_{\pi^* h} \hat{d}(b^{n-3} *_{\pi^* h} \hat{\eta} \hat{d}\pi^* f) = \\
&= -b^{-2} *^{-1}_{\pi^* h} \hat{d} *_{\pi^* h} \hat{\eta} \hat{d}\pi^* f - b^{1-n} *^{-1}_{\pi^* h} \frac{n-3}{b} (\hat{d}b) \wedge b^{n-3} *_{\pi^* h} \hat{\eta} \hat{d}\pi^* f = \\
&= -b^{-2} \pi^* *_h^{-1} d_N *_h \eta_N d_N f + *^{-1}_{b^2 \pi^* h} \frac{n-3}{b} (\hat{d}b) \wedge *_{b^2 \pi^* h} \pi^* d_N f = \\
&= \frac{1}{b^2} \pi^* \Delta_N f + \frac{n-3}{b} (\hat{d}b, \pi^* d_N f)_M \,.
\end{aligned} \tag{1.5.2}$$

Súčin $(\cdot,\cdot)$ je pritom pre formy α a β (aj nehomogénne) definovaný vzťahom

$$(\alpha,\beta)*1 = \mathcal{S}_n(\alpha\wedge *\beta)\,, \tag{1.5.3}$$

kde $\mathcal{S}_p : \Lambda(M)\to\Lambda^p(M)$ je projektor vyčleňujúci homogénnu časť stupňa p, a pre horizontálne formy dáva to isté ako definícia cez $\hat{*}$ a $\mathcal{S}_{n-1}$.

Pre $\Delta\pi^* f$ dostávame použitím (1.3.4) a (1.5.2) vyjadrenie

$$\Delta\pi^* f = \frac{1}{b^2}\pi^*\Delta_N f + \frac{n-3}{b}(\hat{d}b,\pi^* d_N f)_M - a\pi^* f\,. \tag{1.5.4}$$

Túto rovnosť môžeme interpretovať aj z prava do ľava, teda na počítanie Laplaceovho operátora na N ($\Delta_N f$) môžeme použíť Laplaceov operátor Δ na M, pričom funkcie na N môžeme stotožniť s funkciami na M ($f\sim\pi^* f$) konštantnými na vláknach (integrálnych krivkách poľa V). V prípade, že varieta N má zložitejšiu štruktúru ako varieta N (pozri príklad 1.6.2), môže to priniesť zjednodušenie manipulácie s Laplaceovym operátorom. Musíme však zohľadniť zmeny, ktoré prichádzajú z dvoch zdrojov. Prvým je zrýchlenie vektorového poľa V. Druhým je v prípade, že miesto izometrií horizontálnych podpriestorov máme iba konformné zobrazenia, funkcia b. Tá vstupuje do výsledku dva krát. Prvý krát je to prirodzný faktor $\frac{1}{b^2}$, ktorý pre Laplaceov operátor na ľubovoľnej variete prirodzene dostaneme pri preškálovaní metriky konštantou b. Druhý krát vstupuje b do výsledku ak neostáva konštantné ani len v horizontálnom smere (v prípade neintegrovateľnej horizontálnej distribúcie, t.j. $\hat{y}=0$, by však $\hat{d}b=0$ znamenalo konštantné b).

1.6. Príklady.

1.6.1. Hopfova fibrácia.

Pomocou Eulerovych uhlov je element A grupy $SU(2)$ daný predpisom

$$A=\begin{pmatrix}\cos\frac{\vartheta}{2}e^{-\frac{i}{2}(\psi+\varphi)} & -\sin\frac{\vartheta}{2}e^{\frac{i}{2}(\psi-\varphi)}\\ \sin\frac{\vartheta}{2}e^{-\frac{i}{2}(\psi-\varphi)} & \cos\frac{\vartheta}{2}e^{\frac{i}{2}(\psi+\varphi)}\end{pmatrix}$$

a pre bázu (σ_a sú Pauliho matice)

$$E_a = -\frac{i}{2}\sigma_a$$

Lieovej algebry $su(2)$ definuje rozklad kanonickej 1-formy

$$\theta = A^{-1}dA = A^+ dA = e^a E_a$$

bázu ľavoinvariantných 1-foriem a k nej duálnu bázu ľavoinvariantných vektorových polí

$$\begin{aligned} e^1 &= \sin\psi d\vartheta - \sin\vartheta\cos\psi d\varphi & e_1 &= \sin\psi\partial_\vartheta + \operatorname{cotg}\vartheta\cos\psi\partial_\psi - \tfrac{\cos\psi}{\sin\vartheta}\partial_\varphi\\ e^2 &= \cos\psi d\vartheta + \sin\vartheta\sin\psi d\varphi & e_2 &= \cos\psi\partial_\vartheta - \operatorname{cotg}\vartheta\sin\psi\partial_\psi + \tfrac{\sin\psi}{\sin\vartheta}\partial_\varphi\\ e^3 &= d\psi + \cos\vartheta d\varphi & e_3 &= \partial_\psi \end{aligned}$$

Metrický tenzor $g = -\frac{1}{2}\mathcal{K}$, kde $\mathcal{K}$ je Killingov-Cartanov metrický tenzor vychádza

$$g = e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2 + e^3 \otimes e^3 \, .$$

Pre sféru S^2 so štandardnými súradnicami ϑ, φ projektuje Hopfova fibrácia $\pi : SU(2) \to S^2 : A(\vartheta, \varphi, \psi) \mapsto (\vartheta, \varphi)$ integrálne krivky vektorového poľa $V = e_3$ do bodov S^2. Dosadením explicitných vzorcov sa ľahko overí

$$g = e^3 \otimes e^3 + \pi^* h = \tilde{V} \otimes \tilde{V} + \pi^* h \qquad (b = 1) \, ,$$

kde h je štandardný metrický tenzor na sfére.

Nakoľko $\hat{d}b = \hat{d}1 = 0$ (alebo aj $n - 3 = 0$) a

$$d\tilde{V} = de^3 = -e^1 \wedge e^2 \, ,$$

čiže $\hat{a} = 0$ a $a = 0$, medzi porovnávanými Laplaceovmi operátormi je najjednoduchší možný vzťah

$$\Delta_g \pi^* f = \hat{\Delta}_g \pi^* f = \pi^* \Delta_h f \, .$$

Navyše $\mathcal{L}_V e^1 \wedge e^2 = 0$, takže $\tilde{\mathcal{L}}_V = \mathcal{L}_V$ a celý Laplaceov operátor na $SU(2)$ je

$$\Delta_g = \hat{\Delta}_g + \mathcal{L}_V \mathcal{L}_V \, .$$

1.6.2. Sféra S^n v $E^{n+1} \setminus \{0\}$.

V E^{n+1} definujeme pomocou kartézskych súradníc $x^0, x^1, \ldots, x^n$ a $x_a \equiv x^a$ vzdialenosť $r = \sqrt{x_a x^a}$ od počiatku. Potom pre

$$V := \partial_r = \frac{1}{r} x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad \text{a} \qquad \tilde{V} = dr = \frac{1}{r} x_i dx^i$$

z $d\tilde{V} = ddr = 0$ vidno $\hat{a} = 0$ a $\hat{y} = 0$. Horizontálne nadplochy sú sféry s polomerom r a pre prirodzenú projekciu $\pi : E^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$, ktorá lúče (integrálne krivky poľa ∂_r) projektuje do zodpovedajúcich bodov jednotkovej sféry (S^n, h) vnorenej do $E^{n+1} \setminus \{0\} = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, g)$, teda máme

$$g = dr \otimes dr + r^2 \pi^* h \, .$$

Nakoľko však pre $b = r$ je $\hat{d}b = i_V j_V db = i_{\partial_r} dr \wedge dr = 0$, zrejme z (1.5.4) ostane iba

$$\Delta_g \pi^* f = \frac{1}{r^2} \pi^* \Delta_h f \, .$$

To je napríklad pre $n = 2$ v zhode so známym rozkladom

$$\Delta_{E^3} = \partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2} \, ,$$

v ktorom prvé dve časti dajú na $\pi^* f$, teda na funkciách konštantných vo vláknach (ktoré zodpovedajú funkciám na sfére), nulu.

KAPITOLA 2

ROZKLAD DIRACOVHO OPERÁTORA

Diracov operátor $\not{D}$ bol pôvodne zostrojený v plochom Minkowského priestore ako operátor spĺňajúci $\not{D}^2 = \Box$, kde $\Box = \partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2-\partial_t^2$ je D'Alembertov operátor. Jeho zovšeobecnenie na varietu s metrickým tenzorom g signatúry (r,s) $(n=r+s)$, ktoré je nutné vo všeobecnej teórii relativity, prípadne už v plochom Minkowského priestore pri použití krivočiarych súradníc, si vyžaduje nasledujúce objekty.

Uvažujme ortonormálne repérne pole $e_0, e_1, \dots, e_{n-1}$, pre ktoré štandardne definujeme

$$g_{ab} = g(e_a, e_b)$$

a matica (g^{ab}) je inverzná ku (g_{ab}) $(g^{ab}g_{bc} = \delta^a_c$; pre ortonormálne repérne pole sú matice (g_{ab}) a (g^{ab}) číselne zhodné, r krát 1 a s krát -1 na diagonále). Korepérne pole e^a je potom dané ako

$$e^a = g^{ab} g(e_b, .)\,.$$

Budeme používať skrátený zápis operátorov

$$i_a := i_{e_a}\,, \quad i^a := g^{ab} i_b\,, \quad j^a := e^a\wedge\,, \quad j_a := g_{ab} j^b \quad a \quad \nabla_a := \nabla_{e_a}\,,$$

kde ∇ je kovariantná derivácia v Levi-Civitovej konexii.

V ďalšom texte budeme požívať indexy a, b, c na označenie premenných idúcich od 0 do $n-1$, zatiaľ čo indexy i, j, k pôjdu iba od 1 do $n-1$.

2.1. Cliffordova algebra, grupa $Spin(r,s)$.

Cliffordova algebra je obsiahla téma, ktorú možno nájsť napríklad v [2], odkiaľ v skratke zopakujeme údaje, ktoré budeme potrebovať. Tejto téme sa musíme venovať viac ako je zvyčajné vo fyzikálnej literatúre, lebo pri rozklade Diracovho operátora sa stretneme aj s párnou podalgebrou Cliffordovej algebry. Navyše sa s touto témou ešte stretneme v ďalšej kapitole o Diracovej-Kählerovej rovnici.

Pre vektorový priestor V rozmeru $n := \dim V < \infty$ nad poľom $\mathbb{K}$ (buď $\mathbb{R}$ alebo $\mathbb{C}$) označme TV^* algebru všetkých čisto kovariantných tenzorov. Pre metrický tenzor $g : V\times V \to \mathbb{K}$ definujeme (ako zvyčajne, $\tilde{x} = g(x,\cdot)$)

$$g(\tilde{x}, \tilde{y}) := g(x,y)\,, \qquad x, y \in V\,.$$

Označme J obojstranný ideál v TV^* generovaný tenzormi $\alpha\otimes\alpha - g(\alpha,\alpha)$, $\alpha\in V^*$. Cliffordovou algebrou $C(V^*, g)$ asociovanou s V nazveme faktor-algebru

$$C(V^*, g) = TV^*/J\,,$$

v ktorej súčin (tzv. Cliffordov) označujeme $\vee$. Ako reprezentantov možno v tejto algebre zvoliť nehomogénne formy, ako lineárny priestor je teda izomorfná s vonkajšou algebrou ΛV^* a teda $\dim C(V^*, g) = \dim \Lambda V^* = 2^n$. Súčin $\vee$ je daný vzťahom

$$\tilde{x}\vee\omega = \tilde{x}\wedge\omega + i_x\omega\,, \qquad x\in V\,,\ \omega\in\Lambda V^*\,, \tilde{x} = g(x,\cdot) \tag{2.1.1}$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

a asociativitou. Potom

$$\omega \vee \tilde{x} = \tilde{x} \wedge \eta\omega - i_x \eta\omega \,. \tag{2.1.2}$$

a

$$\alpha \vee \beta + \beta \vee \alpha = 2g(\alpha, \beta)\,, \qquad \alpha, \beta \in V^*\,, \tag{2.1.3}$$

Algebra $T^*(V)$ je $\mathbb{Z}$ aj $\mathbb{Z}_2$ graduovaná, tenzory v J sú však len $\mathbb{Z}_2$-homogénne, nie $\mathbb{Z}$-homogénne, preto $C(V, g)$ dedí iba $\mathbb{Z}_2$-graduovanosť, ktorá sa zhoduje so Z_2-graduovanosťou reprezentantov v ΛV^*. V ďalšom texte budeme vynechávať znak Cliffordovho súčinu $\vee$, na rozdiel od predchádzajúcej kapitoly teda nesmieme vynechávať znak $\wedge$.

Poznamenajme, že aj vonkajšiu algebru ΛV^* možno získať ako podiel TV^*/I, kde I je ideál generovaný tenzormi typy $\alpha \otimes \alpha$, $\alpha \in V^*$. Obe algebry, $C(V^*, g)$ aj ΛV^*, prirodzene dedia operátory i_X, η a ξ definované[1][2] na TV^*, lebo $i_X(J) \subset J$, $i_X(I) \subset I$ a podobne pre η a ξ. Množinu ΛV^* so súčinmi $\wedge$, $\vee$ a $(\cdot,\cdot)$ (viď. (1.5.3)) nazývame Kählerova-Atyiahova algebra. Zapisujeme ju $(\Lambda V^*, \wedge, \vee, \cdot)$, kde $\alpha \cdot \beta := (\alpha, \beta)$ je skrátený zápis pre súčin $(\cdot,\cdot)$.

Reálne Cliffordove algebry závisia iba od rozmeru $n = r + s$ a signatúry (r, s) metriky g, budeme ich preto označovať $C_{r,s}(\mathbb{R})$. Ich podrobnou klasifikáciou sa nebudeme zaoberať.

Regulárne (invertovateľné) prvky s Cliffordovej algebry, pre ktoré $sV^*s^{-1} \subset V^*$, tvoria Cliffordovu grupu Γ a samotný predpis

$$\chi(s)\alpha = s\alpha s^{-1}\,, \qquad \alpha \in V^*\,, \tag{2.1.4}$$

je potom homomorfizmom $\Gamma \to O(r, s)$, lebo

$$2g(s\alpha s^{-1}, s\beta s^{-1}) = s\alpha s^{-1} s\beta s^{-1} + s\beta s^{-1} s\alpha s^{-1} = s2g(\alpha, \beta)s^{-1} = 2g(\alpha, \beta)\,.$$

Ukazuje sa, že pre $s \in \Gamma$ je $\xi(s)s$ násobkom identity, preto možno predpis

$$\lambda(s) = \xi(s)s \tag{2.1.5}$$

interpretovať ako homomorfizmus $\lambda : \Gamma \to \mathbb{R}$.

Rôzne podgrupy grupy Γ sú rozobrané v [2]. Pre nás je najzaujímavejšia párna podgrupa Γ^+ (obsahujúca iba párne prvky grupy Γ) a jej podgrupa ${}_{\pm}\Gamma^+$ (označovaná aj $\mathrm{SPIN}(r, s)$), resp. ${}_{+}\Gamma^+$ (tiež $\mathrm{SPIN}^+(r, s)$), tvorená prvkami $s \in \Gamma^+$, pre ktoré $\lambda(s) = \pm 1$, resp. $\lambda(s) = 1$. Pre túto podgrupu je χ dvojlistovým nakrytím $SO(r, s)$, resp. $SO^+(r, s)$. Vo fyzikálnej literatúre sa zvyčajne vyskytuje len grupa $Spin(r, s) := \mathrm{SPIN}^+(r, s)$, ktorá je pre $n \geq 3$ univerzálnou nakrývajúcou grupou súvislej grupy $SO^+(r, s)$, kým $SO(r, s) = SO^+(r, s) \times \{1, PT\}$ je nesúvislá[3] s výnimkou $r = 0$ (neexistuje T) alebo $s = 0$ (neexistuje P), kedy sú grupy $SO(r, s)$ a $SO^+(r, s)$ totožné.

Komplexné Cliffordove algebry závisia iba od n (označenie $C_n(\mathbb{C})$) a pre párne n platí

$$C_n \simeq \mathcal{M}_{2^{n/2}}(\mathbb{C})\,,$$

[1] $i_X\alpha = \alpha(X)$ pre $\alpha \in V^*$ a $i_X(\alpha \otimes \beta) = (i_X\alpha) \otimes \beta + (\eta\alpha) \otimes (i_X\beta)$ pre $\alpha, \beta \in TV^*$

[2] $\eta\alpha = (-1)^{\deg \alpha}\alpha$ a ξ podľa (1.3.5)

[3] P je priestorová a T časová inverzia

kde $\mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ je algebra $k \times k$ matíc na poľom $\mathbb{K}$, zatiaľ čo pre nepárne n

$$C_n \simeq \mathcal{M}_{2^{(n-1)/2}}(\mathbb{C}) \oplus \mathcal{M}_{2^{(n-1)/2}}(\mathbb{C}) .$$

Párne prvky algebry $C_n(\mathbb{C})$ evidentne tvoria podlagebru $C_n^+(\mathbb{C})$, pre ktorú navyše platí

$$C_n^+(\mathbb{C}) \simeq C_{n-1}(\mathbb{C}) .$$

Spomeňme ešte pojem zkomplexnenej Cliffordovej algebry $C^{\mathbb{C}}(V,g)$, kde V je reálny vektorový priestor. Ten možno komplexne rozšíriť na $V^{\mathbb{C}}$ a $\mathbb{C}$-lineárne možno rozšíriť aj metriku $g : V \times V \to \mathbb{R}$ na $g^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$. Potom pre algebru $C(V^{\mathbb{C}}, g^{\mathbb{C}})$ uvažovanú ako 2^{n+1}-rozmernú reálnu algebru platí

$$C(V^{\mathbb{C}}, g^{\mathbb{C}}) \simeq C(V,g) \otimes \mathbb{C}(\mathbb{R})$$

a $C^{\mathbb{C}}(V,g) := C(V,g) \otimes \mathbb{C}(\mathbb{R})$ nazývame[4] zkomplexnenou Cliffordovou algebrou. Tá oproti zvyčajnej komplexnej Cliffordovej algebre obsahuje ešte operáciu komplexného združenia (v časti $\mathbb{C}(\mathbb{R})$). Ukazuje sa, že pre párne n je izomorfná s algebrou komplexných matíc, kde sa komplexné združenie realizuje komplexným združením jednotlivých komponent matíc vo vhodnej báze. Pre nepárne n to však môže byť zložitejšie.

Doteraz uvažované Cliffordove algebry sa nazývajú aj univerzálnymi Cliffordovymi algebrami a ľubovoľná asociatívna algebra, ktorej generátory spĺňajú vzťah (2.1.3) sa nazýva Cliffordovou algebrou.

Komplexné štvorcové matice $\gamma^0, \gamma^1, \ldots, \gamma^{n-1}$ minimálneho rangu (dá sa ukázať, že sú $2^{[n/2]} \times 2^{[n/2]}$) spĺňajúce antikomutačné vzťahy

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2g^{ab} \tag{2.1.6}$$

nazývame reprezentáciou Cliffordovej algebry priestoru s metrikou g. Ako vidno z predchádzajúceho, pre párne n generujú tieto matice algebru izomorfnú so zkomplexnenou Cliffordovou algebrou $C^{\mathbb{C}}_{r,s}(\mathbb{R})$, pre nepárne n však len s jednou jej jednoduchou komponentou, pričom matice spĺňajúce (2.1.6) generujúce druhú komponentu sú neekvivalentnou reprezentáciou univerzálnej Cliffordovej algebry.

Matice $\tilde{\gamma}^1, \tilde{\gamma}^2, \ldots, \tilde{\gamma}^{n-1}$ definované vzťahom

$$\tilde{\gamma}^i := -i\gamma^0\gamma^i , \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1 , \tag{2.1.7}$$

tiež spĺňajú antikomutačný vzťah (2.1.6), avšak len pre $a, b \neq 0$. Nakoľko

$$\tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^j = -\gamma^0\gamma^i\gamma^0\gamma^j = \gamma^i\gamma^j , \tag{2.1.8}$$

možno z nich ľahko vytvoriť všetky kombinácie súčinov dvoch pôvodných γ-matíc, ($\gamma^i\gamma^j = \tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^j$, $\gamma^0\gamma^j = i\tilde{\gamma}^j$ a $\gamma^i\gamma^0 = -i\tilde{\gamma}^i$) a tak generujú párnu podalgebru. Tá je pre párne n izomorfná s totálnou Cliffordovou algebrou $C_{n-1}(\mathbb{C})$, zatiaľ čo pre nepárne n dostávame pomocou (2.1.8) a faktu, že $n-1$ je párne, rovnicu

$$\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2 \ldots \tilde{\gamma}^{n-1} = \gamma^1\gamma^2 \ldots \gamma^{n-1} = \gamma^0(\gamma^0\gamma^1\gamma^2 \ldots \gamma^{n-1}) .$$

Nakoľko však pre nepárne n

$$\gamma^0\gamma^1\gamma^2 \ldots \gamma^{n-1} \propto 1 ,$$

môžeme z matíc $\{\tilde{\gamma}^a\}$ získať znovu maticu γ^0 a potom aj všetky matice $\{\gamma^a\}$, matice $\{\tilde{\gamma}^i\}$ generujú tú istú algebru $\mathcal{M}_{2^{(n-1)/2}}(\mathbb{C}) \simeq C_{n-1}(\mathbb{C})$.

[4] $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ je algebra komplexných čísel nad poľom $\mathbb{R}$

2.2. Spinory, spinorová reprezentácia, spinová konexia.

Spinormi nazývame prvky komplexného vektorového priestoru V nesúceho ireducibilnú reprezentáciu zkomplexnenej Cliffordovej algebry. Evidentne je to $2^{[n/2]}$ rozmerný komplexný priestor a ako už bolo spomenuté, pre nepárne n existujú dve neekvivalentné reprezentácie. Keďže grupa $Spin(r,s)$ je definovaná ako podmnožina invertovateľných prvkov Cliffordovej algebry, máme automaticky aj reprezentáciu grupy $Spin(r,s)$.

V predchádzajúcej časti sme už predstavili reprezentáciu Cliffordovej algebry γ-maticami. Teraz môžeme ako spinory vziať matice $2^{[n/2]} \times 1$ (tzv. stĺpcové vektory), a reprezentácia Cliffordovej algebry aj grupy $Spin(r,s)$ sa realizuje ako násobenie zľava. Prvky grupy $Spin(r,s)$ a teda aj jej Lieovej algebry $spin(r,s)$ sú párne, z podmienky (2.1.4) sa potom dá ukázať, že do $spin(r,s)$ patria iba lineárne kombinácie matíc

$$J^{ab} = \frac{1}{4}[\gamma^a, \gamma^b]$$

a identity, ktorú však vylúči $\lambda(s) = 1$ (viď. (2.1.5)). V tejto báze je Lieova algebra $spin(r,s)$ daná komutátorom

$$[J^{ab}, J^{cd}] = g^{ac}J^{db} + g^{cb}J^{ad} + g^{ad}J^{bc} + g^{db}J^{ca}\,. \tag{2.2.1}$$

Pre Weylovu bázu E^a_b v $gl(n,\mathbb{R})$ ($(E^a_b)^c_d = \delta^a_d\delta^c_b$) tvoria matice $\mathcal{E}^{ab} = g^{ac}E^b_c - g^{bc}E^a_c$ bázu $so(r,s)$ a spĺňajú komutačné vzťahy

$$[\mathcal{E}^{ab}, \mathcal{E}^{cd}] = g^{ac}\mathcal{E}^{db} + g^{cb}\mathcal{E}^{ad} + g^{ad}\mathcal{E}^{bc} + g^{db}\mathcal{E}^{ca}$$

rovnaké ako pre matice J^{ab}, takže predpis

$$\rho\prime(\mathcal{E}^{ab}) = J^{ab} = \frac{1}{4}[\gamma^a, \gamma^b] \tag{2.2.2}$$

je (tzv. spinorovou) reprezentáciou algebry $so(r,s)$ v $spin(r,s)$.

Pre 1-formy konexie definované všeobecným vzťahom

$$\nabla_V e_a = \omega^b_a(V)e_b$$

definujeme 1-formy

$$\omega_{ab} = g_{ac}\omega^c_b\,,$$

ktorých komponenty $\omega_{\mu ab}$ sa pre Levi-Civitovu konexiu a ortonormálne repérne pole (stále uvžujeme iba tento prípad) často nazývajú aj spinovou konexiou. Z definičného vzťahu pre ω^b_a možno úpravami dostať užitočné vyjadrenie

$$\omega_{ab}(V) = g(\nabla_V e_b, e_a)\,, \tag{2.2.3}$$

z ktorého pomocou $\nabla g = 0$ ľahko vidno, že ω_{ab} je antisymetrické v a a b.

Pre 1-formu konexie $\omega = \omega^a_b E^b_a = \frac{1}{2}\omega_{ab}\mathcal{E}^{ab}$ s hodnotami v Lieovej algebre $so(r,s)$ potom máme

$$\rho\prime(\omega) = \frac{1}{2}\omega_{ab}\rho\prime(\mathcal{E}^{ab}) = \frac{1}{8}\omega_{ab}[\gamma^a, \gamma^b] = \frac{1}{4}\omega_{ab}\gamma^a\gamma^b\,,$$

kde sme využili antisymetriu ω_{ab}.

Označme OM hlavnú $SO^+(r,s)$-fibráciu $\pi_{OM} : OM \to M$ ortonormovaných repérnych polí s rovnakou orientáciou v časovej i priestorovej časti. Spinová konexia je na OM popísaná 1-formou ω_{OM} s hodnotami v Lieovej algebre $so^+(r,s) = so(r,s)$, pre ktorú okrem iného plaí aj $\omega|_{\mathcal{O}} = \sigma^*\omega_{OM}$, kde $\sigma : \mathcal{O} \to OM$ je ľubovoľný lokálny rez.

2.3. Diracov operátor.

Diracov operátor $\not{D}$ na variete (M, g) je v skutočnosti definovaný pomocou hlavnej $Spin(r, s)$ fibrácie $\pi_{\mathbb{S}M} : \mathbb{S}M \to M$. Vzhľadom na to, že rozklady robíme lokálne, nebudeme sa zaoberať globálnymi vlastnosťami tejto konštrukcie a môžeme sa na túto fibráciu pozerať aj ako na súčinovú fibráciu.

Dvojlistové nakrytie $\chi : Spin(r, s) \to SO^+(r, s)$ indukuje dvojlistové nakrytie $\chi' : \mathbb{S}M \to OM$ ($\pi_{\mathbb{S}M} = \pi_{OM} \circ \chi'$), ktoré má voči pravým akciam grúp $Spin(r, s)$ a $SO^+(r, s)$ na $\mathbb{S}M$ a OM príjemné správanie $\chi' \circ R_g = R_{\chi(g)} \circ \chi'$. Na $\mathbb{S}M$ definujeme 1-formu konexie $\omega_{\mathbb{S}M} := \rho'(\chi'^* \omega_{OM})$, kde ρ' je spinorová reprezentácia s definíciou (2.2.2). Keď máme veličinu $\Phi : \mathbb{S}M \to (V, \bar{\rho})$ typu $\bar{\rho}$ (t.j. $\Phi \circ R_g = \bar{\rho}(g^{-1})\Phi$, kde R je pravá akcia grupy $Spin(r, s)$ na $\mathbb{S}M$ a $\bar{\rho}$ je reprezentácia $Spin(r, s)$ vo V), kovariantná derivácia je daná všeobecným predpisom

$$D\Phi = d_{\mathbb{S}M}\Phi + \bar{\rho}'(\omega_{\mathbb{S}M})\Phi \,,$$

kde $\bar{\rho}'$ je reprezentácia algebry $spin(r, s)$ odvodená z $\bar{\rho}$. Spinorové pole Ψ je pole typu $\bar{\rho}$, kde $\bar{\rho}$ je ireducibilná reprezentácia. Pre zvyčajnú už spomínanú realizáciu stĺpcovými vektormi sme ztotožnili algebru $spin(r, s)$ s maticami J^{ab} a tým sme vlastne s maticami ztotožnili aj prvky S grupy $Spin(r, s)$. Potom však máme $\bar{\rho} = \mathbb{I}$ ($S \mapsto S$) a $\bar{\rho}' = \mathbb{I}$. Dostávame teda $D\Psi = d_{\mathbb{S}M}\Psi + \omega_{\mathbb{S}M}\Psi$ alebo

$$D\Psi = d_{\mathbb{S}M}\Psi + \frac{1}{4}(\chi'^* \omega_{OM})_{ab}\gamma^a\gamma^b\Phi \,. \tag{2.3.1}$$

Kovariantná derivácia zachováva typ $\bar{\rho}$, čiže aj $D\Psi$ spĺňa $R_S^* D\Psi = S^{-1}D\Psi$, transformačný vzťah pre D teda vyzerá $R_S^* D R_{S^{-1}}^* = S^{-1}DS$.

Na $\mathbb{S}M$ definujeme horizontálne vektorové pole $\not{e}$ s hodnotami v Cliffordovej algebre (presnejšie v lineárnom podpriestore L, ktorého bázou sú generátory $\{\gamma^a\}$) predpisom

$$\not{e}(x) = \gamma^a \hat{e}_a(x) \,, \tag{2.3.2}$$

kde $\hat{e}(x) = \{\hat{e}_a\}$ je horizontálny zdvih repéru $\chi'(x)$ (bod $\chi'(x) \in OM$ interpretujeme ako bázu $T_{\pi_{\mathbb{S}M}(x)}M$) do bodu x. Porovnaním s odsekom 2.1 zistíme, že grupa $Spin(r, s)$ predpisom $\gamma^a \to S^{-1}\gamma^a S$ ($S \in Spin(r, s)$) definuje rotáciu $\gamma^a \to A^a_b\gamma^b$ v L, kde $A = \chi(S)$. Zo vzťahu $S^{-1}\gamma^a S = A^a_b\gamma^b$ však vidno, že $\not{e}$ sa správa rovnako ako D, teda

$$\not{e}(R_S x) = \gamma^a \hat{e}_a(R_S x) = \gamma^a A^b_a \hat{e}_b(x) = S^{-1}\not{e}(x)S \,. \tag{2.3.3}$$

Diracov operátor definujeme ako

$$\not{D}\Psi = -i\, i_{\not{e}} D\Psi = -i\gamma^a i_{e_a} D\Psi \,, \tag{2.3.4}$$

kde $-i$ je vecou konvencie a $\gamma^a i_a$ sa nazýva aj Cliffordov súčin (viď. [5]) a, ako hovorí názov, má blízko k súčinu $\vee$, čo však pri práci s γ-maticami veľmi nevidno. Podľa predchádzajúceho je správanie $\not{D}$ voči pravej akcii zrejme

$$R_S^{-1}\not{D} \circ R_{S^{-1}}^* = S^{-1}\not{D}S \,. \tag{2.3.5}$$

Preklad do reči objektov na samotnej variete M sa realizuje rezom $\sigma : \mathcal{O} \to \mathbb{S}M$. Pre spinorové pole $\sigma^*\Psi$ budeme, ako je zvykom, používať označenie Ψ a rovnako nepíšeme explicitne σ^* ani pri ostatných objektoch. Vďaka $\sigma^* d_{\mathbb{S}M} = d\sigma^*$ a

$$\sigma^* \chi'^* \omega_{OM} = (\chi' \circ \sigma)^* \omega_{OM} = \omega\,,$$

kde $\chi' \circ \sigma$ je rez $\chi' \circ \sigma : \mathcal{O} \to OM$, však môžeme miesto $d_{\mathbb{S}M}$ a $\omega_{\mathbb{S}M}$ použiť d a ω, čo sú skutočne objekty zviazané s M a nie $\mathbb{S}M$. Kovariantné derivácia Ψ je

$$D\Psi = d\Psi + \rho'(\omega)\Psi = d\Psi + \frac{1}{4}\omega_{ab}\gamma^a\gamma^b\Psi \tag{2.3.6}$$

a Diracov operátor je

$$\not{D} = -i\gamma^a i_a (d + \frac{1}{4}\omega_{ab}\gamma^a\gamma^b)\,. \tag{2.3.7}$$

Aby sme D slovne odlíšili od kovariantnej derivácie ∇ v Levi-Civitovej konexií, budeme ju označovať prívlastkom spinorová.

Správanie voči pravej akcii grupy $Spin(r,s)$ je teraz nahradené správaním voči zmene rezu $\sigma(x) \to \sigma'(x) = R_{S(x)}\sigma(x)$. Potom sa uvažované objekty transformujú podľa vzťahov

$$\Psi \to S^{-1}\Psi\,, \qquad D \to S^{-1}DS \quad \text{a} \quad \not{D} \to S^{-1}\not{D}S\,. \tag{2.3.8}$$

Samotný fakt, že sa Diracov operátor skladá z dvoch častí, pričom po aplikovaní kovariantnej derivácie dostávame 1-formu, ukazuje na možnosť rozkladu podobne ako sa rozkladajú operátory v predchádzajúcej kapitole. Situácia je však trochu komplikovanejšia. V prípade neintegrovateľnosti horizontálnej distribúcie totiž nie je jasná ani len otázka, čo je horizontálna kovariantná derivácia. Najlepší príklad na demonštráciu tohto faktu je Hopfova fibrácia (viď. 2.5.2).

2.4. Rozklad Diracovho operátora pri existencii horizontálnych nadplôch.

Pripomeňme, že integrovateľnosť horizontálnej distribúcie je ekvivalentná podmienke $\hat{y} = 0$ pre pole víru $\hat{y}$.

Začnime najprirodzenejším prípadom, keď je pole pozorovateľov zviazané s repérnym poľom vzťahom $V = e_0$. Potom

$$\operatorname{hor} D = \hat{d} + \frac{1}{4}\operatorname{hor}\omega_{ab}\gamma^a\gamma^b = \hat{d} + \frac{1}{4}\operatorname{hor}\omega_{jk}\gamma^j\gamma^k + \frac{1}{2}\operatorname{hor}\omega_{0k}\gamma^0\gamma^k\,. \tag{2.4.1}$$

Rozdiel medzi LC-konexiou ∇ na variete M a LC-konexiou $\hat{\nabla}$ na horizontálnej nadploche je daný vzťahom (ktorý možno chápať aj ako definíciu K)

$$\nabla_U W = \hat{\nabla}_U W + K(U,W)$$

pre horizontálne vektory U a W a vertikálny vektor $K(U,W)$, kde K je tenzor vonkajšej krivosti. Pre formy konexie teda dostávame

$$\omega_{0k}(e_i) = g(\nabla_{e_i} e_k, e_0) = g(\hat{\nabla}_{e_i} e_k + K(e_i,e_k), e_0) = V \cdot K(e_i,e_k)$$

a

$$\omega_{jk}(e_i) = g(\nabla_{e_i} e_k, e_j) = g(\hat{\nabla}_{e_i} e_k + K(e_i, e_k), e_j) = g(\hat{\nabla}_{e_i} e_k, e_j) =: \hat{\omega}_{jk}(e_i)\,. \tag{2.4.2}$$

Keď ešte operátor hor na 1-formách napíšeme ako $e^i i_i$, dostávame

$$\mathrm{hor}\,\omega_{jk} = e^i i_i \omega_{jk} = e^i i_i \hat{\omega}_{jk} = \hat{\omega}_{jk}$$

a prvé dva členy (2.4.1) identifikujeme ako horizontálnu spinorovú kovariantnú deriváciu

$$\hat{D} := \hat{d} + \frac{1}{4}\hat{\omega}_{jk}\gamma^j\gamma^k = \hat{d} + \frac{1}{4}\hat{\omega}_{jk}\tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^k =: \tilde{D}\,, \tag{2.4.3}$$

kde sme použili definíciu (2.1.7) a rovnicu (2.1.8) a pomocou

$$e^i i_i \omega_{0k} = V \cdot K(e_i, e_k) e^i$$

upravíme hor$D$ na výsledný tvar

$$\mathrm{hor}\,D = \hat{D} + \frac{1}{2} V \cdot K(e_j, e_k) e^j \gamma^0 \gamma^k = \tilde{D} + \frac{i}{2} V \cdot K(e_j, e_k) e^j \tilde{\gamma}^k\,. \tag{2.4.4}$$

Definujme

$$\mathrm{hor}\,\not{D} := -i\gamma^a i_a \mathrm{hor}\,D\,, \qquad \hat{\not{D}} := -i\gamma^i i_i \hat{D} \quad \text{a} \quad \tilde{\not{D}} := -i\tilde{\gamma}^i i_i \tilde{D}\,. \tag{2.4.6}$$

Potom pre K rozšírené predpisom $K(U,V) := K(\mathrm{hor}\,U, \mathrm{hor}\,V)$ aj na nehorizontálne vektory definujeme

$$\mathrm{Tr}(V \cdot K) := V \cdot K(e_j, e_k) g^{jk} = V \cdot K(e_a, e_b) g^{ab} \tag{2.4.7}$$

a vďaka symetrii vonkajšej krivosti K vychádza

$$\mathrm{hor}\,\not{D} = -i\gamma^i i_i \mathrm{hor}\,D = -i\gamma^i i_i (\hat{D} + \frac{1}{2} V \cdot K(e_j, e_k) e^j \gamma^0 \gamma^k) =$$

$$= \hat{\not{D}} + \frac{i}{2} V \cdot K(e_j, e_k) \gamma^0 \gamma^j \gamma^k = \hat{\not{D}} + \frac{i}{2}\gamma^0 \mathrm{Tr}(V \cdot K) \tag{2.4.8}$$

alebo

$$-i\gamma^0 \mathrm{hor}\,\not{D} = \tilde{\not{D}} + \frac{1}{2}\gamma^0 \mathrm{Tr}(V \cdot K)\,. \tag{2.4.9}$$

Pozrime sa teraz na vertikálnu časť Diracovho operátora. Pre spinorovú kovariantnú deriváciu máme

$$\mathrm{ver}\,D = j_V i_V D = \tilde{V}(\mathcal{L}_V + \frac{1}{4}\omega_{ab}(V)\gamma^a\gamma^b) = \tilde{V}(\mathcal{L}_V - \frac{1}{2}\omega_{j0}(V)\gamma^0\gamma^j + \frac{1}{4}\omega_{jk}(V)\gamma^j\gamma^k)\,.$$

Nakoľko

$$\omega_{j0}(V) = g(\nabla_V V, e_j) = g(a, e_j) =: a_j\,,$$

táto časť je oprava za zrýchlenie poľa pozorovateľov a pre skrátenie označíme

$$a \cdot \gamma := a_j \gamma^j \,, \qquad \text{resp.} \qquad a \cdot \tilde{\gamma} := a_j \tilde{\gamma}^j \,. \tag{2.4.10}$$

Ďalšia časť, obsahujúca

$$\omega_{jk}(V) = g(\nabla_V e_k, e_j)\,,$$

je oprava za otáčanie pozorovateľa. Ukazuje sa teda, že pozorovateľ je popísaný nielen rýchlosťou, z ktorej sa odvíja zrýchlenie (a to je za absencie $\hat{y}$ jedinou kinematickou charakteristikou), ale celým repérnym poľom. Rôzne vyjadrenia $\omega_{jk}(V)$ sa nachádzajú v dodatku C.

Nakoniec pre

$$\operatorname{ver} \not{D} := -i\gamma^a i_a \operatorname{ver} D = -i\gamma^0 i_V \operatorname{ver} D \tag{2.4.11}$$

dostávame

$$\operatorname{ver} \not{D} = -i\gamma^0 \mathcal{L}_V + \frac{i}{2} a \cdot \gamma - \frac{i}{4}\omega_{jk}(V)\gamma^0\gamma^j\gamma^k \tag{2.4.12}$$

alebo

$$-i\gamma^0 \operatorname{ver} \not{D} = -\mathcal{L}_V + \frac{i}{2} a \cdot \tilde{\gamma} - \frac{1}{4}\omega_{jk}(V)\tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^k \,. \tag{2.4.13}$$

Rozklad Diracovho operátora teda vyzerá ako

$$\not{D} = \left[-i\gamma^0 \mathcal{L}_V + \frac{i}{2} a \cdot \gamma - \frac{i}{4}\omega_{jk}(V)\gamma^0\gamma^j\gamma^k\right] + \left[\hat{\not{D}} + \frac{i}{2}\gamma^0 \operatorname{Tr}(V \cdot K)\right] \tag{2.4.14}$$

alebo

$$-i\gamma^0 \not{D} = \left[-\mathcal{L}_V + \frac{i}{2} a \cdot \tilde{\gamma} - \frac{1}{4}\omega_{jk}(V)\tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^k\right] + \left[\tilde{\not{D}} + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(V \cdot K)\right] . \tag{2.4.15}$$

Keďže sme v časti 2.1 preskúmali matice $\{\tilde{\gamma}^i\}$, nie však matice $\{\gamma^i\}$ (pripomeňme, že $i \neq 0$), z operátorov $\hat{\not{D}}$ a $\tilde{\not{D}}$ ľahšie interpretujeme $\tilde{\not{D}}$ ako horizontálny operátor. Pre nepárne n je to presne štandardne používaný Diracov operátor na horizontálnej nadploche, pričom pre párne n máme oproti štandardnej situácií na horizontálnej nadploche dvakrát väčšie matice aj spinory. Vieme však, že párna podalgebra je v tomto prípade izomorfná súčtu $\mathcal{M}_{2^{n/2-1}}(\mathbb{C}) \oplus \mathcal{M}_{2^{n/2-1}}(\mathbb{C})$, takže po prechode do vhodnej bázy (táto báza matíc a súvisiaca báza vektorového priestoru spinorov nemá nič spoločné s repérnym poľom $\{e_a\}$ v $\mathfrak{X}(M)$), musia byť matice $\{\tilde{\gamma}^i\}$ blokovo diagonálne a spinor sa rozpadne na dva spinory, na ktoré Diracov operátor pôsobí zvlášť. Tieto dva spinory potom nesú neekvivalentné reprezentácie Cliffordovej algebry.

Pozrime sa teraz na rozklad Diracovho operátora voči repérnemu poľu, ktoré nie je zviazané s vektorovým poľom V. Túto bázu môžeme získať z predchádzajúcej zámenou $e_a \to e'_a = A^b_a e_b$, ktorej zodpovedá transformácia $\Psi \to \Psi' = S^{-1}\Psi$ spinorového poľa a transformácia $\not{D} \to \not{D}' = S^{-1}\not{D}S$ Diracovho operátora, pričom $S^{-1}\gamma^a S = A^a_b \gamma^b$. Pre rozklad podľa (2.4.15) dostávame

$$-iS^{-1}\gamma^0 S\not{D}' = S^{-1}\left[-\mathcal{L}_V + \frac{i}{2} a \cdot \tilde{\gamma} - \frac{1}{4}\omega_{jk}(V)\tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^k\right] S + S^{-1}\left[\tilde{\not{D}} + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(V \cdot K)\right] S \,.$$

Výpočtom zistíme

$$S^{-1}\gamma^0 S = A^0_b\gamma^b = g(V, e'_b)\gamma^b$$

a pre skrátenie zápisu označíme

$$V_a := g(V, e_a) \qquad \text{a} \qquad V \bullet \gamma := V_a\gamma^a\,,$$

kde súčin $\bullet$ zvýrazňuje, že sa jedná o súčin s γ-maticami pomocou novej bázy.

V horizontálne časti vidíme operátor $\tilde{D\!\!\!/}' = S^{-1}\tilde{D\!\!\!/}S$, ktorý je *unitárne ekvivalentný* s horizontálnym Diracovym operátorom $\tilde{D\!\!\!/}$. Napriek tomu, že zvyčajne to nie je Diracov operátor podľa definície (2.3.7), budeme ho nazývať horizontálny Diracov operátor. Keď si ešte všimneme, že $S^{-1}\mathrm{Tr}(V\cdot K)S = \mathrm{Tr}(V\cdot K)$, horizontálna časť je vybavená.

Vertikálnu časť najskôr upravíme späť na

$$-i_V(d + \frac{1}{4}\omega_{ab}\gamma^a\gamma^b)\,.$$

Ako vieme,

$$S^{-1}(d + \frac{1}{4}\omega_{ab}\gamma^a\gamma^b)S = (d + \frac{1}{4}\omega'_{ab}\gamma^a\gamma^b)\,,$$

kde ω'_{ab} sú 1-formy konexie voči novému repérnemu poľu. Potom je však horizontálna časť

$$-\mathcal{L}_V - \frac{1}{4}g(\nabla_V e'_b, e'_a)\gamma^a\gamma^b$$

a môžeme znovu hľadať časť, ktorá zodpovedá zrýchleniu. Na to rozložíme e'_a a e'_b na horizontálnu a vertikálnu časť podľa vzorca

$$e'_a = \mathrm{hor}\, e'_a + V_a V$$

a po označení $a'_a := g(a, e'_a)$ upravujeme

$$g(\nabla_V e'_b, e'_a) = g(\nabla_V e'_b, \mathrm{hor}\, e'_a + V_a V) = -g(e'_b, \nabla_V \mathrm{hor}\, e'_a) - g(e'_b, \nabla_V V)V_a =$$

$$= -g(\mathrm{hor}\, e'_b + V_b V, \nabla_V \mathrm{hor}\, e'_a) - a'_b V_a = g(\nabla_V \mathrm{hor}\, e'_b, \mathrm{hor}\, e'_a) + a'_a V_b - a'_b V_a\,.$$

Keď

$$\hat{\omega}_{ab} := g(\nabla_V \mathrm{hor}\, e'_b, \mathrm{hor}\, e'_a) \tag{2.4.16}$$

interpretujeme ako horizontálne formy konexie voči všeobecnému repérnemu poľu, môžeme ešte upraviť vertikálnu časť

$$-\mathcal{L}_V - \frac{1}{4}(a'_a V_b - a'_b V_a)\gamma^a\gamma^b - \frac{1}{4}\hat{\omega}_{ab}(V)\gamma^a\gamma^b = -\mathcal{L}_V + \frac{1}{4}[V\bullet\gamma, a\bullet\gamma] - \frac{1}{4}\hat{\omega}_{ab}(V)\hat{\gamma}^a\hat{\gamma}^b\,,$$

kde

$$\hat{\gamma}^a := -\frac{i}{2}[V\bullet\gamma, \gamma^a] \tag{2.4.17}$$

nazveme horizontálnymi γ-maticami, lebo pre horizontálne vektory U a W platí

$$\{U\bullet\hat{\gamma}, W\bullet\hat{\gamma}\} = 2g(U, W)\,. \tag{2.4.18}$$

Tento vzťah je spolu s rovnosťou $\hat{\omega}_{ab}\gamma^a\gamma^b = \hat{\omega}_{ab}\hat{\gamma}^a\hat{\gamma}^b$ overený v dodatku D.

Pre rozklad Diracovho operátora nakoniec dostávame

$$-i(V\bullet\gamma)\not{D} = \left[-\mathcal{L}_V + \frac{i}{2}a\bullet\hat{\gamma} - \frac{1}{4}\hat{\omega}_{ab}(V)\hat{\gamma}^a\hat{\gamma}^b\right] + \left[\tilde{\not{D}} + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(V\cdot K)\right]. \quad (2.4.19)$$

Keby sme vychádzali zo vzťahu (2.4.14), dostali by sme

$$\not{D} = i(V\bullet\gamma)\left[-\mathcal{L}_V + \frac{i}{2}a\bullet\hat{\gamma} - \frac{1}{4}\hat{\omega}_{ab}(V)\hat{\gamma}^a\hat{\gamma}^b\right] + \left[\hat{\not{D}} + i(V\bullet\gamma)\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(V\cdot K)\right], \quad (2.4.20)$$

kde $\hat{\not{D}} = S^{-1}\tilde{\not{D}}S$, čo však možno rýchlejšie nahliadnuť vynásobením (2.4.19) výrazom $i(V\bullet\gamma)$ použitím triviálneho $(V\bullet\gamma)^2 = 1$.

Znovu vieme v obidvoch rozkladoch identifikovať deriváciu v smere V, časti za zrýchlenie, za otáčanie repérneho poľa a za vonkajšiu krivosť, čiže podľa (E.2) tiež expanziu objemu, ako aj horizontálny Diracov operátor $\tilde{\not{D}}$, resp. $\hat{\not{D}}$, ktorý je však pre repérne pole nezávislé od V iba unitárne ekvivalentný s Diracovym operátorom podľa definície (2.3.7).

2.5. Príklady.

V príkladoch miesto indexu 0 používame n $(= 3)$, preto indexy a, b, c idú od 1 po n a indexy i, j idúce od 1 po $n-1 = 2$. Ak je repérne pole $\{e_a\}$ zviazané s vektorové poľom V, je to vzťahom $V = e_n$.

2.5.1. Sféra S^2 v $E^3\setminus\{0\}$.

Uvažujme v $E^3\setminus\{0\}$ sférické ortonormálne repérne pole $e_1 = \frac{1}{r}\partial_\vartheta$, $e_2 = \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi$ a $e_3 = \partial_r$. Formy konexie ω_{ab} voči tomuto poľu vychádzajú

$$\omega_{12} = -\omega_{21} = -\cos\vartheta d\varphi\,, \qquad \omega_{13} = -\omega_{31} = d\vartheta \quad \text{a} \quad \omega_{23} = -\omega_{32} = \sin\vartheta d\varphi\,.$$

Pre $V = \partial_r$ a $\tilde{V} = dr$ vidno, že $\omega_{ij}(V) = 0$. Navyše aj $a = 0$ (viď. príklad 1.6.2), takže rozklad Diracovho operátora $\not{D}_s$ v $E^3\setminus\{0\}$ voči sférickému repérnemu poľu pre ľubovoľné γ-matice (napr. Pauliho matice) s použitím

$$\mathrm{Tr}(V\cdot K) = g(\nabla_1 e_1, e_0) + g(\nabla_2 e_2, e_0) = \omega_{01}(\frac{1}{r}\partial_\vartheta) + \omega_{02}(\frac{1}{r\sin\vartheta}\partial\varphi) = -\frac{1}{r} - \frac{1}{r} = -\frac{2}{r}$$

vychádza

$$-i\gamma^0\not{D}_s = -\mathcal{L}_V + \tilde{\not{D}} + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(V\cdot K) = -\mathcal{L}_V + \tilde{\not{D}} - \frac{1}{r}\,.$$

Rozklad Diracovho operátora $\not{D}_k = -i\sigma^a\partial_a$ pre kartézske repérne poľe (a nulové formy konexie ω_{ab}, teda pomocou $a = 0$ aj nulové $\hat{\omega}_{ab}$) je

$$-i(V\bullet\sigma)\not{D}_k = -\mathcal{L}_V + \tilde{\not{D}} - \frac{1}{r}\,.$$

Keď teraz ohraničíme pôsobenie $\not{D}_k$ iba spinorové polia *konštantné v lúčoch* (integrálnych krivkách vektorového poľa $V = \partial_r$), ktoré môžeme stotožniť so spinorovými poľami na sfére S^2, použitím

$$(V\bullet\sigma)\sigma^a\partial_a = \frac{1}{r}x_b\sigma^b\sigma^a\partial_a = \frac{x^a}{r}\partial_a + \frac{i}{r}x_a\varepsilon^{ab}{}_c\sigma^c\partial_b = \partial_r - \frac{i}{r}\sigma^c R_c$$

a vynechaním derivácie v smere V dostávame na sfére s polomerom r horizontálny Diracov operátor

$$\tilde{\not{D}}(r) = \frac{1}{r}(i\sigma^a R_a + 1)\,,$$

kde

$$R_a = -\varepsilon_{ab}{}^c x^b \partial_c$$

sú generátory rotácií. Na S^2 $(r = 1)$ teda dostávame Diracov operátor

$$\not{D}_{S^2} = i\sigma^a R_a + 1\,.$$

Začínali sme v nepárnorozmernom priestore, takže sa nevyskytne rozštiepenie tohoto operátora na dve časti. Zopakujme však, že i keď to nie je Diracov operátor podľa definície (2.3.7), je s takýmto Diracovym operátorom unitárne ekvivalentný. Tento Diracov operátor je známy napríklad z [4], čo však tiež nie je jeho prvý výskyt (pozri citácie v [4]).

2.5.2. Hopfova fibrácia.

Uvažujme Hopfovu fibráciu $\pi : SU(2) \to S^2$, pričom budeme používať objekty zavedené v príklade 1.6.1. Rozkladom

$$dA\,A^{-1} = dA\,A^{+} = f^a E_a$$

navyše definujme ešte bázu pravoinvariantných 1-foriem a duálnu bázu pravoinvariantných vektorových polí

$$\begin{aligned}
f^1 &= \sin\varphi d\vartheta - \sin\vartheta\cos\varphi d\psi & \qquad f_1 &= -\sin\varphi\partial_\vartheta - \operatorname{cotg}\vartheta\cos\varphi\partial_\varphi + \tfrac{\cos\varphi}{\sin\vartheta}\partial_\psi \\
f^2 &= \cos\varphi d\vartheta + \sin\vartheta\sin\varphi d\psi & f_2 &= \cos\varphi\partial_\vartheta - \operatorname{cotg}\vartheta\sin\varphi\partial_\varphi + \tfrac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}\partial_\psi \\
f^3 &= d\varphi + \cos\vartheta d\psi & f_3 &= \partial_\varphi
\end{aligned}$$

a metrický tenzor sa dá napísať aj ako

$$g = f^1 \otimes f^1 + f^2 \otimes f^2 + f^3 \otimes f^3\,.$$

Formy LC-konexie ω_{ab}, resp. ω'_{ab}, voči ortonormálnej báze e_a, resp. f_a, vychádzajú

$$\omega_{ab} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}e^c\,, \qquad \text{resp.} \qquad \omega'_{ab} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{abc}f^c\,.$$

Diracov operátor pre $\gamma^a = -\sigma^a$ voči báze e_a, resp. f_a, je

$$\not{D} = -i\gamma^a i_a(d + \frac{1}{4}\omega_{bc}\gamma^b\gamma^c) = i\sigma^a e_a - \frac{i}{8}\varepsilon_{abc}\sigma^a\sigma^b\sigma^c = i\sigma^a e_a - \frac{6i}{8}\varepsilon_{123}\sigma^1\sigma^2\sigma^3$$

teda

$$\not{D} = i\sigma^a e_a + \frac{3}{4}\,, \qquad \text{resp.} \qquad \not{D}' = i\sigma^a f_a + \frac{3}{4}\,.$$

Projekcia π zobrazuje vektorové polia $\{f_a\}$ na generátory rotácií

$$\begin{aligned}
R_1 &= -\sin\varphi\partial_\vartheta - \operatorname{cotg}\vartheta\cos\varphi\partial_\varphi \\
R_2 &= \cos\varphi\partial_\vartheta - \operatorname{cotg}\vartheta\sin\varphi\partial_\varphi \\
R_3 &= \partial_\varphi
\end{aligned}$$

a tak by sa po porovnaní s predchádzajúcim príkladom mohlo zdať, že stačí vziať projekciu

$$\pi_* \not{D} = i\sigma^a \pi_* f_i + \pi_* \frac{3}{4} = i\sigma^a R_a + \frac{3}{4}$$

a mali by sme dostať Diracov operátor na sfére, ktorý sa veľmi podobá na Diracov operátor z predchádzajúcej úlohy. V skutočnosti je to však ináč. Keby sme totiže vzali napríklad formy konexie voči repérnemu poľu $\{e_a\}$, za horizontálne formy konexie je prirodzené prehlásiť $\mathrm{hor}\,\omega_{ij}$, kde $i, j = 1, 2$. Tie však evidentne vychádzajú nulové na rozdiel od foriem konexie na sfére (viď. príklad 2.5.1, $\omega_{12} = -\omega_{21} = -\cos\vartheta d\varphi$).

Podľa definície LC-konexie vzťahom

$$g(\nabla_U V, W) = \frac{1}{2}\{Ug(V, W) + Vg(U, W) - Wg(U, V) +$$

$$+ g([U, V], W) - g([U, W], V) - g(U, [V, W])\}$$

pri počítaní foriem konexie voči ortonormálnemu repérnemu poľu dostaneme

$$\omega_{ab}(e_c) = \frac{1}{2}\{g([e_c, e_b], e_a) - g([e_c, e_a], e_b) - g(e_c, [e_b, e_a])\}\,.$$

Keď sa vrátime k Hopfovej fibrácii, najskôr si uvedomíme, že pre porovnanie konexií na S^2 a $SU(2)$ nemôžeme vziať na $SU(2)$ ľavoinvariantné repérne pole e_1, e_2, e_3 (ale chceme repérne pole zviazané s $V = e_3$), lebo $\pi_* e_1(x)$, resp. $\pi_* e_2(x)$, dáva rôzne výsledky pre rôzne body x toho istého fíbra. Tento problém rýchlo vyriešime, keď miesto e_1 a e_2 vezmeme

$$e_1' = \cos\psi e_1 - \sin\psi e_2 = -\frac{1}{\sin\vartheta}\partial_\varphi + \operatorname{cotg}\vartheta\partial_\psi \qquad \text{a} \qquad e_2' = \sin\psi e_1 + \cos\psi e_2 = \partial_\vartheta$$

a pre projekcie dostaneme

$$\pi_* e_1' = -\frac{1}{\sin\vartheta}\partial_\varphi \qquad \text{a} \qquad \pi_* e_2' = \partial_\vartheta\,,$$

čiže tiež ortonormálne repérne pole. Keď spočítame komutátory

$$[e_1', e_2'] = -\frac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\partial_\varphi + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\partial_\psi \qquad \text{a} \qquad [\pi_* e_1', \pi_* e_2'] = -\frac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\partial_\varphi\,,$$

vidíme, že

$$\pi_*[e_1', e_2'] = [\pi_* e_1', \pi_* e_2']\,,$$

čo začína vyzerať sľubne. Potom už ľahko spočítame

$$\frac{1}{2}\{g([e_1', e_2'], e_1') - g([e_1', e_1'], e_2') - g(e_1', [e_2', e_1'])\} = g([e_1', e_2'], e_1') = \operatorname{cotg}\vartheta\,,$$

$$\frac{1}{2}\{g([e_2', e_2'], e_1') - g([e_2', e_1'], e_2') - g(e_2', [e_2', e_1'])\} = g(e_2', [e_1', e_2']) = 0\,,$$

$$\frac{1}{2}\{h([\pi_* e_1', \pi_* e_2'], \pi_* e_1') - h([\pi_* e_1', \pi_* e_1'], \pi_* e_2') - h(\pi_* e_1', [\pi_* e_2', \pi_* e_1'])\} =$$
$$= h([\pi_* e_1', \pi_* e_2'], \pi_* e_1') = \operatorname{cotg} \vartheta$$

a

$$\frac{1}{2}\{h([\pi_* e_2', \pi_* e_2'], \pi_* e_1') - h([\pi_* e_2', \pi_* e_1'], \pi_* e_2') - h(\pi_* e_2', [\pi_* e_2', \pi_* e_1'])\} =$$
$$= h(\pi_* e_2', [\pi_* e_1', \pi_* e_2']) = 0\,.$$

Vidíme teda, že skutočne môžeme pre 1-formy konexie ω_{ab} voči repérnemu poľu e_1', e_2', e_3 interpretovať $\hat{\omega}_{12} = \operatorname{hor} \omega_{12}$ ako horizontálnu 1-formu konexie (pre $i, j = 1, 2$ je vďaka antisymetrii efektívne len jedna 1-forma konexie), lebo je pull-backom 1-formy konexie na sfére.

Skúsme teraz pre repérne pole f_1, f_2, f_3 použiť vzťah (2.4.20) až na to, že máme antisymetrický tenzor vonkajšej krivosti (pozri nižšie), nahradíme teda $\operatorname{Tr}(V \cdot K)$ pôvodým $V \cdot K(f_a, f_b)\gamma^a\gamma^b$. Pre vonkajšiu krivosť máme

$$V \cdot K(f_a, f_b) := g(\nabla_{\operatorname{hor} f_a} \operatorname{hor} f_b, V) = -g(\operatorname{hor} f_b, \nabla_{\operatorname{hor} f_a} V)\,.$$

Keďže $\operatorname{hor} f_b = f_b - V_b V$ a $g(V_b V, \nabla_{\operatorname{hor} f_a} V) = V_b g(V, \nabla_{\operatorname{hor} f_a} V) = 0$, môžeme vynechať operátor hor na f_b. Vďaka $\mathcal{F}(SU(2))$-linearite kovariantnej derivácie vynechanie operátora hor na f_a pridá iba člen úmerný $\nabla_V V = a$, čiže 0, preto vynecháme aj tento. Spätným prehodením ∇_{f_a} na f_b potom dostaneme

$$V \cdot K(f_a, f_b) = g(\nabla_{f_a} f_b, V) = g(\nabla_{f_a} f_b, f_c) f^c(V) = \omega_{cb}(f_a) V^c = -\frac{1}{2}\varepsilon_{cba} V^c\,.$$

Potom po dosadení $\gamma^a\gamma^b = (-\sigma^a)(\sigma^b) = \sigma^a\sigma^b$ vychádza

$$V \cdot K(f_a, f_b)\gamma^a\gamma^b = \frac{1}{2} V^c \varepsilon_{abc}\sigma^a\sigma^b$$

a vďaka antisymetrii ε_{abc} nahradíme $\sigma^a\sigma^b$ polovicou komutátora, teda $i\varepsilon^{ab}{}_d\sigma^d$ a po použití $\varepsilon_{abc}\varepsilon^{ab}{}_d = 2g_{cd}$ získame

$$V \cdot K(f_a, f_b)\gamma^a\gamma^b = i(V \bullet \sigma)\,.$$

Potom však časť vzťahu (2.4.20) zodpovedajúca vonkajšej krivosti je

$$i(V \bullet \gamma)\frac{1}{2} V \cdot K(f_a, f_b)\gamma^a\gamma^b = -i(V \bullet \sigma)\frac{1}{2} i(V \bullet \sigma) = \frac{1}{2}\,.$$

Vo vertikálnej časti podobne dostávame (radšej použijeme γ^a ako $\hat{\gamma}^a$)

$$-i(V \bullet \gamma)\frac{1}{4}\hat{\omega}_{ab}(V)\gamma^a\gamma^b = i(V \bullet \sigma)\frac{1}{4} g(\nabla_V \operatorname{hor} f_b, \operatorname{hor} f_a)\sigma^a\sigma^b =$$

$$= i(V \bullet \sigma)\frac{1}{4} g(\nabla_V f_b, f_a)\sigma^a\sigma^b = i(V \bullet \sigma)\frac{1}{4} V^c g(\nabla_{f_c} f_b, f_a)\sigma^a\sigma^b =$$

$$= i(V \bullet \sigma)\frac{1}{4}V^c(-\frac{1}{2}\varepsilon_{abc})\sigma^a\sigma^b = -i(V \bullet \sigma)\frac{1}{4}i(V \bullet \sigma) = \frac{1}{4}\,.$$

Pre rozklad Diracovho operátora podľa (2.4.20) nakoniec máme

$$\not{D} = i(V \bullet \sigma)\mathcal{L}_V + \frac{1}{4} + \hat{\not{D}} + \frac{1}{2} = i(V \bullet \sigma)\mathcal{L}_V + \hat{\not{D}} + \frac{3}{4}\,.$$

Po dosadení explicitného vyjadrenia $\not{D} = i\sigma^a f_a + \frac{3}{4}$ vidíme, že

$$\hat{\not{D}} = i\sigma^a f_a - i(V \bullet \sigma)\mathcal{L}_V = i\sigma^a(f_a - V_a V) = i\sigma^a \mathrm{hor}\, f_a = i\sigma^a \hat{R}_a\,,$$

kde $\{\hat{R}_a\}$ sú horizontálne zdvihy generátorov rotácií. Ako vidíme, stále nedokážeme stotožniť Diracov operátor na sfére S^2 s horizontálnym Diracovym operátorom na $SU(2)$.

Keď si všimneme, že $\{V_a\}$ a teda aj $V \bullet \sigma$ je nezávislé od ψ, ľahko nahliadneme, že pôsobenie Diracovho operátora $\not{D}_{S^2} = i\sigma^a R_a + 1$ na spinory v S^2 možno ekvivalentne popísať pôsobením operátora $\hat{\not{D}} + i(V \bullet \sigma)V = i\sigma^a f_a$ na spinory v $SU(2)$ spĺňajúce

$$\Psi(\vartheta, \varphi, \psi) = e^{-i\psi(V \bullet \sigma)}\Psi(\vartheta, \varphi, 0)\,.$$

Táto konštrukcia je však veľmi násilná a používa špecifické vlastnosti Hopfovej fibrácie. Nedáva preto žiadny návod na prípadné zovšeobecnenie. Dokonca už horizontálne formy konexie sme dokázali identifikovať iba pre špeciálne repérne pole (V a horizontálny zdvih repérneho poľa na S^2) a vo všeobecnom prípade zatiaľ nie je jasné ani to, či je definícia (2.4.16) opodstatnená. Navyše ani pre fibráciu $\pi : M \to N$, keď môžeme definovať horizontálne 1-formy konexie, nevieme nájsť Diracov operátor na báze N pomocou Diracovho operátora na M. Táto téma teda ostáva ešte otvorená a vyžaduje vyžaduje si ďalšie štúdium.

KAPITOLA 3

DIRACOVA-KÄHLEROVA ROVNICA

Diracov operátor $\not{D} \sim \Box^{-\frac{1}{2}}$ má v diferenciálnej geometrí analógiu $D \sim d - \delta$, nakoľko aj $(d-\delta)^2 = \Delta$, kde Laplaceov-deRhamov operátor Δ je zovšeobecnený D'Alambertov operátor $\Box$. Preto $d - \delta$ nazývame aj Diracov-Kählerov operátor. Zatiaľ, čo však Diracov operátor $\not{D}$ pôsobí na spinorové polia, operátor $d - \delta$ pôsobí v priestore nehomogénnych diferenciálnych foriem. Pozrime sa teda najkôr na ich súvis.

Budeme uvažovať komplexné diferenciálne formy, čo je v zhode s porovnávanými komplexnými Diracovskými spinormi.

3.1. Kovariantne konštantná nehomogénna forma Z.

Pre ortonormálne repérne pole $\{e_a\}$, pridružené korepérne pole $\{e^a\}$ a reprezentáciu $\{\gamma^a\}$ Cliffordovej algebry definujme vektorové pole $\not{e}$, resp. 1-formu $\backslash\!\!\!e$, s hodnotami v Cliffordovej algebre vzťahom

$$\not{e} := \gamma^a e_a\,, \qquad \text{resp.} \qquad \backslash\!\!\!e := \gamma^b g_{ba} e^a = \gamma_a e^a\,,$$

a nehomogénnu formu Z s hodnotami v Cliffordovej algebre vzťahom

$$Z := \exp(\backslash\!\!\!e) = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \backslash\!\!\!e^p = \mathbb{I} + \backslash\!\!\!e + \frac{1}{2!} \backslash\!\!\!e \wedge \backslash\!\!\!e + \cdots + \frac{1}{n!} \underbrace{\backslash\!\!\!e \wedge \cdots \wedge \backslash\!\!\!e}_{n \text{ krát}}\,.$$

Platí

$$i^a \backslash\!\!\!e = \gamma^a\,,$$

$$i^a \backslash\!\!\!e^p = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \backslash\!\!\!e^k \gamma^a \backslash\!\!\!e^{p-1-k}$$

a ďalej použitím

$$\{\gamma^a, \backslash\!\!\!e\} = 2e^a \tag{3.1.1}$$

a

$$\{e^a, \backslash\!\!\!e\} = 0$$

dostaneme po prekomutovaní γ^a doľava, resp. doprava,

$$i^a \backslash\!\!\!e^p = p\gamma^a \backslash\!\!\!e^{p-1} - p(p-1) j^a \backslash\!\!\!e^{p-2}\,, \tag{3.1.2}$$

resp.

$$i^a \backslash\!\!\!e^p = (-1)^{p-1} p \backslash\!\!\!e^{p-1} \gamma^a + p(p-1) j^a \backslash\!\!\!e^{p-2}\,. \tag{3.1.3}$$

Pre $i^a Z$ teda platí

$$i^a Z = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}(p\gamma^a \not{e}^{p-1} - p(p-1)j^a \not{e}^{p-2}) = \gamma^a \sum_{q=0}^{n-1} \frac{1}{q!}\not{e}^q - j^a \sum_{q=0}^{n-2} \not{e}^q \,.$$

Keď si ešte všimneme, že $\gamma^a\gamma_a = 1$ (bez sčítania) a teda

$$\gamma^a \frac{1}{n!}\not{e}^n = \gamma^a\gamma_a \underbrace{\gamma_1 \cdots \gamma_n}_{n-1\,,\text{ okrem } a} e^a \wedge \underbrace{e^1 \wedge \cdots \wedge e^n}_{n-1\,,\text{ okrem } a} = j^a \frac{1}{(n-1)!}\not{e}^{n-1} \,,$$

môžeme hornú hranicu sumácie posunúť o 1. Navyše je $j^a \not{e}^n \equiv 0$, lebo je to $n+1$-forma na n-rozmernej variete, čo nás necháva zhrnúť predchádzajúce výpočty do vzťahu

$$i^a Z = \gamma^a Z - j^a Z \,,$$

resp. (ako vyjde použitím (3.1.3))

$$i^a Z = \eta Z \gamma^a + j^a Z \,.$$

Tieto vlastnosti formy Z budeme neskôr potrebovať upravené na tvar

$$(i^a + j^a)Z = \gamma^a Z \,, \tag{3.1.4}$$

$$(i^a - j^a)Z = \eta Z \gamma^a \tag{3.1.5}$$

a nakoniec ešte

$$j^a Z = \frac{1}{2}(\gamma^a Z - \eta Z \gamma^a) \,. \tag{3.1.6}$$

Pre párne n možno komponenty $Z^a_b(x)$ formy $Z(x)$ interpretovať ako bázu priestoru $\Lambda T_x M^*$. Porovnanie vzťahov (3.1.4) a (2.1.1), resp. (3.1.5) a (2.1.2), potom ukazuje súvis medzi ľavým, resp. pravým, Cliffordovym násobením a maticami $\{\gamma^a\}$ pre túto bázu. Pre nepárne n sú však $Z^a_b(x)$ iba polovicou bázy $\Lambda T_x M^*$, ako druhú polovicu môžeme vziať $(\eta Z(x))^a_b$. To ukazuje aj na druhý aspekt matíc $\{\gamma^a\}$, konkrétne, že pre nepárne n generujú iba jednu komponentu univerzálnej Cliffordovej algebry.

Pozrime sa teraz na kovariantnú deriváciu $\nabla_a Z$ formy Z. Najskôr z vyjadrenia (2.2.3) foriem konexie ω_{ab} použitím $\nabla_a g = 0$, $\nabla_a g^{bc} = 0$ a $V = e^d(V)e_d$ dostaneme

$$(\nabla_a e^b)(V) = \nabla_a(e^b(V)) - e^b(\nabla_a V) = \nabla_a(g^{bc}g(e_c, V)) - g^{bc}g(e_c, \nabla_a V) =$$

$$= g^{bc}g(\nabla_a e_c, V) = g^{bc}g(\nabla_a e_c, e_d)e^d(V) \,,$$

čiže

$$\nabla_a e^b = g^{bc}\omega_{dc}(e_a)e^d \,,$$

$$\nabla_a \not{e} = \gamma^c \omega_{dc}(e_a)e^d$$

a

$$\nabla_a \not{e}^p = \sum_{k=0}^{p-1} \not{e} \wedge \nabla_a \not{e} \wedge \not{e}^{p-1-k} = \sum_{k=0}^{p-1} \not{e} \wedge \gamma^c \omega_{dc}(e_a)e^d \wedge \not{e}^{p-1-k} \,.$$

Keď použitím antikomutačného vzťahu (3.1.1) premiestnime γ^c spolu s $\omega_{dc}(e_a)e^d$ na začiatok, dostávame

$$\nabla_a \not{e}^p = p\gamma^c \omega_{dc}(e_a)e^d \wedge \not{e}^{p-1} - p(p-1)\omega_{bc}e^b \wedge e^c \wedge \not{e}^{p-2} \,.$$

pre $\nabla_a Z$ dostávame

$$\nabla_a Z = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}(p\gamma^c \omega_{dc}(e_a)e^d \wedge \not{e}^{p-1} - p(p-1)\omega_{bc}e^b \wedge e^c \wedge \not{e}^{p-2}) =$$

$$= \sum_{q=0}^{n-1} \frac{1}{q!}\omega_{bc}(e_a)\gamma^c e^b \wedge \not{e}^q - \sum_{q=0}^{n-2} \frac{1}{q!}\omega_{bc}(e_a)e^b \wedge e^c \wedge \not{e}^q \,.$$

Keď si uvedomíme, že zvýšením horných hraníc súčtov na n nič nepridáme, prichádzame k medzivýsledku

$$\nabla_a Z = \omega_b c(e_a)e^b \wedge (\gamma^c - e^c) \wedge Z \,.$$

Trojnásobným použitím (3.1.6) dostaneme

$$\nabla_a Z = \frac{1}{2}\omega_{bc}(e_a)e^b \wedge (\gamma^c Z + \eta Z \gamma^c) = \frac{1}{4}\omega_{bc}(e_a)(\gamma^c\gamma^b Z - \gamma^c \eta Z \gamma^b - \gamma^b \eta Z \gamma^c + Z\gamma^b\gamma^c)$$

a vďaka antisymetrii ω_{bc} v indexoch b a c zostáva

$$\nabla_a Z = \frac{1}{4}\omega_{bc}(e_a)(\gamma^c\gamma^b Z + Z\gamma^b\gamma^c) \,. \tag{3.1.7}$$

Ako ukáže krátky výpočet v súradniciach, vonkajšiu deriváciu možno vyjadriť ako

$$d = j^a \nabla_a$$

pre ľubovoľnú symetrickú konexiu (bez torzie), špeciálne teda aj pre LC-konexiu, pre ktorú navyše platí aj

$$\delta = -i^a \nabla_a \,.$$

Pomocou (3.1.4) a (3.1.7) teda spočítame

$$(d - \delta)Z = \frac{1}{4}\omega_{bc}(e_a)(\gamma^c\gamma^b\gamma^a Z + \gamma^a Z \gamma^b \gamma^c) \tag{3.1.8}$$

a pomocou (3.1.5) a (3.1.7)

$$(d + \delta)Z = -\frac{1}{4}\omega_{bc}(e_a)(\gamma^c\gamma^b \eta Z \gamma^a + \eta Z \gamma^a \gamma^b \gamma^c) \,. \tag{3.1.9}$$

Spočítajme ešte DZ, čiže

$$DZ = dZ + [\rho(\omega) \wedge Z] = dZ + \left[\frac{1}{4}\omega_{bc}(e_a)e^a\gamma^b\gamma^c \wedge Z\right] \,.$$

Použitím

$$\gamma^a\gamma^b\gamma_l = 2\gamma^a\delta^b_l - 2\delta^a_l\gamma^b + \gamma_l\gamma^a\gamma^b$$

dostávame

$$[\gamma^b\gamma^c, \gamma_l \dots \gamma_m] = 2\{(\gamma^b\delta^c_l - \delta^b_l\gamma^c)\dots\gamma_m + \dots + \gamma_l\dots(\gamma^b\delta^c_m - \delta^b_m\gamma^c)\}$$

a následne

$$\left[\frac{1}{4}\omega_{bc}(e_a)e^a\gamma^b\gamma^c \wedge \not{e}^p\right] = \frac{1}{4}e^a \wedge \sum_{k=0}^{p-1}\not{e}^k\omega_{bc}(e_a)2(\gamma^b\delta^c_l - \delta^b_l\gamma^c)e^l\not{e}^{p-1-k} =$$

$$= e^a \wedge \sum_{k=0}^{p-1}\not{e}^k\omega_{bc}(e_a)\gamma^b e^c\not{e}^{p-1-k} = \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\not{e}^k\omega_{bc}(e_a)\gamma^b e^a \wedge e^c\not{e}^{p-1-k}\,,$$

kde sme vďaka antisymetrii ω_{bc} združili členy $\gamma^b\delta^c_l$ a $-\delta^b_l\gamma^c$. Teraz ostáva už iba spočítať

$$d\not{e}^p + \left[\frac{1}{4}\omega_{bc}(e_a)e^a\gamma^b\gamma^c \wedge \not{e}^p\right] = \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\not{e}^k(d\not{e} + \omega_{bc}(e_a)\gamma^b e^a \wedge e^c)\not{e}^{p-1-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\not{e}^k\gamma_b(de^b + \omega^b_{\ c} \wedge e^c)\not{e}^{p-1-k}\,,$$

čo je pri nulovej torzii rovné 0 podľa Cartanovych štruktúrnych rovníc. Z je teda spinovo (v zmysle D, nie ∇) kovariantne konštantná nehomogénna forma s hodnotami v Cliffordovej algebre.

Poznamenajme ešte, že akcia

$$Z \mapsto S^{-1}ZS$$

prvku S grupy $Spin(r,s)$ na Z zodpovedá zmene bázy $e_a \mapsto e'_a = A^b_a e_b$ maticou $A = \chi(S)$, čo sa dá ľahko nahliadnuť pomocou výpočtu $S^{-1}\not{e}S$ na novej báze

$$S^{-1}\not{e}S(e'_a) = S^{-1}\gamma^c g_{cd}e^d S(A^b_a e_b) = \gamma^e A^c_e g_{cd}e^d(A^b_a e_b) = \gamma^e A^c_e g_{cb}A^b_a = \gamma^e g_{ea}\,,$$

kde posledná rovnosť platí, lebo $A \in SO^+(r,s)$. Potom už zrejme $S^{-1}\not{e}S = \gamma_a e'^a$, kde $\{e'^a\}$ je príslušne transformované korepérne pole.

3.2. Súvis $d-\delta$ a $\not{D}$.

Pre spinorové polia Ψ a Φ zostrojme nehomogénnu formu

$$\phi := \Phi^+ Z\Psi$$

a použitím (3.1.4) a (3.1.8) dostaneme

$$i(d-\delta)\phi = i(j^a + i^a)\nabla_a(\Phi^+ Z\Psi) =$$

$$= i(j^a + i^a)((\nabla_a \Phi^+) Z\Psi) + \Phi^+(\nabla_a Z)\Psi + \Phi^+ Z \nabla_a \Psi) =$$
$$= i(e_a\Phi^+)\gamma^a Z\Psi + i\Phi^+((d-\delta)Z)\Psi + i\Phi^+\gamma^a Z e_a \Psi =$$
$$= i((e_a\Phi^+)\gamma^a + \Phi^+ \frac{1}{4}\omega_{bc}(e_a)\gamma^c\gamma^b\gamma^a) Z\Psi + i\Phi^+\gamma^a Z(e_a + \frac{1}{4}\omega_{bc}(e_a)\gamma^b\gamma^c)\Psi\,.$$

Po identifikovaní známych výrazov

$$i(d-\delta)\phi = (\not{D}^+\Phi)^+ Z\Psi + i\Phi\gamma^a Z i_a D\Psi\,,$$

kde $\not{D}^+$ je Diracov operátor s hermitovsky združenými maticami γ^a, ktoré však evidentne spĺňajú tie isté antikomutačné vzťahy $\{\gamma^{a+}, \gamma^{b+}\} = g^{ab}$, čiže sú tiež reprezentáciou Cliffordovej algebry.

Obdobný výpočet možno spraviť aj pre

$$i(d+\delta)\phi = \Phi^+\eta Z \not{D}\Psi - i(i_a D^+\Phi)^+\eta Z\gamma^a\Psi\,.$$

Vidno teda, že operátory $i(d-\delta)$ a $i\eta(d+\delta)$ pôsobia sčasti ako Diracov operátor. Ak chceme dostať ekvivalenciu medzi Diracovou-Kählerovou rovnicou

$$(i(d-\delta)+m)\phi = 0\,, \qquad \text{resp.} \qquad (i\eta(d+\delta)+m)\phi = 0\,, \tag{3.2.1}$$

a Diracovou rovnicou

$$(\not{D}^+ + m)\Phi = 0\,, \qquad \text{resp.} \qquad (\not{D} + m)\Psi = 0\,, \tag{3.2.2}$$

musíme sa obmedziť na podpriestory priestoru nehomogénnych foriem invariantné voči týmto operátorom. V prípade operátora $i(d-\delta)$ je to zrejme podpriestor tvorený formami typu $\phi = \Phi^+ Z\Psi$, kde Ψ je pevne zvolené spinorové pole vyhovujúce podmienke

$$\gamma^a Z i_a D\Psi = 0 \tag{3.2.3}$$

a pre operátor $i\eta(d+\delta)$ sú to formy typu $\phi = \Phi^+ Z\Psi$, kde Φ spĺňa

$$(e_a D^+\Phi^+)\eta Z\gamma^a = 0\,. \tag{3.2.4}$$

Ak má platiť rovnica (3.2.3) pre nehomogénnu formu, pri každom bázovom vektore $e^a \wedge \cdots \wedge e^b$ musí byť nula. To však znamená že musia platiť rovnice, ktoré vzniknú z (3.2.3) nahradením Z výrazom $\gamma_{[a} \dots \gamma_{b]}$. Tieto kombinácie γ-matíc však tvoria bázu Cliffordovej algebry ako lineárneho priestoru, takže musí pre každú maticu M platiť aj rovnica (teraz ju už napíšeme s indexami na maticiach)

$$(\gamma^a)^i_j M^j_k (i_a D\Psi)^k = 0\,,$$

ktorá je lineárnou kombináciou predtým uvažovaných rovníc. Špeciálne táto rovnica platí pre matice M tvaru $M^j_k = (\gamma_A)^j_I \delta^K_k$, kde I, A a K sú konštanty, a lineárnou kombináciou takýchto rovníc je aj rovnica

$$\delta^I_i (\gamma^a)^i_j (\gamma_A)^j_I \delta^K_k (i_a D\Psi)^k = 0$$

ktorá je vďaka $\delta^I_i(\gamma^a)^i_j(\gamma_A)^j_I = \mathrm{Tr}(\gamma^a\gamma_A) = n\delta^a_A$ ekvivalentná s rovnicou

$$i_A D\Psi = 0\,.$$

Tá má platiť pre všetky A, takže môžeme povedať, že rovnica (3.2.3) je ekvivalentná s rovnicou

$$D\Psi = 0\,. \tag{3.2.5}$$

Rovnako možno ukázať, že rovnica(3.2.4) je ekvivalentná s rovnicou

$$D^+\Phi = 0\,. \tag{3.2.6}$$

Jedná sa teda o kovariantne (vzhľadom k D, nie ∇) konštantné spinorové polia, ktorých existencia je netriviálnou požiadavkou na varietu M. Napríklad párnorozmerná varieta na ktorej existuje takýto spinor je nutne Kählerova varieta s nulovým Ricciho tenzorom krivosti [2]. Ak však takéto pole predsa len existuje, rovnice (3.2.1) a (3.2.2) sú ekvivalentné. Implikácia (3.2.2) $\Rightarrow$ (3.2.1) je zrejmá a opačnú implikáciu možno ukázať podobne ako sme pred chvíľou prešli z (3.2.3) ku (3.2.5).

3.3. Spinory pre Diracov-Kählerov operátor.

Vo všeobecnom prípade sa síce operátory $i(d-\delta)$ a $\not{D}$ líšia, môžeme sa však pozrieť aj na rozklad Diracovho-Kählerovho operátora a skúsiť ho porovnať s rozkladom Diracovho operátora. Pred tým si však musíme vyjasniť, čo je v tomto prípade spinor, resp. spinorové pole.

V Kähler-Atyiahovej algebre $(\Lambda, \wedge, \vee, \cdot)$ (viď. 2.1) je $\vee$-násobenie zľava reprezentáciou (tzv. regulárnou) Cliffordovej algebry $\rho : (\Lambda V^*, \vee) \to \mathrm{End}\Lambda V^*$. Táto reprezentácia nie je ireducibilná, ale indukuje ireducibilnú reprezentáciu $\rho : (\Lambda V^*, \vee) \to \mathrm{End}\mathcal{I}$, kde $\mathcal{I}$ je minimálny ľavý ideál. Prvky $\mathcal{I}$ preto nazývame spinormi[5] a $\mathcal{I}$ priestorom spinorov. Z prehľadu komplexných Cliffordovych algebier v 2.1 vidno, že ľavé ideály v zkomplexnenéj Cliffordovej algebre sú $2^{[n/2]}$-rozmerné podpriestory, pre párne n následne dostávame $2^{n/2}$ ekvivalentných reprezentácii. Pre nepárne n dostávame $2^{(n-1)/2}$ ekvivalentných reprezentácii v každej z dvoch jednoduchých komponent, ale reprezentácie v rôznych komponentách sú neekvivalentné. Minimálny ľavý ideál $\mathcal{I}$ môžeme napísať ako $\mathcal{I} = (\Lambda V^*, \vee)\vee P$, kde $P \in \Lambda V^*$ je primitívny idempotent, teda $P \vee P = P \neq 0$ (idempotent) a nemožno ho napísať ako súčet dvoch idempotentov (primitívny).

Varietu M s algebrou diferenciálnych foriem so súčinmi $\wedge$, $\vee$ a $\cdot$ (teda s Kähler-Atyiahovou algebrou nad každým bodom $x \in M$) nazývame Kählerova-Atyiahova fibrácia. Priestor spinorových polí je ľavý ideál vyčlenený hladkým poľom P primitívnych idempotentov $P(x)$ (aby sme mali v každom bode spinor v zmysle predchádzajúcej definície). Evidentne máme rovnakú násobnosť priestorov spinorových polí ako to bolo pre spinory.

Keď dôkladne preskúmame súvis Diracovho a Diracovho-Kählerovho operátora v predchádzajúcej časti, zistíme, že podpriestor foriem na ktorý sme sa obmedzili bol invariantný voči ∇_a a $i^a + j^a \equiv e^a\vee$. Čo sa týka druhého operátora, podľa práve spomenutej definície spinorového poľa je to úplne prirodzené. Avšak ∇_a

[5] V prípade nepárneho n, keď sa nejedná o vernú reprezentáciu Cliffordovej algebry, sa používa aj presnejšie označenie semi-spinor, viď. [2].

tieto podpriestory zachováva práve vtedy, keď $P\nabla_a P = 0$[6]. Diracovu-Kählerovu rovnicu pre jedno spinorové pole teda možno uvažovať iba v prípade existencie poľa P primitívnych idempotentov vyhovujúceho podmienke

$$P\nabla_a P = 0\,, \qquad a = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

V prípade jeho neexistencie nás však stále môže Diracov-Kählerov operátor zaujímať, keď vezmeme idempotent $P = 1$ (nie je primitívny). Jeho rozklad na primitívne idempotenty dáva naraz viac ireducibilných reprezentácií (častíc), ktoré však v Diracovej-Kählerovej rovnici nemožno separovať (viď. [6]).

3.4. Rozklad Diracovho-Kählerovho operátora.

Všimnime si najskôr, že v prípade Kählerovej-Atyiahovej fibrácie je sú všetky súčiny ($\wedge$, $\vee$ aj $\cdot$) v $\hat{\Lambda}(M)$ totožné so súčinmi v $\Lambda(M)$ aplikovanými na horizontálne formy[7]. To znamená, že Kählerova-Atyiahova algebra $(\hat{\Lambda}T^*_x M, \wedge, \vee, \cdot)$ je vnorená do $(\Lambda T^*_x M, \wedge, \vee, \cdot)$, avšak operátor hor nie je homomorfizmom týchto algebier, lebo nerešpektuje súčiny $\vee$ a $\cdot$ pre vertikálne formy.

Pre $\alpha = \tilde{V} \wedge \hat{s} + \hat{r}$ z ľavého ideálu $\mathcal{I}$ v $(\Lambda(M), \vee)$ dostaneme použitím (2.1.1)

$$e^i \vee (\tilde{V} \wedge \hat{s} + \hat{r}) = -\tilde{V} \wedge (e^i \vee \hat{s}) + e^i \vee \hat{r}$$

a následne

$$e^i \vee \operatorname{hor} \alpha = \operatorname{hor} e^i \vee \alpha\,.$$

To však znamená, že $e^i \vee \operatorname{hor}(\mathcal{I}) \subset \operatorname{hor}(\mathcal{I})$, čiže $\operatorname{hor}(\mathcal{I})$ je ľavý ideál v $(\hat{\Lambda}, \vee)$ a operátor $i(\hat{d} - \hat{\delta})$ môžeme interpretovať ako horizontálny Diracov-Kählerov operátor.

Predpokladajme, že $\nabla_a \alpha \in \mathcal{I}$ pre všetky $\alpha \in \mathcal{I}$ a $a = 0, 1, \ldots, n-1$. Potom pre $\hat{r} \in \operatorname{hor}(\mathcal{I})$, teda $\hat{r} = \operatorname{hor}(\tilde{V} \wedge \hat{s} + \hat{r})$, kde je $\tilde{V} \wedge \hat{s} + \hat{r} \in \mathcal{I}$, dostávame postupne

$$\tilde{V} \vee (\tilde{V} \wedge \hat{s} + \hat{r}) = \hat{s} + \tilde{V} \wedge \hat{r} \in \mathcal{I}\,,$$

$$\nabla_i(\hat{s} + \tilde{V} \wedge \hat{r}) = (\nabla_i \hat{s} + (\nabla_i \tilde{V}) \wedge \hat{r}) + \tilde{V} \wedge \nabla_i \hat{r} \in \mathcal{I}$$

a preto, že $(\nabla_i \tilde{V})(V) = g(\nabla_i V, V) = -g(V, \nabla_i V) = 0$, t.j. $\nabla_a \tilde{V}$ je horizontálna 1-forma, nakoniec

$$\operatorname{hor}(\tilde{V} \vee (\nabla_i \hat{s} + (\nabla_i \tilde{V}) \wedge \hat{r}) + \tilde{V} \wedge \nabla_i \hat{r})) = i_V j_V \nabla_i \hat{r} = \hat{\nabla}_i \hat{r} \in \operatorname{hor}(\mathcal{I})\,.$$

Zistili sme, že pre minimálny ľavý ideál $\mathcal{I}$ invariantný voči ∇_a je $\operatorname{hor}(\mathcal{I})$ ľavý ideál invariantný voči $\hat{\nabla}_i$. Ostáva nám ešte preskúmať, či je aj minimálny.

Najskôr ukážeme, že $\operatorname{hor}(\mathcal{I}) \neq \{0\}$. Predpoklad $\operatorname{hor}(\mathcal{I}) = \{0\}$ totiž hovorí, že všetky formy $\alpha \in \mathcal{I}$ sú tvaru $\tilde{V} \wedge \hat{s}$. $\mathcal{I}$ je však ľavý ideál, takže aj $\tilde{V} \vee (\tilde{V} \wedge \hat{s}) = \hat{s} \in \mathcal{I}$, čiže $\hat{s} = 0$. Tým sme však dostali $\mathcal{I} = \{0\}$, čo nie je minimálny ľavý ideál.

---

[6] Ako sme sa mohli presvedčiť, pri existencii spinovo kovariantne konštantného spinora existuje primitívny idempotent vyhovujúci tejto podmienke.

[7] Pre súčin $\cdot$ sme to poznamenali hneď po definícii a pre $\vee$ to vyplýva z (2.1.1) a asociativity.

Pre nepárne n majú minimálne ľavé ideály v $(\Lambda(M), \vee)$ a $(\hat{\Lambda}(M), \vee)$ rovnaký rozmer a z predchádzajúceho tvrdenia potom môžeme usúdiť, že $\mathrm{hor}(\mathcal{I})$ je skutočne minimálny ľavý ideál.

Pre párne n je situácia komplikovanejšia, porovnateľná s prípadom nepreskúmaných matíc $\{\gamma^i\}$. Môžeme vysloviť predpoklad, že ako v prípade $\{\tilde{\gamma}\}$ dostaneme aj teraz zjednotenie dvoch minimálnych ľavých ideálov, ale nemáme k dispozícii argumenty, ktoré by ho jednoznačne dokázali (alebo vyvrátili).

Pozrime sa teraz na explicitný tvar rozkladu. Podľa (1.2.3) a (1.3.2) máme

$$i(d-\delta) \leftrightarrow i \begin{pmatrix} -(\hat{d}-\hat{\delta})+\hat{a} & \mathcal{L}_V - \hat{*}^{-1}\hat{y}\hat{*} \\ \hat{y}+\tilde{\mathcal{L}}_V & \hat{d}-\hat{\delta}+\hat{*}^{-1}\hat{a}\hat{*}\hat{\eta} \end{pmatrix} .$$

Pre porovnanie s rozkladom Diracovho operátora sa zrejme musíme obmedziť na prípad $\hat{y}=0$ a ostane nám iba

$$i(d-\delta) \leftrightarrow i \begin{pmatrix} -(\hat{d}-\hat{\delta})+\hat{a} & \mathcal{L}_V \\ \tilde{\mathcal{L}}_V & \hat{d}-\hat{\delta}+\hat{*}^{-1}\hat{a}\hat{*}\hat{\eta} \end{pmatrix} .$$

Keď rozpíšeme $\tilde{\mathcal{L}}_V = \hat{*}^{-1}\mathcal{L}_V\hat{*}$ ako (viď. dodatok F, (F.1))

$$\tilde{\mathcal{L}}_V = \mathcal{L}_V - \mathrm{Tr}(V\cdot K) + 2V\cdot K(e_i,e_j)j^i \wedge i^j ,$$

posledný člen musíme pri interpretácii ešte rozdeliť na dve časti, pre $i=j$ a $i\neq j$. Zatiaľ, čo časť $i=j$ dáva znovu stopu $\mathrm{Tr}(V\cdot K)$, časť $i\neq j$ však podstatne mení formy, na ktoré pôsobí a nemá priamočiare vysvetlenie. Keď toto rozštiepenie explicitne vložíme do rozkladového vzorca, dostaneme pri označení $K_{ij}=K(e_i,e_j)$ výsledný vzorec

$$i(d-\delta) \leftrightarrow i \begin{pmatrix} -(\hat{d}-\hat{\delta})+\hat{a} & \mathcal{L}_V \\ \mathcal{L}_V + \mathrm{Tr}(V\cdot K) + \sum_{i\neq j} 2V\cdot K_{ij}j^i\wedge i^j & \hat{d}-\hat{\delta}+\hat{*}^{-1}\hat{a}\hat{*}\hat{\eta} \end{pmatrix} . \quad (3.4.1)$$

3.5. Porovnanie rozkladov Diracovho a Diracovho-Kählerovho operátora.

Keď porovnávame rozklad (2.4.14) Diracovho a rozklad (3.4.1) Diracovho-Kählerovho operátora, na prvý pohľad oba obsahujú svoj horizontálny ekvivalent, Lieovu deriváciu v smere poľa V, časť zodpovedajúcu zrýchleniu aj vonkajšej krivosti (t.j. expanzii objemu, pozri (E.2)) a nakoniec ešte jeden člen, ktorý sme v Diracovom operátore interpretovali ako dôsledok otáčania pozorovateľa, ale ktorého interpretácia nám v Diracovom-Kählerovom operátore zatiaľ chýba.

Keď chceme hľadať hlbšie súvislosti, uvedomíme si najskôr, že v prípade Diracovho-Kählerovho operátora máme okrem rozkladu operátora $i(d-\delta)$ aj rozklad samotných spinorových polí. To ukazuje, že sa tieto rozklady môžu veľmi líšiť a nemusia mať okrem týchto všeobecných charakteristík žiadne ďalšie spoločné znaky. Pri pohľade na výsledky príkladu 3.6.2 sa ukazuje, že napríklad horizontálny Diracov operátor $\hat{\not{D}}$ a horizontálny Diracov-Kählerov operátor $\hat{d}-\hat{\delta}$ nemajú okrem časti zodpovedajúcej samotným deriváciam spinorového poľa nič spoločné.

3.6. Príklady.

3.6.1. Minkowského priestor.

V plochom Minkowského priestore evidentne môžeme vziať štyri lineárne nezávislé kovariantne konštantné spinorové polia

$$(\Psi_{(1)}, \Psi_{(2)}, \Psi_{(3)}, \Psi_{(4)}) = \left(\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right)$$

a pre štyri spinorové polia $\Phi^{(1)}, \ldots, \Phi^{(4)}$ môžeme definovať $\phi = \sum_{a=1}^{4} \Phi^{(a)+} Z \Psi_{(a)}$. Diracova Kählerova rovnica

$$(i(d-\delta)+m)\phi$$

je potom ekvivalentná štyrom Diracovym rovniciam

$$(\not{D}^{+} + m)\Phi^{(a)}\,, \qquad a = 1,2,3,4\,.$$

Becher a Joos v článku [3] nazývajú (odhliadnuc od odlišných konvencí) polia $\Phi^{(a)}$ Diracovskými komponentami diferenciálnej formy ϕ.

3.6.2. Sféra S^2 v $E^3 \setminus \{0\}$.

Súradnice budeme znovu číslovať od 1 po 3 a budeme používať sférické repérne pole $e_1 = \frac{1}{r}\partial_\vartheta$, $e_2 = \frac{1}{r \sin\vartheta}\partial_\varphi$ a $e_3 = \partial_r$ a pridružené korepérne pole $e^1 = rd\vartheta$, $e^2 = r\sin\vartheta d\varphi$ a $e^3 = dr$. Vopred uveďme

$$de^1 = -\frac{1}{r} e^1 \wedge e^3\,, \qquad de^2 = \operatorname{cotg}\vartheta e^1 \wedge e^2 - \frac{1}{r} e^2 \wedge e^3 \quad \text{a} \quad de^3 = 0\,. \tag{3.5.1}$$

Položíme $\gamma^a = \sigma^a$, čím ztotožníme $Spin(3,0)$ a $SU(2)$.

V kartézskej súradnicovej báze máme kovariantne konštantné spinorové polia

$$(\Phi_{k(1)}, \Phi_{k(2)}) = \left(\begin{pmatrix} 1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1 \end{pmatrix} \right)\,.$$

Pre sférické repérne pole nájdeme kovariantne konštantné spinorové polia najľahšie transformáciou týchto polí pomocou príslušnej matice $S^{-1}(\vartheta,\varphi,r)$. Vďaka faktu, že na integrálnych krivkách vektorového poľa $V = \partial_r$ je uvažovaná rotácia repérneho poľa konštantná, a parametrizácii grupy $SU(2)$ Eulerovými uhlami (viď. príklad 1.6.1) je to práve $A^{-1}(\vartheta,\varphi,0) = A^{+}(\vartheta,\varphi,0)$, pričom sme ψ, na ktorom nezáleží, zvolili rovné 0. Voči sférickému repérnemu poľu máme teda kovariantne konštantné spinory

$$(\Psi_{(1)}, \Psi_{(2)}) = \left(\begin{pmatrix} \cos\frac{\vartheta}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi} \\ -\sin\frac{\vartheta}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin\frac{\vartheta}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi} \\ \cos\frac{\vartheta}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi} \end{pmatrix} \right)\,.$$

Musíme poznamenať, že dané repérne pole možno použiť iba v časti E^3 menšej ako $E^3\setminus\{0\}$. Totiž, zatiaľ, čo matica $A(x)$, ktorá popisuje prechod od kartézskeho repérneho poľa k radiálnemu ($e_a \to e_b A^b_a$) spojito závisí od $x \in E^3\setminus\{0\}$, matica $S(x)$ v skutočnej $Spin(3,0)$ fibrácii $E^3 \setminus \{0\}$ pri prechode k sférickému poľu zmení na slučke $\varphi = 0 \to \varphi = 2\pi$ znamienko. Budeme teda pokračovať s vedomím, že všetky výpočty sú lokálne (ako v celej práci).

S použitím multiindexovej notácie $e^{ab\dots c} = e^a \wedge e^b \wedge \dots \wedge e^c$ máme pre Z explicitne

$$Z = (1 + ie^{123}) + \sigma_1(e^1 + ie^{23}) + \sigma_2(e^2 - ie^{13}) + \sigma_3(e^3 + ie^{12}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + ie^{123} + e^3 + ie^{12} & e^1 + ie^{23} - ie^2 - e^{13} \\ e^1 + ie^{23} + ie^2 + e^{13} & 1 + ie^{123} - e^3 - ie^{12} \end{pmatrix} .$$

Uvažujme formu

$$\phi = \Phi^+ Z \Psi_{(1)} , \qquad \Phi = \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \end{pmatrix} .$$

Nebudeme explicitne ukazovať, že $i(d-\delta)\phi = (\not{D}\Phi)^+ Z\Psi_{(1)}$, lebo je to dlhý a náročný výpočet. Pre čitateľov, ktorí si tento fakt chcú overiť, odporúčame ľahší príklad radiálneho repérneho poľa v $E^2 \setminus \{0\}$.

Rozklad Z je

$$Z = e^3 \wedge \begin{pmatrix} ie^{12} + 1 & -ie^2 + e^1 \\ -ie^2 - e^1 & ie^{12} - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 + ie^{12} & e^1 - ie^2 \\ e^1 + ie^2 & 1 - ie^{12} \end{pmatrix} =: e^3 \wedge Z^v + Z^h .$$

Potom

$$\phi = e^3 \wedge \Phi^+ Z^v \Psi_{(1)} + \Phi^+ Z^h \Psi_{(1)} =: e^3 \wedge \phi^v + \phi^h .$$

Vďaka nulovému zrýchleniu a víru máme pre $V = \partial_r$ rozkladový vzorec

$$i(d-\delta) \leftrightarrow i \begin{pmatrix} -(\hat{d} - \hat{\delta}) & \mathcal{L}_V \\ \tilde{\mathcal{L}}_V & \hat{d} - \hat{\delta} \end{pmatrix} .$$

Pozrime sa teda ako pôsobí $\hat{d} - \hat{\delta}$ na jednotlivé časti ϕ. Na to najskôr spočítame Označme teda $C := \cos\frac{\vartheta}{2}$ a $S := \sin\frac{\vartheta}{2}$ a rozpíšme explicitne

$$\phi^h = e^{-\frac{i}{2}\varphi}\Phi^{1*}((1 + ie^{12})C - (e^1 - ie^2)S) + e^{-\frac{i}{2}\varphi}\Phi^{2*}((e^1 + ie^2)C - (1 - ie^{12})S) ,$$

$$\hat{*}\hat{\eta}\phi^h = e^{-\frac{i}{2}\varphi}\Phi^{1*}((e^{12} + i)C + (e^2 + ie^1)S) + e^{-\frac{i}{2}\varphi}\Phi^{2*}((-e^2 + ie^1)C - (e^{12} - i)S)$$

a použitím

$$\hat{d}e^1 = 0 \qquad \text{a} \qquad \hat{d}e^2 = \operatorname{cotg}\vartheta e^{12}$$

ďalej dostaneme

$$e^{+\frac{i}{2}\varphi}d\phi^h = (e_1\Phi^{1*})(e^1C + ie^{12}S) + (e_2\Phi^{1*})(e^2C + e^{12}S) + (e_1\Phi^{2*})(ie^{12}C - e^1S) +$$

$$+ (e_2\Phi^{2*})(-e^{12}C - e^2S) + \operatorname{cotg}\vartheta\Phi^{1*}ie^{12}S + \operatorname{cotg}\vartheta\Phi^{2*}ie^{12}S + \frac{1}{2r}\Phi^{1*}(-e^1S + ie^{12}C) +$$

$$+ \frac{1}{2r}\Phi^{2*}(-ie^{12}S - e^1C) - \frac{i}{2r\sin\vartheta}(\Phi^{1*}(e^2C + e^{12}S) + \Phi^{2*}(-e^{12}C - e^2S)) ,$$

$$e^{+\frac{i}{2}\varphi}d\hat{*}\hat{\eta}\phi^h = (e_1\Phi^{1*})(ie^1C + e^{12}S) + (e_2\Phi^{1*})(ie^2C - ie^{12}S) + (e_1\Phi^{2*})(-e^{12}C + ie^1S) +$$

$$+(e_2\Phi^{2*})(-ie^{12}C+ie^2S)+\text{cotg }\vartheta\Phi^{1*}e^{12}S-\text{cotg }\vartheta\Phi^{2*}e^{12}S+\frac{1}{2r}\Phi^{1*}(-ie^1S+e^{12}C)+$$

$$+\frac{1}{2r}\Phi^{2*}(e^{12}S+ie^1C)+\frac{i}{2r\sin\vartheta}(\Phi^{1*}(ie^2C-ie^{12}S)+\Phi^{2*}(-ie^{12}C+ie^2S))$$

a

$$e^{+\frac{i}{2}\varphi}(\hat{d}-\hat{\delta})\phi^h=(e_1\Phi^{1*})(e^1C+ie^{12}S)+(e_2\Phi^{1*})(e^2C+e^{12}S)+(e_1\Phi^{2*})(ie^{12}C-e^1S)+$$

$$+(e_2\Phi^{2*})(-e^{12}C-e^2S)+\text{cotg }\vartheta\Phi^{1*}ie^{12}S+\text{cotg }\vartheta\Phi^{2*}ie^{12}S+\frac{1}{2r}\Phi^{1*}(-e^1S+ie^{12}C)+$$

$$+\frac{1}{2r}\Phi^{2*}(-ie^{12}S-e^1C)-\frac{i}{2r\sin\vartheta}(\Phi^{1*}(e^2C+e^{12}S)+\Phi^{2*}(-e^{12}C-e^2S))$$

$$+(e_1\Phi^{1*})(ie^2C-S)+(e_2\Phi^{1*})(-ie^1C+iS)+(e_1\Phi^{2*})(C+ie^2S)+$$

$$+(e_2\Phi^{2*})(iC-ie^1S)-\text{cotg }\vartheta\Phi^{1*}S+\text{cotg }\vartheta\Phi^{2*}S-\frac{1}{2r}\Phi^{1*}(ie^2S+C)+$$

$$+\frac{1}{2r}\Phi^{2*}(-S+ie^2C)+\frac{i}{2r\sin\vartheta}(\Phi^{1*}(-ie^1C+iS)+\Phi^{2*}(iC-ie^1S))\,.$$

Pre porovnanie spočítajme $e^{\frac{i}{2}\varphi}(i\hat{\not{D}}^{+}\Phi)^{+}Z\Psi$. Keďže Pauliho matice sú hermitovské ($\sigma^{a+}=\sigma^a$), platí $\not{D}^{+}=\not{D}$ a $\hat{\not{D}}^{+}=\hat{\not{D}}$. Pomocou foriem konexie z príkladu 2.5.1 zistíme, že $\hat{\not{D}}$ explicitne vychádza

$$\hat{\not{D}}=-i\sigma^1e_1-i\sigma^2e_2-i\sigma^1\frac{1}{2r}\text{cotg }\vartheta\,.$$

Potom

$$i\hat{\not{D}}\Phi=\begin{pmatrix} e_1\Phi^2-ie_2\Phi^2+\frac{1}{2r}\text{cotg }\vartheta\Phi^2\\ e_1\Phi^1+ie_2\Phi^1+\frac{1}{2r}\text{cotg }\vartheta\Phi^1\end{pmatrix}$$

a $e^{\frac{i}{2}\varphi}(i\hat{\not{D}}\Phi)^{+}Z\Psi_{(1)}$ vychádza

$$e^{\frac{i}{2}\varphi}(i\hat{\not{D}}\Phi)^{+}Z\Psi_{(1)}=(e_1\Phi^{2*}+ie_2\Phi^{2*}+\frac{1}{2r}\text{cotg }\vartheta\Phi^{2*})(1+ie^{12})C+$$

$$+(e_1\Phi^{2*}+ie_2\Phi^{2*}+\frac{1}{2r}\text{cotg }\vartheta\Phi^{2*})(-e^1+ie^2)S+$$

$$+(e_1\Phi^{1*}-ie_2\Phi^{1*}+\frac{1}{2r}\text{cotg }\vartheta\Phi^{1*})(e^1+ie^2)C+$$

$$+(e_1\Phi^{1*}-ie_2\Phi^{1*}+\frac{1}{2r}\text{cotg }\vartheta\Phi^{1*})(-1+ie^{12})S$$

Porovnaním člen po člene zistíme, že členy obsahujúce $e_i\Phi^{a*}$ sú zhodné, čím zároveň akákoľvek podobnosť končí. Zhodnosť členov $e_i\Phi^{a*}$ obsahujúcich derivácie samotných spinorových polí sme aj očakávali z členov $(\nabla_a\Phi^+)(i^a+j^a)Z\Phi$, resp. $(i\sigma^a i_a d\Phi)Z\Psi$, vo výraze $(\hat{d}-\hat{\delta})\phi$, resp. $(iD\Phi)^+Z\Psi$. Ukázalo sa však, že ostatné členy nemajú žiadny viditeľný súvis.

Záver

Cieľom tejto práce bolo vypočítanie rozkladu Diracovho operátora voči poľu pozorovateľov metódami modernej diferenciálnej geometrie. Počas vypracovávania sa často objavili nové požiadavky, pre pochopenie Diracovho operátora bolo potrebné zoznámiť sa s teóriou konexií a Cliffordovych algebier a Diracov-Kählerov operátor si vyžiadal ďalšie štúdium algebraických štruktúr. Z hľadiska osobného prínosu mi táto práca dala mnoho znalostí, ktoré môžem v budúcnosti uplatniť.

V hlavnej časti práce sme ukázali explicitný tvar rozkladu Diracovho operátora v prípade integrovťeľnej horizontálnej distribúcie, ktorý sme ilustrovali na konkrétnom príklade. Zároveň sa nám podarilo dobre interpretovať všetky časti rozkladu. Tieto súvisia s pohybom v čase, zrýchlením pozorovateľa, jeho rotáciou, expanziou objemu (úzko súvisiacou s vonkajšou krivosťou horizontálnych nadplôch) a nakoniec horizontálnym Diracovym operátorom, ktorý si sme ďalej interpretovali v závislosti od parity dimenzie uvažovaného priestoru. Pre nepárnorozmernú varietu je horizontálny Diracov operátor obyčajným Diracovym operátorom na podvariete, ak je však varieta párnorozmerná pôsobí na dvojicu spinorových polí na horizontálnej nadploche.

V prípade neintegrovateľnéj horizontálnej distribúcie je tento problém zložitejší. Predchádzajúce výpočty ma viedli k záveru, že v tomto prípade nie je možné ani správne identifikovať horizontálnu Levi-Civitovu konexiu. Ako však ukázal výpočet počas spisovania príkladu 2.5.2, táto cesta nie je úplne beznádejná. Vzhľadom na neskoré odhalenie tejto cesty tento prípad ešte nie je dôkladne preskúmaný a vyžaduje si ďalšie skúmanie.

Posledná časť sa venuje rozkladu Diracovho-Kählerovho operátora, ktorý je ekvivalentom Diracovho operátora pri alternatívnom popise spinorových polí čisto v reči diferenciálnej geometrie na pôvodnej variete bez hlavných G-fibrácií. Pri porovnaní rozkladov Diracovho a Diracovho-Kählerovho operátora sa ukazuje, že sa síce prirodzene skladajú z častí podobných významom, ale hlbší súvis medzi týmito rozkladmi sa nám nepodarilo objaviť.

Dodatky

Všetky výpočty používajúce ortonormálne repérne pole $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$ a príslušné korepérne pole $e^0, e^1, \ldots, e^{n-1}$ sú spravené pre $e_0 = V$ $(e^0 = \tilde{V})$, čo uľahčuje prácu s horizontálnymi formami, napr. $e^1, \ldots, e^{n-1}$ je báza horizontálnych 1-foriem. Pre ujasnenie ešte dodajme, že vo $\tilde{V} = g^{00} g(V, \cdot)$ vynechávame $g^{00} = 1$, čo niekedy môže viesť ku zmeteniu čitateľa.

A. Interpretácia $\hat{a}$ a $\hat{y}$ v (1.2.1)**..**

1-*forma zrýchlenia* $\hat{a}$.

Spočítajme

$$\hat{a} = i_V d\tilde{V} = (i_V d + d i_V)\tilde{V} = \mathcal{L}_V \tilde{V} = \mathcal{L}_V (g(V, \cdot)) =$$
$$= (\mathcal{L}_V g)(V, \cdot) + g(\mathcal{L}_V V, \cdot) = (\mathcal{L}_V g)(V, \cdot)$$

V ľubovoľných súradniciach však pre LC-konexiu máme

$$(\mathcal{L}_V g)_{ij} = V_{i;j} + V_{j;i}$$

a potom

$$((\mathcal{L}_V g)(V, .))_i = V^j V_{i;j} + V^j V_{j;i} = (\nabla_V \tilde{V})_i + d\frac{1}{2} g(V, V) = (\nabla_V \tilde{V})_i \,,$$

takže

$$\hat{a} = \nabla_V \tilde{V} = \nabla_V (g(V, \cdot)) = (\nabla_V g)(V, \cdot) + g(\nabla_V V, \cdot) = g(a, \cdot) \,, \qquad (A.1)$$

kde $a = \nabla_V V$ je pole zrýchlení poľa V.

2-*forma* $\hat{y}$.

Podľa Frobeniovej vety je horizontálna distribúcia integrovateľná práve vtedy, keď $\hat{y} = 0$. podmienku $\hat{y} \neq 0$ možno preformulovať aj ako nemožnosť synchronizácie hodín pozorovateľov, viď. [1].

B. Výpočet $\hat{d}\hat{d}\hat{r}$.

Platí

$$d\hat{r} = \tilde{V} \wedge \mathcal{L}_V \hat{r} + \hat{d}r \,.$$

Potom

$$\hat{d}\hat{d}\hat{r} = \mathrm{hor}\, d(d\hat{r} - \tilde{V} \wedge \mathcal{L}_V \hat{r}) = \mathrm{hor}(-d\tilde{V} \wedge \mathcal{L}_V \hat{r} + \tilde{V} \wedge d\hat{r}) = -\mathrm{hor}\, d\tilde{V} \wedge \mathrm{hor}\mathcal{L}_V \hat{r}$$

a pomocou $\mathrm{hor}\, d\tilde{V} = \hat{y}$ a

$$\mathrm{hor}\mathcal{L}_V \hat{r} = (1 - j_V i_V)\mathcal{L}_V \hat{r} = \mathcal{L}_V \hat{r} - j_V i_V (i_V d + d i_V)\hat{r} = \mathcal{L}_V \hat{r}$$

dostávame

$$\hat{d}\hat{d}\hat{r} = -\hat{y} \wedge \mathcal{L}_V \hat{r} \,. \qquad (B.1)$$

I keď operátor $\hat{d}$ nie je nilpotentný, pre každú horizontálnu oblasť $\mathcal{D}$ (t.j. dotykové vektory k $\mathcal{D}$ sú horizontálne) očakávame platnosť Stokesovej vety a kvôli $\partial\partial\mathcal{D} = 0$ musí platiť

$$\int_{\mathcal{D}} \hat{d}\hat{d}\hat{r} = \int_{\partial\partial\mathcal{D}} \hat{r} = 0 \,.$$

To je skutočne splnené, lebo pre horizontálnu oblasť $\mathcal{D}$ je podľa Frobeniovej vety pre ohraničujúcu 1-formu $\tilde{V}$ (jednu z $n - \dim \mathcal{D}$) platí $d\tilde{V}|_{\mathcal{D}} = 0$, t.j. $\hat{y}|_{CalD} = 0$ (viď. [1]).

C. Rôzne vyjadrenia $\omega_{jk}(V)$ a $V \cdot K$.

Pre $\omega_{ij}(V)$ dostaneme použitím nulovej torzie ($\nabla_U W = \nabla_W U + [U, V]$) rôzne vyjadrenia

$$\omega_{ij}(V) = g(\nabla_V e_j, e_i) = g(\nabla_{e_j} V + [V, e_j], e_i) = g([V, e_j], e_i) - g(V, \nabla_{e_j} e_i) = \\ = g([V, e_j], e_i) - V \cdot K(e_j, e_i)\,,$$

$$\omega_{ij}(V) = g(\nabla_V e_j, e_i) = -g(e_j, \nabla_V e_i) = \cdots = -g([V, e_i], e_j) + V \cdot K(e_i, e_j)\,,$$

teda

$$\omega_{ij}(V) = \frac{1}{2}(g([V, e_j], e_i) - g([V, e_i], e_j)) = g([V, e_{[j}], e_{i]})\,. \qquad (C.1)$$

Zároveň dostávame užitočné vyjadrenie

$$V \cdot K(e_i, e_j) = \frac{1}{2}(g([V, e_i], e_j) + g([V, e_j], e_i)) = g([V, e_{(i}], e_{j)})\,. \qquad (C.2)$$

Ďalšie vyjadrenie pre $V \cdot K$ dostávame výpočtom $(\mathcal{L}_V g)(U, W)$ pre horizontálne vektory U a W. V ľubovoľných súradniciach

$$(\mathcal{L}_V g)(U, V) = (V_{\mu;\nu} + V_{\nu,\mu})U^\mu W^\nu = (\nabla_W \tilde{V})(U) + (\nabla_U \tilde{V})(W) = \\ = -\tilde{V}(\nabla_W U) - \tilde{V}(\nabla_U W) = -2V \cdot K(U, W)\,. \qquad (C.3)$$

D. Horizontálne γ-matice $\{\hat{\gamma}^a\}$.

Pre overenie (2.4.18) spočítajme

$$\{[V \bullet \gamma, \gamma^a], [V \bullet \gamma, \gamma^b]\} = V_c V_d \{[\gamma^c, \gamma^a], [\gamma^d, \gamma^b]\} = V_c V_d (\gamma^c\gamma^a\gamma^d\gamma^b - \gamma^a\gamma^c\gamma^d\gamma^b - \\ -\gamma^c\gamma^a\gamma^b\gamma^d + \gamma^a\gamma^c\gamma^b\gamma^d + \gamma^d\gamma^b\gamma^c\gamma^a - \gamma^d\gamma^b\gamma^a\gamma^c - \gamma^b\gamma^d\gamma^c\gamma^a + \gamma^b\gamma^d\gamma^a\gamma^c)\,.$$

Po prekomutovaní γ^c ku γ^d, aby sme použitím symetrie $V_c V_d$ v indexoch c a d mohli miesto $\gamma^c\gamma^d$ písať g^{cd}, dostaneme

$$V_c V_d(-4g^{cd}(\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a) + 4g^{bc}(\gamma^a\gamma^d + \gamma^d\gamma^a)) = -8g^{ab}(V_c V_d g^{cd}) + 8V_d g^{da} V_c g^{cb}\,.$$

Keďže $X_a Y_b g^{ab} = g(X, Y)$, po kontrakcí s horizontálnymi vektormi U a W druhý člen vypadne ($g(V, U) = 0$) a z prvého dostaneme

$$\{[V \bullet \gamma, U \bullet \gamma], [V \bullet \gamma, W \bullet \gamma]\} = -8g(U, W)$$

a po pridaní faktorov $-\frac{i}{2}$ dostaneme (2.4.18).

Na overenie $\hat{\omega}_{ab}\gamma^a\gamma^b = \hat{\omega}_{ab}\hat{\gamma}^a\hat{\gamma}^b$, t.j.

$$\hat{\omega}_{ab}[\gamma^a, \gamma^b] = \hat{\omega}_{ab}[\hat{\gamma}^a, \hat{\gamma}^b] \qquad (D.1)$$

použijeme, že

$$\hat{\omega}_{ab} = g(\nabla_V \operatorname{hor} e'_b, \operatorname{hor} e'_a) = g(\operatorname{hor} \nabla_V \operatorname{hor} e'_b, e'_a) = (\operatorname{hor} \nabla_V \operatorname{hor} e'_b)_a$$

sú komponenty horizontálneho vektora $\operatorname{hor} \nabla_V \operatorname{hor} e'_b$, čím kontrakciou s $V_c g^{ca}$ dostaneme nulu. Máme teda $V_c g^{ca}\hat{\omega}_{ab} = 0$ a vďaka antisymetrii $\hat{\omega}_{ab}$ a indexoch a a b aj $V_c g^{cb}\hat{\omega}_{ab} = 0$. Upravme teda

$$[\hat{\gamma}^a, \hat{\gamma}^b] = -\frac{1}{4}V_c V_d[[\gamma^c, \gamma^a], [\gamma^d, \gamma^b]] = -4V_c V_d[J^{ca}, J^{db}] = \\ = -4V_c V_d(g^{cd}J^{ba} + g^{ad}J^{cb} + g^{cb}J^{ad} + g^{ab}J^{dc})\,.$$

Vďaka antisymetrí v a a b je prvý člen rovný $4J^{ab} = [\gamma^a, \gamma^b]$, čo sme chceli dostať. Druhý, resp. tretí, člen po sčítaní s $\hat{\omega}_{ab}$ obsahuje $V_d g^{da}\hat{\omega}_{ab} = 0$, resp. $V_c g^{cb}\hat{\omega}_{ab} = 0$. Posledný člen triviálne vypadáva kvôli symetrii $V_c V_d$ a antisymetrii J^{cd} v indexoch c a d. Tým je dôkaz (D.1) ukončený.

E. Koeficient expanzie objemu θ.

Definujme tzv. koeficient expanzie objemu θ vzťahom (viď. [1])

$$\theta * 1 := V^{\mu}_{;\mu} = \nabla \cdot V = \mathrm{div} V \,. \qquad (E.1)$$

Potom máme

$$\theta * 1 = (\mathrm{div} V) * 1 = \mathcal{L}_V * 1 = \mathcal{L}_V(\tilde{V} \wedge \hat{*}1) \overset{(1.3.1)}{=} \tilde{V} \wedge \mathcal{L}_V \hat{*}1 \,,$$

čiže

$$\mathcal{L}_V \hat{*}1 = \theta \hat{*}1 \,.$$

Pri $\hat{y} = 0$ však môžeme nahliadnuť vzťah medzi θ a vonkajšou krivosťou K. Platí

$$\mathcal{L}_V \hat{*}1 = \mathcal{L}_V(e^1 \wedge e^2 \wedge \cdots \wedge e^{n-1}) =$$

$$= (\mathcal{L}_V e^1) \wedge e^2 \wedge \cdots \wedge e^{n-1} + e^1 \wedge (\mathcal{L}_V e^2) \wedge \cdots \wedge e^{n-1} + \cdots + e^1 \wedge e^2 \wedge \cdots \wedge (\mathcal{L}_V e^{n-1}) \,.$$

V prvom súčine sa prejaví z $\mathcal{L}_V e^1$ iba zložka $e^1(i_1 \mathcal{L}_V e^1)$ a podobne, môžeme teda napísať

$$\mathcal{L}_V \hat{*}1 = (i_1 \mathcal{L}_V e^1 + i_2 \mathcal{L}_V e^2 + \cdots + i_{n-1} \mathcal{L}_V e^{n-1}) \hat{*}1 = (i_i \mathcal{L}_V e^i) \hat{*}1$$

a následne

$$\theta = i_i \mathcal{L}_V e^i = i_i \mathcal{L}_V(g^{ij} g(e_j, \cdot)) = g^{ij} i_i (\mathcal{L}_V g)(e_j, \cdot) + g^{ij} i_i g(\mathcal{L}_V e_j, \cdot) =$$

$$= g^{ij} (\mathcal{L}_V g)(e_j, e_i) + g^{ij} g([V, e_j], e_i) = -\mathrm{Tr}(V \cdot K) \,, \qquad (E.2)$$

kde sme použili (C.3) a (C.2) so symetriou g^{ij}.

F. Výpočet $\tilde{\mathcal{L}}_V = \hat{*}^{-1} \mathcal{L}_V \hat{*}$ pri $\hat{y} = 0$.

Výpočet stačí spraviť na bázových prvkoch $e^{i'} \wedge e^{j'} \wedge \cdots \wedge e^{k'}$, o zvyšok sa postará linearita operátora $\tilde{\mathcal{L}}_V$. Pre začiatok spočítajme

$$\mathcal{L}_V \hat{*} e^{i'} \wedge e^{j'} \wedge \cdots \wedge e^{k'} = \mathcal{L}_V g^{ii'} g^{jj'} \ldots g^{kk'} i_k \ldots i_j i_i \hat{*}1 = g^{ii'} g^{jj'} \ldots g^{kk'} \times$$

$$\times (i_{\mathcal{L}_V e_k} \ldots i_j i_i \hat{*}1 + \cdots + i_k \ldots i_{\mathcal{L}_V e_j} i_i \hat{*}1 + i_k \ldots i_j i_{\mathcal{L}_V e_i} \hat{*}1 + i_k \ldots i_j i_i \mathcal{L}_V \hat{*}1) \,.$$

Posledný člen už poznáme, vo výsledku pre $\tilde{\mathcal{L}}_V$ sa prejaví ako θ. Ďalej máme

$$\mathcal{L}_V e_i = e^a (\mathcal{L}_V e_k) e_a = g^{ab} g(e_b, \mathcal{L}_V e_i) e_a$$

a potom

$$i_{\mathcal{L}_V e_i} = g^{ab} g(e_b, \mathcal{L}_V e_i) i_a$$

a pretože i_0 sa v našom výpočte neprejaví, môžeme sa obmedziť na sčítanie od 1 do $n-1$ (miesto a a b píšeme l a m) a dostaneme

$$\hat{*}^{-1} g^{ii'} g^{jj'} \ldots g^{kk'} i_k \ldots i_j i_{\mathcal{L}_V e_i} \hat{*}1 = \hat{*}^{-1} g^{ii'} g^{jj'} \ldots g^{kk'} i_k \ldots i_j g^{lm} g(e_m, \mathcal{L}_V e_i) i_l \hat{*}1 =$$

$$= g^{ii'} g(e_m, \mathcal{L}_V e_i) \hat{*}^{-1} g^{lm} g^{jj'} \dots g^{kk'} i_k \dots i_j i_l \hat{*} 1 = g^{ii'} g(e_m, \mathcal{L}_V e_i) e^m \wedge e^{j'} \wedge \dots \wedge e^{k'} .$$

Z (1.3.1) vieme, že pre priestorovú 1-formu $\hat{r}$ je $\mathcal{L}_V \hat{r}$ tiež priestorová 1-forma. Použitím $e^m i_m$ ako identity v $\hat{\Lambda}^1(M)$ potom máme

$$\mathcal{L}_V e^{i'} = e^m i_m g^{ii'} \mathcal{L}_V (g(e_i, \cdot)) = g^{ii'} (\mathcal{L}_V g)(e_i, e_m) e^m + g^{ii'} g(\mathcal{L}_V e_i, e_m) e^m .$$

Po porovnaní s predchádzajúcim výrazom dostávame

$$\tilde{\mathcal{L}}_V e^{i'} \wedge e^{j'} \wedge \dots \wedge e^{k'} = (\mathcal{L}_V + \theta) e^{i'} \wedge e^{j'} \wedge \dots \wedge e^{k'} - (g^{ii'} (\mathcal{L}_V g)(e_i, e_m) e^m \wedge e^{j'} \wedge \dots \wedge e^{k'} +$$

$$+ g^{ij'} (\mathcal{L}_V g)(e_i, e_m) e^{i'} \wedge e^m \wedge \dots \wedge e^{k'} + \dots + g^{ik'} (\mathcal{L}_V g)(e_i, e_m) e^{i'} \wedge e^{j'} \wedge \dots \wedge e^m) =$$

$$= (\mathcal{L}_V + \theta - (\mathcal{L}_V g)(e_l, e_m) e^m \wedge i^l) e^{i'} \wedge e^{j'} \wedge \dots \wedge e^{k'} ,$$

t.j., po zohľadnení (C.3) a (E.2),

$$\tilde{\mathcal{L}}_V = \mathcal{L}_V - \mathrm{Tr}(V \cdot K) + 2V \cdot K(e_i, e_j) j^i \wedge i^j . \qquad (F.1)$$

Literatúra

[1] Marián Fecko, *On 3+1 decompositions with respect to an observer field via differential forms*, J. Math. Phys. **38** (9), 1997, str. 4542-4560.

[2] I M Benn a R W Tucker, *An Introduction to Spinors and Geometry with Applications in Physics*, IOP Publishing Ltd 1987.

[3] P. Becher a H. Joos, *The Dirac Kähler Equation and Fermions on the Lattice*, Particles and Fields, Springer-Verlag 1982.

[4] H. Grosse, C. Klimčík a P. Prešnajder, *Field Theory an a Supersymetric Lattice*, 1997, str. 155-175.

[5] Giampiero Esposito, *Dirac Operator and Spectral Geometry*, xxx.lanl.gov: hep-th/9704016.

[6] Wolfgang Graf, *Differential forms as spinors*, Annales de l'Institut de Henri Pincaré, Vol. XXIX., n° 1, 1978, str. 85-109.

[7] D. Iwanenko, L. Landau, *Zur Theorie des magnetischen Elektrons I.*, Z. Phys. 48, 1928, str. 340-348.