FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Zovšeobecnená brachystochróna

2007 Milan Jurči

Zovšeobecnená brachystóchrona

BAKALÁRSKA PRÁCA

Milan JURČI

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Študijný odbor: Fyzika 4.1.1

Vedúci bakalárskej práce: Doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.

BRATISLAVA, 2007

Zadanie bakalárskej práce

Brachystochróna je krivka v zvislej rovine, po ktorej sa zošmykne korálka medzi dvoma bodmi s rôznymi výškami za najkratší čas.V práci sa bude analyzovať zovšeobecnenie tohoto pojmu na prípad, keď namiesto euklidovskej roviny a gravitačnej sily uvažujeme „krivý priestor“ a v ňom ľubovoľné potenciálové silové pole. Cieľom bude odvodiť príslušnú diferenciálnu rovnicu a skúsiť ju riešiť pre nejaký iný prípad, ako ten, z ktorého zovšeobecnenie vzišlo. Potrebné sú základné znalosti z teoretickej mechaniky (variačné princípy). Práca je vhodná pre záujemcov o teoretickú fyziku.

Čestné vyhlásenie

Čestne vyhlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne a s použitím uvedenej literatúry.

Bratislava, 2007

podpis

Poďakovanie

Za aktívnu spoluprácu pri vedení vždy správnym smerom ďakujem svojmu školiteľovi Doc. RNDr. Mariánovi Feckovi, PhD. Ďalej ďakujem svojej priateľke Zuzke za to, že trpezlivo znášala neprítomné pohľady počas hlbokých meditačných pohrúžení do problematiky témy bakalárskej práce. A v neposlednom rade ďakujem Bohu za všetko.

Abstrakt

JURčI, Milan. *Zovšeobecnená brachystochróna* [bakalárska práca]. Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky. školiteľ: doc. RNDr. Marián Fecko, PhD. Komisia pre obhajoby: Fyzika 4.1.1. Stupeň odbornej kvalifikácie: Bakalár fyziky.
Bratislava: FMFI UK, 2007. 38 s.

Študuje sa zovšeobecnenie klasickej úlohy o brachystochrone na prípad, keď sa má hmotný bod pohybovať medzi dvoma bodmi na riemannovskej variete pod vplyvom daného (všeobecného) potenciálového poľa za najkratší čas. Prezentuje sa detailné odvodenie príslušnej diferenciálnej rovnice, ktorá sa nedávno objavila v literatúre.

Kľúčové slová: Brachystochrona. Variačný počet. Metrický tenzor.

Predhovor

S klasickým problémom o brachystochrone sa stretne každý absolvent prednášky z teoretickej mechaniky v časti, ktorá sa venuje variačným prístupom k mechanike. Hoci je príklad zaujímavý a poučný, mohlo by trochu prekvapiť, že sa mu venuje celá bakalárska práca. Pre túto prácu je však podstatné slovo *zovšeobecnená*. Čo sa pod tým myslí?

V nedávnych prácach vyšetrovala skupina japonských teoretikov istý optimalizačný problém v kvantovej mechanike, ktorý nazvali „kvantová brachystochrona". Štartom k tejto problematike bola formulácia (a tiež výsledok) úlohy, ktorá pripomína klasickú úlohu o brachystorchrone - túto úlohu nazvali zovšeobecnená brachystochrona. Znie nasledovne: na všeobecnej riemannovskej variete sa pohybuje z bodu A do bodu B hmotný bod pod vplyvom sily danej všeobecným potenciálovým poľom tak, aby minimalizoval čas presunu z A do B. Treba určiť tvar krivky (drôtu, ktorý prinúti bod na tejto krivke zotrvať), na ktorej sa tento minimálny čas realizuje. V ich článkoch je výsledná rovnica, ale chýba jej detailné odvodenie. Cieľom tejto práce je urobiť toto detailné odvodenie a overiť správnosť uvedenej rovnice.

Úvodná časť sa podrobne venuje pôvodnej klasickej úlohe, vrátane jej histórie a detailov riešenia. Jadro práce obsahuje odvodenie rovnice zovšeobecnenej brachystochrony, najprv pre ľubovoľný parameter, potom ako špeciálny prípad aj pre „prirodzený“ parameter, v ktorom ju zapísali vyššie uvedení autori. V poslednej kapitole sú uvedené základné pojmy z variačného počtu.

Obsah

Úvod

Brachystochróna je krivka, ktorá spája dva pevne zvolené body v priestore s prítomným silovým poľom tak, aby hmotný bod pohybujúci sa po nej prešiel túto vzdialenosť za najkratší čas. Vo svojej práci sa najprv pozriem na korene tejto úlohy, na hlavných predstaviteľov - velikánov matematiky, ktorí úlohu zadali a vyriešili. Opíšem detailne klasickú úlohu o brachystochróne v takom znení, v akom bola pôvodne formulovaná a jej riešenie. Ďalej pridám nejaké počiatočné podmienky a pozriem sa, ako sa zmení riešenie. V hlavnej téme zavediem zovšeobecnenia, ktoré tvoria jadro práce a pomocou metód variačného počtu ich pretavím do diferenciálnej rovnice, ktorú vo svojej práci o kvantovej brachystochróne odvodil Yosuke Okudaira a kol. Na záver pre pohodlie čitateľa uvádzam minimálny súbor poznatkov o variačnom počte, potrebný (v prípade záujmu) k pochopeniu princípu extremalizovania.

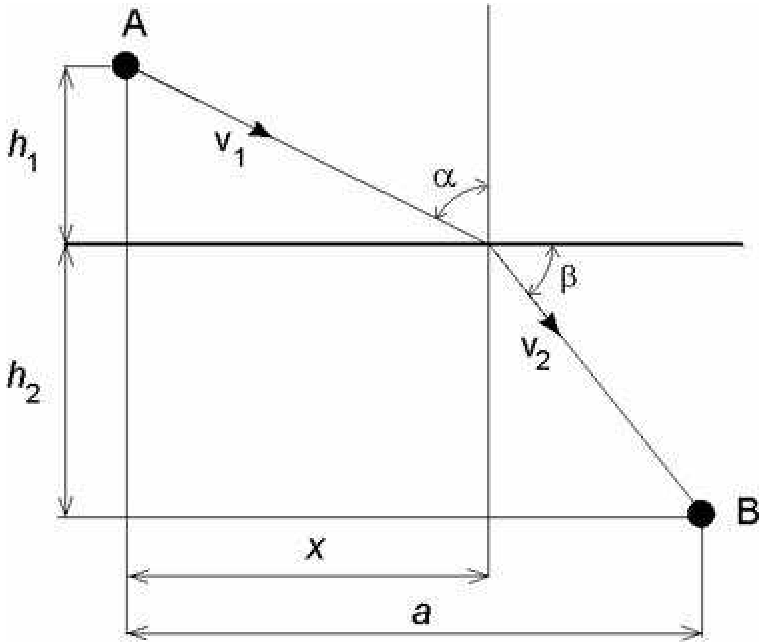
Kapitola 1

Historický úvod

Nová výzva pre matematikov 17. storočia, ktorá nakoniec viedla ku vzniku úplne novej teórie v matematickej analýze - Variačného počtu, bola ponúknutá Jánom Bernoullim (1677-1748) uverejnená roku 1696 v časopise Acta Eruditorum, ktorého vydavateľom bol G. W. Leibniz (1646-1716). Úlohou bolo určiť dráhu, ktorá by spájala dva body vo zvislej rovine (neležiace na spoločnej vertikále) a po ktorej by sa hmotný bod pohyboval účinkom tiaže a bez odporu tak, že by z horného bodu dorazil do spodného v najkratšom čase.

Bernoulli doslova píše: *„Zmyslom úlohy je nájsť medzi nekonečne veľa krivkami spájajúcimi oba body takú, pozdĺž ktorej, ak by bola nahradená príslušnou tenkou zakrivenou trubicou, by vložená a voľne vypustená gulička dospela do druhého bodu za najkratší čas. Aby som však vylúčil akúkoľvek dvojznačnosť, pripomínam výslovne, že prijímam Galileovu hypotézu, o ktorej žiadny rozumný geometer nepochybuje, podľa ktorej, keď nedbáme na odpor pohybu, sa rýchlosť padajúceho telesa mení s druhou odmocninou z prekonaného výškového rozdielu.“*

Leibniz predostretý problém sám posúdil a napísal, že ide o: *"Veľmi krásnu a neslýchanú úlohu"*.
Výzvu Jána Bernoulliho prijali jeho starší brat Jakub Bernoulli (1654-1705), Leibniz, L´Hospital (1661-1704), Newton (1642-1727) a Huygens (1629-1695). Každý z nich podal správne riešenie. Nejjednoduchšie riešenie však podal sám Jan Bernoulli. Vychádzal z Fermatovho princípu, ktorý poznáme z optiky. Princíp vysvetľuje lom svetla v prostredí s rôznymi optickými hustotami. Lúč svetla sa šíri a na rozhraní dvoch prostredí láme tak, aby nestratil ani nanosekundu a prišiel z bodu A do bodu v B v čo najkratšom čase.
Lúč prechádza prostredím, v ktorom se šíri rýchlosťou v_1, a dopadá do prostredia s rýchlosťou šírenia v_2.



Obrázok 1.1: Putovanie svetelného lúča

Z obrázka ľahko odvodíme rovnicu:

$$t(x) = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}}{v_2} \tag{1.1}$$

Aby sme našli minimum funkcie $t(x)$, musíme si zaderivovať a "zanulovať":

$$t'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{a-x}{v_2\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}} = 0 \tag{1.2}$$

Obrázok nás zvádza urobiť jednoduché substitúcie:

$$\sin\alpha = \frac{x}{v_1\sqrt{h_1^2 + x^2}} \qquad \sin(90-\beta) = \frac{a-x}{v_2\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}}$$

Vzťah $\frac{sin\alpha}{v_1} = \frac{sin(90-\beta)}{v_2}$, ktorý sme dostali, nápadne pripomína Snellov zákon lomu, pretože to je Snellov zákon lomu.
Tu si treba všimnúť metódu, ktorá viedla (veľmi jednoducho) k riešeniu. Vyšetrovaním extrémnych bodov funkcie nám dáva možnosť riešiť mnohé praktické problémy napr. aké rozmery má mať sud na pivo, aby mal pri danom povrchu maximálny objem a krčmár mal z neho maximálnu radosť.

Vráťme sa teraz k našej brachystochróne.
Úloha nájsť brachystochrónu a dráhu svetelného lúča majú významné spoločné črty:

- obe majú jediné riešenie, ktoré by sme naozaj pozorovali, keby sme pozorovali.
- intuitívne cítime (a pri jednej z nich sme sa o tom presvedčili), že ide o hľadanie akýchsi extrémov.

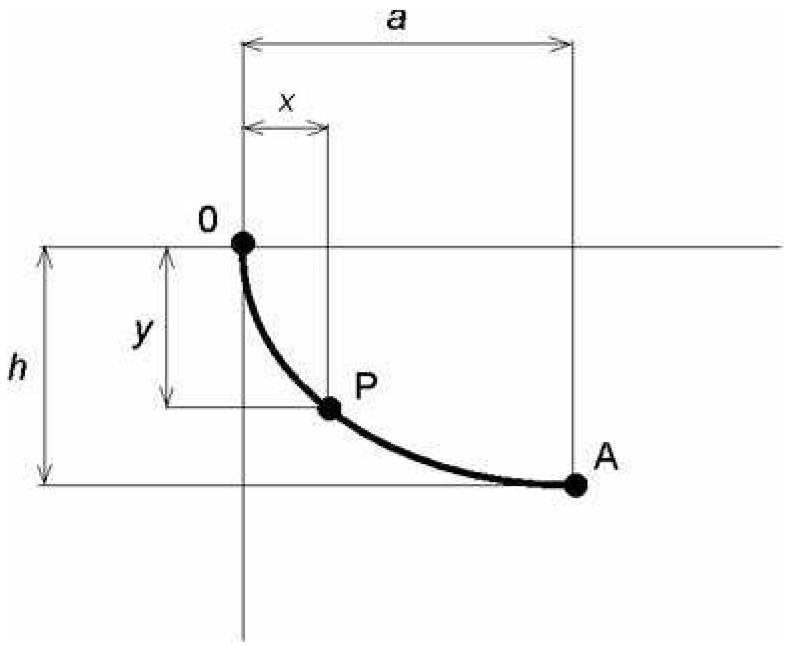
Kým doteraz sme hľadali extrém funkcie, teraz budeme hľadať akúsi extrémnu funkciu, čo zo všetkých možných funkcií spájajúcich dva pevné body má práve tú vlastnosť, že je brachystochrónou.
Patrilo by sa ešte spomenúť Bernoulliho riešenie. To on si všimol analógiu s optikou a problém vyriešil takto:
Kľúčová myšlienka, ktorá Barnoulliho priviedla k riešieniu spočívala v tom, že si uvedomil, že extremálne správanie má nielen celá krivka, ale každá jej časť.
Na základe tohto predpokladu musí platiť:

$$\frac{\sin\alpha}{v} = \frac{1}{v}\frac{dx}{ds} = \frac{1}{v}\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = konst \tag{1.3}$$

Písmenko v označuje okamžitú rýchlosť, ktorá sa vypočíta zo zákona zachovania energie, pričom v bode $[0,0]$ je energia nulová, ako vidno z obrázka (1.2)
A teda $v = \sqrt{2gy}$
Z toho dostaneme:

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = konst \qquad \text{, alebo tiež} \qquad y(1+y'^2) = konst \tag{1.4}$$

Problém sa týmto zvrhol na pátranie po funkcii spĺňajúcej rovnicu (1.4).



Obrázok 1.2: Očakávaný tvar brachystochróny

Bernulli videl v rovnici (1.4) krivku - cykloidu, ktorú veľmi dobre poznal (ja by som to tam určite nenašiel ani s baterkou). Cykloida v „násilnom“ tvare $y(x)$ sa dá parametrizovať napr. parametrom φ :

$$x = a\varphi - a\sin\varphi \qquad y = a - a\cos\varphi = 2a\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

Skúsme to dosadiť do (1.4). Potrebujeme ešte prvú deriváciu:

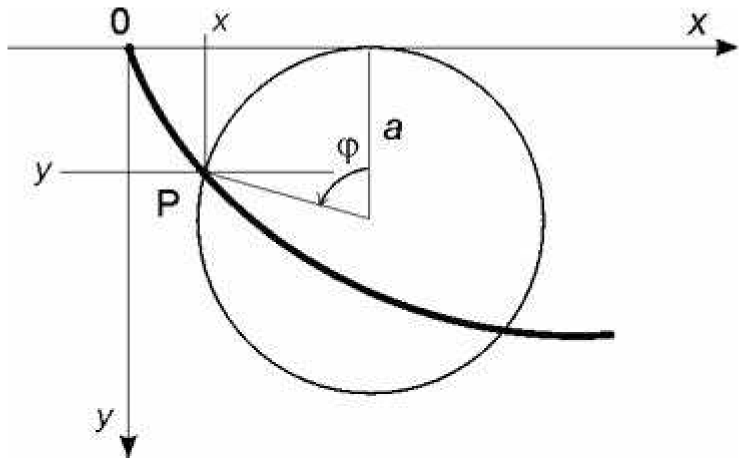
$$y'(x) = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{a\sin\varphi}{a(1-\cos\varphi)} = \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{1-\cos^2\frac{\varphi}{2}+\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \arctan\frac{\varphi}{2}$$

Teraz už máme všetko. Otestujme teda Bernulliho riešenie:

$$2a\sin^2\frac{\varphi}{2}\left(1+\frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\right) = 2a = konst.$$

Všetko je teda v poriadku.

Ostáva ešte obrázok, ako taká brachystochróna vyzerá.
Kružnica sa kotúľa po osi x a pevný bod P, ktorý na nej leží, kreslí cykloidu.



Obrázok 1.3: Brachystochrona

Na záver tejto kapitoly, ktorá nesie názov „Historický úvod" sa patrí spomenúť niečo zo života jedného z najväčích matematikov všetkých čias, **Leonharda Eulera.**
Leonhard Euler sa narodil 15. apríla 1707 v Bazileji (Švajčiarsko). Prvým učiteľom matematiky mu bol jeho otec Paul Euler, protestantský kňaz. Už ako 14 ročný začal študovať na Univerzite. Johann Bernoulli, jeho súkromný učiteľ, v ňom rýchlo objavil nadanie na matematiku. Stal sa magistrom filozofie a študoval aj teológiu. Získal druhé miesto vo Veľkej cene vypísanej Parížskou akadémiou za svoje riešenie problému najlepšieho umiestnenia stožiarov na lodi. 17. mája 1727 prišiel do St. Petersburgu, kde bol menovaný členom matematicko-fyzikálneho oddelenia tamojšej Akadémie vied. Z finančných dôvodov slúžil ako poručík zdravotnej služby ruského námorníctva, kým sa v roku 1730 nestal profesorom fyziky a riadnym členom Akadémie. Zaoberal sa kartografiou, vedeckým vzdelávaním, magnetizmom, mechanickými strojmi a stavbou lodí. V matematike teóriou čísel, diferenciálnymi rovnicami, variačným počtom a racionálnou mechanikou. V roku 1740 vyhral veľkú cenu Parížskej akadémie. Politická situácia v Rusku ho donútila odísť do Berlína, kde sa stal riaditeľom oddelenia matematiky na novozaloženej Akadémii vied. Za 25 rokov tu publikoval 380 článkov. Napísal knihy o variačnom počte, o výpočtoch dráh planét, o delostrelectve a balistike, o stavbe lodí, o námornej navigácii, o pohybe Mesiaca. Po nezhodách s kráľom Friedrichom Veľkým odišiel späť do St. Petersburgu, kde však úplne stratil zrak. Polovicu svojej vedeckej práce publikoval, aj keď bol úplne slepý. Po jeho smrti v roku 1783 Akadémia v St. Petersburgu ešte 50 rokov publikovala dovtedy nepublikované práce.

Kapitola 2

Riešenie klasickej brachystochróny

2.1 Riešenie brachystochróny v homogénnom gravitačnom poli

2.1.1 Riešenie s nulovou počiatočnou rýchlosťou

Všeobecné riešenie

Aby nebol názov pre čitateľa mätúci, upresním ho.
Ide o pohyb hmotného bodu v homogénnom gravitačnom poli medzi bodmi neležiacimi na spoločnej vertikále ani horizontále s nulovou počiatočnou kinetickou energiou. Pozri obrázok (1.2).
Nech bod A má súradnice $[0, h]$ a bod B $[x_B, y_B]$.
Tak, ako väčšina suchozemských stavovcov z fyziky veľa neviem, ale vzťah pre okamžitú rýchlosť $v = \frac{ds}{dt}$ si ešte zo základnej školy pamätám. Z toho si vyjadrím čas: $dt = \frac{ds}{v}$.
Doba pádu hmotného bodu je

$$t = \int_A^B \frac{ds}{v} \tag{2.1}$$

Rýchlosť vypočítame zo zákona zachovania energie

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgh \ \Rightarrow \ v = \sqrt{2g(h-y)} \tag{2.2}$$

Pytagorovu vetu tiež náhodou poznám. $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$
Po malej úprave:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + y'^2} dx \tag{2.3}$$

Po dosadení (2.2) a (2.3) do (2.1) dostanem konečný tvar funkcionálu

$$t[y] = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(h-y)}} dx \tag{2.4}$$

Vidíme, že vo funkcii za integračným znakom sa explicitne nevyskytuje x. Použijem preto Druhý integrál (4.6), ktorého odvodenie sa nachádza v poslednej kapitole.

$$y' \frac{\partial}{\partial y'} \left(\sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(h-y)}} \right) - \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(h-y)}} = C(konst)$$

Výraz $\sqrt{2g(h-y)}$ od y' nezávisí, preto ho môžem dať na druhú stranu rovnice.

$$y' \frac{\partial \sqrt{1 + y'^2}}{\partial y'} - \sqrt{1 + y'^2} = C\sqrt{2g(h-y)}$$

Po zderivovaní dostávame

$$\frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} - \sqrt{1 + y'^2} = C\sqrt{2g(h-y)} \qquad \Big/ \cdot \sqrt{1 + y'^2}$$

$$-1 = C\sqrt{2g(h-y)(1 + y'^2)} \qquad \Big/ (...)^2$$

Konštanta C musí byť nutne záporná.

$$\frac{1}{C^2 2g(h-y)} - 1 = y'^2 \Big/ \qquad \sqrt{(...)}$$

Rovnica

$$y' = \sqrt{\frac{1-2gC^2(h-y)}{2gC^2(h-y)}} \tag{2.5}$$

je príjemná separovateľná.
Integrujme ju!

$$\int \sqrt{\frac{2gC^2(h-y)}{1-2gC^2(h-y)}}dy = \int dx$$

Ponúka sa nám tu goniometrická substitúcia

$$\left| \begin{array}{l} 2gC^2(h-y) = \sin^2\varphi \\ -2gC^2dy = 2\sin\varphi\cos\varphi d\varphi \end{array} \right|$$

Zámerne som zvolil sínus na druhú, aby parameter φ bol v čase $t = 0 \quad (y = h)$ nulový.

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{gC^2}\int \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi = -\frac{1}{gC^2}\int \sin^2\varphi d\varphi = \\ &= -\frac{1}{2gC^2}\int (1-\cos 2\varphi)d\varphi = -\frac{1}{4gC^2}(2\varphi - \sin 2\varphi) + D \end{aligned}$$

Aby mi krivka neutekala do IV. kvadrantu, zamením parameter φ za $-\varphi$.
Aby sa na to lepšie pozeralo, prihodím k tomu ešte zámenu $\varphi \to \frac{\varphi}{2}$.
Už ostáva len zverejniť (zatiaľ) beta verziu brachystochróny

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{4gC^2}(\varphi - \sin\varphi) + D \\ y = h - \frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{2gC^2} = h - \frac{1-\cos\varphi}{4gC^2} \end{array} \right\}$$

Koeficient $\frac{1}{4gC^2}$ je konštanta s rozmerom dĺžky, nazvem si ju R nie úplne náhodne, pretože tuším, že pôjde o polomer nejakej kružnice, keďže sa vyskytuje raz pred sínusom a raz pred kosínusom. A teda

$$\left\{ \begin{array}{l} x = R(\varphi - \sin\varphi) + D \\ y = h - 2R\sin^2\frac{\varphi}{2} = h - R(1-\cos\varphi) \end{array} \right\} \tag{2.6}$$

Vidíme, že ide o kružnicu, ktorá je posunutá v x-ovom smere o D a o $R\varphi$ a v y-ovom smere o $h - R$. Parameter φ môže byť len z intervalu $< 0, 2\pi)$. Je to preto, aby som odstrihol periodické riešenie.

Okrajové podmienky

- Všeobecné riešenie by sme mali. Chýbajú ešte okrajové podmienky, ktoré mi niečo pošepkajú o konštantách R a D.
  Dosaďme teda bod $A[0, h]$

$$\begin{aligned} 0 &= R(\varphi - \sin\varphi) + D \\ h &= h - R(1 - \cos\varphi) \end{aligned}$$

  Z druhej rovnice vidno, že $\varphi = 0$. To dosadíme do prvej rovnice a vyjde mi, že $D = 0$.

$$\left\{ \begin{aligned} x &= R(\varphi - \sin\varphi) \\ y &= h - R(1 - \cos\varphi) \end{aligned} \right\} \tag{2.7}$$

- Ale čo s R?
  Keď sa pokúsime dosadiť bod $B[x_B, y_B]$ do všeobecného riešenia (2.7), dostaneme niečo takéhoto:

$$x_B = R\left[\arccos\left(1 - \frac{h - y_B}{R}\right) - \sqrt{1 - \left(1 - \frac{h - y_B}{R}\right)^2}\right]$$

  Deväť z desiatich psychiatrov neodporúča zisťovať z toho, čomu je rovné R!
  Krivka nepredá svoju kožu lacno, ale na bielu vlajku je ešte čas. Poďme sa pozrieť aspoň zhruba na jej tvar.
  Zderivujme parametrické rovnice a položme túto deriváciu rovnú nule.

$$\left. 0 = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{-R\sin\varphi}{R(1 - cos)} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi - 1} \right\} \Rightarrow \varphi = 0, \pi, 2\pi$$

  Týmto zistíme kde má brachystochróna minimum (je jasné, že ide o minimum). Z rovnice vypadlo R závislé na okrajových podmienkach. Možno povedať, že každá cykloida daného tvaru má vo $\varphi = \pi$ svoje minimum. Prípady, keď $\varphi = 0$ a $\varphi = 2\pi$ sú nezaujímavé a určite nesúvisia s minimom krivky.
  Položme $\varphi = \pi$ do (2.7). Dostaneme

$$\begin{aligned} x_{min} &= R\pi \\ y_{min} &= h - R(1 - \cos\pi) = h - 2R \end{aligned}$$

  Ak vylúčime R-ko, zostane nám závislosť $x_{min} = \frac{\pi}{2}(h - y_{min})$.

1. Ak som si náhodou zvolil okrajové pomienky tak šikovne, že $x_B = \frac{\pi}{2}(h - y_B)$, potom viem povedať, že krivka začína vo svojom maxime v bode A a končí vo svojom minime v bode B.
   Viem dokonca určiť polomer: $R = \frac{h - y_{min}}{2}$

2. Niekomu sa možno viac páči, keď $x_B < \frac{\pi}{2}(h - y_B)$. V tom prípade s využitím rovníc (2.7) vylezie podmienka

   $$R(\varphi - \sin\varphi) < \frac{\pi}{2} R(1 - \cos\varphi)$$

   Výraz $(1 - cos\varphi)$ je na $(0, 2\pi)$ určite kladné číslo. Preto možno napísať:

   $$\frac{\varphi - \sin\varphi}{1 - \cos\varphi} < \frac{\pi}{2}$$

   Chystáme sa zistiť, či $\varphi < \pi$ alebo $\varphi > \pi$? Nech $\varphi = \pi + \varepsilon$. Podľa toho, či je ε kladné alebo záporné, zistím aké je φ.

   $$\frac{\pi + \varepsilon - \sin(\pi + \varepsilon)}{1 - \cos(\pi + \varepsilon)} = \frac{\pi + \varepsilon - [\sin\pi\cos\varepsilon + \cos\pi\sin\varepsilon]}{1 - [\cos\pi\cos\varepsilon - \sin\pi\sin\varepsilon]} = \frac{\pi + \varepsilon + \sin\varepsilon}{1 + \cos\varepsilon}$$

   Bez ohľadu na ε platí odhad

   $$\left.\frac{\pi + \varepsilon + \sin\varepsilon}{2} < \frac{\pi + \varepsilon + \sin\varepsilon}{1 + \cos\varepsilon} < \frac{\pi}{2}\right\} \Rightarrow \varepsilon < 0$$

   Uhol φ nedosiahne hodnotu π. Vskutku vieme povedať, že krivka padá zo svojho maxima v bode A do svojho minima v bode B. Polomer kružnice $R > \frac{h - y_{min}}{2}$

3. Rozoberme si ešte to, čo nám ostalo, a síce $x_B > \frac{\pi}{2}(h - y_B)$

   $$R(\varphi - \sin\varphi) > \frac{\pi}{2} R(1 - \cos\varphi)$$

   Výraz $(1 - cos\varphi)$ je na $(0, 2\pi)$ opäť kladné číslo. Preto možno napísať:

   $$\frac{\pi + \varepsilon + \sin\varepsilon}{1 + \cos\varepsilon} = \frac{\varphi - \sin\varphi}{1 - \cos\varphi} > \frac{\pi}{2} \Big/ - \frac{\pi}{2}$$

$$\left.\underbrace{\frac{\varepsilon+\sin\varepsilon}{1+\cos\varepsilon}}_{>0} > \frac{\pi+\varepsilon+\sin\varepsilon-\pi-\pi\cos\varepsilon}{2(1+\cos\varepsilon)} > 0\right\} \Rightarrow \varepsilon > 0$$

Uhol φ počas svojho života presiahne π. Krivka spája body A a B a na svojej ceste pritom dosiahne svoje minimum, ktoré je rôzne od bodov A a B. Polomer kružnice musí byť $R > \frac{h-y_{min}}{2}$.

Priamka $x = \frac{\pi}{2}(h-y)$ tvorí akúsi deliacu čiaru pre tvar krivky. Pod touto čiarou má brachystochróna tvar 2, nad ňou má tvar 3.

2.1.2 Riešenie s nenulovou počiatočnou rýchlosťou

Nech teraz hmotný bod padá z výšky h z bodu $A[0,h]$ do bodu $B[x_B, y_B]$ s počiatočnou rýchlosťou v_0. Problém vyriešime lišiacky. Budeme sa tváriť, že riešime inú brachystochrónu začínajúcu v nejakom $A'[?,?]$, ktorá len tak náhodou prechádza bodom $A[0,h]$ s sýchlosťou v_0 a ponáhľa sa do $B[x_B, y_B]$. Rýchlosť HB v ľubovoľnom bode $[x,y]$ vypočítam zo ZZE.

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh \;\Rightarrow\; v = \sqrt{v_0^2 + 2g(h-y)}$$

Pod odmocninou teraz dôjde k malej reorganizácii členov:

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{v_0^2}{2g} - y\right)} = \sqrt{2g(H-y)}$$

Zostavme funkcionál.

$$t[y] = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(H-y)}}dx$$

Teraz to vidno. Pohyb hmotného bodu z výšky h s počiatočnou rýchlosťou v_0 je rovnaký ako pohyb toho istého hmotného bodu z väčšej výšky H s nulovou počiatočnou rýchlosťou. Jeden otáznik sme vyriešili. Máme $A'[?, h+\frac{v_0^2}{2g}]$. Teraz sa musím spýtať, o koľko musíme posunúť počiatočnú podmienku doľava, aby sa nič nezmenilo? V rovniciach (2.6) je toto tajomstvo ukryté.

$$\begin{Bmatrix} x = R(\varphi - \sin\varphi) + D \\ y = H - R(1 - \cos\varphi) \end{Bmatrix}$$

Potrebujem vedieť, pre ktoré φ je $y = h$.
Pozrime sa na druhú rovnicu z (2.6).

$$h = h + \frac{v_0^2}{2g} - R(1 - \cos\varphi) \Rightarrow \varphi = \arccos\left(1 - \frac{v_0^2}{2gR}\right)$$

Do prvej rovnice dosadíme naše dlhé φ a $x = 0$ a zistíme, čomu je rovné D.

$$D = -R\left[\arccos\left(1 - \frac{v_0^2}{2gR}\right) - \sqrt{\frac{v_0^2}{2gR}\left(1 - \frac{v_0^2}{2gR}\right)}\right]$$

Záver je taký, že brachystochróna s počiatočnou rýchlosťou v_0 z bodu $A[0, h]$ do bodu $B[x_B, y_B]$ je rovnaká ako brachystochróna s nulovou počiatočnou rýchlosťou z bodu $A'\left[-R\left[\arccos\left(1 - \frac{v_0^2}{2gR}\right) - \sqrt{\frac{v_0^2}{2gR}\left(1 - \frac{v_0^2}{2gR}\right)}\right], h + \frac{v_0^2}{2g}\right]$ do bodu $B[x_B, y_B]$.

Kapitola 3

Zovšeobecnená brachystochróna

3.1 Zavedenie funkcionálu

Začneme ako inak najjdednoduchším prípadom a ten zovšeobecníme.
Skôr, ako sa pozrieme, aké členy vystupujú vo funkcionáli

$$t = \int_A^B \frac{ds}{v} \tag{3.1}$$

vynásobme čitateľ aj menovateľ (z dôvodov, ktoré sa ukážu neskôr pri postupnom zovšeobecňovaní) výrazom $\sqrt{\frac{1}{2}m}$

$$t = \int_A^B \frac{\sqrt{\frac{1}{2}m}ds}{\sqrt{\frac{1}{2}m}v} = \int_A^B \frac{\sqrt{\frac{1}{2}m}ds}{\sqrt{\frac{1}{2}mv^2}} = \int_A^B \frac{\sqrt{\frac{1}{2}m}ds}{\sqrt{T}} \tag{3.2}$$

1. Dráhový element ds určuje metriku daného priestoru.
   Dá sa rozpísať takto:
   $$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$
   ale aj takto:
   $$ds = \sqrt{\begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}} \tag{3.3}$$
   Tá matica v strede tej odmocniny sa nazýva metrický tenzor. Je jednotková, lebo ide o euklidovský priestor v kartézskych súradniciach.
   Dráhový element v polárnych súradniciach bude vyzerat kúsok inak.

$$ds = \sqrt{\begin{pmatrix} dr & d\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\varphi \end{pmatrix}} \tag{3.4}$$

Kto by rád matice $3x3$, uvediem ds vo sférických súradniciach:

$$ds = \sqrt{\begin{pmatrix} dr & d\vartheta & d\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\vartheta \\ d\varphi \end{pmatrix}} \tag{3.5}$$

Bystré oko si všimne, že vo všeobecnosti možno ds vyjadriť ako

$$ds = \sqrt{g_{ij} dq_i dq_j}$$

Zaveďme parametrizáciu nejakým všeobecným parametrom x

$$ds = \sqrt{g_{ij} q'_i q'_j} dx \tag{3.6}$$

2. Predpokladáme, že silové pole je potenciálové, platí zákon zachovania energie (pre sústavu n hmotných bodov):

$$\frac{1}{2} m_1 g_{ij} v_i^1 v_j^1 + \frac{1}{2} m_2 g_{ij} v_i^2 v_j^2 + \cdots \frac{1}{2} m_n g_{ij} v_i^n v_j^n + U = E$$

Tento pohyb n hmotných bodov v k-rozmernom priestore možno tiež chápať ako pohyb jediného hmotného bodu v $n \cdot k$ rozmernom priestore. V ňom pozorujeme akési zovšeovecnené rýchlosti $v_i = (v_i^1, v_i^2, ..., v_i^n)$ a tenzor kinetickej energie $T_{ij} = \frac{1}{2}(m_1 g_{ij}, m_2 g_{ij}, ..., m_n g_{ij})$ vystupuje ako bloková matica. Tvar T_{ij}, ktorý som uviedol, nemusí byť vo všeobecnosti taký jednoduchý. Ak rátame s väzbami medzi jednotlivými bodmi, pribudnú aj nediagonálne členy! V tomto zovšeobecnenom $n \cdot k$-rozmernom priestore možno zákon zachovania energie formulovať v jednoduchom tvare

$$\underbrace{\frac{1}{2} T_{ij} v_i v_j}_{T} + U = E$$

Z toho ľahko vyjadríme bilineárnu formu T reprezentujúcu kinetickú energiu

$$T = E - U \tag{3.7}$$

Vzhľadom na novozavedený $n \cdot k$-rozmerný priestor rýchlostí treba upraviť výraz (3.6).
To, čo by platilo pre jediný hmotný bod

$$\sqrt{\frac{1}{2} m} ds = \sqrt{\frac{1}{2} m g_{ij} q'_i q'_j} dx = \sqrt{T_{ij} q'_i q'_j} dx$$

bude platiť podobne v našom zovšeobecnenom prípade

$$\sqrt{\frac{1}{2}m}ds \rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}m_1 g_{ij} {q'}^1_i {q'}^1_j + \frac{1}{2}m_2 g_{ij} {q'}^2_i {q'}^2_j + \cdots} dx = \sqrt{T_{ij} {q'}_i {q'}_j}$$

Skonkrétnime teda funkcionál (3.1).

$$t = \int\limits_A^B \frac{\sqrt{T_{ij} {q'}_i {q'}_j}}{\sqrt{T}} \, dx = \int\limits_A^B \sqrt{\frac{1}{T} T_{ij} {q'}_i {q'}_j} \, dx$$

Celý výraz $\sqrt{\frac{1}{T} T_{ij} {q'}_i {q'}_j}$ si môžeme predstaviť ako nejaký lagranžián L.

3.2 Variačný problém

Napíšme Eulerove rovnice

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial q'_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

pre náš lagranžián $L = \sqrt{T_{ij}q'_i q'_j}$ bez T.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial q'_k} &= \frac{\partial\sqrt{T_{ij}q'_i q'_j}}{\partial q'_k} = \frac{1}{2L}\left(T_{ik}+T_{ki}\right)q'_i = \frac{1}{L}T_{ki}q'_i \\
\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial q'_k} &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{L}T_{ki}q'_i\right] = -\frac{1}{L^2}\dot{L}T_{ki}q'_i + \frac{1}{L}\frac{\partial T_{ki}}{\partial q_j}q'_i q'_j + \frac{1}{L}T_{ki}q''_i = \\
&= -\frac{1}{L^2}\dot{L}T_{ki}q'_i + \frac{1}{L}\left[\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial T_{ki}}{\partial q_j}+\frac{\partial T_{kj}}{\partial q_i}\right)}_{\text{symetrický}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial T_{ki}}{\partial q_j}-\frac{\partial T_{kj}}{\partial q_i}\right)}_{\text{antisymetrický}}\right]q'_i q'_j + \\
&+ \frac{1}{L}T_{ki}q''_i = -\frac{1}{L^2}\dot{L}T_{ki}q'_i + \frac{1}{2L}\left(\frac{\partial T_{ki}}{\partial q_j}+\frac{\partial T_{kj}}{\partial q_i}\right)q'_i q'_j + \frac{1}{L}T_{ki}q''_i \\
\frac{\partial L}{\partial q_k} &= \frac{\partial\sqrt{T_{ij}q'_i q'_j}}{\partial q_k} = \frac{1}{2L}\frac{\partial T_{ij}}{\partial q_k}q'_i q'_j
\end{aligned}$$

Teraz už zostáva len poukladať tieto kúsky a postaviť z nich Eulerove rovnice.

$$-\frac{1}{L^2}\dot{L}T_{ki}q'_i + \frac{1}{L}\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial T_{ki}}{\partial q_j}+\frac{\partial T_{kj}}{\partial q_i}-\frac{\partial T_{ij}}{\partial q_k}\right)}_{\Gamma_{kij}}q'_i q'_j + \frac{1}{L}T_{ki}q''_i = 0 \tag{3.8}$$

Výraz Γ_{kij} sa učene nazýva Christoffelov symbol prvého druhu.
Prenásobme teraz rovnicu (3.8) Lagranžiánom a potom zľava inverzným tenzorom $T_{lk}{}^{-1}$.

$$\underbrace{T_{lk}{}^{-1}\Gamma_{kij}}_{\Gamma^l_{ij}}q'_i q'_j + \underbrace{T_{lk}{}^{-1}T_{ki}}_{\delta_{li}}q''_i = \frac{\dot{L}}{L}\underbrace{T_{lk}{}^{-1}T_{ki}}_{\delta_{li}}q'_i$$

$$q''_l + \Gamma^l_{ij}q'_i q'_j = \frac{\dot{L}}{L}q'_l \tag{3.9}$$

Γ^l_{ij} v rovnici (3.9) voláme Christoffelov symbol druhého druhu a $\dot{L}$, ktoré už dlho používam je totálna derivácia lagranžiánu.

Učiňme zámeny:

$$
\begin{aligned}
L &\longmapsto \frac{L}{\sqrt{T}}\\
T_{ij} &\longmapsto \frac{1}{T}T_{ij}\\
T^{-1}_{ij} &\longmapsto TT^{-1}_{ij}
\end{aligned}
$$

a zistime ako sa zmenia členy, ktoré vystupujú v rovnici (3.9)

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{kij} &\longmapsto \frac{1}{T}\Gamma_{kij} - \frac{1}{\sqrt{T^3}}\left(T_{ki}\frac{\partial\sqrt{T}}{\partial q_j} + T_{kj}\frac{\partial\sqrt{T}}{\partial q_i} - T_{ij}\frac{\partial\sqrt{T}}{\partial q_k}\right)\\
\Gamma^l_{ij} = T^{-1}_{lk}\Gamma_{kij} &\longmapsto \Gamma^l_{ij} - \frac{1}{\sqrt{T}}\left(\delta_{li}\frac{\partial\sqrt{T}}{\partial q_j} + \delta_{lj}\frac{\partial\sqrt{T}}{\partial q_i} - T^{-1}_{lk}T_{ij}\frac{\partial\sqrt{T}}{\partial q_k}\right)\\
\frac{\dot{L}}{L} &\longmapsto \frac{(L/\sqrt{T})^{\dot{}}}{(L/\sqrt{T})} = \frac{\dot{L}\sqrt{T} - L\dot{\sqrt{T}}}{T}\frac{\sqrt{T}}{L} = \frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{\sqrt{T}}}{\sqrt{T}}
\end{aligned}
$$

Rozpíšme teraz rovnicu (3.9) podľa týchto nových výrazov:

$$
q''_l + \Gamma^l_{ij}q'_iq'_j - \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{T}}\frac{\partial\sqrt{T}}{\partial q_j}q'_jq'_l + \frac{1}{\sqrt{T}}\frac{\partial\sqrt{T}}{\partial q_i}q'_iq'_l}_{\frac{2}{\sqrt{T}}\frac{\partial\sqrt{T}}{\partial q_j}q'_jq'_l} - \frac{1}{\sqrt{T}}\underbrace{T_{ij}q'_iq'_j}_{L^2}T^{-1}_{lk}\frac{\partial\sqrt{T}}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{\sqrt{T}}}{\sqrt{T}}\right)q'_l
$$

Ako vidíme, prvý a druhý člen vo veľkej okrúhlej zátvorke sú rovnaké, líšia sa len sumačným indexom. V treťom člene spoznávame lagranžián. Uvedomme si, že $\frac{1}{\sqrt{T}}\frac{\partial\sqrt{T}}{\partial q_i}$ sa dá napísať ako $\partial q_i \ln\sqrt{T}$. člen $\frac{\dot{\sqrt{T}}}{\sqrt{T}}$ na pravej strane rovnice sa dá vyjadriť tiež ako $\frac{1}{\sqrt{T}}\frac{\partial\sqrt{T}}{q_i}q'_i$ a tiež ako $q'_i\partial q_i \ln\sqrt{T}$.

$$
q''_l + \Gamma^l_{ij}q'_iq'_j - 2q'_lq'_j\partial q_j \ln\sqrt{T} + L^2T^{-1}_{lk}\partial q_k \ln\sqrt{T} = \frac{\dot{L}}{L}q'_l - q'_lq'_k\partial q_k \ln\sqrt{T}
$$

Index j v treťom člene je iba sumačný. Možno ho nahradiť napríklad k-čkom, aby sme mohli dať všetky členy s logaritmom energie dokopy

$$
q''_l + \Gamma^l_{ij}q'_iq'_j = \left(q'_lq'_k - L^2T^{-1}_{lk}\right)\partial q_k \ln\sqrt{T} + \frac{\dot{L}}{L}q'_l \tag{3.10}
$$

Energiu T v rovnici (3.10) nahraďme výrazom (3.7), ktorý sme vyťažili zo zákona zachovania energie. Dostaneme tak konečný tvar rovnice zovšeobecnenej brachystochróny vo všeobecnom parametri x.

$$q''_l + \Gamma^l_{ij} q'_i q'_j = \left(q'_l q'_k - L^2 T^{-1}_{lk} \right) \partial q_k \ln \sqrt{E-U} + \frac{\dot{L}}{L} q'_l \tag{3.11}$$

3.3 Prirodzený parameter krivky

Konkurz na prirodzený parameter krivky určite vyhrá jej dĺžka meraná od jej zvoleného počiatku. Vyhrá hlavne preto, lebo nemá žiadnych súperov.
Tento parameter (označme ho s) možno vyjadriť ako:

$$s = \int_{x_0}^{x} \underbrace{\sqrt{T_{ij} q'_i q'_j}}_{L} \, dx = \int_{s_0}^{s} \underbrace{1}_{L} \, ds$$

Lagranžián sa v prirodzenom parametri zjednoduší na $L = 1$. Rovnica zovšeobecnenej brachystochróny v prirodzenom parametri bode vyzerať takto:

$$q''_l + \Gamma^l_{ij} q'_i q'_j = \left(q'_l q'_k - T^{-1}_{lk} \right) \partial q_k \ln \sqrt{E-U} \tag{3.12}$$

Posledný člen z rovnice (3.11) vypadol, lebo $\dot{L} = 0$.

Nakoniec by nebolo odveci overiť našu rovnicu (3.11) na jednoduchom príklade, pre ktorý je výhodnejšie použiť všeobecný parameter.

3.4 Kanónom na vrabce

3.4.1 Klasická brachystochróna z podkapitoly 2.1.1

V euklidovej rovine s klasickou euklidovskou metrikou je metrický tenzor rovný kronekerovej delte $g_{ij} = \delta_{ij}$ a tenzor kinetickej energie $T_{ij} = \frac{1}{2}m\delta_{ij}$.
Zvoľme si súradnice tak ako sa patrí $\left\{ \begin{array}{c} q_1 = x \\ q_2 = y \end{array} \right\}$.
Parameter nech je x.
V takejto parametrizácii budú derivácie vyzerať takto: $\left\{ \begin{array}{c} {q'}_1 = 1 \\ {q'}_2 = y' \end{array} \right\}$.
Poďme sa pozrieť ako budú vyzerať jednotlivé členy v rovnici (3.11)

Christoffelov symbol druhého druhu Γ^l_{ij} bude nulový, pretože derivácie v ňom vystupujúce, pôsobiace na kroneker dávajú nuly.
Rýchlosť v homogénnom gravitačnom poli sa vypočíta z rovnice (3.7).

$$T = E - U = 2(mgh - mgy) = 2mg(h - y)$$

Pozrime sa na prvý člen na pravej strane rovnice (3.12):

$$\frac{1}{2}{q'}_l{q'}_k\partial q_k \ln 2mg(h-y) = \underbrace{\frac{1}{2}{q'}_l\frac{\partial \ln 2mg(h-y)}{\partial x}}_{0} + \frac{1}{2}{q'}_l y' \frac{\partial \ln 2mg(h-y)}{\partial y} = -\frac{y'}{2(h-y)}{q'}_l$$

Nasleduje lagranžián

$$L = \sqrt{T_{ij}{q'}_i{q'}_j} = \sqrt{\frac{m}{2}\delta_{ij}{q'}_i{q'}_j} = \sqrt{\frac{m}{2}}\sqrt{{q'}_1^2 + {q'}_2^2} = \sqrt{\frac{m}{2}}\sqrt{1 + y'^2}$$

Keď už máme lagranžián, upravme ďalší člen

$$\frac{1}{2}L^2 T^{-1}_{lk}\partial q_k \ln 2mg(h-y) = \left(1 + y'^2\right)\frac{\partial \ln 2mg(h-y)}{2\partial q_l}$$

Ostal nám už len dekoračný doplnok $\frac{\dot{L}}{L}{q'}_l$

$$\frac{\dot{L}}{L}{q'}_l = \frac{1}{L}\frac{d}{dx}\sqrt{1 + y'^2}{q'}_l = \frac{1}{2L}\frac{2y'}{L}y''{q'}_l = \frac{y'y''}{1 + y'^2}{q'}_l$$

Dajme to všetko dokopy.

- Nech $l = 1$. Potom rovnica

$$y'' = \frac{1+y'^2}{2(h-y)} \tag{3.13}$$

ktorá z toho vzíde by mala predstavovať rovnicu klasickej brachystochróny. Skúsme, či parametrické rovnice brachystochróny (2.7) riešia rovnicu (3.13)
Najskôr vypočítajme

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi - 1}$$

a

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{\cos\varphi}{R(\cos\varphi - 1)^3}$$

a teraz dosaďme do (3.13)

$$\frac{\cos\varphi}{R(\cos\varphi-1)^3} = \frac{1+\frac{\sin^2\varphi}{(\cos\varphi-1)^2}}{-2R(\cos\varphi-1)^3} = \frac{(\cos\varphi-1)^2+\sin^2\varphi}{-2R(\cos\varphi-1)^3} = \frac{\cos\varphi}{R(\cos\varphi-1)^3}$$

- Zostavme rovnicu pre $l = 2$

$$y'' = -\frac{y'^2}{2(h-y)} + \frac{1+y'^2}{2(h-y)} + \frac{y'^2y''}{1+y''}$$

ktorá sa po krátkej úprave ukáže byť totožná s rovnicou (3.13)

Zistili sme, že klasická brachystochróna je riešením rovnice (3.11)
Takto sme na jednoduchom príklade overili diferenciálnu rovnicu zovšeobecnenej brachystochróny.

Kapitola 4

Základy variačného počtu

4.1 Nutná podmienka pre extremálu

Budeme sa zaoberať varírovaním špeciálnej funkcie $F(x, y, y')$

Definícia 1 *Nech* $\mathbf{B}$ *je množina funkcií.*
Zobrazenie $F[y] : \mathbf{B} \mapsto \mathbb{R}$ *nazývame funkcionálom na množine* $\mathbf{B}$.

Definícia 2 $y \in \overset{\star}{C}{}^2 < a, b > \Leftrightarrow y, y', y''$ *sú spojité na intervale* $< a, b >$ *a* $y(a) = A, y(b) = B$

Definícia 3 *Na množine* $\overset{\star}{C}{}^2 < a, b >$ *je definovaná metrika* ϱ *tak, že* $\forall u(x), v(x) \in \overset{\star}{C}{}^2 < a, b >$ *platí:*

$$\varrho(u, v) = \max_{x \in <a,b>} |u - v| + \max_{x \in <a,b>} |u' - v'|$$

Definícia 4

$$O_\varepsilon[y(x)] := \left\{ u(x) \in \overset{\star}{C}{}^2 < a, b >: \varrho(u(x), y(x)) < \varepsilon \right\}$$

Definícia 5 *Funkciu* $\overline{y(x)}$ *nazývame relatívnym maximom funkcionálu* $F[y]$ *práve vtedy, keď:*

$$\exists O_\varepsilon[\overline{y}] \quad \forall y \in O_\varepsilon[\overline{y}] \ : \ F[y] < F[\overline{y}]$$

Definícia 6 *Funkciu* $\overline{y(x)}$ *nazývame relatívnym minimom funkcionálu* $F[y]$ *práve vtedy, keď:*

$$\exists O_\varepsilon[\overline{y}] \quad \forall y \in O_\varepsilon[\overline{y}] \ : \ F[y] > F[\overline{y}]$$

Definícia 7 *Relatívne maximum resp. minimum funkcionálu* $F[y]$ *nazývame extremálou funkcionálu.*

Veta 1 *(Základná lemma variačného počtu)*

- *Nech* $f(x)$ *je spojitá na intervale* $< a, b >$
- *Nech* $\eta(x)$ *a* $\eta'(x)$ *sú spojité na* $< a, b >$ *a* $\eta(a) = \eta(b) = 0$
- *Nech* $\forall \eta(x) \in \overset{\star}{C^2} < a, b > \quad : \quad \int\limits_a^b f(x)\eta(x)dx = 0$

potom $f(x) \equiv 0 \, \forall x \in < a, b >$

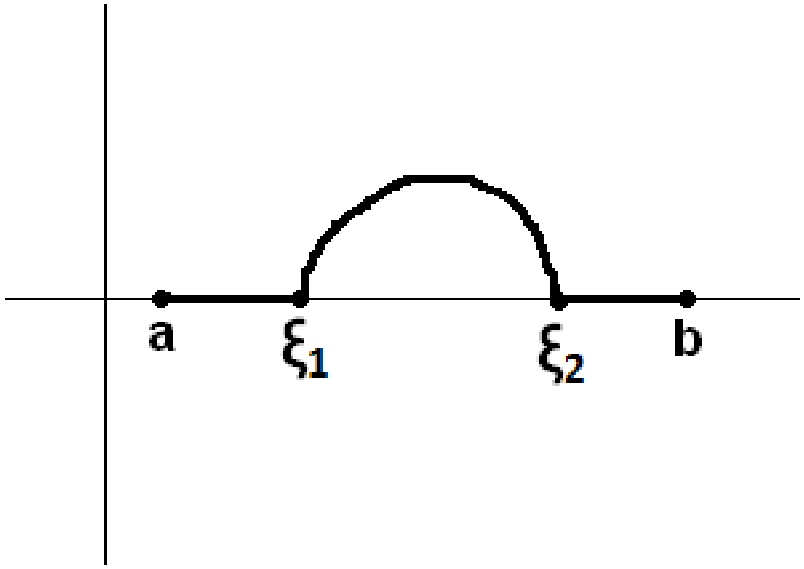
Dôkaz 1 *Vety 1 (Sporom)*
Vetu znegujeme a upravíme podľa schémy: $(\neg(a \Rightarrow b)) \Leftrightarrow (a \wedge (\neg b))$. *Ukážeme, že negovaná veta neplatí, čiže platí pôvodná veta.*
Tak teda, nech $f(x)$ *nie je identicky rovná nule. Z toho vyplýva, že* $\exists x_0 \in < a, b >$ *také, že* $f(x_0) > 0$ *(so zápornou* $f(x)$ *to ide tovnako dobre).*
Zo spojitosti vyplýva, že $\exists \xi_1, \xi_2 \ : \ f(x) > 0$ *na* $< \xi_1, \xi_2 >$
Definujeme funkciu: $\eta(x) = \begin{cases} 0 & pre \quad x \in (a, \xi_1) \\ (x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2 & pre \quad x \in < \xi_1, \xi_2 > \\ 0 & pre \quad x \in (\xi_2, b) \end{cases}$ $\eta(x)$ *je iste spojitá na* $< a, b >$ *a* $\eta(a) = \eta(b) = 0$.
Overme spojitosť jej derivácie: $\eta'(x)$:
$\eta'(x) = \begin{cases} 0 & pre \quad x \in (a, \xi_1) \\ 2(x-\xi_1)(x-\xi_2)(2x-\xi_1-\xi_2) & pre \quad x \in < \xi_1, \xi_2 > \\ 0 & pre \quad x \in (\xi_2, b) \end{cases}$ $\eta'(x)$ *je očividne spojitá na intervale* $< a, \xi_1) \cup (\xi_1, \xi 2) \cup (\xi_2, b >$
Problémy by mohli nastať v bodoch ξ_1,ξ_2. *Poďme sa teda presvedčiť aj tam je spojitá.*
Našou podmienkou spojitosti bude:

$$\lim_{x \to \xi_1^-} \eta'(x) = \lim_{x \to \xi_1^+} \eta'(x)$$

To isté musí platiť v bode ξ_2.

$$\lim_{x \to \xi_1^-} \eta'(x) = \lim_{x \to \xi_1^-} 0 = 0 \tag{4.1}$$

$$\lim_{x \to \xi_1^+} \eta'(x) = \lim_{x \to \xi_1^+} 2(x-\xi_1)(x-\xi_2)(2x-\xi_1-\xi_2) = 0 \tag{4.2}$$



Obrázok 4.1: Funkcia eta

Zo (4.1) a (4.2) vyplýva spojitosť $\eta'(x)$ *v bode* ξ_1

$$\lim_{x \to \xi_2^-} \eta'(x) = \lim_{x \to \xi_2^-} 0 = 0 \tag{4.3}$$

$$\lim_{x \to \xi_2^+} \eta'(x) = \lim_{x \to \xi_2^+} 2(x-\xi_1)(x-\xi_2)(2x-\xi_1-\xi_2) = 0 \tag{4.4}$$

Zo (4.3) a (4.4) vyplýva spojitosť $\eta'(x)$ *v bode* ξ_2
čiže $\eta(x)$,$\eta'(x)$ *sú spojité na* $< a, b >$

$\forall \eta(x)$ *by malo platiť, že* $\int\limits_a^b f(x)\eta(x)dx = 0$

Ale $\int\limits_a^b f(x)(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2dx = \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{>0\, na <\xi_1,\xi_2>} \underbrace{(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2}_{>0\, na <\xi_1,\xi_2>}}_{>0\, na <\xi_1,\xi_2>} dx > 0$

To je spor. Týmto je veta dokázaná.

Veta 2 *Nutná podmienka pre extremálu funkcionálu.*

Nutnou podmienkou k tomu, aby funkcia $\overline{y(x)} \in \overset{\star}{C}^2 < a, b >$*,spĺňajúca okrajové podmienky* $y(a) = A$*,* $y(b) = B$*, bola extremálou funkcionálu*

$$J[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$$

je podmienka, že $\overline{y(x)}$ *musí byť riešením Eulerovej diferenciálnej rovnice:*

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Dôkaz 2 *Nutnej podnienky.*
Budeme predpokladať, že: $F, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial y'}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial y'}, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'}, \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}$ *sú spojité a* $y(x) \in \overset{\star}{C}^2 < a, b >$ $\overline{y'}$ *je minimom funkcionálu* $J[y] \Leftrightarrow \exists O_\varepsilon[\overline{y}] \forall y \in O_\varepsilon[y] : J[\overline{y}] \leq J[y]$
Definujme si množinu prípustných funkcií $y(x, \alpha) = \overline{y(x)} + \alpha\,\eta(x)$
Funkcia $\eta(x)$ *je spojitá, má spojitú prvú deriváciu na intervale* $< a, b >$ *a spĺňa okrajové podmienky:* $\eta(a) = \eta(b) = 0$
Nech $y(x, \alpha)$ *patrí* ε*-okoliu* $\overline{y}$
Aké obmedzenie z toho plynie pre parameter α*?*

$$\begin{aligned} \varrho(\overline{y}, \overline{y} + \alpha\,\eta) &= \max_{x \in <a,b>} |\overline{y} + \alpha\,\eta| + \max_{x \in <a,b>} |\overline{y}' + \alpha\eta' - \overline{y}'| = \\ &= |\alpha| \underbrace{\left[\max_{x \in <a,b>} |\eta(x)| + \max_{x \in <a,b>} |\eta'(x)|\right]}_{M} < \varepsilon \end{aligned}$$

A teda:

$$-\frac{\varepsilon}{M} < \alpha < \frac{\varepsilon}{M}$$

Pre každú zvolenú funkciu $\eta(x)$ *sa dá nájsť príslušné* α*.*
Fixujme teraz $\eta(x)$*.*
V ε*-okolí extremály platí:* $J[\alpha] = \int_a^b F(x, \overline{y} + \alpha\,\eta, \overline{y}' + \alpha\,\eta')dx$
Namiesto funkcionálu máme zrazu obyčajnú funkciu premennej α*.*
Táto funkcia má zrejme v bode $\alpha = 0$ *lokálne minimum.*
Ak chcem použiť nutnú podmienku existencie lokálneho extrému funkcie, musím dokázať, že $F[\alpha]$ *je diferencovateľná v premennej* α*.*

Funkcia je diferencovateľná v nejakom bode práve vtedy, keď v tomto bode existuje derivácia. Poďme sa presvedčiť:

$$\frac{dJ[\alpha]}{d\alpha} = \int_a^b \frac{dF(x, \overbrace{\overline{y} + \alpha\,\eta}^{y}, \overbrace{\overline{y}' + \alpha\,\eta'}^{y'})}{d\alpha} dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' dx$$

V bode $\alpha = 0$ je:

$$\left.\frac{dJ[\alpha]}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial \overline{y}}\eta + \frac{\partial F}{\partial \overline{y}'}\eta' dx$$

Posledný integrál určite existuje, pretože všetky funkcie za integračným znakom sú podľa predpokladov spojité.
$F[\alpha]$ je teda diferencovateľná a má lokálne minimum v bode $\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{dJ[\alpha]}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$

$$\begin{aligned}
0 &= \left.\frac{dF[\alpha]}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial \overline{y}}\eta + \frac{\partial F}{\partial \overline{y}'}\eta' dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial \overline{y}}\eta dx + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial \overline{y}'}\eta' dx = \\
&= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial \overline{y}}\eta dx + \underbrace{\left.\frac{\partial F}{\partial \overline{y}'}\eta\right|_{x=a}^{x=b}}_{0} - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \overline{y}'}\right)\eta dx = \\
&= \int_a^b \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial \overline{y}} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \overline{y}'}\right)\right)}_{f(x)}\eta(x) dx
\end{aligned}$$

Podľa základnej lemmy $f(x) \equiv 0$.
Tým je dôkaz hotový.

4.2 Špeciálne zjednodušenia Eulerovej rovnice

4.2.1 Prvý Eulerov integrál

Aká bude podmienka extremály pre funkciu $F(y, y', x)$, v ktorej sa nevyskytuje y? Napíšme Eulerovu rovnicu.

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F(y',x)}{\partial y'} - \underbrace{\frac{\partial F(y',x)}{\partial y}}_{0} = 0$$

Ak sa však derivácia niečoho rovná nule, potom to niečo je konštanta.

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = konst \tag{4.5}$$

Ak namiesto Eulerovej rovnice vezmeme Lagrangeovu rovnicu, výraz (4.5) predstavuje zákon zachovania zovšeobecnenej hybnosti k jednej zovšeovecnenej súradnici konfiguračného priestoru.

4.2.2 Druhý Eulerov integrál

Ak sa vo „varírovaniachtivej“ funkcii $F(y, y', x)$ explicitne nevyskytuje x, diferenciálna rovnica, z ktorej vylezie extremála vyzerá takto:

$$y'\frac{\partial F}{\partial y'} - F = konst \tag{4.6}$$

Pokúsme sa ju odvodiť.
Zderivujme funkciu $F(y, y')$ podľa x.

$$\begin{aligned}
\frac{dF(y,y')}{dx} &= \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y'}y'' + \frac{\partial F}{\partial y}y' = \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}y'\right) - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{y'}y' + \frac{\partial F}{\partial y}y' = \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}y'\right) - \underbrace{\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{y'} + \frac{\partial F}{\partial y}\right)}_{0}y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}y'\right)
\end{aligned}$$

Dajme derivácie na jednu stranu.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}y'\right) - \frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}y' - F\right) = 0$$

Výraz v zátvorke je určite konštanta.
Náš špeciálny prípad teda vyzerá takto:

$$\frac{\partial F}{\partial y'}y' - F = konst$$

Na pôde lagranžiánov nezávislých od času rovnica predstavuje zákon zachovania energie.

Záver

V tejto práci sme sa venovali výpočtom súvisiacim so zovšeobecnenou brachystochrónou. Tento pojem zaviedli Okudaira a kol. v prácach, ktoré vyšetrovali istý extremalizačný problém v kvantovej mechanike. Podobne ako obyčajná brachystochróna má minimalizovať čas, za ktorý sa guľôčka zošmykne z bodu A do bodu B (v obyčajnom priestore) pod vplyvom gravitačného poľa, zovšeobecnená brachystochróna je krivka na všeobecnej n-rozmernej riemannovskej variete, ktorá minimalizuje čas prechodu z A do B pod vplyvom všeobecnej potenciálovej sily. V spomínanej práci síce možno nájsť výslednú diferenciálnu rovnicu (v prirodzenom parametri na krivke), nie je tam však jej odvodenie. Cieľom tejto práce bolo túto rovnicu odvodiť (a tým potvrdiť, že vyzerá naozaj tak, ako je v spomínaných prácach prezentovaná. To sa podarilo urobiť, v tretej kapitole podrobne opisujeme, ako sa dá táto rovnica odvodiť a tiež ukazujeme, ako by sa zmenila (skomplikovala), keby sa zapísala cez všeobecný parameter namiesto prirodzeného. Výslednú rovnicu so všeobecným parametrom spätne testujeme na pôvodnej klasickej úlohe, kde sa ako parameter berie súradnica x (či vtedy vedie na cykloidu; ukazuje sa, že vedie).

Táto práca by mohla pokračovať skúšaním vyriešenia základných rovníc v nejakej novej situácii, k čome sme sa už nedostali (a nebude to zrejme veľmi jednoduché).

Literatúra

[1] Höschl, C.: *Historie variačního počtu*
Ústav termomechaniky AV čR, Praha
http://mechanika.euweb.cz/files/HistorieVariacnihoPoctu.html

[2] Okudaira, Y., Hosoya,A., Tatsuhiko,K.: *Quantum brachistochrone curve*
http://www.qis-jst.on.arena.ne.jp/kochi/poster/text/54.pdf

[3] Fecko, M.: *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov* Bratislava, IRIS, 2004

[4] O'Connor, J.J., Robertson E.F.: *Leonhard Euler bibliography*
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/Biographies/Euler.html