

# Symetrie diferenciálních rovnic

Bakalárska práca

Lukáš Tomek

**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE**  
**Fakulta matematiky, fyziky a informatiky**  
**Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky**

Študijný odbor: 4.1.1 FYZIKA

Vedúci bakalárskej práce:  
doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.

BRATISLAVA 2009

### **Čestné prehlásenie**

Prehlasujem, že som bakalársku prácu vypracoval samostatne s použitím literatúry uvedenej v zozname.

Bratislava 6. 6. 2009

Lukáš Tomek

## **Pod'akovanie**

Na tomto mieste chcem poďakovať doc. RNDr. Mariánovi Feckovi, PhD., že zadal takúto peknú tému a taktiež ďakujem za rady a inšpirujúce nápady, ktoré dopomohli vzniku tejto práce.

## Abstrakt

<i>Autor:</i>	Lukáš Tomek
<i>Názov práce:</i>	Symetrie diferenciálnych rovníc
<i>Škola:</i>	Univerzita Komenského v Bratislave
<i>Fakulta:</i>	Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
<i>Katedra:</i>	Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky
<i>Vedúci práce:</i>	doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.
<i>Miesto:</i>	Bratislava
<i>Dátum:</i>	6.6.2009
<i>Počet strán:</i>	66
<i>Druh záverečnej práce:</i>	Bakalárska práca

**Abstrakt:** Práca sa zaoberá aplikáciou Lieových grúp na diferenciálne rovnice. Začína sa laickým úvodom do problematiky symetrií. Ďalej sa čitateľ zoznámia so základnými pojmami z diferenciálnej geometrie (vektorovými poľami a ich tokmi), ktoré sú potrebné pri štúdiu symetrií diferenciálnych rovníc. Na intuitívnej úrovni sa objasňuje pojem symetrie diferenciálnej rovnice. Na jednoduchých príkladoch sa postupne vysvetľuje, ako sa symetrie hľadajú a ukazuje sa, ako sa dajú symetrie využiť na výrobu nových riešení rovnice zo známych riešení.

**Kľúčové slová:** symetrie, diferenciálne rovnice, Lieove grupy, jetový priestor

# Predhovor

Táto bakalárska práca sa venuje symetriám diferenciálnych rovníc a jednou z mnohých aplikácií symetrií - hľadaniu nových riešení rovnice zo známych riešení použitím nájdených symetrií.

Práca sa snaží sprístupniť tému napriek jej náročnosti čo najširšej čitateľskej obci. Je písaná s úmyslom, aby sa *čo najvac jej čitateľov dočítalo čo najďalej* a aby tí, čo sa dostanú až nakoniec, mohli zobrať pero a papier a nájsť si pomocou postupu, ktorému porozumejú v práci, symetrie nejakej zaujímavej diferenciálnej rovnice.

Ide predovšetkým o *intuitívne pochopenie* problematiky a tomu je prispôbená aj miera rigoróznosti práce a množstvo obrázkov (je ich až 28). Nebude sa rozvádzať všeobecná teória a nebudú sa dokazovať žiadne vety. Pre matematických nadšencov sú v kapitole 5 uvedené formulácie dvoch viet, ktoré sa v práci používajú. Autor túto kapitolu napísal, aby sa mal kde pozrieť na presné znenie viet (v prehľadnejšej verzii než našiel v literatúre), keby bolo treba. Nenadšenci môžu túto časť pokojne preskočiť.

Hlavným cieľom práce je na jednoduchých príkladoch ukázať, ako sa to celé robí. Nájdú sa symetrie niektorých diferenciálnych rovníc známych z prednášok z fyziky (napríklad voľný pád, rovnica vedenia tepla) a predvedie sa, ako sa pomocou symetrií vyrábajú nové riešenia zo známych riešení.

Práca *nepredpokladá* znalosť *diferenciálnej geometrie*. V kapitole 2 sa zavedie niekoľko potrebných pojmov z tejto oblasti, nepôjde však o nič zložité. V texte sa vyskytnú pojmy *Lieova grupa* a *Lieova algebra*. Ak čitateľ o nich veľa nevie, nemusí zúfať. Aparát Lieových grúp nie je nevyhnutný k tomu, aby sme sa naučili hľadať symetrie. Úplne stačí počuť, že za tým, čo budeme robiť, sú nejaké Lieove grupy.

# Obsah

<b>Predhovor</b>	<b>5</b>
<b>1 Úvod - čo sú to symetrie</b>	<b>8</b>
1.1 Definícia symetrie . . . . .	8
1.2 Symetrie fyzikálnych zákonov . . . . .	9
1.3 Symetrie diferenciálnych rovníc . . . . .	10
<b>2 Vektorové polia</b>	<b>11</b>
2.1 Úvod . . . . .	11
2.2 Vektorové pole ako diferenciálny operátor . . . . .	12
2.3 Transformácia komponentov vektorového poľa . . . . .	13
2.4 Integrálne krivky a tok vektorového poľa . . . . .	15
2.4.1 Integrálne krivky vektorového poľa . . . . .	15
2.4.2 Tok vektorového poľa . . . . .	16
<b>3 Symetrie diferenciálnych rovníc</b>	<b>18</b>
3.1 Úvod . . . . .	18
3.2 Geometrický pohľad na diferenciálne rovnice . . . . .	20
3.3 Čo na symetrie vymyslel Sophus Lie . . . . .	22
3.4 Použitie symetrií . . . . .	24
<b>4 Hľadanie symetrií DR I.</b>	<b>25</b>
4.1 Rovnica státia . . . . .	25
4.2 Voľný pohyb po priamke . . . . .	29
4.3 Voľný pád . . . . .	40
4.4 Súvis medzi voľ. pohybom po priamke a voľ. pádom . . . . .	42
4.4.1 Zámena súradníc . . . . .	42
4.4.2 Transformácia Lieových algebier . . . . .	43
4.4.3 Grupa symetrií voľného pádu . . . . .	44
<b>5 Základné vety a definície</b>	<b>49</b>
5.1 Veta o predĺžení vektorového poľa . . . . .	49
5.2 Kritérium infnitezimálnej invariantnosti . . . . .	50
5.3 Definícia grupy symetrií . . . . .	51
<b>6 Hľadanie symetrií DR II.</b>	<b>52</b>
6.1 Rovnica vedenia tepla . . . . .	52
6.2 Rozpadová rovnica . . . . .	57

<i>OBSAH</i>	7
<b>A Riešenia determinujúcich rovníc</b>	<b>61</b>
A.1 Voľný pohyb po priamke . . . . .	61
A.2 Voľný pád . . . . .	62
A.3 Rovnica vedenia tepla . . . . .	63
<b>Záver</b>	<b>65</b>
<b>Zoznam použitej literatúry</b>	<b>66</b>

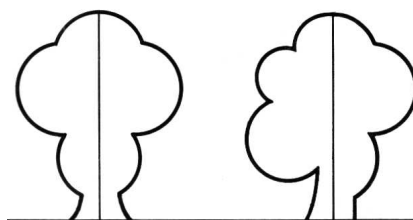
# Kapitola 1

## Úvod - čo sú to symetrie

### 1.1 Definícia symetrie

Slovo symetria ľudia používajú zväčša v dvoch významoch.

Prvý nie je presne definovaný a znamená niečo sebestočné, harmonické a vyrovnané. Ak hovoríme, že strom je symetrický, myslíme tým, že jedna jeho časť sa nejak podobá na druhú. Je zaujímavé zamyslieť sa nad



tým, kde sa v nás berie zmysel pre symetriu a prečo človek prežíva iné pocity pri pohľade na symetrický objekt než na asymetrický. Keď sa pozrieme okolo seba, všimneme si, že príroda rada vytvára veci, ktoré sú symetrické. Kryštály, stromy, kvety, ľudské telo, ale aj veľké objekty, ako planéty, hviezdy a galaxie vykazujú istý stupeň symetrie.

My sa ale budeme zaoberať symetriou z iného pohľadu. Ten je exaktnejší a dá sa presne matematicky formulovať.

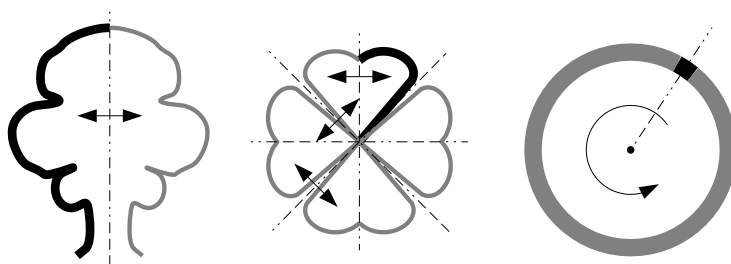
Ako symetriu definovať? Jedna možná definícia<sup>1</sup> hovorí: *Objekt je symetrický, keď na ňom môžeme spraviť nejakú operáciu, po ktorej bude rovnaký ako predtým.* Inak povedané, predmet je invariantný vzhľadom na operáciu symetrie. Napríklad váza je invariantná vzhľadom na operáciu rotácie. Keď ju otočíme okolo zvislej osi, vyzerá rovnako.<sup>2</sup>

Na symetriu sa dá pozeráť aj z druhej strany. Keď vyrábame nejaký symetrický predmet, nemusíme ho v istom zmysle práčne vyrábať celý. Napríklad keď kreslíme strom, netreba ho kresliť celý. Stačí si dobre namočiť štetec, nakresliť polovicu stromu na ľavú stranu papiera, preložiť papier a na pravú polovicu odtlačiť nakreslenú časť a strom máme hotový (Obr. 1.1). Na nakeslenie štvorlístka stačí nakresliť len jeden lupienok (skúsení maliari kreslia dokonca len pol lupienka) a ostatné dostať prekladaním papiera. Špeciálne na nakreslenie kolesa stačí spraviť malú čiarku, prekladať papier stredom budúceho kolesa a odtlačať čiarku dookola (nekonečne veľa krát). Cítíme, že symetria kolesa je vo svojej

<sup>1</sup> Feynmanova interpretácia Weylovej definície symetrie. Pozri [2] kapitola 11.

<sup>2</sup> Pekne definoval symetriu aj Joseph Rosen: *Symetria je imunita voči novej zmene.* Pozri [5].





Obr. 1.1: Ako kresliť symetrické obrázky.

podstate iná než symetria stromu. Strom je zrkadlovo symetrický, to je druh *diskrétnej* symetrie. Koleso je rotačne symetrické<sup>3</sup> a hovoríme o *spojitej* symetrii. (Spojitémi symetriami sa bude zaoberať aj táto práca.) Čím je obrázok symetrickejší, tým menej z neho stačí nakresliť a zvyšok dorobiť použitím symetrií. So *symetriami diferenciálnych rovníc* je to rovnako. Čím viac symetrií rovnica má, tým menej riešení stačí poznať na to, aby sme pomocou symetrií vyrobili všetky ostatné riešenia.

## 1.2 Symetrie fyzikálnych zákonov

V duchu definície symetrie z predchádzajúceho článku budeme hovoriť o symetriách fyzikálnych zákonov.

Zoberme si napríklad známy fyzikálny jav - spadnutie chleba z ruky na zem. Fyzikálne ide o voľný pád (odpor vzduchu neuvažujeme). Asi každému niekedy vypadol z ruky chlieb a (podľa všetkých historických záznamov) vždy spadol na zem.<sup>4</sup> Keby sme merali, ako dlho padal,<sup>5</sup> namerali by sme vždy rovnaký čas (za predpokladu rovnakých počiatkových podmienok). Rovnako by dopadli aj ďalšie merania. Fyzikálne javy fungujú rovnako nezávisle na tom, kedy sa začali. Táto symetria sa nazýva *translácia v čase*.

Ďalšia symetria je *translácia v priestore*. Chlieb padá na zem rovnako v kuchyni aj v obývačke. Je nutné dodať, že aby všetko fungovalo rovnako (aj pri translácii v čase), treba zabezpečiť nielen rovnaké počiatkové podmienky (výšku, nulovú počiatkovú rýchlosť), ale musíme dbať na to, aby voľnému pádu nezaťažovala stolička a aby všetko, čo môže mať vplyv na náš experiment, bolo na rovnakých miestach.

Spomeňme ešte *Galileiho* (resp. Lorentzovu) *transformáciu*, čo je pohyb po priamke konštantnou rýchlosťou. Voľný pád funguje rovnako v kuchyni aj v idúcom vlaku. Na to sme si už zvykli, ale je pozoruhodné, že fyzikálne zákony majú takúto symetriu.

Fyzikálny zákon popisujúci nejaký jav považujeme za symetrický vzhľadom na nejakú operáciu, ak po tejto operácii bude jav vyzeráť úplne rovnako a vý-

<sup>3</sup> Túto symetriu šikovne využívajú sústružníci a hrnčiari. Sústružník chce vyrobiť *rotačne symetrický* svietnik. Preto nevyrezáva celý svietnik ručne, ale použije sústruh, na ktorom roztočí kus dreva a reguluje len vzdialenosť noža od stredu otáčania. Stačí mu „nakresliť“ len profil svietniku. (Podobne postupuje hrnčiar pri výrobe vázy.)

<sup>4</sup> Samozrejme, podľa Murphyho zákona, vždy omastenou stranou dole.

<sup>5</sup> Treba byť pripravený a v druhej ruke vždy nosiť stopky a pohotovo ich spustiť, keď chlieb vypadne.

sledky všetkých našich meraní budú zhodné. Symetrie fyzikálnych zákonov majú fundamentálny a oveľa hlbší význam než symetrie predmetov.<sup>6</sup>

### 1.3 Symetrie diferenciálnych rovníc

Načrtli sme, že pojem symetrie sa dá z predmetov zovšeobecniť na abstraktné veci. Toto zovšeobecnenie hovorí, že akýkoľvek objekt (napríklad aj matematický) je symetrický, ak na ňom vykonáme nejakú (matematickú) operáciu a bude vyzerat' úplne rovnako ako predtým. Fyzikálne zákony majú isté symetrie a tým pádom aj (diferenciálne) rovnice, ktoré matematicky vyjadrujú fyzikálne zákony, majú zodpovedajúce symetrie.

Na definíciu symetrií diferenciálnych rovníc budeme potrebovať niekoľko pojmov z diferenciálnej geometrie, o ktorých si niečo povieme v nasledujúcej kapitole. V kapitole 3 sa k definícii symetrie diferenciálnej rovnice vrátíme.

---

<sup>6</sup>Zo symetrií fyzikálnych zákonov dokonca vyplývajú niektoré symetrie predmetov. Napríklad hviezdy sú sféricky symetrické kvôli tomu, že gravitačný zákon má takúto symetriu.

## Kapitola 2

# Vektorové polia

### 2.1 Úvod

Vektorové polia sú kľúčovým objektom pre hľadanie symetrií diferenciálnych rovníc. Pod pojmom *vektor* si predstavujeme šípku, ktorá má nejaký smer a dĺžku. Vektory (v dvoch rozmeroch) zvykneme zapisovať v tvare

$$\vec{v} = (a, b) = a\vec{e}_x + b\vec{e}_y$$

Kde čísla  $a, b$  nazývame *zložky vektora* a vektory  $\vec{e}_x, \vec{e}_y$  sú *prvky bázy* (2-rozmerného) vektorového priestoru.

*Vektorové pole* poznáme ako predpis, ktorý nám v každom bode priestoru zadáva vektor. Matematicky to vyzerá

$$\vec{V}(\vec{r}) = A(x, y)\vec{e}_x + B(x, y)\vec{e}_y \quad (2.1)$$

kde  $\vec{r} \equiv (x, y)$  je miesto, v ktorom nám predpis zadáva vektor. Funkcie  $A(x, y), B(x, y)$  nazývame *zložky* alebo *komponenty vektorového poľa* a vektorovým poliam  $\vec{e}_x, \vec{e}_y$  sa hovorí *báza vektorových polí*.

Pre potreby tejto bakalárskej práce, ale aj pre mnoho iných zaujímavých vecí, je potrebné tieto predstavy preformulovať a upresniť. Niekedy hovoríme o vektoroch a vektorových poliach nielen v rovine a trojrozmernom priestore, ale aj na niečom všeobecnejšom (napr. na krivých plochách). Pod niečím všeobecnejším máme na mysli *varietu*.

*Varieta* je pojem z diferenciálnej geometrie. Je to matematický priestor, ktorý sa v dostatočne malom okolí každého bodu podobá na euklidovský priestor ( $\mathbb{R}^n$ ) nejakého rozmeru. Tento rozmer sa volá rozmer variety. Napríklad priamka a kružnica sú jednorozmerné variety. Rovina, povrch gule a plávacieho kolesa (torus) sú dvojrozmerné variety.<sup>1</sup> Celková štruktúra variety môže byť však zložitejšia. Varieta je všetko, na čom sa v okolí každého bodu dajú zaviesť *lokálne súradnice*.

Vektor v bode  $P$  ležiacom na variete  $M$  je prvok (dotykového) vektorového priestoru ( $T_P M$ ), ktorý je spojený s bodom  $P$ . Vektor teda žije len v bode  $P$

<sup>1</sup>Naša Zem je dobrým príkladom na objasnenie pojmu variety. Kedysi sme si mysleli, že Zem je doska (lokálne vyzerá ako  $\mathbb{R}^2$ ) a až neskôr sme zistili, že žijeme na povrchu gule, čo je zložitejšia dvojrozmerná varieta.

a šípka, ktorou ho znázorňujeme, nemá nič s ostatnými bodmi, cez ktoré ju kreslíme. S každým bodom variety je spojený jeden vektorový priestor a vektorové pole na variete je predpis, ktorý v každom bode vyberá z príslušného priestoru jeden vektor.

## 2.2 Vektorové pole ako diferenciálny operátor

V tejto práci budeme používať pre vektorové polia formalizmus, v ktorom pole (2.1) bude mať tvar

$$V = A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

Zmenilo sa iba to, že namiesto označenia  $\vec{e}_x, \vec{e}_y$  píšeme parciálne derivácie  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ . Pre parciálne derivácie budeme v celej práci používať skrátene označenia

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv \partial_x \quad \frac{\partial}{\partial y} \equiv \partial_y \quad \text{alebo} \quad \frac{\partial}{\partial x^i} \equiv \partial_i$$

Vektorové pole je v novom formalizme *diferenciálny operátor* 1. rádu s *nekonštantnými* koeficientami. Keby nás s ním zavreli do prázdnej miestnosti, po pár hodinách nudy nás zrejme napadne pustiť ho na nejakú funkciu  $f(x, y)$ .

Zoberme vektorové pole (Obr. 2.2)

$$V = \partial_x$$

(teda  $A = 1, B = 0$ ). Po aplikovaní na funkciu  $f(x, y)$  dostaneme

$$Vf = 1 \frac{\partial f}{\partial x} + 0 \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon, y) - f(x, y)}{\varepsilon}$$

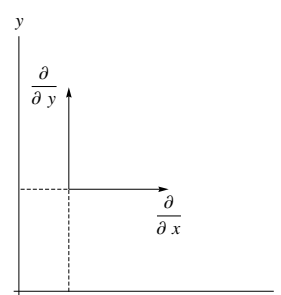
čo je *derivácia  $f$  v smere* súradnicovej osi  $x$ . Hovorí o tom, ako sa zmení  $f$ , keď urobíme *infinitézimálny* (maličký) krok *v smere* súradnice  $x$ . Všimnime si, že v starom zápise tohoto poľa:  $V = \vec{e}_x$ , majú šípky rovnaký smer ako derivácia v novom formalizme. Podobne to funguje pre pole  $V = \partial_y$ . Operátory  $\partial_x, \partial_y$  teda majú zmysel nejakých smerov, podobne ako mali v starom formalizme šípky.

Ak aplikujeme všeobecné pole

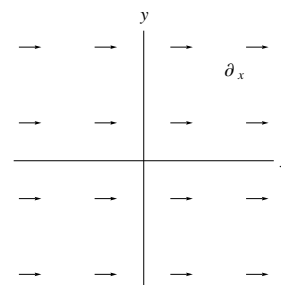
$$V = A(x, y) \partial_x + B(x, y) \partial_y$$

na  $f$ , dostaneme v každom pevnom  $(x, y)$  deriváciu  $f$  v smere  $(A(x, y), B(x, y))$ ,<sup>2</sup> ktorá hovorí o tom, ako sa mení  $f$  v bode  $(x, y)$ , keď spravíme maličký krok v smere  $(A(x, y), B(x, y))$ .

Schopnosť vektorového poľa sledovať malé zmeny nejakej funkcie sa využije pri hľadaní symetrií rovníc. Je vidieť, že medzi „starými“ šípkami a „novými“ deriváciami v smere je nejaký súvis. V skutočnosti sú



Obr. 2.1: Jednotkové vektory  $\partial_x, \partial_y$ .



Obr. 2.2: Vektorové pole  $V = \partial_x$ .

<sup>2</sup>Presnejšie deriváciu v smere vynásobenú  $\sqrt{A^2 + B^2}$ .

tieto formulácie ekvivalentné. Úplne poctivou definíciou vektorov a vektorových polí sa tu zaoberať nebudeme.<sup>3</sup>

Všeobecne v  $n$  rozmeroch budeme mať pole<sup>4</sup>

$$V = V^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad i = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

kde  $x \equiv (x^1, \dots, x^n)$ .

### 2.3 Transformácia komponentov vektorového poľa pri zámene súradníc

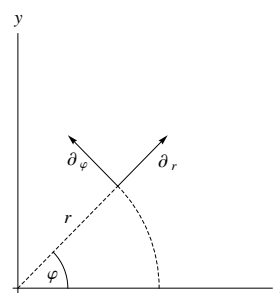
V práci budeme potrebovať zapísať vektorové pole vo viacerých súradniciach. Bázové vektory v *polárnych súradniciach* (Obr. 2.3) zavádzame tak, že  $\partial_r$  smeruje radiálne a  $\partial_\varphi$  má smer narastania súradnice  $\varphi$ .

Mohlo by nás napadnúť kresliť  $\partial_\varphi$  ako zatáčajúcu šípku idúcu stále po jednej kružnici so stredom v počiatku. Šípky však stále kreslíme rovné. Nie je dôvod ich kresliť zatočené. Ako sme uviedli v závere odseku 2.1, vektor je spojený len s bodom, v ktorom ho používame (v ňom kreslíme začiatok šípky). Podobne na sfére, ak máme v nejakom bode sféry vektor, teda rovnú šípku, netreba sa znepokojovať, že už kúsok od začiatku je šípka „nad sférou“. *Vektor je čisto bodová závislosť* a šípky sú len *pomocný nástroj* pre našu predstavivosť.

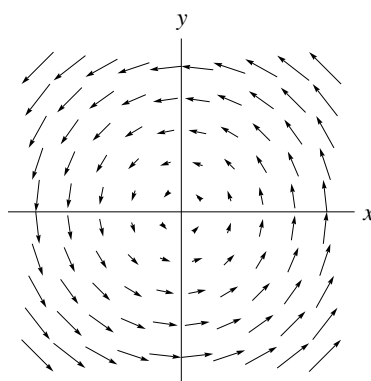
Majme v polárnych súradniciach vektorové pole

$$V = \partial_\varphi \equiv 0\partial_r + 1\partial_\varphi \quad (2.3)$$

Je to pole, ktoré má všade smer  $\varphi$ , a teda sa točí okolo počiatku (Obr. 2.4). Chceli by sme vedieť, aký bude zápis poľa v kartézskych súradniciach. Robíme



Obr. 2.3: Bázové vektory v polárnych súradniciach.



Obr. 2.4: Vektorové pole  $\partial_\varphi$ .

<sup>3</sup>Čitateľ o tom viac nájde v knihe [1] v kapitole 2.

<sup>4</sup>V zápise (2.2) a v celej práci používame Einsteinovu sumačnú konvenciu. Tu sčítavame cez opakujúci sa index  $i$ .

zámenu súradníc

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \\y &= r \sin \varphi\end{aligned}$$

Vektorové pole v novom formalizme je diferenciálny operátor. Predstavme si, že pole (2.3) pôsobí na funkciu

$$f(x, y) = f(x(r, \varphi), y(r, \varphi))$$

Pôsobenie vyzerá

$$\partial_\varphi f = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = (-y\partial_x + x\partial_y)f$$

Pole (2.3) má teda v kartézskych súradniciach podobu

$$V = -y\partial_x + x\partial_y$$

Derivovať podľa  $\varphi$  je to isté, ako derivovať podľa  $x$  a  $y$  takýmto spôsobom.<sup>5</sup>

Vo všeobecnosti sa komponenty vektorových polí transformujú nasledovne. Máme vektorové pole

$$\begin{aligned}V &= V^i(x)\partial_i \quad i = 1, \dots, n \\x &\equiv (x^1, \dots, x^n)\end{aligned}$$

a to isté pole v iných súradniciach

$$\begin{aligned}V &= V'^i(x')\partial'_i \quad i = 1, \dots, n \\x' &\equiv (x'^1, \dots, x'^n)\end{aligned}$$

Ak máme zámenu súradníc  $x \mapsto x'(x)$  (to je  $n$  vzorcov), potom vzťah medzi komponentami poľa v čiarkovaných a nečiarkovaných súradniciach dostaneme jednoducho. Je to to isté pole, takže

$$V^i(x)\partial_i \stackrel{!}{=} V'^i(x')\partial'_i$$

Prepíšeme derivácie, podobne ako v príklade s poľm  $\partial_\varphi$ .

$$\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} = \left( \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x'^j} \right) f$$

Potom vychádza

$$V^i(x) \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} \partial'_j = V'^i(x') \partial'_i$$

Po premenovaní indexov na ľavej strane ( $i \leftrightarrow j$ ) získavame na prepis komponentov univerzálny vzorec

$$V'^i(x') = J_j^i(x) V^j(x) \quad J_j^i(x) = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \quad (2.4)$$

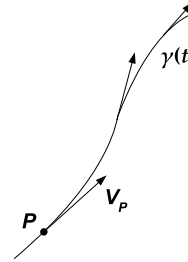
pričom pravú stranu, samozrejme, treba vyjadriť v nových súradniciach  $x'$ .

<sup>5</sup>Všimnime si, že čím sme ďalej od počiatku, tým väčšia je dĺžka vektorov. Ale v zápise poľa v polárnych súradniciach stojí pred  $\partial_\varphi$  koeficient 1. Z toho vyplýva, že dĺžka bázového vektora  $\partial_\varphi$  nie je všade rovnaká. Na našej úrovni úplne stačí intuitívne vedieť, ako smer šípok v starom formalizme súvisí s diferenciálnym operátorom (smerovou deriváciou) v novom formalizme a že s dĺžkami je to komplikovanejšie.

## 2.4 Integrálne krivky a tok vektorového poľa

### 2.4.1 Integrálne krivky vektorového poľa

Keď človek bezradne sedí v bode  $P$  variety  $M$ , mal by sa (skôr než upadne do depresie) rozhliadnuť, či náhodou v bode  $P$  nezbadá nejaký vektor.<sup>6</sup> Ak má to šťastie, že na variete je dané vektorové pole  $V$ , nie je dôvod smútiť. Človek sa môže rýchlo pobaliť a vykročiť v smere vektora  $V_P$  (určeného poľom  $V$ ) a rýchlosťou, ktorú mu predpisuje dĺžka vektora. Príde do infinitezimálne blízkeho bodu a nájde v ňom ďalší vektor. Poučený predchádzajúcou skúsenosťou, neotáľa a kráča ďalej v smere vektora. Takto môže ísť stále ďalej. Vznikne cestička, ktorá má v každom bode smer príslušného vektora. Takáto cestička sa volá *integrálna krivka* vektorového poľa a budeme ju označovať  $\gamma(t)$ .



Ak máme zadané vektorové pole  $V = V^i(x)\partial_i$ , integrálne krivky sa nájdu vyriešením rovníc

$$\dot{x}^i = V^i(x) \quad i = 1, \dots, n \quad (2.5)$$

Sú to obyčajné diferenciálne rovnice 1. rádu a sú zretazené.<sup>7</sup> Riešením je

$$x(t) \equiv (x^1(t), \dots, x^n(t))$$

Sú to všetky integrálne krivky (štartujúce z rôznych bodov). Ak nás zaujíma len tá naša - štartujúca v čase  $t = 0$  v bode  $P$ , použijeme počiatočnú podmienku

$$x(0) \stackrel{!}{=} P$$

Predvedieme si to na jednoduchom príklade. Máme v rovine vektorové pole

$$V = \partial_\varphi \equiv 0\partial_r + 1\partial_\varphi \quad (2.6)$$

Rovnice pre integrálne krivky sú

$$\begin{aligned} \dot{r} &= 0 \\ \dot{\varphi} &= 1 \end{aligned}$$

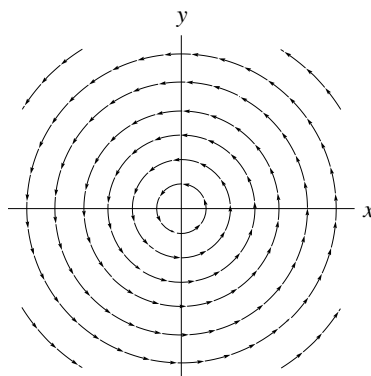
Riešenie je

$$\begin{aligned} r(t) &= c_1 \\ \varphi(t) &= t + c_2 \end{aligned}$$

kde  $c_1, c_2$  sú ľubovoľné reálne konštanty. Takto sme dostali všetky integrálne krivky poľa (2.6). Sú to *parametrizované* kružnice, ktorými je vyplnená celá rovina (Obr. 2.5).

<sup>6</sup>Presnejšie povedané, treba sa rozhliadnuť v dotykovom vektorovom priestore  $TPM$  a pozrieť sa, či je v ňom rozsvietený niektorý vektor. Pozri záver časti 2.1.

<sup>7</sup>Prečo rovnice pre integrálne krivky majú podobu (2.5), tu nebudeme presne zdôvodňovať. Do hĺbky sa tomu porozumie po pre(po)čítaní častí 2.1 - 2.3 z knihy [1]. Idea je taká, že derivácia hocijakej krivky určí k nej dotykový vektor v každom bode, ktorým prechádza (ľavá strana v (2.5)). Ak má byť táto krivka integrálna, musia byť vektory ňou určené (v každom bode) totožné s tými, ktoré udáva pole (pravá strana v (2.5)).

Obr. 2.5: Integrálne krivky vektorového poľa  $\partial_\varphi$ .

Krivka štartujúca v bode  $(r_0, \varphi_0)$  má parametrické vyjadrenie

$$\begin{aligned} r(t) &= r_0 \\ \varphi(t) &= t + \varphi_0 \quad t \in (-\infty, \infty) \end{aligned}$$

Kráčať po integrálnej krivke tu znamená točiť sa do nekonečna po kružnici proti smeru hodinových ručičiek.<sup>8</sup>

Integrálne krivky majú dôležitú vlastnosť - nikde sa nepretínajú. Vyplýva to z toho, že ak sme na variete v bode  $P$ , preč z neho sa ide dopredu v smere (jednoznačne určeného) vektora  $V_P$  alebo dozadu v smere  $-V_P$ , a teda každým bodom variety ide jedna krivka.

### 2.4.2 Tok vektorového poľa

Vektorové pole  $V$  na variete  $M$  prirodzene rozvlákňuje varietu na integrálne krivky. Ak *každý* bod  $P \in M$  posunieme o *parametrickú* vzdialenosť  $t$  po integrálnej krivke, na ktorej leží, vznikne zobrazenie

$$G_t : M \rightarrow M \quad \text{pobodovo} \quad P \equiv \gamma(t_0) \mapsto \gamma(t_0 + t)$$

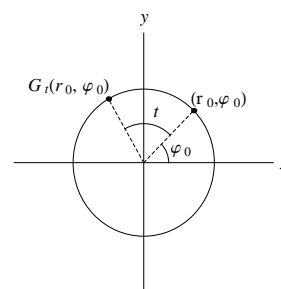
ktoré sa volá *tok vektorového poľa*.<sup>9</sup> Je to vlastne jednoparametrická množina zobrazení (pre každú hodnotu  $t$  máme jedno zobrazenie).

Pre pole  $\partial_\varphi$  v hlavných úlohách účinkujú

$$\begin{aligned} M &\equiv \mathbb{R}^2 & P &\equiv (r_0, \varphi_0) \\ \gamma(t) : & r(t) &= r_0 \\ & \varphi(t) &= t + \varphi_0 \end{aligned}$$

Tok  $G_t$  je točením roviny o uhol  $t$ .

Tok má dôležitú skladaciu vlastnosť voči parametru  $t$  (Obr. 2.6). Keď sa posúvame o (parametrickú) vzdialenosť  $t + s$ , je to to isté, akoby sme sa najprv posunuli o  $t$  a potom ešte o  $s$  (alebo opačne).

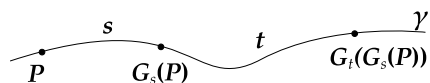


$$G_{t+s} = G_t \circ G_s = G_s \circ G_t \tag{2.7}$$

<sup>8</sup> Rovnaký výsledok by sme dostali, aj keby sme pracovali v kartézskych súradniciach.

<sup>9</sup> Niekedy hovoríme aj tok generovaný vektorovým poľom.

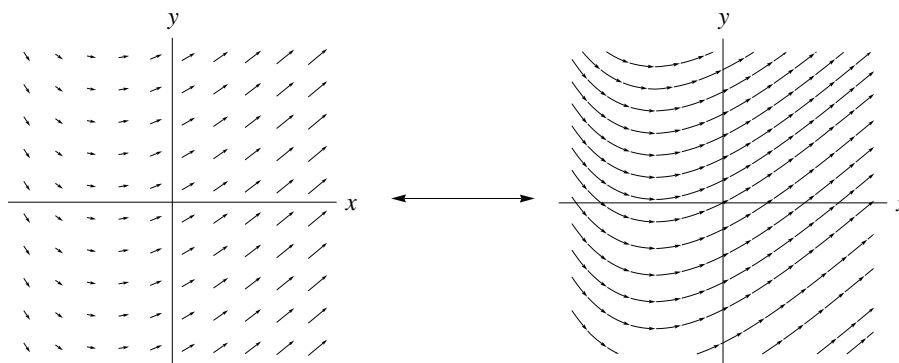




Obr. 2.6: Skladacia vlastnosť toku.

Zobrazeniu  $G_t$  sa niekedy hovorí aj *jednparametrická grupa transformácií* variety. *Grupa* je to z toho dôvodu, že prvky množiny zobrazení  $G_t$  sa dajú „násobiť“ spôsobom uvedeným v (2.7) a výsledok násobenia je prvkom tej istej množiny (splnené sú aj požiadavky na grupové násobenie - asociatívnosť, jednotkový prvok ( $G_{t=0}$ ) a inverzný prvok ( $G_{-t}$ )). *Jednparametrická* grupa preto, lebo prvky v grupe sú parametrizované jedným parametrom  $t$ .

Vzťah medzi vektorovým poľom  $V$  a jeho tokom  $G_t$  je vzájomne jednoznačný. Poľu  $V$  vieme priradiť tok  $G_t$  a naopak tok  $G_t$  jednoznačne určuje poľo  $V$ .



Obr. 2.7: Medzi vektorovým poľom a jeho tokom je jednoznačný súvis.

Táto jednoznačnosť je kľúčová pre skúmanie symetrií diferenciálnych rovníc. Symetrie diferenciálnej rovnice tvoria jednparametrické grupy transformácií nejakej variety, a teda nejaké toky. Namiesto toho, aby sme hľadali tok, nájdeme najprv vektorové poľo (tzv. lokálnu transformáciu), s ktorým sa pracuje oveľa jednoduchšie a až nakoniec vypočítame jeho tok.

## Kapitola 3

# Symetrie diferenciálnych rovníc

### 3.1 Úvod

Ako definovať symetriu diferenciálnej rovnice? Zhruba povedané, *symetria diferenciálnej rovnice je transformácia, ktorá transformuje riešenia rovnice na iné riešenia*. Transformácia pracuje na priestore nezávislých a závislých premenných, ktoré v rovnici vystupujú. Geometricky transformácia funguje tak, že zoberie graf nejakého riešenia rovnice a transformuje ho na graf iného riešenia.<sup>1</sup>

Predstavme si, že máme diferenciálnu rovnicu

$$f(x; y, y') = 0 \quad (3.1)$$

kde čiarka na  $y$  označuje deriváciu podľa  $x$  a  $f$  je nejaká funkcia troch premenných. Rovnica (3.1) môže mať napríklad tvar

$$y' + y^2 + y \sin x = 0$$

V tejto chvíli nie je dôležité, ako presne (3.1) vyzerá. Ďalej si predstavme, že sme našli nejaké riešenie rovnice, funkciu  $y(x)$ . Symetria rovnice je tu transformácia v rovine  $\mathbb{R}^2[x, y]$ , ktorá transformuje naše riešenie (krivku v rovine) na iné riešenie (Obr. 3.1). Teda

$$y(x) \mapsto \hat{y}(\hat{x})$$

V závere časti 2.4.2 sme prezradili, že symetria je tokom  $G_t$  vhodného (a jednoznačne priradeného) vektorového poľa. V tomto prípade

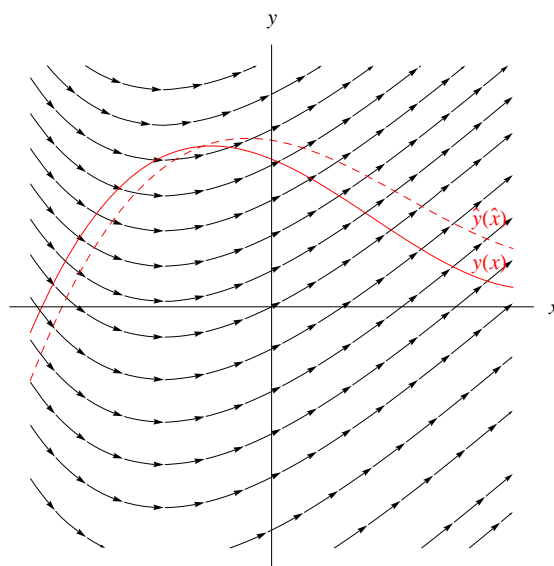
$$G_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Riešenie  $y(x)$  sa bude transformovať na  $\hat{y}(\hat{x})$  tak, že každý bod grafu riešenia odtečie po svojej integrálnej krivke (po tej, na ktorej leží) o parametrickú vzdialenosť  $t$ , čo zapisujeme

$$(x, y(x)) \mapsto (\hat{x}, \hat{y}(\hat{x})) \equiv G_t(x, y(x))$$

Fungovanie symetrie je načrtnuté na Obr. 3.1.

<sup>1</sup> Presnejšiu definíciu symetrií uvedieme v časti 5.3.



Obr. 3.1: Unášanie krivky  $y(x)$  tokom  $G_t$ . Krivky so šípkami sú integrálne krivky prislúchajúce toku.

Pri viacerých premenných symetria funguje podobne. Je tokom vektorového poľa v priestore všetkých nezávislých a závislých premenných. Tento priestor budeme označovať

$$X \times U$$

kde  $X$  je priestor nezávislých premenných a  $U$  je priestor závislých premenných (v predchádzajúcom prípade  $X = \mathbb{R}[x]$  a  $U = \mathbb{R}[y]$ ). Ak niekto napíše transformáciu a tvrdí o nej, že je symetriou, jednoducho to overíme, ak ju aplikujeme na nejaké známe riešenie. Ak výsledok nie je riešením, transformácia nie je symetriou. Ak výsledok je riešením, transformácia je naozaj symetriou. V kapitole 4 si na jednoduchých príkladoch ukážeme, ako sa symetrie hľadajú.

Dôležité pozorovanie je, že *symetrie tvoria grupu*. Prvkami sú jednotlivé symetrie a grupovým násobením je skladanie symetrií ako zobrazení. Ak  $G_t$  a  $H_s$  sú (rôzne) symetrie rovnice, potom symetriou je aj ich kompozícia

$$G_t \circ H_s$$

Teda ak spravíme na riešení najprv jednu transformáciu a potom druhú (posunieme riešenie o  $s$  po integrálnych krivkách prislúchajúcich  $H_s$  a potom ešte o  $t$  po *iných* integrálnych krivkách prislúchajúcich  $G_t$ ), dostaneme opäť nejaké riešenie rovnice. Ak  $G_t$  a  $H_s$  majú tie isté integrálne krivky, „grupovosť“ vyplýva z toho, že tok je jednoparametrickou grupou transformácií.<sup>2</sup>

*Grupa symetrií* je *spojitá* grupa, ktorej prvky sú parametrizované *spojitými* parametrami  $(t, s)$ , teda prvky tvoria kontinuum (dajú sa osúradnicovať, nie očíslovať). Takáto grupa sa volá *Lieova grupa*. Typickým príkladom spojitkej symetrie je translácia v čase, ktorá sa objaví vo všetkých (fyzikálnych) rovniciach diskutovaných v tejto práci (práve kvôli tomu, že fyzikálne zákony sú invariantné

<sup>2</sup>Pozri časť 2.4.2.

vzhľadom na posunutia v čase). Rovnice vo všeobecnosti môžu mať aj diskkrétne symetrie (napr. zrkadlenie v priestore alebo čase). Tie sa však hľadajú inými metódami a v tejto práci sa nimi nebudeme zaoberať.

## 3.2 Geometrický pohľad na diferenciálne rovnice

Zo školy poznáme diferenciálnu rovnicu ako rovnicu, v ktorej je kopa všelijakých (obyčajných alebo parciálnych) derivácií a funkcií. Napríklad

$$y \sin(x^6) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + (x - 2y) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \sqrt{\frac{\partial z}{\partial y}} + x^2 \frac{\partial z}{\partial x} = 5xy^3 + e^y \quad (3.2)$$

kde  $z = z(x, y)$ . Pri pohľade na takúto rovnicu je človeku nevoľno ešte predtým, ako sa ju pokúsi vyriešiť. Napíšme nejakú ľahšiu rovnicu.

$$y' = y \quad \text{kde} \quad y = y(x) \quad (3.3)$$

Tá vyzerá na pohľad prítulnejšie a rýchlo by sme ju automaticky vyriešili. Diferenciálnu rovnicu vnímame ako úlohu, ktorá sa zadá (dúfame, že bude ľahká) a rozmýšľame, ako ju riešiť. V tejto časti sa pokúsime tieto reflexy pribrzdiť a ukázať diferenciálne rovnice z iného pohľadu.

Načrtnutá hmlistá predstava o diferenciálnych rovniciach nie je pre potreby tejto práce dobrá. Preto si povieme niečo o diferenciálnych rovniciach ako *geometrických* objektoch v istých *jetových* priestoroch.

Geometrický pohľad si vysvetlíme na rovnici (3.3). Vystupuje v nej jedna nezávislá premenná  $x$  a jedna závislá premenná  $y$ . Riešenia  $y(x)$  sú krivky v priestore (rovine)  $\mathbb{R}^2[x, y]$  (Obr. 3.2). Priestor „predĺžime“ o jednu dimenziu na

$$\mathbb{R}^3[x, y, v] \quad v \equiv y'$$

Nová súradnica  $v$  bude derivácia  $y'$ . Takýto priestor sa volá *jetový priestor* alebo priestor 1-jetov, budeme ho označovať  $J^1$  (jednotka je za to, že najvyššia derivácia je prvá). Rovnicu (3.3) upravíme tak, že všetko dáme na ľavú stranu. V označení  $y' \equiv v$  máme

$$\Phi(x, y, v) = v - y = 0$$

Na  $\Phi$  budeme pozeráť ako na funkciu

$$\Phi : J^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

V bodoch, kde je diferenciálna rovnica splnená, nadobúda  $\Phi$  nulovú hodnotu. Predpis  $\Phi = 0$  implicitne zadáva plochu  $M \subset J^1$  (resp. varietu  $M$ , ktorá je podvarietou  $J^1$ ). Táto plocha reprezentuje diferenciálnu rovnicu. V našom prípade je rovnica (3.3) reprezentovaná rovinou v  $J^1$  (Obr. 3.3). Ak máme zadanú funkciu

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad y = f(x)$$

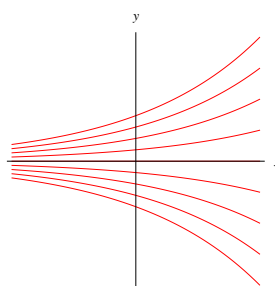
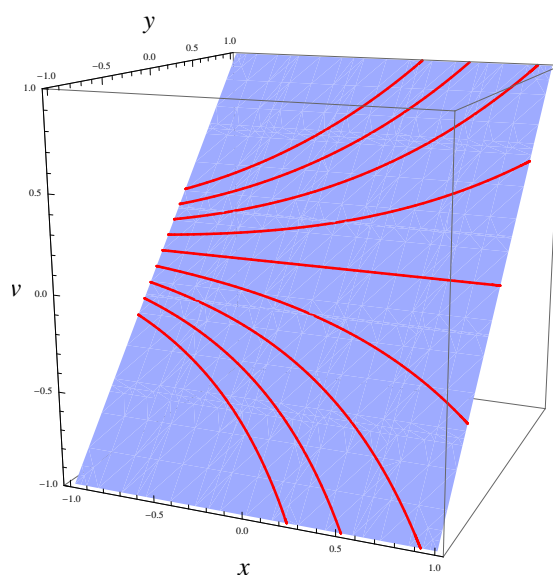
potom sa v jetovom priestore indukuje funkcia

$$\text{pr}^{(1)} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (y, y') = \text{pr}^{(1)} f(x) \equiv \left( f, \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

Funkcia  $\text{pr}^{(1)}f$  sa volá prvé predĺženie funkcie  $f$ . Teda ak máme nejakú krivku v rovine, automaticky máme aj krivku v jetovom priestore. Zoberme riešenia rovnice (3.3), čo sú funkcie (Obr. 3.2)

$$y(x) = y(0)e^x$$

Ľahko ich vieme nakresliť v  $J^1$ . Kreslíme to isté, čo v rovine  $[x, y]$  a na os  $z$  vynášame deriváciu, ktorá je  $y'(x) = y(0)e^x$ .

Obr. 3.2: Riešenia rovnice  $y' = y$ .Obr. 3.3: Diferenciálna rovnica (modrá plocha) a jej riešenia (červené čiary) nakreslené v  $J^1$ .

Vidíme, že riešenia ležia v rovine (danej predpisom  $\Phi = 0$ ) reprezentujúcej diferenciálnu rovnicu (3.3).<sup>3</sup>

Vo všeobecnosti postupujeme podobne. Máme parciálnu diferenciálnu rovnicu  $n$ -tého rádu nezávislými premennými  $x^1, \dots, x^p$  pre  $u = u(x^1, \dots, x^p)$ . Upraceme ju na tvar

$$\Phi \left( x^1, \dots, x^p, u; \frac{\partial u}{\partial x^1}, \frac{\partial u}{\partial x^2}, \dots \right) = 0$$

Najprv konštruujeme veľarozmerný jetový priestor  $J^n$ , v ktorom budú súradnice nezávislé premenné, závislá premenná a všetky možné derivácie až po  $n$ -tú. Priestor všetkých derivácií po  $n$ -tú budeme označovať  $U^{(n)}$ . Potom

$$J^n \equiv X \times U \times U^{(n)}$$

<sup>3</sup>Geometrický pohľad by sa dal ukázať aj na menej sympatickej rovnici (3.2), iba by to bolo menej názorné. Z tohoto pohľadu diferenciálna rovnica nie je ťažká alebo ľahká. Každá rovnica je nejaká (nad)plocha vo svojom jetovom priestore a o (nad)plochách nehovoríme, či sú ťažké alebo ľahké.

Funkcia  $\Phi$  je zobrazenie

$$\Phi : J^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Diferenciálna rovnica bude nadplocha  $M \subset J^n$  daná predpisom  $\Phi = 0$  a riešenia budú podmnožinami  $M$ .<sup>4</sup>

Poznamenajme, že všeobecný aparát dovoľuje hľadať symetrie  *systému* diferenciálnych rovníc. Niektoré naše formulácie sú pre jednoduchosť napísané pre jednu rovnicu a jednu závislú premennú. Mašineria sa však dá zovšeobecniť a v kapitole 5 si uvedieme všeobecné vety, ktoré sa dajú použiť aj na hľadanie symetrií systému diferenciálnych rovníc.

### 3.3 Čo na symetrie vymyslel Sophus Lie

V predchádzajúcej časti sme si predstavili diferenciálne rovnice ako (nad)plochy (resp. podvariety) v jetových priestoroch. Na tejto konštrukcii teraz vybudujeme intuitívnu predstavu o tom, ako fungujú symetrie diferenciálnych rovníc.

Symetria je taký tok v priestore  $X \times U$ , ktorý transformuje riešenia na iné riešenia. Podobne, ako sme „predĺžili“ riešenia z priestoru  $X \times U$  do  $J^n$ , treba predĺžiť aj tok (pôsobenie jednoparametrickej grupy symetrií). Ako to treba spraviť, je pomerne zložité. Treba vedieť dosť veľa z diferenciálnej geometrie a nebudeme sa tomu venovať. Idea je však rovnaká ako pri predlžovaní funkcie: vieme, ako tok vyzerá na  $X \times U$ , a tok v  $J^n$  už je jednoznačne určený. Predstavme si, že sa nám podarilo tok predĺžiť do  $J^n$ . Ak je pôvodný tok v  $X \times U$  symetriou, budú sa aj predĺžené riešenia transformovať tokom v  $J^n$  na iné predĺžené riešenia. Takto to funguje na všetkých riešeniach, a teda na celej variete  $M$ , reprezentujúcej diferenciálnu rovnicu. Z toho vyplýva, že tok z  $M$  nič nekradne a ani nič z toho, čo bolo mimo  $M$ , do  $M$  nepríde. Tok pekne tečie „pozdĺž“  $M$ . Inak povedané,  $M$  je invariantná voči transformácii priestoru  $J^n$ , ktorá je symetriou.

Všetky objekty sú symbolicky znázornené na Obr. 3.4, ktorý si treba predstaviť vždy, keď sa hovorí o symetriách diferenciálnych rovníc.<sup>5</sup>

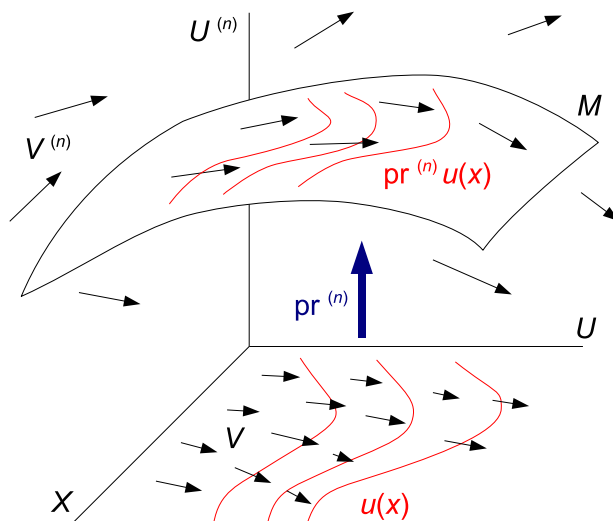
Sophus Lie objavil, že namiesto toho, aby sa trápil s komplikovanou *nelineárnou* štruktúrou *Lieovej grupy*, oplatí sa mu študovať podstatne jednoduchší a *lineárny* objekt - *Lieovu algebru* priradenú Lieovej grupe. V jazyku Lieových algebier sa zložité *nelineárne* podmienky invariantnosti  $M$  vzhľadom na grupové transformácie nahradia ekvivalentnými a oveľa jednoduchšími *lineárnymi* podmienkami *infinitézimálnej* invariantnosti  $M$  vzhľadom na generátory grupy.

To bolo pre znalcov Lieových grúp a teraz to isté povieme použitím už zavedených pojmov. Namiesto toho, aby sme sa trápili invariantnosťou  $M$  vzhľadom na tok (pôsobenie Lieovej grupy), oplatí sa na vec pozrieť z pohľadu vektorového poľa (generátora grupy - prvku Lieovej algebry) jednoznačne priradeného toku.<sup>6</sup> Na tvar vektorového poľa bude jednoduché kritérium, ktoré hovorí, že vektory vektorového poľa majú byť v bodoch  $P \in M$  *dotykové* k  $M$  (Obr. 3.4). Je to intuitívne jasné: dotykovosť znamená, že vektory „nevytŕčajú“ z  $M$  a keď pôjdeme z bodu  $P$  infinitézimálnymi krokmi v smere vektorov, integrálna krivka nevyjde z  $M$ , a teda celkovo  $M$  bude invariantná vzhľadom na tok.

<sup>4</sup>Pozri Obr. 3.4.

<sup>5</sup>Kvôli prehľadnosti chýbajú toky, ktoré si ale môžeme ľahko domyslieť.

<sup>6</sup>Spomeňme si na Obr. 2.7.



Obr. 3.4: Pôvodne v  $J^{(n)}$  žila osamelým životom len diferenciálna rovnica  $M$ . Predĺžovaním sme k nej povynášali všetko z  $X \times U$ .

Šikovne nahradíme tok, ktorý robí na  $J^n$  veľké zmeny vektorovým poľom, ktoré robí malé zmeny a kľúčové je, že veľké zmeny sa dajú postupne zrekonštruovať viacnásobným vykonaním malých.

Hlavnou náplňou tejto práce je ukázať, ako sa polia s opísanými schopnosťami hľadajú. Postup je nasledovný:

1. Napíšeme všeobecný tvar vektorového poľa  $V$  v priestore  $X \times U$ . Pre rovnicu (3.3) by to bolo

$$V = A(x, y)\partial_x + B(x, y)\partial_y$$

2. Použitím vety o predĺžení skonštruujeme  $n$ -té predĺženie poľa  $V$ . Budeme ho označovať  $V^{(n)} \equiv \text{pr}^{(n)}V$ . Pre rovnicu (3.3) by sme mali

$$V^{(1)} = A(x, y)\partial_x + B(x, y)\partial_y + G(x, y, v)\partial_v$$

kde  $G(x, y, v)$  sa vypočíta z  $A(x, y), B(x, y)$  pomocou vety o predĺžení.

3. Na všeobecný tvar predĺženého poľa sa nasadí *kritérium infinitezimálnej invariantnosti* a určia sa komponenty poľa  $V$ . Pre rovnicu (3.3) sa určia  $A(x, y), B(x, y)$ .

Laicky povedané, najprv napíšeme „dole“ (Obr. 3.4) všeobecné pole, vynesieme ho „hore“ a tam zistíme, ako má pole dole vyzerať (vďaka tomu, že pole hore zreteľne vidí diferenciálnu rovnicu, ktorá dole vidieť nebola).<sup>7</sup>

V kapitole 4 si na jednoduchých príkladoch ukážeme, ako sa to celé robí. Vetu o predĺžení a kritérium infinitezimálnej invariantnosti, ktoré sú najdôležitejšími tvrdeniami pre hľadanie symetrií, uvedieme v kapitole 5.

<sup>7</sup> Táto geniálna myšlienka má pekný filozofický podtón. Problémy sa niekedy ľahšie riešia, keď sa na ne pozrieme „z výšky“ (resp. zo širšieho kontextu). Výstup hore je náročný, ale čím sme vyššie, tým máme lepší výhľad.

### 3.4 Použitie symetrií

Keď nájdeme grupu symetrií diferenciálnej rovnice, máme k dispozícii množstvo aplikácií. Pre lepšiu motiváciu k ďalšiemu štúdiu si uveďme zopár príkladov. V práci sa budeme zaoberať iba prvými tromi.

- *Konštrukcia nových riešení zo známych* sa priam núka už z definície symetrií diferenciálnych rovníc. Ak poznáme len nejaké riešenia a našli sme symetrie, dokážeme pomocou nich zo známych riešení vyrábať nové, neznáme riešenia. V práci sa budeme venovať hlavne tomuto použitiu.
- *Vlastnosti riešení rovnice.* Občas sa (aj v tejto práci) vďaka symetriám dozvieme niečo o riešeniach bez toho, aby sme poznali nejaké konkrétne. To je obzvlášť zaujímavé, keď mašínériu pustíme na rovnice popisujúce fyzikálne problémy.
- *Klasifikácia diferenciálnych rovníc.* Grupy symetrií sú dobrým prostriedkom na rozpoznanie tried rovníc, ktoré majú isté spoločné vlastnosti. Napríklad, ako sa ukáže v časti 4.4, aj niektoré fyzikálne rovnice, ktoré spolu na prvý pohľad vôbec nesúvisia, sú v určitom zmysle ekvivalentné.
- *Metódy riešenia rovníc.* V škole sme sa naučili, ako riešiť niektoré jednoduché typy diferenciálnych rovníc, napr. homogénne, či separovateľné. Sophus Lie si všimol, že za tým je niečo hlbšie. Metódy, ktorými sme sa učili riešiť tieto rovnice, sú špeciálnymi prípadmi techník riešenia založených na symetriách.
- *Zníženie rádu diferenciálnej rovnice.* V prípade obyčajných diferenciálnych rovníc výskyt istých symetrií umožňuje znížiť rád rovnice.

Tým sa zoznam zďaleka nekončí. V oblasti symetrií diferenciálnych rovníc sa dodnes aktívne pracuje. Symetrie sa naozaj oplatí hľadať!



## Kapitola 4

# Hľadanie symetrií diferenciálnych rovníc I.

V tejto kapitole na troch jednoduchších príkladoch opíšeme, ako sa hľadajú symetrie diferenciálnych rovníc. Kapitola 6 je pokračovaním kapitoly 4 a môžu sa čítať za sebou. Je však užitočné si pred čítaním kapitoly 6 pozrieť v kapitole 5 formulácie viet, ktoré budeme používať, aby sme sa potešili, že intuitívna predstava o *kritériu infinitezimálnej invariantnosti* naozaj nie je ďaleko od jeho presného znenia a aby sme v kapitole 6 už vedeli použiť *vetu o predĺžení vektorového poľa*.

### 4.1 Rovnica státia

Postup hľadania symetrií si predvedieme na jednoduchej rovnici<sup>1</sup>

$$\dot{y} = 0$$

Bodka nad  $y$  znamená deriváciu podľa času. Fyzikálne je to vlastne pohybová rovnica státia. Riešenia sú priamky

$$y(t) = \text{konšt.}$$

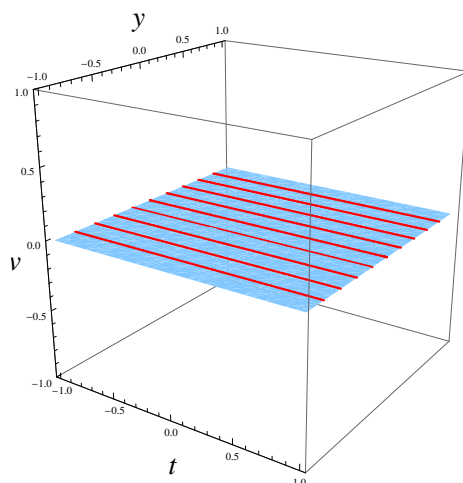
rovnobežné s osou  $t$ . Najprv si len označíme deriváciu  $\dot{y} \equiv v$ . Budeme pracovať v jetovom priestore  $J^1 \equiv \mathbb{R}^3[t, y, v]$ . Rovnicu treba prepísať do anulovaného tvaru. Príliš sa nenatrápime a dostávame

$$\Phi(t, y, v) = v = 0$$

Je to rovnica roviny v  $J^1$  a predĺžené riešenia sú priamky ležiace v tejto rovine (Obr. 4.1). Symetrie rovnice sú transformácie v rovine  $\mathbb{R}^2[t, y]$ , ktoré transformujú vodorovné priamky na vodorovné priamky. Všeobecný tvar vektorového poľa v  $\mathbb{R}^2[t, y]$ , ktoré bude reprezentovať symetrie, je

$$V = A(t, y)\partial_t + B(t, y)\partial_y$$

<sup>1</sup>Po prečítaní tejto časti by ešte nemalo byť úplne jasné, ako sa to celé robí. Ide len o načrtnutie postupu a všeobecná mašinéria sa postupne ujasní na ďalších príkladoch.



Obr. 4.1: Diferenciálna rovnica  $\dot{y} = 0$  je rovina v  $J^1$  a riešenia (červené čiary) sú priamky v tejto rovine.

### Predĺženie vektorového poľa

Skonstruujeme prvé jetové predĺženie poľa  $V$ .

$$V^{(1)} = A(t, y)\partial_t + B(t, y)\partial_y + G(t, y, v)\partial_v \quad (4.1)$$

Zložka  $G$  v smere osi  $v$  sa vyrába z  $A, B$  takýmto spôsobom

$$G = D_t B - v(D_t A)$$

kde  $D_t = \partial_t + v\partial_y$  je operátor úplnej derivácie podľa  $t$ . Komponenty  $A, B$  poľa  $V^{(1)}$  sa zoberú rovno z  $V$  a to, ako má pole pôsobiť na deriváciách, sa už z  $V$  dopočíta. Za vzťahom pre  $G$  je *veta o predĺžení*, ktorú uvedieme v kapitole 5.

### Determinujúca rovnica

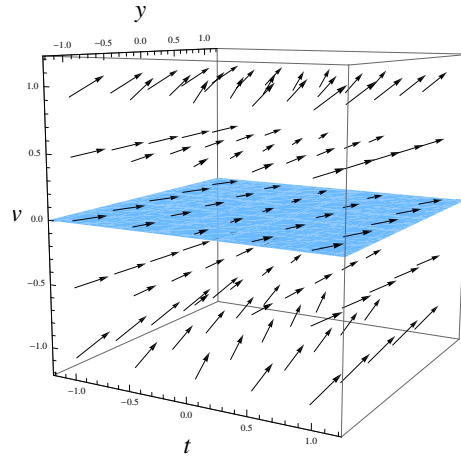
Keď už máme pole  $V^{(1)}$ , treba mu pripomenúť, ako sme ho vychválili v časti 2.2. Hovorili sme, že je diferenciálnym operátorom a vie sledovať malé zmeny funkcie, na ktorú pôsobí. Poľu sa tu núka funkcia  $\Phi$ . Rýchlo si spomenie na chvíly, priskočí k nej zľava a sleduje jej zmeny v smere svojich vektorov

$$V^{(1)}(\Phi)$$

Teraz mu povieme, nech nastaví svoje všeobecné komponenty  $A, B$  tak, aby zmeny funkcie v smere jeho vektorov boli nulové v miestach, kde platí diferenciálna rovnica (kde  $\Phi = 0$ ). Inak povedané, aby pri malých krôčikoch v smere poľa  $V^{(1)}$  funkcia  $\Phi$  nemenila svoju hodnotu a stále bola nulová. Matematicky

$$V^{(1)}(\Phi)\Big|_{\Phi=0} \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.2)$$

To v konečnom dôsledku zabezpečí, že rovina bude invariantná vzhľadom na tok poľa  $V^{(1)}$ . Pole  $V^{(1)}$  si môžeme predstaviť ako na Obr. 4.2. Vzťahu (4.2) sa

Obr. 4.2: Predstava vektorového poľa, ktorého tok nehýbe rovinou  $v = 0$ .

vedecky hovorí *kritérium infinitezimálnej invariantnosti* a jeho presné znenie je v kapitole 5. Aplikujeme  $V^{(1)}$  na naše  $\Phi$  a dostávame podmienku

$$\begin{aligned} V^{(1)}(\Phi) \Big|_{\Phi=0} &= [A(t, y)\partial_t + B(t, y)\partial_y + G(t, y, v)\partial_v](v) \Big|_{v=0} = \\ &= G(t, y, v) \Big|_{v=0} = 0 \end{aligned}$$

Vyšlo nám, že zložka poľa v smere osi  $v$  má byť na rovine nulová, čo je intuitívne jasné z Obr. 4.2. Dosadením za  $G$  pridáme k *determinujúcej rovnici* pre funkcie  $A, B$ .

$$G|_{v=0} = [(D_t B - v(D_t A))] \Big|_{v=0} = [(\partial_t B + v\partial_y B) - v(\partial_t A + v\partial_y A)] \Big|_{v=0} = 0$$

Dostávame determinujúcu rovnicu

$$\partial_t B = 0$$

Všeobecné riešenie je

$$\begin{aligned} B &= B(y) \\ A &= A(t, y) \end{aligned}$$

### Lieova algebra symetrií

Hľadané vektorové pole má tvar

$$V = A(t, y)\partial_t + B(y)\partial_y$$

a je všeobecným prvkom (nekonečnorozmernej) *Lieovej algebry symetrií* rovnice  $\dot{y} = 0$ . Na  $A(t, y)$  a  $B(t)$  sa nekladú žiadne ďalšie obmedzenia.<sup>2</sup> Môžeme dosadiť nájdené  $A, B$  do (4.1) a overiť, že  $V^{(1)}$  vychádza tak, ako sme potrebovali.

$$V^{(1)} = A\partial_t + B\partial_y + [v\partial_y B - v(\partial_t A + v\partial_y A)]\partial_v$$

<sup>2</sup>To sa nestáva často, iba pri takýchto jednoduchých rovniciach.  $\infty$ -rozmernosť okomentujeme až v časti 6.1, keď budeme mať skúsenosti s Lieovými algebrami symetrií iných rovnic.

Pre  $v = 0$  je zložka v smere  $v$  naozaj nulová. Pole  $V$  sa dá rozložiť na súčet dvoch *bázových vektorových polí*

$$\begin{aligned} V_B &= B(y)\partial_y \\ V_A &= A(t, y)\partial_t \end{aligned}$$

ktoré sú *generátormi symetrií*.

### Symetrie a výroba nových riešení

Teraz treba vypočítať toky týchto polí. Tok vektorového poľa je tu zobrazenie

$$G_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (t, y) \mapsto (\hat{t}(\varepsilon; t, y), \hat{y}(\varepsilon; t, y))$$

kde  $\varepsilon$  hovorí, ako dlho treba cestovať po poli.<sup>3</sup> Pre  $\varepsilon = 0$  zostávame doma, čo sa matematicky zapíše

$$\hat{t}(0; t, y) = t \quad \hat{y}(0; t, y) = y$$

Kvôli prehľadnosti nebudeme vypisovať argumenty  $t, y$  v zátvorke za  $\hat{t}, \hat{y}$ . Tok sa hľadá tak, že sa najprv riešia rovnice pre integrálne krivky.<sup>4</sup> Vypočítajme tok poľa  $V_B$ . Označíme ho  $G_\varepsilon^B$ . Rovnice pre integrálne krivky sú

$$\frac{d\hat{t}}{d\varepsilon} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{t} = c \quad (4.3)$$

$$\frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} = B(\hat{y}) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d\hat{y}}{B(\hat{y})} = \varepsilon \quad (4.4)$$

Po dosadení počiatočnej podmienky  $\hat{t}(0) = t$  nám (4.3) hovorí, že  $t$  zostane také, aké bolo. Integrál v (4.4) obsahuje ľubovoľnú funkciu  $B(\hat{y})$ . Treba integrál vypočítať, vyjadriť  $\hat{y}(\varepsilon)$ , splniť počiatočnú podmienku  $\hat{y}(0) = y$  a dostaneme, ako sa má meniť  $y$  pôsobením  $G_\varepsilon^B$ . Pre názornosť, napríklad ak  $B(\hat{y}) = 1$ , dostaneme riešenie (parametrické vyjadrenie integrálnej krivky štartujúcej v bode  $(t, y)$ )

$$\begin{aligned} \gamma(\varepsilon) : \quad \hat{t}(\varepsilon) &= t \\ \hat{y}(\varepsilon) &= y + \varepsilon \end{aligned}$$

Pre tento špeciálny prípad má tok  $G_\varepsilon^B$  tvar

$$G_\varepsilon^B : (t, y) \mapsto (t, y + \varepsilon) \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

Takéto  $G_\varepsilon^B$  je symetriou vzhľadom na posunutia v smere osi  $y$ . Ak  $y = f(t)$  je riešením rovnice (4.1), tak potom nové riešenie dostaneme ako

$$\hat{y}(\hat{t}) = y(t) + \varepsilon = f(t) + \varepsilon = f(\hat{t}) + \varepsilon$$

Napríklad zo známeho riešenia  $y(t) = \frac{1}{2}$  vyrobíme nové (Obr. 4.3)

$$\hat{y}(\hat{t}) = \frac{1}{2} + \varepsilon$$

<sup>3</sup>V časti 2.4.2 sme používali  $t$  namiesto  $\varepsilon$ . Tu by však nastal „drobný“ zmätok.

<sup>4</sup>Pozri časť 2.4.1.

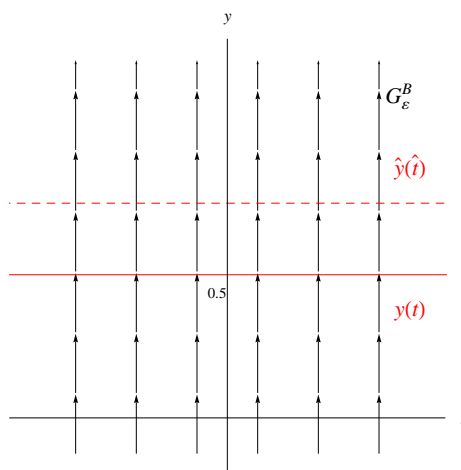
Teraz už môžeme striešky kľudne zmazať a máme nové riešenie

$$y(t) = \frac{1}{2} + \varepsilon$$

Pomocou  $G_\varepsilon^B$  (pre všetky možné  $\varepsilon$ ) tak vyrobíme z jediného riešenia všeobecné riešenie.<sup>5</sup> Skutočnosť, že toto špeciálne  $G_\varepsilon^B$  je naozaj symetria<sup>6</sup>, môžeme overiť aj bez znalosti konkrétneho riešenia ( $y(t) = \frac{1}{2}$ ). Overíme (už bez striešok), že  $y(t) = f(t) + \varepsilon$  je tiež riešením rovnice  $\dot{y} = 0$ .

$$\dot{y}(t) = \frac{d(f(t) + \varepsilon)}{dt} = \dot{f}(t) = 0$$

V poslednom kroku sme využili, že  $f(t)$  je riešením rovnice  $\dot{y} = 0$ .



Obr. 4.3: Výroba nového riešenia pomocou  $G_\varepsilon^B$ .

Všeobecný prípad (keď v (4.4) ponecháme ľubovoľné  $B(\hat{y})$ ) hovorí o takejto symetrii: body  $(t, y)$  ležiace na grafe riešenia  $y(t) = \text{konšt.}$  posúvame v smere osi  $y$  akokoľvek, ale len v závislosti od hodnoty  $y$ . Je jasné, že dostaneme opäť riešenie - vodorovnú priamku, keďže pre všetky  $t$  bola hodnota  $y(t)$  rovnaká.

Pole  $V_A = A(t, y)\partial_t$  hovorí o pomerne nezaujímavej symetrii. Na riešení môžeme vykonávať ľubovoľnú transformáciu v čase a nič sa nestane. Je to zrejmé, keďže v riešeniach  $y(t) = \text{konšt.}$  nevystupuje časová závislosť.<sup>7</sup>

## 4.2 Voľný pohyb po priamke

Na príklade  $\dot{y} = 0$  sme si ukázali, ako sa postupuje pri hľadaní symetrii. Nedostali sme však nič zaujímavé. Pridajme ešte jednu bodku na  $y$  a skúsme

<sup>5</sup>V tejto chvíli to môže celé vyzerať ako hračka na pobavenie, ale v časti 6.1 zistíme, že symetriami môžeme niekedy z jednoduchých riešení dostať symetriami úplne netriviálne riešenia.

<sup>6</sup>Presnejšie jednoparametrická grupa symetrií.

<sup>7</sup>Keď stojím celý (nekonečný) život v jednom bode a táto symetria mi poradí, že keď chcem vyskúšať niečo nové, mám si posunúť hodinky  $((t, y) \mapsto (t + \varepsilon, y))$ , alebo mám stáť trochu rýchlejšie  $((t, y) \mapsto (\frac{t}{2}, y))$ , tak sa na mojom celoživotnom státi v jednom bode nič nezmení.

hľadať symetrie rovnice

$$\ddot{y} = 0 \quad (4.5)$$

Je to rovnica voľného pohybu po priamke (bez pôsobenia síl). Riešenia dobre poznáme, majú tvar

$$y(t) = y_0 + vt$$

Kde  $y_0$  je poloha v čase  $t = 0$  a  $v$  je rýchlosť pohybu. Sú to všetky priamky v rovine  $\mathbb{R}^2[t, y]$  (okrem zvislých, ktoré nie sú funkciami). Hľadanie symetrií tu vlastne znamená hľadanie transformácií, ktoré z priamok vyrábajú priamky. Označíme si derivácie  $\dot{y} \equiv v$ ,  $\ddot{y} \equiv w$ . Na rovnicu (4.5) budeme pozeráť ako na nadplochu v jetovom priestore  $J^2 \equiv \mathbb{R}^4[t, y, v, w]$  zadanú predpisom

$$\Phi(t, y, v, w) = w = 0$$

Chceme nájsť pole

$$V = A(t, y)\partial_t + B(t, y)\partial_y \quad (4.6)$$

ktorého tok transformuje riešenia na nové riešenia.<sup>8</sup>

### Predĺženie vektorového poľa

Konstruujeme *druhé* jetové predĺženie poľa  $V$ . Toto sa konštruuje z prvého, ktoré sme už počítali v časti 4.1 a malo tvar

$$V^{(1)} = V + G(t, y, v)\partial_v$$

kde

$$G = D_t B - v(D_t A) \quad D_t = \partial_t + v\partial_y$$

Druhé predĺženie  $V^{(2)}$  sa robí tak, akoby sme robili prvé predĺženie poľa  $V^{(1)}$ .

$$V^{(2)} = V^{(1)} + H(t, y, v, w)\partial_w \quad (4.7)$$

kde

$$H = D_t G - w(D_t A) \quad D_t = \partial_t + v\partial_y + w\partial_v$$

V operátore totálnej derivácie pribudol člen  $w\partial_v$ , lebo  $G$  závisí aj od  $v$ .<sup>9</sup>

### Determinujúca rovnica

Požadujeme, aby nadplocha  $\Phi = 0$  bola invariantná vzhľadom na pôsobenie  $V^{(2)}$ . Aplikujeme kritérium infinitezimálnej invariantnosti.

$$V^{(2)}(\Phi)\Big|_{\Phi=0} \stackrel{!}{=} 0$$

Dostávame podmienku

$$\left[ V^{(1)} + H(t, y, v, w)\partial_w \right] (w)\Big|_{w=0} = 0$$

<sup>8</sup> Ako uvidíme v tomto príklade, nové riešenie nemusí byť nutne iné než to staré (priamka sa bude niekedy transformovať do tej istej priamky). Takáto situácia nastala už v časti 4.1 (symetria súvisiaca s poľom  $V_A$ ).

<sup>9</sup> Vyššie predĺženia sa dajú vždy konštruovať *rekurentne* aj v problémoch s viacerými premennými, prípadne vyššími deriváciami.

Keďže vo  $V^{(1)}$  derivácia podľa  $w$  nevystupuje, máme

$$H(t, y, v, w)|_{w=0} = 0$$

čo je požiadavka na nulovosť zložky poľa  $V^{(2)}$  v smere  $w$  na nadploche  $w = 0$ . Dosadenie za  $H$  nás privedie k determinujúcej rovnici pre  $A$  a  $B$ .

$$\begin{aligned} H|_{w=0} &= \{D_t[D_t B - v(D_t A)] - w(D_t A)\}|_{w=0} = \\ &= [D_t D_t B - 2w(D_t A) - v D_t D_t A]|_{w=0} = \\ &= [D_t D_t B - v D_t D_t A]|_{w=0} = \\ &= [\partial_t^2 B + 2v \partial_t \partial_y B + w \partial_y B + v^2 \partial_y^2 B - \\ &\quad - v(\partial_t^2 A + 2v \partial_t \partial_y A + w \partial_y A + v^2 \partial_y^2 A)]|_{w=0} \end{aligned}$$

Po dosadení nuly za  $w$  a poupratovaní dostávame determinujúcu rovnicu

$$\partial_t^2 B + v(2\partial_t \partial_y B - \partial_t^2 A) + v^2(\partial_y^2 B - 2\partial_t \partial_y A) + v^3(-\partial_y^2 A) = 0 \quad (4.8)$$

Vyriešením diferenciálnej rovnice (4.8) určíme komponenty  $A, B$  poľa  $V$ . Je to lineárna parciálna diferenciálna rovnica s nekonštantnými koeficientami, s tromi nezávislými premennými  $t, y, v$  a dvoma neznámymi funkciami  $A, B$ . Znie to zložito, ale všimnime si, že ľavá strana je polynóm v premennej  $v$  (funkcie  $A, B$  od  $v$  nezávisia). Jediný spôsob, ako zabezpečiť rovnosť (pre ľubovoľné  $v$ ), je položiť koeficienty pri každej mocnine  $v$  rovné nule. Rovnica (4.8) sa rozpadne na sústavu jednoduchších rovníc. Pri jednotlivých mocninách máme

$$\begin{array}{lll} v^0 & \partial_t^2 B = 0 & (i) \\ v^1 & 2\partial_t \partial_y B - \partial_t^2 A = 0 & (ii) \\ v^2 & \partial_y^2 B - 2\partial_t \partial_y A = 0 & (iii) \\ v^3 & -\partial_y^2 A = 0 & (iv) \end{array}$$

Táto sústava sa už rieši jednoducho. Podrobné riešenie čitateľ nájde v dodatku A. Funkcie  $A(t, y), B(t, y)$  vychádzajú

$$\begin{aligned} A(t, y) &= (c_8 t + c_6)y + c_7 t^2 + c_3 t + c_1 \\ B(t, y) &= (c_7 y + c_5)t + c_8 y^2 + c_4 y + c_2 \end{aligned}$$

### Lieova algebra symetrií

Spomenieme si, že sme vlastne počítali komponenty vektorového poľa  $V$  a dosadíme ich do (4.6).

$$\begin{aligned} V &= A(t, y)\partial_t + B(t, y)\partial_y \\ &= [(c_8 t + c_6)y + c_7 t^2 + c_3 t + c_1] \partial_t + \\ &\quad + [(c_7 y + c_5)t - c_8 y^2 + c_4 y + c_2] \partial_y \\ &= c_1 \partial_t + c_2 \partial_y + c_3 t \partial_t + c_4 y \partial_y + c_5 t \partial_y + \\ &\quad + c_6 y \partial_t + c_7 (t^2 \partial_t + t y \partial_y) + c_8 (t y \partial_t + y^2 \partial_y) \end{aligned}$$

kde  $c_1, \dots, c_8$  sú ľubovoľné reálne čísla. Podobne, ako sme to urobili v časti 4.1, mohli by sme sa dosadením funkcií  $A(t, y), B(t, y)$  do (4.7) presvedčiť, že  $V^{(2)}$  má naozaj vlastnosti, aké sme požadovali.

Pole  $V$  je všeobecným generátorom symetií. Vidíme, že je lineárnou kombináciou *bázových vektorových polí*

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \partial_t \\
 V_2 &= \partial_y \\
 V_3 &= t\partial_t \\
 V_4 &= y\partial_y \\
 V_5 &= t\partial_y \\
 V_6 &= y\partial_t \\
 V_7 &= t^2\partial_t + ty\partial_y \\
 V_8 &= ty\partial_t + y^2\partial_y
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

ktoré tvoria bázu (8-rozmernej) *Lieovej algebry symetrií* rovnice  $\dot{y} = 0$ , označíme ju  $\mathcal{L}$ . Pole  $V$  je všeobecným prvkom tejto algebry. Ak chceme zistiť, či sme dostali naozaj Lieovu algebru, treba overiť, či

1.  $\mathcal{L}$  tvorí vektorový priestor
2.  $\mathcal{L}$  obsahuje násobenie  $\mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ , pre ktoré platí
  - (a) je bilineárne
  - (b) je antisymetrické
  - (c) spĺňa Jacobiho identitu

$\mathcal{L}$  tvorí (8-rozmerný) vektorový priestor, keďže lineárna kombinácia vektorových polí je vektorové pole. Vektor v tomto abstraktnom priestore sa zadáva 8-ticou reálnych čísel  $(c_1, \dots, c_8)$ . Násobením je tu komutátor vektorových polí

$$[V, W]$$

Definujeme ho cez pôsobenie na funkciu

$$[V, W]f = V(Wf) - W(Vf)$$

Počíta sa ako komutátor diferenciálnych operátorov. Toto násobenie má vlastnosti (a) – (c).<sup>10</sup> Ak chceme overiť, či násobenie správne funguje (či výsledok násobenia prvkov z  $\mathcal{L}$  leží v  $\mathcal{L}$ ), treba vypočítať komutátor dvoch všeobecných prvkov. Uvedomíme si, že taký komutátor by sa (vďaka vlastnosti (a)) rozbil na počítanie komutátorov bázových vektorových polí, takže stačí vypočítať len tie. Napríklad

$$\begin{aligned}
 [V_1, V_5]f(t, y) &= [\partial_t, t\partial_y]f = \partial_t(t\partial_y f) - t\partial_y(\partial_t f) = \\
 &= \partial_y f + t\partial_t\partial_y f - t\partial_y\partial_t f = \partial_y f = V_2 f
 \end{aligned}$$

Súčin vektorov<sup>11</sup>  $V_1, V_5$  je  $V_2$  čo naozaj leží v  $\mathcal{L}$ . Podobne vypočítame všetky ostatné komutátory. Zapišeme ich do tabľky, kde v  $i$ -tom riadku a  $j$ -tom stĺpci je komutátor  $[V_i, V_j]$ .

<sup>10</sup> Pozri [1] príklad (4.3.6).

<sup>11</sup> Čitateľ je možno zmätený, že raz nazývame  $V_i$  vektorovými poliami a raz vektormi. Treba si ujasniť, že v kontexte Lieovej algebry je pravda oboje. Ako objekty sú to vektorové polia a zároveň sú prvkami vektorového priestoru  $\mathcal{L}$ , takže sú vektormi.



	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$V_5$	$V_6$	$V_7$	$V_8$
$V_1$	0	0	$V_1$	0	$V_2$	0	$2V_3 + V_4$	$V_6$
$V_2$	0	0	0	$V_2$	0	$V_1$	$V_5$	$V_3 + 2V_4$
$V_3$	$-V_1$	0	0	0	$V_5$	$-V_6$	$V_7$	0
$V_4$	0	$-V_2$	0	0	$-V_5$	$V_6$	0	$V_8$
$V_5$	$-V_2$	0	$-V_5$	$V_5$	0	$V_3 - V_4$	0	$V_7$
$V_6$	0	$-V_1$	$V_6$	$-V_6$	$-V_3 + V_4$	0	$V_8$	0
$V_7$	$-2V_3 - V_4$	$-V_5$	$-V_7$	0	0	$-V_8$	0	0
$V_8$	$-V_6$	$-V_3 - 2V_4$	0	$-V_8$	$-V_7$	0	0	0

V tabuľke vidíme, že násobenie „nevybehlo“ z  $\mathcal{L}$  (vidno navyše aj antisymetriu), a teda vektorové polia  $V$  (s ľubovoľnými konštantami  $c_1, \dots, c_8$ ) tvoria 8-rozmernú Lieovu algebru s bázou (4.9).

### Lieova grupa symetrií a výroba nových riešení

Potrebuje najst' Lieovu grupu symetrií, ktorej prislúcha Lieova algebra  $\mathcal{L}$ . Vypočítame, ako vyzerajú grupové prvky - symetrie zodpovedajúce vektorovým poliam  $V_1, \dots, V_8$ . Označíme ich  $G_\varepsilon^1, \dots, G_\varepsilon^8$ . Symetriu  $G_\varepsilon^i$  počítame ako tok poľa  $V_i$ .<sup>12</sup>

**Symetria  $G_\varepsilon^1$ :** Riešime rovnice pre integrálne krivky poľa  $V_1 = \partial_t$ .

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{t}}{d\varepsilon} &\equiv \hat{t}' = 1 &\Rightarrow &\hat{t} = \varepsilon + t \\ \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} &\equiv \hat{y}' = 0 &\Rightarrow &\hat{y} = y \end{aligned}$$

Pričom sme využili počiatočnú podmienku  $\hat{t}(0) = t$ ,  $\hat{y}(0) = y$ . Pre stručnosť zavádzame pre derivácie podľa  $\varepsilon$  označenia  $\hat{t}'$ ,  $\hat{y}'$ . Potom tok poľa  $V^1$  má podobu

$$G_\varepsilon^1 : (t, y) \mapsto (\hat{t}, \hat{y}) = (t + \varepsilon, y)$$

Symetria je transláciou v čase. Hovorí, že rovnica  $\ddot{y} = 0$  je (ako nadplocha v  $J^2$ ) invariantná vzhľadom na posunutia v premennej  $t$ . Ak známe riešenie je  $y = f(t)$ , nové riešenie  $\hat{y}(\hat{t})$  sa z neho vyrába jednoducho

$$\hat{y}(\hat{t}) = y(t) = f(t) = f(\hat{t} - \varepsilon)$$

Napríklad riešenie  $y = 2t$  prejde na  $y = 2(t - \varepsilon)$ . Treba si všimnúť, že na nezávislej premennej  $t$  robíme *inverznú transformáciu*. Dôvodom je, že musíme vyjadriť nové riešenie  $\hat{y}(\hat{t})$  ako funkciu  $\hat{t}$ . Keď nám vyjde, že  $t$  sa zobrazuje na

<sup>12</sup>Poznamenajme, že vždy ide o jednoparametrickú grupu symetrií, ale budeme skrátene hovoriť symetria.

Poznámka pre znalcov grúp: Zobrazenie, ktoré vektorovému poľu priradí jeho tok, tu vystupuje v úlohe *exponenciálneho zobrazenia*, ktoré vynáša prvky z Lieovej algebry do Lieovej grupy (presnejšie do jej jednoparametrickej podgrupy). Niekedy sa tomu hovorí exponenciácia vektorového poľa. Toto zobrazenie zapisujeme

$$\exp : \mathcal{L} \rightarrow G \quad V_i \mapsto \exp(\varepsilon V_i) \equiv G_\varepsilon^i$$

Viac sa o týchto veciach možno dozvedieť v knihe [3] v časti 1.3.

$\hat{t} = F(t)$ , do  $f(t)$  treba pri počítaní nového riešenia za  $t$  dosadiť  $t = F^{-1}(\hat{t})$ . Dá sa to vidieť aj intuitívne z Obr. 4.4. Riešenie posúvame doprava (v smere poľa), takže  $t \mapsto (t - \varepsilon)$ .

**Symetria**  $G_\varepsilon^2$ : Tok poľa  $V^2 = \partial_y$  sa počíta podobne ako  $G_\varepsilon^1$ , len zameníme  $t \leftrightarrow y$ .

$$G_\varepsilon^2 : (t, y) \mapsto (t, y + \varepsilon)$$

Je to symetria vzhľadom na translácie v priestore a nové riešenia vyrábame posúvaním starého v smere osi  $y$ . Explicitne

$$\hat{y}(\hat{t}) = y(t) + \varepsilon = f(t) + \varepsilon = f(\hat{t}) + \varepsilon$$

**Symetria**  $G_\varepsilon^3$ : Integrálne krivky poľa  $V_3 = t\partial_t$  sa hľadajú tiež ľahko

$$\begin{aligned} \hat{t}' &= \hat{t} & \Rightarrow & \hat{t} = e^\varepsilon t \\ \hat{y}' &= 0 & \Rightarrow & \hat{y} = y \end{aligned}$$

Potom symetria  $G_\varepsilon^3$  funguje takto

$$G_\varepsilon^3 : (t, y) \mapsto (e^\varepsilon t, y)$$

Ide o škálovanie času, teda zrýchľovanie (pre  $\varepsilon < 0$ ) alebo spomaľovanie ( $\varepsilon > 0$ ) jeho plynutia. To, čo trvalo „po starom“ čas  $T$  bude „po novom“ trvať  $e^\varepsilon T$ . To znamená pre záporné  $\varepsilon$  kratšie. Pri výrobe nových riešení postupujeme takto

$$\hat{y}(\hat{t}) = y(t) = f(t) = f(e^{-\varepsilon}\hat{t})$$

Opäť si všimnime inverznú transformáciu času.

**Symetria**  $G_\varepsilon^4$ : Pri výpočte toku poľa  $V_4 = y\partial_y$  postupujeme podobne ako pri  $G_\varepsilon^3$ , len zameníme  $t \leftrightarrow y$ .

$$G_\varepsilon^4 : (t, y) \mapsto (t, e^\varepsilon y)$$

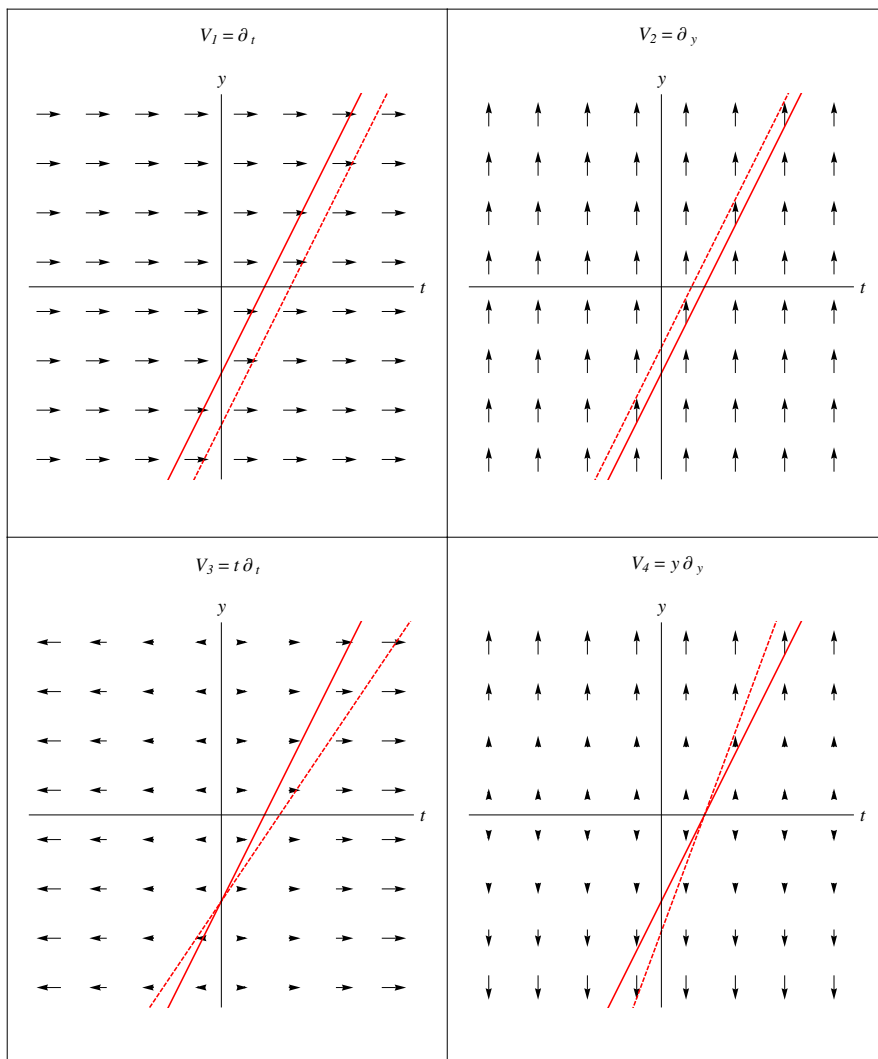
Je to škálovanie priestoru. Výroba nových riešení funguje takto

$$\hat{y}(\hat{t}) = e^\varepsilon y(t) = e^\varepsilon f(t) = e^\varepsilon f(\hat{t})$$

Je to vlastne násobenie riešenia *kladnou* konštantou  $e^\varepsilon$ . Ale vieme, že aj keď vynásobíme priamku záporným číslom  $-2$ , dostaneme priamku. Tak prečo to nevyšlo? Dôvod je jednoduchý. Takáto symetria je zložením  $G_\varepsilon^4$  a priestorovej inverzie (násobenie číslom  $-1$ ), ktorá je diskétnou symetriou. Metódami používanými v tejto práci sa dajú nájsť len spojité symetrie.<sup>13</sup> Rovnaká situácia je aj pri symetrii  $G_\varepsilon^3$ .

<sup>13</sup>Pozri posledný odsek v časti 3.1.

Na nasledujúcich obrázkoch sú nakreslené vektorové polia  $V_1, \dots, V_4$  a výroba nového riešenia pomocou  $G_\varepsilon^1, \dots, G_\varepsilon^4$ .<sup>14</sup>



Obr. 4.4: Výroba nového riešenia (prerušovaná čiara) pomocou  $G_\varepsilon^1, \dots, G_\varepsilon^4$  z riešenia  $y = 2t - 1$  (plná čiara).

**Symetria  $G_\varepsilon^5$ :** Nájdeme integrálne krivky poľa  $V_5 = t\partial_y$

$$\begin{aligned} \hat{t}' &= 0 & \Rightarrow & \hat{t} = t \\ \hat{y}' &= \hat{t} & \Rightarrow & \hat{y} = t\varepsilon + y \end{aligned}$$

<sup>14</sup>Mohli by sme kresliť aj integrálne krivky namiesto vektorových polí, ale v tomto prípade sú polia názornejšie - vidíme, akými veľkými krokmi sa v ktorom mieste kráča. Integrálne krivky sú priamky a veľkosť krokov je zakódovaná v ich prametrizácii, ktorá sa nedá dobre nakresliť.

takže transformácia má tvar

$$G_\varepsilon^5 : (t, y) \mapsto (t, y + \varepsilon t)$$

Je to Galileiho transformácia. Nové riešenie sa vyrába

$$\hat{y}(\hat{t}) = y(t) + \varepsilon t = f(t) + \varepsilon t = f(\hat{t}) + \varepsilon \hat{t}$$

Keby sme napríklad stáli ( $f(t) = 1$ ), Galileiho transformáciou dostaneme rovnomerný pohyb rýchlosťou  $\varepsilon$  ( $y(t) = 1 + \varepsilon t$ ).

**Symetria**  $G_\varepsilon^6$ : Tok poľa  $V_6 = y\partial_t$  vypočítame podobne ako  $G_\varepsilon^5$ . Výsledok dostaneme jednoducho zámennou  $t \leftrightarrow y$ . Dostaneme

$$G_\varepsilon^6 : (t, y) \mapsto (t + \varepsilon y, y)$$

K výrobe nových riešení sa vyjadríme neskôr.

**Symetria**  $G_\varepsilon^7$ : Integrálne krivky poľa  $V_7 = t^2\partial_t + ty\partial_y$  sú

$$\begin{aligned} \hat{t}' &= \hat{t}^2 &\Rightarrow & \hat{t} = \frac{t}{1 - \varepsilon t} \\ \hat{y}' &= \hat{t}\hat{y} \\ \frac{d\hat{y}}{\hat{y}} &= \hat{t}d\varepsilon = \frac{td\varepsilon}{1 - \varepsilon t} &\Rightarrow & \hat{y} = \frac{y}{1 - \varepsilon t} \end{aligned}$$

Symetria  $G_\varepsilon^7$  funguje nasledovne

$$G_\varepsilon^7 : (t, y) \mapsto \left( \frac{t}{1 - \varepsilon t}, \frac{y}{1 - \varepsilon t} \right)$$

Nové riešenia budeme vyrábať trochu komplikovanejšie.

$$\hat{y}(\hat{t}) = \frac{y(t)}{1 - \varepsilon t} = \frac{f(t)}{1 - \varepsilon t} = \frac{f\left(\frac{\hat{t}}{1 + \varepsilon \hat{t}}\right)}{1 - \varepsilon \frac{\hat{t}}{1 + \varepsilon \hat{t}}} = (1 + \varepsilon \hat{t})f\left(\frac{\hat{t}}{1 + \varepsilon \hat{t}}\right)$$

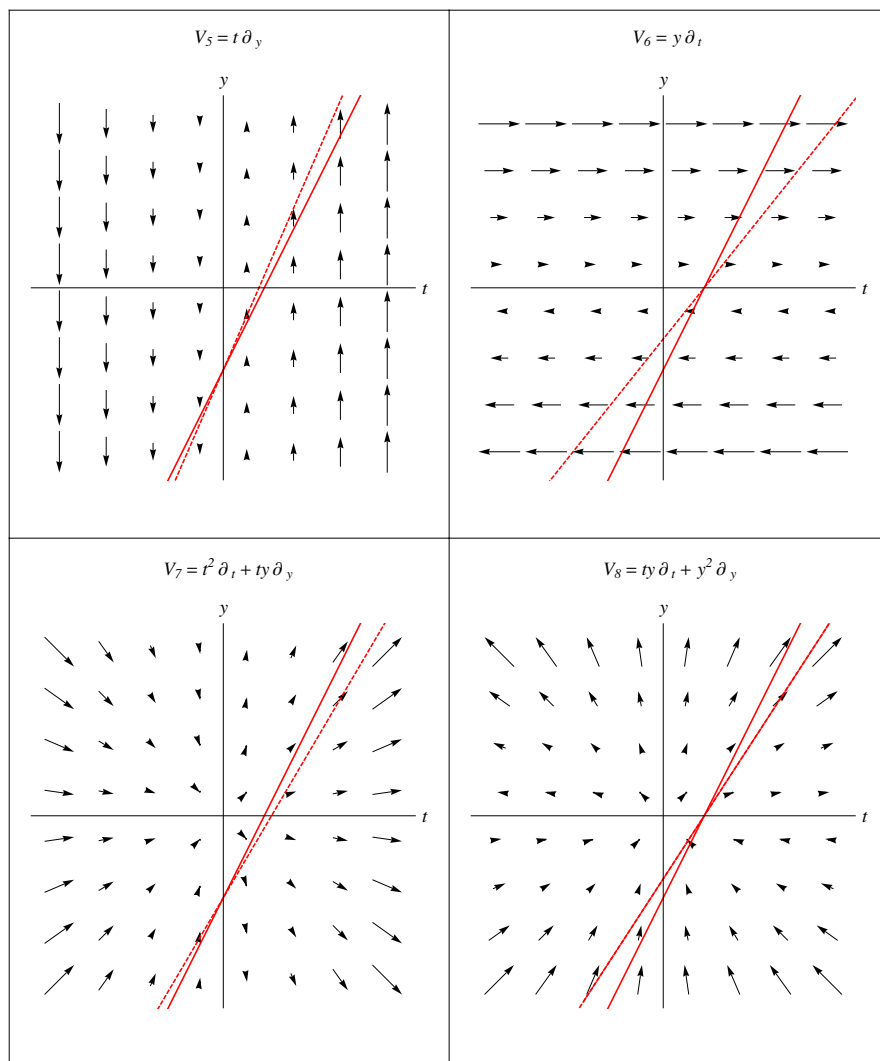
Všimnime si, že riešenie typu  $f(t) = vt$  sa touto symetriou transformuje do seba (dá sa predstaviť na Obr. 4.5). Takže symetria vo všeobecnosti nemusí vždy vyrobiť niečo nové.

**Symetria**  $G_\varepsilon^8$ : Tok poľa  $V_8 = ty\partial_t + y^2\partial_y$  počítame podobne ako  $G_\varepsilon^7$ .

$$G_\varepsilon^8 : (t, y) \mapsto \left( \frac{t}{1 - \varepsilon y}, \frac{y}{1 - \varepsilon y} \right)$$

K výrobe nových riešení sa vyjadríme neskôr.

Na nasledujúcich obrázkoch sú nakreslené vektorové polia  $V_5, \dots, V_8$  a výroba nového riešenia pomocou  $G_\varepsilon^5, \dots, G_\varepsilon^8$ .



Obr. 4.5: Výroba nového riešenia (prerušovaná čiara) pomocou  $G_\varepsilon^5, \dots, G_\varepsilon^8$  z riešenia  $y = 2t - 1$  (plná čiara).

Skutočnosť, že nové riešenia spĺňajú rovnicu  $\ddot{y} = 0$  sa dá ľahko overiť derivovaním nového riešenia (aj bez dosadenia konkrétneho riešenia za  $f(t)$ ) a využitím, že  $f(t)$  je riešením ( $\ddot{f} = 0$ ). Napríklad

$$\frac{d^2}{dt^2}[f(t) + \varepsilon t] = \frac{d}{dt}[\dot{f}(t) + \varepsilon] = \ddot{f}(t) = 0$$

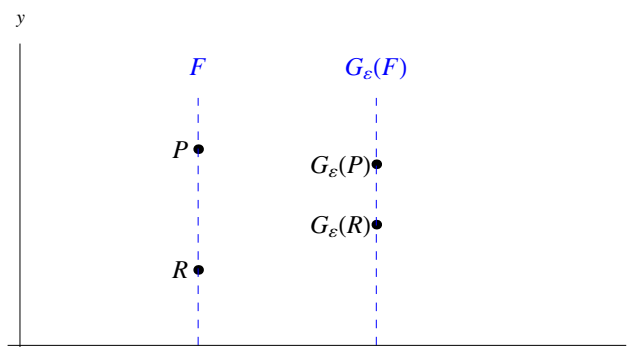
Na obrázkoch vidíme, že už z toho, ako vyzerajú polia (lokálne transformácie), si vieme predstaviť, čo budú im prislúchajúce symetrie robiť. Preto je najdôležitej-

šie nájsť Lieovu algebru symetrií, ktorá nám už veľa napovie. Všetky výsledky zhrnieme do nasledujúcej tabuľky.

$a$	$V_a$	$G_\varepsilon^a : (t, y) \mapsto$	Nové riešenie
1	$\partial_t$	$(t + \varepsilon, y)$	$f(t - \varepsilon)$
2	$\partial_y$	$(t, y + \varepsilon)$	$f(t) + \varepsilon$
3	$t\partial_t$	$(e^\varepsilon t, y)$	$f(e^{-\varepsilon}t)$
4	$y\partial_y$	$(t, e^\varepsilon y)$	$e^\varepsilon f(t)$
5	$t\partial_y$	$(t, y + \varepsilon t)$	$f(t) + \varepsilon t$
6	$y\partial_t$	$(t + \varepsilon y, y)$	
7	$t^2\partial_t + ty\partial_y$	$\left(\frac{t}{1-\varepsilon t}, \frac{y}{1-\varepsilon t}\right)$	$(1 + \varepsilon t)f\left(\frac{t}{1+\varepsilon t}\right)$
8	$ty\partial_t + y^2\partial_y$	$\left(\frac{t}{1-\varepsilon y}, \frac{y}{1-\varepsilon y}\right)$	

Výroba riešení pomocou symetrií  $G_\varepsilon^6, G_\varepsilon^8$  je problematickejšia. Nedá sa postupovať rovnako, ako sme to robili pri ostatných. Problém je v tom, že vo vzorci pre  $\hat{t}$  vystupuje aj  $y$ .

Hovoríme, že takéto symetrie *nezachovávajú vlákna*. Vláknamy sa tu nazývajú priamky rovnobežné s osou  $y$ . Priamky rozvlákniť rovinu  $\mathbb{R}^2[t, y]$  a vytvoria na nej štruktúru, podobne ako keď sa pred sadením obilia urobia na poli hriadky. Transformácie, ktoré rešpektujú túto štruktúru (Obr. 4.6) a zobrazujú všetky body, čo ležia na *jednej* zvislej priamke na body opäť ležiace na (inej) *jednej* zvislej priamke, zachovávajú vlákna.



Obr. 4.6: Transformácia, ktorá zachováva vlákna.

Symetrie  $G_\varepsilon^6, G_\varepsilon^8$  vlákna nezachovávajú a body, čo boli nad sebou (v jednom vlákne) po transformácii nad sebou nemusia byť. Môže nastať aj opačná situácia - dva body, čo neboli nad sebou sa dostanú nad seba. Ak tieto dva body ležali pôvodne na grafe nejakej funkcie, obraz už funkciou nie je (pre jedno  $t$  by sme mali dve  $y$ ).

Nové riešenia treba v tomto prípade hľadať inak. Nejde to však jednoducho napísať pre všeobecné  $f(t)$ . Ukážeme si to na symetrii  $G_\varepsilon^6$  a riešení  $y = at + b$ . Napíšme, ako pôsobí  $G_\varepsilon^6$  na bod  $(t, y)$  ležiaci na tejto priamke.

$$G_\varepsilon^6(t, y) = (\hat{t}, \hat{y}) = (t + \varepsilon y, y) = (t + \varepsilon(at + b), (at + b))$$

kde sme za  $y$  dosadili naše riešenie. Dostali sme systém dvoch rovníc

$$\begin{aligned}\hat{t} &= t(1 + \varepsilon a) + \varepsilon b \\ \hat{y} &= at + b\end{aligned}$$

Z nich treba vylúčiť  $t$  a dostaneme nové riešenie. Vychádza

$$\hat{y}(\hat{t}) = \frac{a}{1 + \varepsilon a} \hat{t} + \frac{b}{1 + \varepsilon a}$$

Vidíme, že pre  $\varepsilon = -\frac{1}{a}$  to nedopadne dobre a nedostaneme funkciu (výsledkom je zvislá priamka). Ak by sa nedala formula pre nové riešenie nájsť ani takýmto spôsobom, graf vždy môžeme nájsť. Necháme bod po bode (o parametrickú vzdialenosť  $\varepsilon$ ) odtriecť staré riešenie po integrálnych krivkách a dostaneme aspoň graf nového riešenia. Viac sa týmto zobrazeniam nezachovávajúcim vlákna venovať nebudeme.

#### Poznámka (pre ozajstných fajňšmekrov na Lieove grupy)

Poskladaním transformácií  $G_{\varepsilon_1}^1, \dots, G_{\varepsilon_8}^8$  v ľubovoľnom poradí (a s rôznymi  $\varepsilon$ ) dostaneme vždy výsledok tvaru

$$(t, y) \mapsto \left( \frac{at + by + c}{kt + ly + m}, \frac{dt + ey + f}{kt + ly + m} \right) \quad (4.10)$$

kde čísla  $a, \dots, m$  sú vždy nejakou funkciou parametrov  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_8$ . Je to *zlomkovo-lineárna transformácia*. Ak z parametrov  $a, \dots, m$  poskladáme maticu

$$A \equiv \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{pmatrix}$$

zistíme, že jej *determinant* je vždy *nenulový*, teda

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{vmatrix} \neq 0 \quad (4.11)$$

Maticy  $3 \times 3$  spĺňajúce podmienku (4.11) sú prvkami 9-rozmernej Lieovej grupy  $GL(3, \mathbb{R})$ . Avšak, ak sa dobre pozrieme na (4.10), všimneme si, že aj keď maticu  $A$  vynásobíme hocijakou nenulovou konštantou  $\lambda$ , bod  $(t, y)$  sa efektívne zobrazí do toho istého.

Determinant matice vynásobenej konštantou sa počíta (využijeme multilinearitu determinantu)

$$\det \lambda A = \lambda^3 \det A$$

Zvoľme  $\lambda = (\det A)^{-\frac{1}{3}}$ . Potom determinant matice  $B \equiv \lambda A$  je

$$\det B = \det \lambda A = 1$$

Vzťah (4.10) bude rovnako fungovať aj s maticou  $B$ .

Výsledok nezávisí od determinantu matice, a preto všetky možné transformácie (4.10) obhospodárime aj maticami  $B$  s *jednotkovým* determinantom. Také matice tvoria 8-rozmernú Lieovu grupu  $SL(3, \mathbb{R})$ . Grupa  $SL(3, \mathbb{R})$  je v popísanom zmysle grupou symetrií rovnice  $\ddot{y} = 0$ .<sup>15</sup>

<sup>15</sup>Vo všeobecnosti však grupa symetrií nemusí vyjsť takáto pekná, priam učebnicová.

### 4.3 Voľný pád

Budeme študovať pohybovú rovnicu voľného pádu v jednom rozmere

$$\ddot{z} = -g. \quad (4.12)$$

Všeobecné pole v priestore  $\mathbb{R}^2[t, z]$  je

$$V = A(t, z)\partial_t + B(t, z)\partial_z \quad (4.13)$$

Prejdeme do (4-rozmerného) priestoru  $J^2$ . Máme v ňom súradnice  $(t, z, \dot{z} \equiv v, \ddot{z} \equiv w)$ . Diferenciálna rovnica (4.12), prejde v našich označeniach na

$$\Phi(t, z, v, w) = w + g = 0$$

čo je nadrovina v  $J^2$ . Našou úlohou je opäť nájsť  $A(t, z)$  a  $B(t, z)$  tak, aby tok generovaný poľom  $V$  nehýbal nadplochou  $\Phi = 0$ . V priestore  $J^2$  sa konštruuje druhé jetové predĺženie poľa  $V$  (úplne rovnako ako pre voľný pohyb po priamke v časti 4.2).

$$V^{(2)} = V + G(t, z, v)\partial_v + H(t, z, v, w)\partial_w$$

kde

$$G(t, z, v) = D_t B - v(D_t A) \quad (4.14)$$

$$H(t, z, v, w) = D_t G - w(D_t A) \quad (4.15)$$

$$D_t = \partial_t + v\partial_z + w\partial_v$$

Nasadíme kritérium infinitezimálnej invariantnosti.

$$\begin{aligned} V^{(2)}(\Phi) \Big|_{\Phi=0} &\stackrel{!}{=} 0 \\ V^{(2)}(\Phi) \Big|_{\Phi=0} &= [V + G\partial_v + H\partial_w](w + g)|_{w=-g} = \\ &= H|_{w=-g} = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Posledný riadok hovorí, že nadrovina  $w = -g$  je invariantná vzhľadom na tok poľa  $V^{(2)}$ , keď je na nej zložka  $H$  poľa  $V^{(2)}$  nulová. Funkcia  $H$  má podľa (4.15) s využitím (4.14) tvar

$$\begin{aligned} H &= D_t G - w(D_t A) = D_t[D_t B - v(D_t A)] - w(D_t A) = \\ &= \partial_t^2 B + v(2\partial_t \partial_z B - \partial_t^2 A) + v^2(\partial_z^2 B - 2\partial_t \partial_z A) + \\ &\quad + v^3(-\partial_z^2 A) + vw(-3\partial_z A) + w(\partial_z B - 2\partial_t A) \end{aligned}$$

Podľa (4.16) treba zameniť všetky  $w$  za  $-g$  a položiť rovne nule. Dostávame determinujúcu rovnicu

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 B - g\partial_z B + 2g\partial_t A) + v(2\partial_t \partial_z B - \partial_t^2 A + 3g\partial_z A) + \\ + v^2(\partial_z^2 B - 2\partial_t \partial_z A) + v^3(-\partial_z^2 A) = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ľavá strana je opäť polynóm vo  $v$  a rovnica sa redukuje na sústavu štyroch rovníc. Ich riešenie presúvame do dodatku A. Komponenty  $A, B$  vektorového



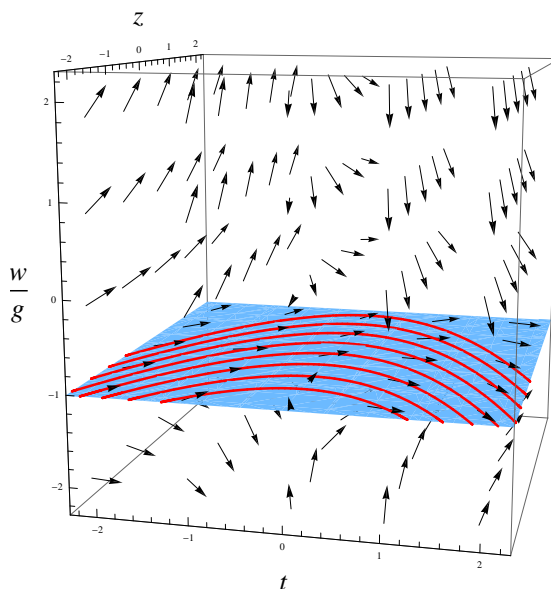
poľa  $V$  vychádzajú

$$\begin{aligned} A(t, z) &= (c_8 t + c_7)z + \frac{1}{2}g c_8 t^3 + \left(\frac{3}{2}g c_7 + c_6\right)t^2 + c_5 t + c_1 \\ B(t, z) &= c_8 z^2 + (c_6 t + c_4)z + \left[-\frac{1}{4}g^2 c_8 t^4 - \left(g^2 c_7 + \frac{1}{2}g c_6\right)t^3 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2}g c_4 - g c_5\right)t^2 + c_3 t + c_2\right] \end{aligned}$$

Dosadíme ich do (4.13) a po uprataní nám vyjdú bázové polia (generátory) Lieovej algebry symetrií.

$$\begin{aligned} V_1 &= \partial_t \\ V_2 &= \partial_z \\ V_3 &= t\partial_z \\ V_4 &= \left(z + \frac{1}{2}gt^2\right)\partial_z \\ V_5 &= t\partial_t - gt^2\partial_z \\ V_6 &= t^2\partial_t + \left(tz - \frac{1}{2}gt^3\right)\partial_z \\ V_7 &= \left(z + \frac{3}{2}gt^2\right)\partial_t - g^2t^3\partial_z \\ V_8 &= \left(tz + \frac{1}{2}gt^3\right)\partial_t + \left(z^2 - \frac{1}{4}g^2t^4\right)\partial_z \end{aligned} \quad (4.18)$$

Lieova algebra je 8-rozmerná,<sup>16</sup> rovnako ako tá v časti 4.2. V časti 4.4 uvidíme, že to nie je náhoda a medzi rovnicami voľného pádu a voľného pohybu po priamke je úzky súvis. Na Obr. 4.7 vidíme, že vektory poľa  $V$  sú naozaj dotykové ku nadploche  $w = -g$ .



Obr. 4.7: Nadrovina  $w = -g$  (modrá plocha) a pole  $V$  v reze  $v = 0$ . Konštanty sú zvolené  $c_1 = c_2 = \dots = c_8 = 1$ . Červené paraboly sú riešenia typu  $y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$ .

<sup>16</sup>O tom, že je to naozaj Lieova algebra sa dá presvedčiť rovnako ako, sme to urobili v časti 4.2. Popočítajú sa všetky komutátory a vyjde, že majú tvar  $[V_i, V_j] = c_{ij}^k V_k$ , a teda násobenie dvoch prvkov z  $\mathcal{L}$  dáva prvok z  $\mathcal{L}$ .

Ďalej by sme postupovali štandardnými krokmi. Najprv by sme vyriešili rovnice pre integrálne krivky bázových polí  $V_1, \dots, V_8$ , dostali toky týchto polí (jednoparametrické podgrupy grupy symetrií voľného pádu) a ukázali, ako sa pomocou nich konštruujú nové riešenia. Od tohoto trápenia však upustíme (rovnice pre integrálne krivky niektorých polí sú silno previazané) a ukážeme si, ako sa dajú toky bázových polí získať iným spôsobom.

## 4.4 Súvis medzi voľným pohybom po priamke a voľným pádom

Niekedy sa môže stať, že hľadanie symetrií rovnice sa dá previesť na hľadanie symetrií inej rovnice, ktoré sa môžu hľadať ľahšie. Prípadne ak máme vyriešené symetrie jednej rovnice, skoro zadarmo dostaneme hneď aj symetrie ďalších rovníc, ktoré sú s ňou v istom zmysle ekvivalentné.

V literatúre<sup>17</sup> sa uvádza, že Lieova grupa symetrií obyčajnej diferenciálnej rovnice druhého rádu je najviac 8-rozmerná a navyše 8-rozmerná grupa symetrií vyjde práve vtedy, keď sa rovnica dá previesť zámenou súradníc na rovnicu  $\ddot{y} = 0$ .

Grupu symetrií rovnice  $\ddot{y} = 0$  sme hľadali v časti 4.2 a vyšla naozaj 8-rozmerná. Osem rozmerov má aj grupa symetrií voľného pádu.<sup>18</sup> Tieto rovnice by sa podľa predchádzajúceho tvrdenia mali dať previesť jedna na druhú.

### 4.4.1 Zámena súradníc

Skúsme nájsť vhodnú zámenu súradníc  $(t, z) \mapsto (t', y)$ , ktorá prevedie  $\ddot{z} = -g$  na  $\ddot{y} = 0$ , a teda transformuje paraboly na priamky. Takáto zámena súradníc sa dá nájsť pomerne jednoducho:

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= -g \\ d(\dot{z}) &= -g dt \\ d(\dot{z} + gt) &= 0 \\ d \left[ \underbrace{\frac{d}{dt} \left( z + \frac{1}{2}gt^2 \right)}_y \right] &= 0 \end{aligned}$$

V poslednom riadku sme označili  $y \equiv z + \frac{1}{2}gt^2$ . Rovnicu predelíme diferenciálom  $dt$  a dostávame

$$\ddot{y} = 0$$

Čiže ak chceme previesť voľný pád na voľný pohyb po priamke, treba robiť zámenu súradníc

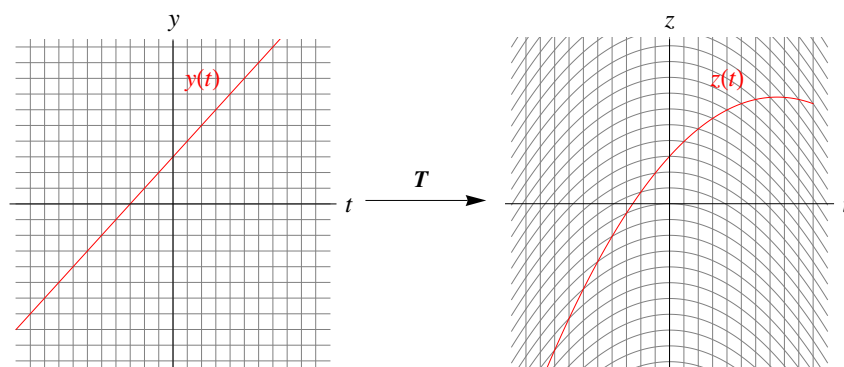
$$\begin{aligned} T^{-1} : \quad t &\mapsto t' = t \\ z &\mapsto y = z + \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

<sup>17</sup> Pozri [4] str. 203 Theorem 6.39.

<sup>18</sup> Zatiaľ sme ju nenašli, ale ak Lieova algebra je 8-rozmerná, dostali by sme 8 jednoparametrických grúp symetrií, teda 8-rozmernú Lieovu grupu.

My budeme potrebovať opačnú zámenu, pretože chceme prejsť od  $\ddot{y} = 0$  ku  $\ddot{z} = -g$ .

$$T : (t, y) \mapsto (t, z) = \left( t, y - \frac{1}{2}gt^2 \right) \quad (4.19)$$



Obr. 4.8: Transformácia  $T$  zdeformuje rovinu. Ak vľavo poriadne priviažeme ku sieti červenú priamku (riešenie rovnice  $\ddot{y} = 0$ ),  $T$  ju zohne na červenú parabolu (riešenie rovnice  $\ddot{z} = -g$ ).

#### 4.4.2 Transformácia Lieových algebier

Ukážeme, že touto zamenou sa naozaj Lieova algebra symetrií rovnice  $\ddot{y} = 0$  (polia (4.9) na strane 32) transformuje na tú (na pohľad zložitejšiu - polia (4.18) na strane 41) pre  $\ddot{z} = -g$ .

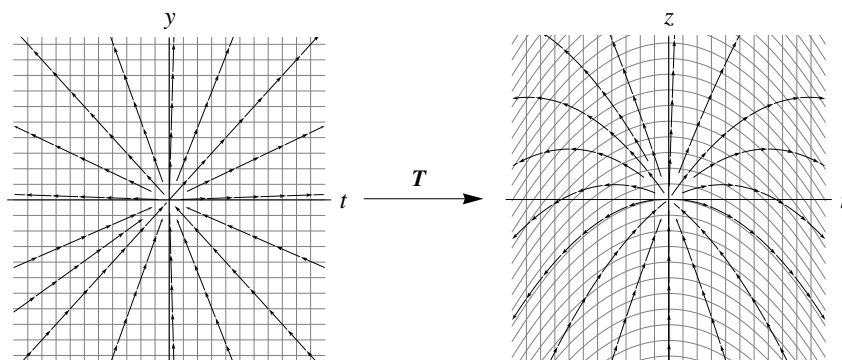
Infinitezimálne generátory symetrií sú vektorové polia. V časti 2.3 sme hovorili, ako sa správajú ich komponenty pri zamenách súradníc. Komponenty generátorov symetrií rovnice voľného pádu dostaneme podľa vzorca (2.4) takto

$$\begin{aligned} V_a^i(t, z) &= J_j^i(t, y) V_a^j(t, y) \\ \begin{pmatrix} V_a^t \\ V_a^z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -gt & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_a^t \\ V_a^y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

kde  $V_a^i$  treba vyjadriť v súradniciach  $(t, z)$ . Napríklad  $V_8$  prejde na

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V_8^t \\ V_8^z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -gt & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ty \\ y^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -gt & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t(z + \frac{1}{2}gt^2) \\ (z + \frac{1}{2}gt^2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tz + \frac{1}{2}gt^3 \\ z^2 - \frac{1}{4}g^2t^4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

V tomto prípade vyšlo presne  $W_8$  (pre potreby tejto časti  $W_a$  označujú bázové polia (4.18) Lieovej algebry symetrií voľného pádu). Na Obr. 4.9 je vidieť, ako transformácia funguje na integrálnych krivkách týchto polí.

Obr. 4.9: Transformácia integrálnych kriviek podľa  $V_8$  na integrálne krivky podľa  $W_8$ .

Podobne vypočítame všetky  $V'_a$ . Výsledky uvádzame v nasledujúcej tabuľke.

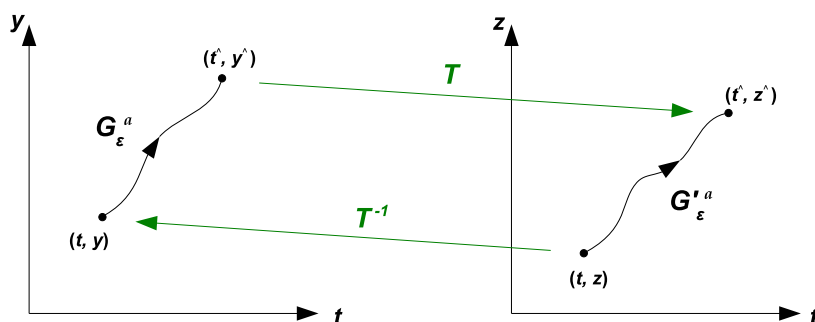
$a$	$V_a$	$V'_a$	$V'_a(W_b)$
1	$\partial_t$	$\partial_t - gt\partial_z$	$W_1 - gW_3$
2	$\partial_y$	$\partial_z$	$W_2$
3	$t\partial_t$	$t\partial_t - gt^2\partial_z$	$W_5$
4	$y\partial_y$	$(z + \frac{1}{2}gt^2)\partial_z$	$W_4$
5	$t\partial_y$	$t\partial_z$	$W_3$
6	$y\partial_t$	$(z + \frac{1}{2}gt^2)\partial_t + (-\frac{1}{2}g^2t^3 - gtz)\partial_z$	$W_7 - gW_6$
7	$t^2\partial_t + ty\partial_y$	$t^2\partial_t + (tz - \frac{1}{2}gt^3)\partial_z$	$W_6$
8	$ty\partial_t + y^2\partial_y$	$(tz + \frac{1}{2}gt^3)\partial_t + (z^2 - \frac{1}{4}g^2t^4)\partial_z$	$W_8$

Dve polia vyšli pomiešané, ale to vôbec nevadí, ide len o zmenu bázy Lieovej algebry. Nemožno očakávať, že vektorové polia prejdú presne jedno na druhé. Ide o to, aby  $V'_a$  boli bázou tej istej Lieovej algebry ako  $W_a$ .

#### 4.4.3 Grupa symetrií voľného pádu

Teraz sa vráťme ku hľadaniu symetrií voľného pádu. Keď sme našli zmenu súradníc (4.19) a s nadšením sme zistili, že Lieove algebry pomocou nej prechádzajú jedna na druhú, môžeme hneď vyrobiť z jednoparametrických grúp symetrií rovnice  $\ddot{y} = 0$  jednoparametrické grupy symetrií rovnice  $\ddot{z} = -g$ .

V tabuľke na strane 38 vidíme, ako pracujú  $G_\varepsilon^a : (t, y) \mapsto (\hat{t}, \hat{y})$ . Zaujímá nás, ako vyzerajú  $G_\varepsilon'^a : (t, z) \mapsto (\hat{t}, \hat{z})$ . Treba si rozmyslieť, čo budeme robiť (Obr. 4.10).

Obr. 4.10: Výroba toku  $G_\varepsilon'^a$  z toku  $G_\varepsilon^a$  využitím transformácie  $T$ .

Na Obr. 4.10 vidíme, že z bodu  $(t, z)$  sa dá do  $(\hat{t}, \hat{z})$  dostať dvoma spôsobmi. Po jednoduchej cestičke  $G'_\varepsilon$  alebo dookola. Takže<sup>19</sup>

$$G'^a_\varepsilon = T \circ G^a_\varepsilon \circ T^{-1}$$

Z toho získavame vytúžený vzorček

$$(\hat{t}, \hat{z}) = G'^a_\varepsilon(t, z) = T \circ G^a_\varepsilon \circ T^{-1}(t, z)$$

Nájďme, ako funguje  $G'^4_\varepsilon$ .

$$\begin{aligned} (\hat{t}, \hat{z}) &= T \circ G^4_\varepsilon \circ T^{-1}(t, z) = T \circ G^4_\varepsilon \left( t, z + \frac{1}{2}gt^2 \right) = T \left( t, e^\varepsilon \left[ z + \frac{1}{2}gt^2 \right] \right) = \\ &= \left( t, e^\varepsilon \left[ z + \frac{1}{2}gt^2 \right] - \frac{1}{2}gt^2 \right) = \left( t, e^\varepsilon z + \frac{1}{2}gt^2(e^\varepsilon - 1) \right) \end{aligned}$$

Podobne nájdeme všetky ostatné  $G'^a_\varepsilon$ . Výsledky sú v nasledujúcej tabuľke.

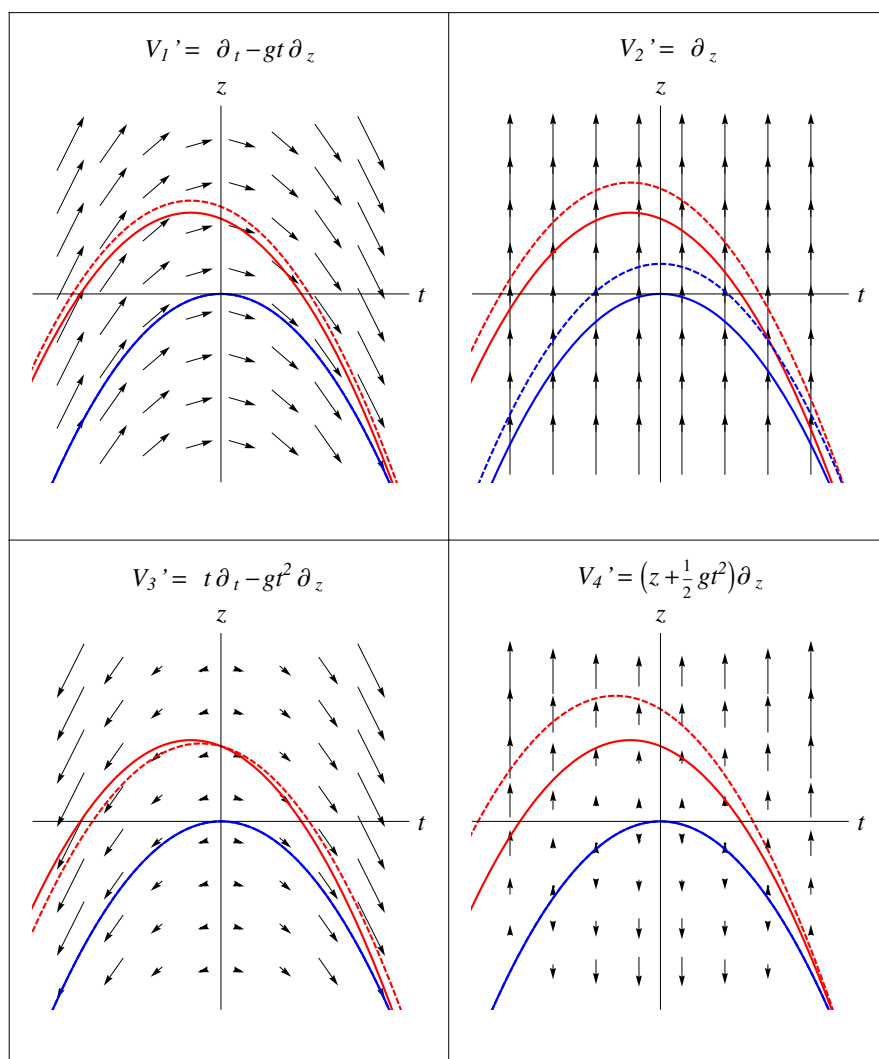
$a$	$G^a_\varepsilon : (t, y) \mapsto$	$G'^a_\varepsilon : (t, z) \mapsto$
1	$(t + \varepsilon, y)$	$(t + \varepsilon, z - g\varepsilon(t + \frac{1}{2}\varepsilon))$
2	$(t, y + \varepsilon)$	$(t, z + \varepsilon)$
3	$(e^\varepsilon t, y)$	$(e^\varepsilon t, z + \frac{1}{2}gt^2(1 - e^{2\varepsilon}))$
4	$(t, e^\varepsilon y)$	$(t, e^\varepsilon z + \frac{1}{2}gt^2(e^\varepsilon - 1))$
5	$(t, y + \varepsilon t)$	$(t, z + \varepsilon t)$
6	$(t + \varepsilon y, y)$	$(t + \varepsilon(z + \frac{1}{2}gt^2), z - g\varepsilon(z + \frac{1}{2}gt^2)[t + \frac{\varepsilon}{2}(z + \frac{1}{2}gt^2)])$
7	$\left( \frac{t}{1-\varepsilon t}, \frac{y}{1-\varepsilon t} \right)$	$\left( \frac{t}{1-\varepsilon t}, \frac{z - \varepsilon t(z + \frac{1}{2}gt^2)}{(1-\varepsilon t)^2} \right)$
8	$\left( \frac{t}{1-\varepsilon y}, \frac{y}{1-\varepsilon y} \right)$	$\left( \frac{t}{1-\varepsilon(z + \frac{1}{2}gt^2)}, \frac{z - \varepsilon(z + \frac{1}{2}gt^2)^2}{[1-\varepsilon(z + \frac{1}{2}gt^2)]^2} \right)$

Teraz treba vyskočiť aspoň meter dvadsať do vzduchu, lebo všetko sedí.<sup>20</sup> Nájdené vzťahy pre  $(\hat{t}, \hat{z})$  sú riešeniami rovníc pre integrálne krivky<sup>21</sup> polí  $V'_a$  a spĺňajú aj počiatočnú podmienku  $(\hat{t}, \hat{z})|_{\varepsilon=0} = (t, z)$ . Nové riešenia získané týmito symetriami budú naozaj riešeniami  $\ddot{z} = -g$ . V prípade  $G'^2_\varepsilon$  ide o posúvanie riešenia v smere osi  $z$  a symetria  $G'^5_\varepsilon$  je Galileiho transformácia. Nebudeme odvádzať formuly pre konštrukciu nových riešení. Bolo by to zdĺhavé a nič nové by sme sa nenaučili. Z obrázkov 4.11 a 4.12 si môžeme urobiť predstavu, ako to bude fungovať.

<sup>19</sup> Ide o skladanie zobrazení.  $T^{-1}$  pôsobí ako prvé, preto je vpravo.

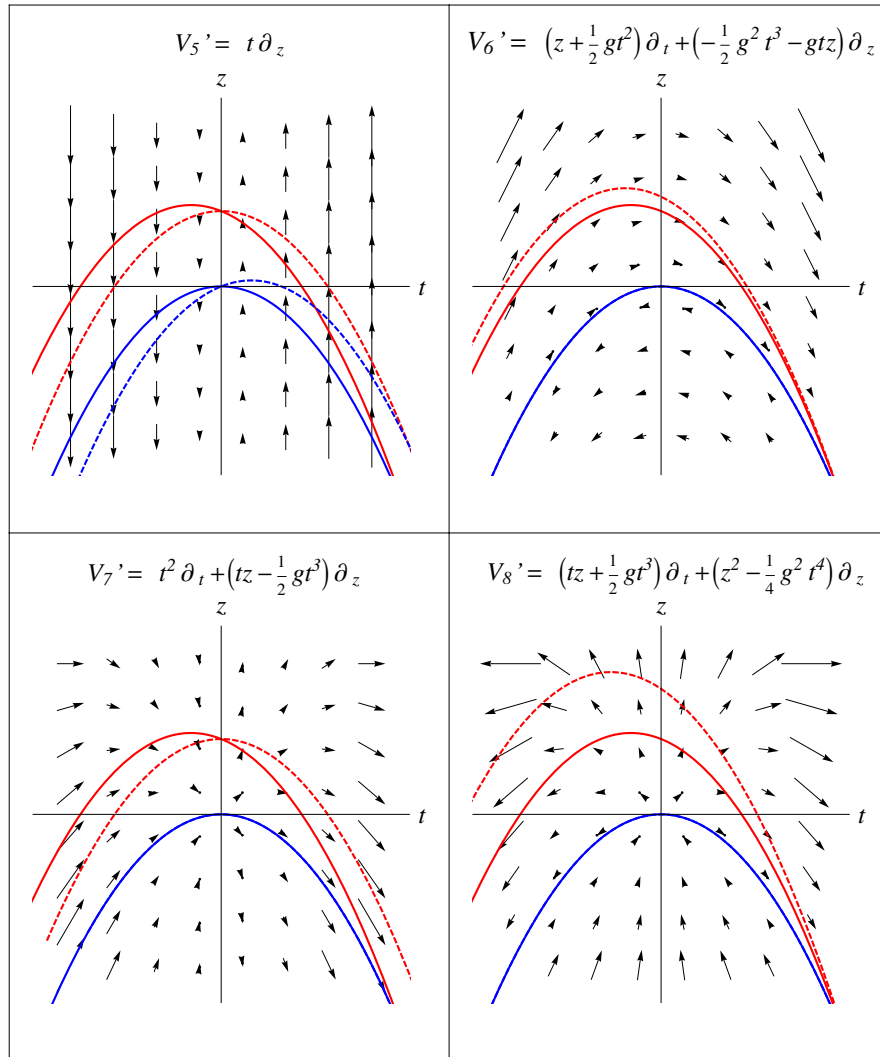
<sup>20</sup> Ak sa nachádzate v električke alebo na inom mieste, ktoré takúto explóziu radosti neumožňuje, stačí decentných 10 centimetrov.

<sup>21</sup> Dá sa to jednoducho overiť štýlom pozriem a vidím alebo v ťažších prípadoch pozriem, zderivujem a uvidím.



Obr. 4.11: Konštrukcia nových riešení pomocou  $G_\varepsilon^1, \dots, G_\varepsilon^4$  zo  $z(t) = 1 - 0.4t - \frac{1}{2}gt^2$  (červená) a zo  $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2$  (modrá). Staré riešenia sú plnou čiarou, nové prerušovanou.

Na obrázkoch 4.11 a 4.12 vidíme, že riešenie  $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2$  sa okrem dvoch prípadov zobrazuje na seba. V 4, 6, 8 je to preto, že polia sú tam nulové, takže body ležiace na grafe riešenia sa vôbec nepohnú. V 1, 3, 7 leží riešenie presne na integrálnej krivke a body tečú len pozdĺž riešenia. Dá sa jednoducho vidieť, že je to správne. Toto riešenie vznikne transformáciou  $T$  (vzťah (4.19)) z triviálneho riešenia  $y(t) \equiv 0$  rovnice  $\ddot{y} = 0$ . Ak sa vrátíme ku obrázkom 4.4, 4.5 a predstavíme si na nich triviálne riešenie, spozorujeme, že v zodpovedajúcich prípadoch sa riešenie z rovnakých príčin zobrazí do seba.



Obr. 4.12: Konštrukcia nových riešení pomocou  $G_\varepsilon^5, \dots, G_\varepsilon^8$  zo  $z(t) = 1 - 0.4t - \frac{1}{2}gt^2$  (červená) a zo  $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2$  (modrá). Staré riešenia sú plnou čiarou, nové prerušovanou.

### Škálovanie

Na záver si povieme niečo o symetrii známej z teoretickej mechaniky. Zoberme polia  $W_4, W_5$  a spravme z nich kombináciu

$$W_\xi = 2W_4 + V_5 = t\partial_t + 2z\partial_z$$

Rovnice pre integrálne krivky sa vyriešia ľahko a dostaneme tok

$$G_\varepsilon^\xi : (t, z) \mapsto (e^\varepsilon t, e^{2\varepsilon} z)$$

Takáto transformácia hovorí, že ak chceme  $a$ -krát natahnuť priestorový rozmer, treba  $\sqrt{a}$ -krát natahnuť čas, aby sme opäť dostali riešenie rovnice ( $a = e^{2\varepsilon}$ ).

Ak  $G_\epsilon^{\check{s}}$  necháme pôsobiť na riešenie  $z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$ , dostaneme

$$\hat{z}(\hat{t}) = az(t) = a \left[ h - \frac{1}{2}gt^2 \right] = a \left[ h - \frac{1}{2}g \left( \frac{\hat{t}}{\sqrt{a}} \right)^2 \right] = ah - \frac{1}{2}g\hat{t}^2$$

Tejto symetrii sa hovorí *škálovacia symetria*.<sup>22</sup>

---

<sup>22</sup>Vtipne ju využívajú ju filmári. Amerických akčných filmov nie je nikdy dosť a často treba natočiť voľný pád auta z garážového domu. Niekedy sa auto vo vzduchu málokrát prevráti alebo slabo horí a záber sa musí opakovať. Aby sa neminulo toľko peňazí na nové autá, spraví sa dvojmetrový model garážového domu a hádžu sa z neho horiace hračkárske autíčka. Nakrútený záber musí vyzeráť realisticky - musíme mať pocit, že auto letí voľným pádom (podľa rovnice  $\check{z} = -g$ ) z 25-krát väčšej výšky. Na to treba  $\sqrt{25} = 5$ -krát spomaliť čas.



## Kapitola 5

# Základné vety a definície

V tejto krátkej kapitole uvedieme presné znenie základných viet používaných pri hľadaní symetrií diferenciálnych rovníc.<sup>1</sup> Všeobecný Lieov aparát umožňuje hľadať aj symetrie  *systému*  diferenciálnych rovníc. Vety sformulujeme všeobecne pre systém diferenciálnych rovníc s viacerými nezávislými a závislými premennými. V celej kapitole označujú  $x = (x^1, \dots, x^p)$  nezávislé premenné a  $u = (u^1, \dots, u^q)$  závislé premenné. Číslo  $p$  je počet nezávislých a  $q$  počet závislých premenných. V poslednom odseku sformulujeme definíciu grupy symetrií systému diferenciálnych rovníc.

### 5.1 Veta o predĺžení vektorového poľa

V literatúre<sup>2</sup> je uvedená všeobecná explicitná formula, pomocou ktorej sa predlžujú vektorové polia. Tú však v tejto práci nepoužívame. Pracujeme s jej rekurentnou obdobou, ktorú si teraz uvedieme.

Veta Nech

$$V = X^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + U_\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad i = 1, \dots, p \quad \alpha = 1, \dots, q$$

je vektorové pole definované na  $X \times U$ .<sup>3</sup> Prvé predĺženie poľa  $V$  je vektorové pole definované na  $J^1 \equiv X \times U \times U^{(1)}$  a má podobu<sup>4</sup>

$$V^{(1)} = V + U_\alpha^k(x, u, u^{(1)}) \frac{\partial}{\partial u_k^\alpha} \quad k = 1, \dots, p$$

kde  $u^{(1)} \equiv (\partial_1 u^1, \partial_2 u^1, \dots, \partial_p u^q)$  je vektor všetkých prvých derivácií všetkých závislých premenných a

$$u_k^\alpha = \partial_k u^\alpha \equiv \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^k}$$

Funkcie  $U_\alpha^k$  sú dané vzťahom

$$U_\alpha^k(x, u, u^{(1)}) = D_k U_\alpha - u_i^\alpha (D_k X^i)$$

<sup>1</sup>Dôkazy možno nájsť v knihe [3].

<sup>2</sup>Pozri [3] str. 110 Theorem 2.36.

<sup>3</sup>Presnejšie na otvorenej podmnožine  $A \subset X \times U$ .

<sup>4</sup>Opäť presnejšie na podmnožine  $A^{(1)} \subset X \times U \times U^{(1)}$ .

kde  $D_k$  je operátor úplnej derivácie podľa  $x^k$ .  $n$ -té predĺženie poľa  $V$  je vektorové pole definované na  $J^n \equiv X \times U \times U^{(n)}$  a má podobu<sup>5</sup>

$$V^{(n)} = V^{(n-1)} + U_\alpha^{Jk}(x, u, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u_\alpha^{Jk}} \quad (5.1)$$

kde  $u^{(n)} \equiv (\partial_1 u^1, \partial_2 u^1, \dots, \partial_p^n u^q)$  je vektor derivácií všetkých závislých premenných podľa všetkých nezávislých premenných až po  $n$ -té derivácie a

$$u_{Jk}^\alpha = \partial_J \partial_k u^\alpha \equiv \frac{\partial^{n-1+1} u^\alpha}{\partial x^{j_1} \partial x^{j_2} \dots \partial x^{j_{n-1}} \partial x^k} \quad 1 \leq j_m \leq p$$

Index  $J = (j_1, \dots, j_{n-1})$  je *neusporiadaná*  $(n-1)$ -tica prirodzených čísel. Takýto index je zvláštna vec a vyžaduje si trochu cviku, kým sa s ním naučí človek narábať.<sup>6</sup> Funkcie  $U_\alpha^{Jk}$  v (5.1) sú dané vzťahom

$$U_\alpha^{Jk}(x, u, u^{(n)}) = D_k U_\alpha^J - u_{j_i}^\alpha (D_k X^i)$$

□

Konštrukcia predĺžení vektorových polí teda vo všeobecnosti funguje rekurentne ( $n$ -té sa konštruje z  $(n-1)$ -vého), len si treba na konkrétnych príkladoch ujasniť, čo sa kam dosádza.<sup>7</sup>

## 5.2 Kritérium infinitezimálnej invariantnosti

Na formuláciu kritéria potrebujeme definovať, čo to znamená, keď má systém diferenciálnych rovníc maximálny rang.

**Definícia** Hovoríme, že systém  $N$  diferenciálnych rovníc

$$\Phi_a(x, u, u^{(n)}) = 0 \quad a = 1, \dots, N \quad (5.2)$$

má maximálny rang, ak Jacobiho matica

$$J_\Phi(x, u^{(n)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x^p} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial u^q} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_1^1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_{(0, \dots, n)}^q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_N}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \Phi_N}{\partial x^p} & \frac{\partial \Phi_N}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial \Phi_N}{\partial u^q} & \frac{\partial \Phi_N}{\partial u_1^1} & \dots & \frac{\partial \Phi_N}{\partial u_{(0, \dots, n)}^q} \end{pmatrix}$$

je rangu  $N$  všade tam, kde  $\Phi_a(x, u, u^{(n)}) = 0$  pre všetky  $a$ . Symbol  $u_{(0, \dots, n)}^q$  trochu krkolomne<sup>8</sup> označuje  $n$ -tú deriváciu  $u^q$  podľa poslednej premennej  $x^p$ .

□

<sup>5</sup> Opäť presnejšie na podmnožine  $A^{(n)} \subset X \times U \times U^{(n)}$ .

<sup>6</sup> Vo vzťahu (5.1) cez takýto index (všetky možné neusporiadané  $(n-1)$ -tice) sčítavame. Na príklade rovnice vedenia tepla v časti 6.1 bude jasnejšie, ako to funguje.

<sup>7</sup> Preto pozri ešte raz konštrukciu predĺžení v predchádzajúcich príkladoch a porovnaj so všeobecnou formulou.

<sup>8</sup> Keď sa derivuje podľa derivácii, tak predsa musí byť nejaký zmätok.

Na prvý pohľad to vyzerá zložito, ale napríklad pre rovnicu voľného pádu

$$\Phi(t, z, \dot{z}, \ddot{z}) = \ddot{z} + g = 0 \quad (5.3)$$

máme  $N = 1, p = 1, q = 1, n = 2$ . Jacobiho matica má jeden riadok, v ktorom máme postupne derivácie podľa všetkého, čo máme v rovnici (podľa  $t, z, \dot{z}, \ddot{z}$ ).

$$J_{\Phi} = (0, 0, 0, 1)$$

Táto matica má rang 1, a teda „systém“ (5.3) má maximálny rang.

**Veta** Nech

$$\Phi_a(x, u, u^{(n)}) = 0 \quad a = 1, \dots, N \quad (5.4)$$

je systém  $N$  diferenciálnych rovníc maximálneho rangu<sup>9</sup> definovaných na  $A \subset X \times U \times U^{(n)}$ . Ak  $G$  je lokálna grupa transformácií na  $A$  a ak platí

$$V^{(n)}[\Phi_a(x, u, u^{(n)})] = 0 \quad a = 1, \dots, N$$

všade tam, kde platia rovnice, teda kde

$$\Phi_a(x, u, u^{(n)}) = 0 \quad a = 1, \dots, N$$

pre každý infinitezimálny generátor  $V$  grupy  $G$ , potom  $G$  je grupa symetrií systému (5.4).

□

Poznamenjme, že vo všetkých rovnicach diskutovaných v tejto práci je podmienka maximálneho rangu očividne splnená a nebudeme sa k nej vyjadrovať.

### 5.3 Definícia grupy symetrií

Na záver tejto kapitoly pripojíme presnú definíciu grupy symetrií systému diferenciálnych rovníc.

**Definícia** Grupa symetrií systému diferenciálnych rovníc je lokálna<sup>10</sup> grupa transformácií  $G$  pôsobiaca na otvorenej podmnožine  $A \subset X \times U$  s nasledujúcou vlastnosťou:

Ak funkcia  $u = f(x)$  je riešením systému a ak pôsobenie  $g(f)$  je definované pre  $g \in G$ , potom  $u = [g(f)](x)$  je tiež riešením systému.

□

<sup>9</sup> Poznámka pre znalcov: Maximálny rang znamená, že vzťahy (5.4) definujú podvarietu v totálnom priestore  $J^n$ .

<sup>10</sup> Lokálnosť tu znamená, že grupová transformácia môže byť niekedy definovaná len pre grupové prvky z dostatočne blízkeho okolia jednotkového prvku grupy, pričom ďalej to môže byť problematické. Presnú definíciu lokálnej grupy transformácií možno nájsť v knihe [3] str. 20 Definition 1.25.

## Kapitola 6

# Hľadanie symetrií diferenciálnych rovníc II.

Príklady v tejto kapitole sú o niečo zložitejšie, než tie v kapitole 4. Zložitosť spočíva v tom, že v prípade rovnice vedenia tepla ide o rovnicu s viacerými nezávislými premennými a konštrukcia predĺženia vektorového poľa bude komplikovanejšia. V prípade rozpadovej rovnice nastanú isté problémy s determinujúcou rovnicou.

### 6.1 Rovnica vedenia tepla

Vety v kapitole 5 umožňujú hľadať symetrie rovníc s viacerými nezávislými premennými. Ako ukážku nájdeme symetrie rovnice vedenia tepla na priamke. Ide o rovnicu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

kde  $u = u(x, t)$  je teplota v mieste  $x$  a čase  $t$ ,  $k$  je koeficient vedenia tepla. Pre derivácie budeme používať označenia

$$\frac{\partial u}{\partial t} \equiv u_t \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \equiv u_{xx} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \equiv u_{xt}$$

a podobne. Kvôli prehľadnosti zvolíme  $k = 1$ . V novom označení máme rovnicu

$$u_t = u_{xx} \tag{6.1}$$

V rovnici sú dve nezávislé premenné  $x, t$  a jedna závislá premenná  $u$ . Riešenia sú nejaké plochy v  $\mathbb{R}^3[x, t, u]$ . Symetrie budú transformácie, ktoré pokrúti riešenie tak, že vzniknutá plocha je opäť riešením. Najvyššia derivácia v (6.1) je druhá, takže pre potreby hľadania symetrií skonštruujeme veľký priestor  $J^2$ , v ktorom budú ako súradnice  $x, t, u$  a všetky prvé a druhé derivácie  $u^{(2)} \equiv (u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt})$ . Spolu je to 8 rozmerov a diferenciálna rovnica (6.1) je v  $J^2$  nejaká 7-rozmerná nadplocha daná predpisom

$$\Phi(x, t, u, u^{(2)}) = u_t - u_{xx} = 0$$

Majme na  $X \times U = \mathbb{R}^3[x, t, u]$  všeobecné vektorové pole

$$V = A(x, t, u)\partial_x + B(x, t, u)\partial_t + C(x, t, u)\partial_u \tag{6.2}$$

**Predĺženie vektorového poľa**

Skonstruujme druhé predĺženie poľa  $V$  podľa vety o predĺžení z časti 5.1. Najprv počítame prvé predĺženie

$$V^{(1)} = V + U^x(x, t, u, u^{(1)})\partial_{u_x} + U^t(x, t, u, u^{(1)})\partial_{u_t}$$

kde  $u^{(1)} = (u_x, u_t)$  a

$$\begin{aligned} U^x(x, t, u, u^{(1)}) &= D_x C - (u_x D_x A + u_t D_x B) \\ U^t(x, t, u, u^{(1)}) &= D_t C - (u_x D_t A + u_t D_t B) \end{aligned} \quad (6.3)$$

$D_x, D_t$  sú operátory totálnych derivácií podľa  $x$  resp.  $t$ . Z poľa  $V^{(1)}$  ďalším predĺžením dostaneme  $V^{(2)}$ .

$$V^{(2)} = V^{(1)} + U^{xx}(x, t, u, u^{(2)})\partial_{u_{xx}} + U^{xt}(x, t, u, u^{(2)})\partial_{u_{xt}} + U^{tt}(x, t, u, u^{(2)})\partial_{u_{tt}}$$

kde

$$\begin{aligned} U^{xx} &= D_x U_x - (u_{xx} D_x A + u_{xt} D_x B) \\ U^{xt} &= D_t U_x - (u_{xx} D_t A + u_{xt} D_t B) \\ &= D_x U_t - (u_{tx} D_x A + u_{tt} D_x B) \\ U^{tt} &= D_t U_t - (u_{tx} D_t A + u_{tt} D_t B) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Funkciu  $U^{xt}$  možno počítať dvoma spôsobmi, ale dostaneme nakoniec to isté.

**Determinujúca rovnica**

Na určenie komponentov  $A, B, C$  poľa  $V$  použijeme kritérium infinitezimálnej invariantnosti.

$$V^{(2)}(\Phi)|_{\Phi=0} \stackrel{!}{=} 0$$

Dosadíme za  $V^{(2)}$  a  $\Phi$ . Dostaneme

$$(U^t - U^{xx})|_{u_t=u_{xx}} = 0 \quad (6.5)$$

Dosadíme za  $U^t, U^{xx}$  zo vzťahov (6.3), (6.4). Potom (6.5) prejde na

$$\{D_t C - (u_x D_t A + u_t D_t B) - [D_x (D_x C - (u_x D_x A + u_t D_x B)) - (u_{xx} D_x A + u_{xt} D_x B)]\}|_{u_t=u_{xx}} = 0$$

Po zderivovaní, dosadení  $u_{xx}$  za všetky  $u_t$  a pár úpravách dostaneme determinujúcu rovnicu

$$\begin{aligned} &(\partial_t C - \partial_x^2 C) + u_x (\partial_x^2 A - \partial_t A - 2\partial_x \partial_u C) + u_x^2 (2\partial_x \partial_u A - \partial_u^2 C) + \\ &+ u_x^3 \partial_u^2 A + u_{xx} (2\partial_x A + \partial_x^2 B - \partial_t B) + u_{xt} 2\partial_x B + \\ &+ u_x u_{xx} (2\partial_u A + 2\partial_x \partial_u B) + u_x u_{xt} 2\partial_u B + u_x^2 u_{xx} \partial_u^2 B = 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Na prvý pohľad je to hrozivo vyzerajúca rovnica, ale všimneme si, že ľavá strana je polynóm v deriváciách  $u_x, u_{xx}, u_{xt}$ . Jediný spôsob, ako zabezpečiť rovnosť, je položiť koeficienty pri každej kombinácii rovne nule. Rovnica (6.6) sa rozpadne na

sústavu deviatich jednoduchších rovníc, ktoré sú vyriešené v dodatku A. Riešenia determinujúcej rovnice (6.6) sú funkcie

$$\begin{aligned} A(x, t, u) &= c_1 + c_4x + 2c_5t + 4c_6xt \\ B(x, t, u) &= c_2 + 2c_4t + 4c_6t^2 \\ C(x, t, u) &= (c_3 - c_5x - 2c_6t - c_6x^2)u + \alpha(x, t) \end{aligned}$$

kde  $c_1, \dots, c_6$  sú ľubovoľné reálne konštanty a  $\alpha(x, t)$  je ľubovoľným riešením rovnice vedenia tepla.

### Lieova algebra symetrií

Vektorové pole, ktorého tok transformuje riešenia rovnice vedenia tepla na nové riešenia je

$$V = c_1\partial_x + c_2\partial_t + c_3u\partial_u + c_4(x\partial_x + 2t\partial_t) + c_5(2t\partial_x - xu\partial_u) + c_6[4xt\partial_x + 4t^2\partial_t - (x^2 + 2t)u\partial_u] + \alpha(x, t)\partial_u$$

Bázové vektorové polia sú

$$\begin{aligned} V_1 &= \partial_x \\ V_2 &= \partial_t \\ V_3 &= u\partial_u \\ V_4 &= x\partial_x + 2t\partial_t \\ V_5 &= 2t\partial_x - xu\partial_u \\ V_6 &= 4xt\partial_x + 4t^2\partial_t - (x^2 + 2t)u\partial_u \\ V_\alpha &= \alpha(x, t)\partial_u \end{aligned} \tag{6.7}$$

Polia (6.7) opäť tvoria bázu (nekonečnorozmernej<sup>1</sup>) Lieovej algebry symetrií. Násobenie prvkov (komutátor vektorových polí) je naozaj zobrazenie  $\mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ . Opäť to stačí overiť na báze (6.7). Výsledky uvádzame v nasledujúcej tabuľke, kde v  $i$ -tom riadku a  $j$ -tom stĺpci je komutátor  $[V_i, V_j]$ .

	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$V_5$	$V_6$	$V_\alpha$
$V_1$	0	0	0	$V_1$	$-V_3$	$2V_5$	$V_{\alpha_x}$
$V_2$	0	0	0	$2V_2$	$2V_1$	$4V_4 - 2V_3$	$V_{\alpha_t}$
$V_3$	0	0	0	0	0	0	$-V_\alpha$
$V_4$	$-V_1$	$-2V_2$	0	0	$V_5$	$2V_6$	$V_{\alpha'}$
$V_5$	$V_3$	$2V_1$	0	$-V_5$	0	0	$V_{\alpha''}$
$V_6$	$-2V_5$	$2V_3 - 4V_4$	0	$-2V_6$	0	0	$V_{\alpha'''}$
$V_\alpha$	$-V_{\alpha_x}$	$-V_{\alpha_t}$	$V_\alpha$	$-V_{\alpha'}$	$-V_{\alpha''}$	$-V_{\alpha'''}$	0

V tabuľke sme označili

$$\begin{aligned} V_{\alpha_x} &\equiv \alpha_x\partial_u \\ V_{\alpha_t} &\equiv \alpha_t\partial_u \\ V_{\alpha'} &\equiv (x\alpha_x + 2t\alpha_t)\partial_u \\ V_{\alpha''} &\equiv (2t\alpha_x + x\alpha)\partial_u \\ V_{\alpha'''} &\equiv [4tx\alpha_x + 4t^2\alpha_t + (x^2 + 2t)\alpha]\partial_u \end{aligned} \tag{6.8}$$

<sup>1</sup>Vektor v  $\mathcal{L}$  sa nezadáva ôsmimi číslami, ako tomu bolo pre voľný pohyb po priamke a voľný pád. Treba zadať 6 čísel (vektor v 6-rozmernej podalgebri) a jednu funkciu (vektor v  $\infty$ -rozmernej podalgebri).  $V_\alpha$  je  $\infty$ -rozmerná, lebo priestor takýchto funkcií je  $\infty$ -rozmerný.  $\infty$ -rozmerná algebra vyšla aj v časti 4.1, kde sme hľadali symetrie rovnice státia.

Neskôr prezradíme, čo výsledky (6.8) znamenajú. Dolný index pri  $\alpha$  znamená deriváciu podľa  $x$  resp.  $t$ .

### Lieova grupa symetrií a výroba nových riešení

Ďalej sa nájdú integrálne krivky polí (6.7) a tým pádom aj ich toky - jednoparametrické podgrupy grupy symetrií. Nebudeme to tu robiť, ide vždy len o vyriešenie sústavy troch diferenciálnych rovníc typu

$$\begin{aligned}\hat{x}' &= (V_a)^x \\ \hat{t}' &= (V_a)^t \\ \hat{u}' &= (V_a)^u\end{aligned}$$

kde  $(V_a)^i$  označuje zložku  $i$  poľa  $V_a$ . Využijú sa počiatočné podmienky

$$\hat{x}(0) = x \quad \hat{t}(0) = t \quad \hat{u}(0) = u$$

Nové riešenia sa budú zo známeho  $u = f(x, t)$  konštruovať podobne, ako sme to robili v časti 4.2. Výsledky hľadania symetrií rovnice vedenia tepla sú v tabuľke.

$a$	$V_a$	$G_\varepsilon^a : (x, t, u) \mapsto$	Nové riešenie
1	$\partial_x$	$(x + \varepsilon, t, u)$	$f(x - \varepsilon, t)$
2	$\partial_t$	$(x, t + \varepsilon, u)$	$f(x, t - \varepsilon)$
3	$u\partial_u$	$(x, t, e^\varepsilon u)$	$e^\varepsilon f(x, t)$
4	$x\partial_x + 2t\partial_t$	$(e^\varepsilon x, e^{2\varepsilon} t, u)$	$f(e^{-\varepsilon} x, e^{-2\varepsilon} t)$
5	$2t\partial_x - xu\partial_u$	$(x + 2\varepsilon t, t, ue^{-\varepsilon x - \varepsilon^2 t})$	$e^{-\varepsilon x + \varepsilon^2 t} f(x - 2\varepsilon t, t)$
$\alpha$	$\alpha(x, t)\partial_u$	$(x, t, u + \varepsilon\alpha(x, t))$	$f(x, t) + \varepsilon\alpha(x, t)$

Nájdene symetrie majú fyzikálny zmysel.

$G_\varepsilon^1, G_\varepsilon^2$  sú *translácie v čase a priestore*.

$G_\varepsilon^3, G_\varepsilon^\alpha$  odzrkadľujú *linearitu rovnice* vedenia tepla.  $G_\varepsilon^3$  hovorí, že násobok riešenia je tiež riešením a  $G_\varepsilon^\alpha$  hovorí, že k nášmu riešeniu môžeme pripočítať  $\varepsilon$ -násobok hocijakého iného a dostaneme opäť riešenie.<sup>2</sup>

$G_\varepsilon^4$  je *škálovacia symetria*. Ak  $a$ -krát natiahneme priestor, treba  $a^2$ -krát natiahnuť čas ( $a = e^\varepsilon$ ).<sup>3</sup>

$G_\varepsilon^5$  je *Galileiho transformácia*. Popisuje, ako sa zmení riešenie vzhľadom na súradnicovú sústavu v pokoji, ak niekto bude ťahať doprava tyč, v ktorej sa šíri teplo, rýchlosťou  $2\varepsilon$ .

Vráťme sa ku poliam (6.8), ktoré vyšli z komutátorov  $[V_\alpha, V_a]$ . Sú to v podstate  $V_\alpha$ , len namiesto  $\alpha$  máme niečo iné. Teda význam vecí stojacich namiesto  $\alpha$  je rovnaký ako význam  $\alpha$ . Ak  $\alpha(x, t)$  je ľubovoľným riešením rovnice, tak

<sup>2</sup>Tieto symetrie poznáme pod názvom princíp superpozície. Podobná situácia nastala aj pri voľnom pohybe po priamke, ale nebola takto pekne vidieť, preto sme sa k nej nevyjadřili.

<sup>3</sup>Keď budeme mať 2-krát dlhšiu tyč, všetky deje budú trvať 4-krát dlhšie.

riešením sú aj výrazy stojace pred  $\partial_u$  na pravých stranách v (6.8). Overme to napríklad pre  $\alpha' = x\alpha_x + 2t\alpha_t$ .

$$\begin{aligned}\alpha'_t &= x\alpha_{xt} + 2\alpha_t + 2t\alpha_{tt} \\ \alpha'_{xx} &= 2\alpha_{xx} + x\alpha_{xxx} + 2t\alpha_{xxt} = 2\alpha_t + x\alpha_{xt} + 2t\alpha_{tt}\end{aligned}$$

kde sme využili, že  $\alpha_{xx} = \alpha_t$ . Vyšlo, že  $\alpha'_t = \alpha'_{xx}$ , teda  $\alpha'$  tiež rieši rovnicu vedenia tepla. Zaujímavé sú  $V_{\alpha_x}$  a  $V_{\alpha_t}$ . Z nich sa dozvedáme, že ak  $\alpha$  je ľubovoľné riešenie, potom aj jeho derivácia je riešením. Medzi ľubovoľné riešenia patrí aj to zderivované, čiže aj derivácia derivácie je riešením. Indukciou dostávame, že všetky (aj zmiešané) parciálne derivácie riešenia sú riešeniami rovnice vedenia tepla.

Symetria  $G_\varepsilon^6$  je zložitejšia a uvedieme ju zvlášť.

$$G_\varepsilon^6 : (x, t, u) \mapsto \left( \frac{x}{1-4\varepsilon t}, \frac{t}{1-4\varepsilon t}, u\sqrt{1-4\varepsilon t} \exp\left(\frac{-\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}\right) \right)$$

Nech  $u = f(x, t)$  je riešením rovnice vedenia tepla. Potom nové riešenie sa pomocou  $G_\varepsilon^6$  vyrába nasledovne

$$\begin{aligned}\hat{u}(\hat{x}, \hat{t}) &= u\sqrt{1-4\varepsilon t} \exp\left(\frac{-\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}\right) = f(x, t)\sqrt{1-4\varepsilon t} \exp\left(\frac{-\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+4\varepsilon\hat{t}}} \exp\left(\frac{-\varepsilon\hat{x}^2}{1+4\varepsilon\hat{t}}\right) f\left(\frac{\hat{x}}{1+4\varepsilon\hat{t}}, \frac{\hat{t}}{1+4\varepsilon\hat{t}}\right)\end{aligned}\quad (6.9)$$

Posledný krok si treba premyslieť. Všetky  $x, t$  treba vyjadriť cez  $\hat{x}, \hat{t}$ , teda

$$\begin{aligned}\hat{t} &= \frac{t}{1-4\varepsilon t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\hat{t}}{1+4\varepsilon\hat{t}} \\ \hat{x} &= \frac{x}{1-4\varepsilon t} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\hat{x}}{1+4\varepsilon\hat{t}}\end{aligned}$$

a potom upraviť. Striešky v (6.9) teraz môžeme zmazať a máme nové riešenie

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+4\varepsilon t}} \exp\left(\frac{-\varepsilon x^2}{1+4\varepsilon t}\right) f\left(\frac{x}{1+4\varepsilon t}, \frac{t}{1+4\varepsilon t}\right)\quad (6.10)$$

Symetria  $G_\varepsilon^6$  nemá peknú fyzikálnu interpretáciu, ale ukázkovo demonštruje, aký veľký význam má hľadanie symetrií rovníc. Zoberme konštantné riešenie rovnice vedenia tepla

$$u(x, t) \equiv c$$

Pustime naňho  $G_\varepsilon^6$ . Zo vzťahu (6.10) potom dostávame nové riešenie

$$u(x, t) = \frac{c}{\sqrt{1+4\varepsilon t}} \exp\left(\frac{-\varepsilon x^2}{1+4\varepsilon t}\right)$$

Ak spravíme ešte transláciu  $G_\varepsilon^2$ , v ktorej zvolíme  $\varepsilon = \frac{1}{4\varepsilon}$  a vyberieme konštantu  $c = \sqrt{\frac{\varepsilon}{4\pi}}$ , z jednoduchého riešenia  $u = c$  ľahko dostaneme úplne netriviálne *fundamentálne riešenie* rovnice vedenia tepla

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right)$$



## 6.2 Rozpadová rovnica

Na záver sa pozrime na rozpadovú rovnicu, ktorá opisuje rádioaktívnu premenu látky. Rovnica má tvar

$$\dot{n} = -\lambda n \quad (6.11)$$

kde  $n$  je počet častíc a  $\lambda$  je rozpadová konštanta. Je to obyčajná diferenciálna rovnica prvého rádu s konštantnými koeficientami. Jej riešenia sú krivky  $n(t)$  v  $\mathbb{R}^2[t, n]$ , ktoré vyjadrujú časovú závislosť počtu nepremených jadier rádiounuklidu.<sup>4</sup>

Budeme pracovať v priestore  $J^1 = \mathbb{R}^3[t, n, v \equiv \dot{n}]$ . Rovnicu (6.11) prepíšeme na tvar

$$\Phi(t, n, v) = v + \lambda n = 0 \quad (6.12)$$

Všeobecný tvar vektorového poľa v priestore  $\mathbb{R}^2[t, n]$  je

$$V = A(t, n)\partial_t + B(t, n)\partial_n \quad (6.13)$$

### Predĺženie vektorového poľa

Predĺženie  $V^{(1)}$  sa z  $V$  konštruuje ako vždy

$$\begin{aligned} V^{(1)} &= V + G(t, n, v)\partial_v \\ G &= D_t B - v(D_t A) \\ D_t &= \partial_t + v\partial_n \end{aligned}$$

### Determinujúca rovnica

Zostáva určiť komponenty  $A, B$  tak, aby tok poľa  $V^{(1)}$  robil, čo potrebujeme. Použijeme kritérium infinitezimálnej invariantnosti.

$$V^{(1)}(\Phi)\Big|_{\Phi=0} \stackrel{!}{=} 0 \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} V^{(1)}(\Phi)\Big|_{\Phi=0} &= (A\partial_t + B\partial_n + G\partial_v)(v + \lambda n)\Big|_{\Phi=0} = \\ &= (\lambda B + G)\Big|_{\Phi=0} = \\ &= [\lambda B + \partial_t B + v\partial_n B - v(\partial_t A + v\partial_n A)]\Big|_{\Phi=0} = 0 \end{aligned} \quad (6.15)$$

Dosadíme  $\Phi = v + \lambda n = 0$  a dostávame determinujúcu rovnicu pre funkcie  $A(t, n), B(t, n)$ .

$$\lambda B + \partial_t B - \lambda n \partial_n B + \lambda n \partial_t A - \lambda^2 n^2 \partial_n A = 0 \quad (6.16)$$

Ľavá strana *nie je* polynóm v  $n$ , lebo  $A, B$  závisia od  $n$ . Je to ťažká rovnica a nebudeme sa snažiť hľadať jej všeobecné riešenie.<sup>5</sup> Ukážeme jeden pekný trik, ktorý pomôže nájsť aspoň nejaké (nie všetky) symetrie rozpadovej rovnice.

Spomeňme si, čo vlastne znamená kritérium infinitezimálnej invariantnosti. Podrobne sme o tom hovorili na strane 26. Kritérium hovorí, že pole  $V^{(1)}$  má

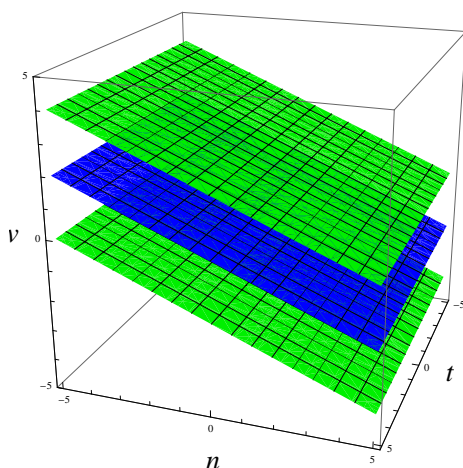
<sup>4</sup>Počet jadier je nezáporné číslo a mali by sme uvažovať len nezáporné riešenia, ale tým sa tu nebudeme zapodievať. Teraz ide o matematické pochopenie mašínérie.

<sup>5</sup>Za jej vyriešenie vypisujem odmenu vo výške 0 €, konverzný kurz 1 € = 30,1260 Sk.

byť také, aby funkcia  $\Phi$  v smere poľa nemenila svoju hodnotu v miestach, kde platí rovnica. Dobrý nápad je požiadavku (6.14) zosilniť na

$$V^{(1)}(\Phi) \stackrel{!}{=} 0 \quad (6.17)$$

To znamená, že funkcia  $\Phi$  nemá v smere poľa meniť svoju hodnotu nielen tam, kde platí rovnica, ale všade. Všade znamená na všetkých množinách  $\Phi = \text{konšt.}$ , čo sú vrstevnice funkcie  $\Phi$ . V tomto prípade vrstevnice sú roviny v  $\mathbb{R}^3[t, n, v]$  (Obr. 6.1). Keď sa nachádzame v bode, kde  $\Phi$  má hodnotu  $c$ , treba nastaviť kom-



Obr. 6.1: Vrstevnice funkcie  $\Phi(t, n, v) = v + \lambda n$  sú rovnobežné roviny. Modrá je  $\Phi = 0$ , zelené sú  $\Phi = +c$  a  $\Phi = -c$ . Zvolili sme  $\lambda = 0, 4$ .

ponenty  $A, B$  tak, že pri infinitezimálnom kráčaní v smere poľa sa dostaneme len do miest, kde  $\Phi = c$ . Všetky roviny (a teda aj tá, ktorá reprezentuje rozpadovú rovnicu) budú invariantné vzhľadom na tok poľa  $V$ .<sup>6</sup> Kritérium (6.17) nám dá podmienku (6.15), ale bez ohraničenia na  $\Phi = 0$ .

$$(\lambda B + \partial_t B) + v(\partial_n B - \partial_t A) + v^2(-\partial_n A) = 0 \quad (6.18)$$

Ľavá strana je polynóm vo  $v$  a rovnicu (6.18) môžeme štandardne riešiť. Rovnica sa rozpadne na tri jednoduchšie

$$\begin{array}{lll} v^0 & \lambda B + \partial_t B = 0 & (i) \\ v^1 & \partial_n B - \partial_t A = 0 & (ii) \\ v^2 & -\partial_n A = 0 & (iii) \end{array}$$

Z rovnice (iii) vyplýva, že  $A(t, n) = A(t)$ . Dosadíme to do (ii) a máme

$$\begin{aligned} \partial_n B(t, n) &= \partial_t A(t) \\ B(t, n) &= n\partial_t A(t) + \alpha(t) \end{aligned} \quad (6.19)$$

Ďalej (6.19) dosadíme do (i) a dostaneme

$$\lambda n\partial_t A + \lambda\alpha + n\partial_t^2 A + \partial_t\alpha = 0$$

<sup>6</sup>Ak sa nám to podarí zabezpečiť, hovoríme, že funkcia  $\Phi$  je invariantná vzhľadom na pôsobenie grupy.

Ľavá strana je polynóm v  $n$ , takže

$$n^0 \quad \partial_t \alpha + \lambda \alpha = 0 \quad (6.20)$$

$$n^1 \quad \partial_t^2 A + \lambda \partial_t A = 0 \quad (6.21)$$

Vzťahy (6.20), (6.21) hovoria, že  $\alpha(t)$  a  $\partial_t A$  sú riešeniami rozpadovej rovnice. Označme  $\partial_t A \equiv \beta(t)$ . Potom

$$A(t) = \int_0^t \beta(\tau) d\tau + c_1$$

a dosadením do (6.19) získame

$$B(t, n) = n\beta(t) + \alpha(t) \quad (6.22)$$

### Podalgebra Lieovej algebry symetrií

Hľadané vektorové pole je

$$V = A\partial_t + B\partial_n = \left( \int_0^t \beta(\tau) d\tau + c_1 \right) \partial_t + [n\beta(t) + \alpha(t)]\partial_n$$

a bázové polia vychádzajú

$$\begin{aligned} V_1 &= \partial_t \\ V_\alpha &= \alpha(t)\partial_n \\ V_\beta &= \left( \int_0^t \beta(\tau) d\tau \right) \partial_t + n\beta(t)\partial_n \end{aligned}$$

Kde  $\alpha(t), \beta(t)$  sú ľubovoľné riešenia rozpadovej rovnice. Pole  $V_1$  vyšlo kvôli invariantnosti rovnice vzhľadom na posunutia v čase. Pole  $V_\alpha$  máme vďaka linearite rovnice. Interpretáciu  $V_\beta$  necháme na fantáziu čitateľa.<sup>7</sup> Polia  $V_1, V_\alpha, V_\beta$  tvoria Lieovu algebru. Výsledky komutátorov sú v tabuľke.

	$V_1$	$V_\alpha$	$V_\beta$
$V_1$	0	0	$V_{\dot{\beta}}$
$V_\alpha$	0	0	$V_{\alpha'}$
$V_\beta$	$-V_{\dot{\beta}}$	$-V_{\alpha'}$	0

Označili sme

$$\begin{aligned} V_{\dot{\beta}} &= \beta(t)\partial_t + n\dot{\beta}(t)\partial_n \\ V_{\alpha'} &= \left( \alpha\beta - \dot{\alpha} \int_0^t \beta(\tau) d\tau \right) \partial_n \end{aligned}$$

Podobne ako vzťahy (6.8) v časti 6.1, aj tu polia  $V_{\dot{\beta}}, V_{\alpha'}$  znamenajú, že ak  $\alpha(t), \beta(t)$  sú riešenia, potom riešením je aj derivácia<sup>8</sup>  $\dot{\beta}$  a aj šialená kombinácia  $\alpha'$ .

<sup>7</sup>Treba si zvoliť nejaké  $\beta(t)$  a nájsť integrálne krivky. Prezradíme, že vyjdú rovnako ako riešenia rovnice.

<sup>8</sup>Podobne ako v časti 6.1 z toho vyplýva, že všetky derivácie sú riešeniami. Je to naozaj pravda, lebo riešenia sú funkcie typu  $e^{-\lambda t}$ .

Polia  $V_1, V_\alpha, V_\beta$  tvoria *podalgebru Lieovej algebry symetrií* rozpadovej rovnice. Nevyšla nám napríklad symetria, ktorú sme s napätím očakávali - násobenie riešenia konštantou. Rozpadová rovnica túto symetriu očividne má. Ako vieme z časti 6.1, prislúcha jej pole  $V_2 = n\partial_n$ . Keď  $V_2$  prihodíme k nájdeným poliam a vypočítame komutátory, dostaneme novú tabuľku.

	$V_1$	$V_\alpha$	$V_\beta$	$V_2$
$V_1$	0	0	$V_\beta$	0
$V_\alpha$	0	0	$V_{\alpha'}$	$V_\alpha$
$V_\beta$	$-V_\beta$	$-V_{\alpha'}$	0	0
$V_2$	0	$-V_\alpha$	0	0

Vidíme, že aj s pridaným  $V_2$  polia tvoria Lieovu algebru. Mohlo by sa však stať, že by algebru netvorili a niektorý komutátor by dal pole, ktoré sme nepoznali. Objavili by sme tak ďalšiu symetriu.

Ukazuje sa ďalšia silná stránka Lieovej mašinerie: ak sa nám podarí nájsť len nejaké symetrie diferenciálnej rovnice, môžeme niekedy z komutátorov im prislúchajúcich polí poľahky nájsť ďalšie symetrie.<sup>9</sup>

---

<sup>9</sup>Pozrime na tabuľku na strane 33. Predstavme si, že sme našli iba polia  $V_1, \dots, V_7$ . Vypočítaním komutátora  $[V_6, V_7]$  objavíme pole  $V_8$ .

## Dodatok A

# Riešenia determinujúcich rovníc

### A.1 Voľný pohyb po priamke

Rovnica (4.8) sa rozpadne na sústavu jednoduchších rovníc. Pri jednotlivých mocninách máme

$$\begin{array}{lll} v^0 & \partial_t^2 B = 0 & (i) \\ v^1 & 2\partial_t \partial_y B - \partial_t^2 A = 0 & (ii) \\ v^2 & \partial_y^2 B - 2\partial_t \partial_y A = 0 & (iii) \\ v^3 & -\partial_y^2 A = 0 & (iv) \end{array}$$

Zo (iv) vyplýva, že  $A$  má tvar

$$A(t, y) = \alpha(t)y + \beta(t) \quad (\text{A.1})$$

Podobne z (ii) obdržíme

$$B(t, y) = \xi(y)t + \eta(y) \quad (\text{A.2})$$

Vzťahy (A.1), (A.2) dosadíme do (iii)

$$\begin{aligned} 2\partial_y \xi(y) - \partial_t^2 \alpha(t)y - \partial_t^2 \beta(t) &= 0 \\ \partial_y \xi(y) &= \frac{1}{2} [\partial_t^2 \alpha(t)y + \partial_t^2 \beta(t)] \\ \xi(y) &= \frac{1}{4} \partial_t^2 \alpha(t)y^2 + \frac{1}{2} \partial_t^2 \beta(t)y + c_5 \end{aligned}$$

Aby  $\xi$  záviselo len od  $y$ , musia  $\partial_t^2 \alpha(t)$ ,  $\partial_t^2 \beta(t)$  byť konštanty, teda

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= c' t^2 + c_8 t + c_6 \\ \beta(t) &= c_7 t^2 + c_3 t + c_1 \end{aligned}$$

Potom  $\xi$  má tvar<sup>1</sup>

$$\xi(y) = \frac{1}{2} c' y^2 + c_7 y + c_5$$

<sup>1</sup> Konštanty záhadne číslujeme tak, aby nám nakoniec niečo vyšlo pekne.

Vzťahy (A.1), (A.2) dosadíme do (iii)

$$\partial_y^2 \xi(y)t + \partial_y^2 \eta(y) - 2\partial_t \alpha(t) = 0$$

Dosadíme vypočítané  $\xi(y), \alpha(t)$  a máme

$$\begin{aligned} c't + \partial_y^2 \eta(y) - 4c't - 2c_8 &= 0 \\ \partial_y^2 \eta(y) &= 2c't - 2c_8 \end{aligned}$$

Aby platila rovnosť, pravá strana nemôže byť funkciou  $t$ , teda  $c' = 0$ . Potom pre  $\eta$  dostávame

$$\eta(y) = c_8 y^2 + c_4 y + c_2$$

Funkcie  $A(t, y), B(t, y)$  vychádzajú

$$\begin{aligned} A(t, y) &= (c_8 t + c_6)y + c_7 t^2 + c_3 t + c_1 \\ B(t, y) &= (c_7 y + c_5)t + c_8 y^2 + c_4 y + c_2 \end{aligned}$$

## A.2 Voľný pád

Ľavá strana determinujúcej rovnice (4.17) je polynóm vo  $v$  a rovnica sa redukuje na sústavu štyroch rovníc:

$$\begin{aligned} v^0 \quad \partial_t^2 B - g\partial_z B + 2g\partial_t A &= 0 & (i) \\ v^1 \quad 2\partial_t \partial_z B - \partial_t^2 A + 3g\partial_z A &= 0 & (ii) \\ v^2 \quad \partial_z^2 B - 2\partial_t \partial_z A &= 0 & (iii) \\ v^3 \quad -\partial_z^2 A &= 0 & (iv) \end{aligned}$$

Rovnica (iv) hovorí, že  $A$  je lineárna funkcia v premennej  $z$ .

$$A(t, z) = \alpha(t)z + \beta(t) \tag{A.3}$$

Dosadíme (A.3) do (iii) a máme

$$\begin{aligned} \partial_z^2 B &= 2\partial_t \alpha(t) \\ B(t, z) &= \partial_t \alpha(t)z^2 + \rho(t)z + \sigma(t) \end{aligned} \tag{A.4}$$

Vzťahy (A.3), (A.4) dosadíme do (ii).

$$\begin{aligned} 2(2\partial_t^2 \alpha z + \partial_t \rho) - \partial_t^2 \alpha z - \partial_t^2 \beta + 3g\alpha &= 0 \\ (2\partial_t \rho - \partial_t^2 \beta + 3g\alpha) + (3\partial_t^2 \alpha)z &= 0 \end{aligned}$$

Je to polynóm v premennej  $z$ , teda

$$2\partial_t \rho - \partial_t^2 \beta + 3g\alpha = 0 \tag{A.5}$$

$$3\partial_t^2 \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = c_8 t + c_7 \tag{A.6}$$

Teraz (A.3) a (A.4) s využitím (A.6) dosadíme do (i).

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \rho z + \partial_t^2 \sigma - g(2c_8 z + \rho) + 2g(c_8 z + \partial_t \beta) &= 0 \\ (\partial_t^2 \sigma - g\rho + 2g\partial_t \beta) + (\partial_t^2 \rho)z &= 0 \end{aligned}$$

Je to opäť polynóm v  $z$ , a teda

$$\partial_t^2 \sigma - g\rho + 2g\partial_t \beta = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\partial_t^2 \rho = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = c_6 t + c_4 \quad (\text{A.8})$$

Zoberieme vzťahy (A.6) a (A.8) a dosadíme ich do (A.5).

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \beta &= 2c_6 + 3g(c_8 t + c_7) \\ \beta &= \frac{1}{2} g c_8 t^3 + \frac{1}{2} (3g c_7 + 2c_6) t^2 + c_5 t + c_1 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Nakoniec treba (A.8) a (A.9) dosadiť do (A.7) a nájdeme  $\sigma$ .

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \sigma &= g(c_6 t + c_4) - 2g \left[ \frac{3}{2} g c_8 t^2 + (3g c_7 + 2c_6) t + c_5 \right] \\ \sigma &= -\frac{1}{4} g^2 c_8 t^4 - \left( g^2 c_7 + \frac{1}{2} g c_6 \right) t^3 + \left( \frac{1}{2} g c_4 - g c_5 \right) t^2 + c_3 t + c_2 \end{aligned}$$

Vypočítané funkcie  $\alpha, \beta, \rho, \sigma$  dosadíme do (A.3), (A.4) a máme komponenty vektorového poľa  $V$  v tvare

$$\begin{aligned} A(t, z) &= (c_8 t + c_7) z + \frac{1}{2} g c_8 t^3 + \left( \frac{3}{2} g c_7 + c_6 \right) t^2 + c_5 t + c_1 \\ B(t, z) &= c_8 z^2 + (c_6 t + c_4) z + \left[ -\frac{1}{4} g^2 c_8 t^4 - \left( g^2 c_7 + \frac{1}{2} g c_6 \right) t^3 + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{2} g c_4 - g c_5 \right) t^2 + c_3 t + c_2 \right] \end{aligned}$$

### A.3 Rovnica vedenia tepla

Rovnica (6.6) sa rozpadne na sústavu deviatich rovníc:

$$\begin{array}{lll} 1 & \partial_t C - \partial_x^2 C = 0 & (i) \\ u_x & \partial_x^2 A - \partial_t A - 2\partial_x \partial_u C = 0 & (ii) \\ u_x^2 & 2\partial_x \partial_u A - \partial_u^2 C = 0 & (iii) \\ u_x^3 & \partial_u^2 A = 0 & (iv) \\ u_{xx} & 2\partial_x A + \partial_x^2 B - \partial_t B = 0 & (v) \\ u_{xt} & \partial_x B = 0 & (vi) \\ u_x u_{xx} & 2\partial_u A + 2\partial_x \partial_u B = 0 & (vii) \\ u_x u_{xt} & 2\partial_u B = 0 & (viii) \\ u_x^2 u_{xx} & \partial_u^2 B = 0 & (ix) \end{array}$$

Táto sústava sa rieši pomerne jednoducho. Rovnice (viii), (vi) nám hovoria, že

$$B(x, t, u) = B(t) \quad (\text{A.10})$$

Pre (vii) z toho plynie, že  $\partial_u A = 0$ , a teda

$$A(x, t, u) = A(x, t) \quad (\text{A.11})$$

Rovnice (ix) a (iv) sú na základe (A.10), (A.11) splnené automaticky. (v) sa zjednoduší na  $2\partial_x A = \partial_t B$ . Keďže pravá strana nezávisí od  $x$ , dostávame

$$A(x, t) = \frac{1}{2} \partial_t B(t) x + \xi(t) \quad (\text{A.12})$$

Rovnica (iii) dáva  $C$  v tvare

$$C(x, t, u) = \beta(x, t)u + \alpha(x, t) \quad (\text{A.13})$$

Vzťahy (A.12), (A.13) dosadíme do (i) a (ii). Vychádza

$$2\partial_x\beta(x, t) = -\frac{1}{2}\partial_t^2 B(t)x - \partial_t\xi(t) \quad (\text{A.14})$$

$$(\partial_t\alpha - \partial_x^2\alpha) + u(\partial_t\beta - \partial_x^2\beta) = 0 \quad (\text{A.15})$$

Integráciou (A.14) získame

$$\beta(x, t) = -\frac{1}{4}\partial_t^2 B(t)x^2 - \frac{1}{2}\partial_t\xi(t)x + \rho(t) \quad (\text{A.16})$$

Ľavá strana v (A.15) je polynóm v  $u$ , takže pre funkcie  $\alpha(x, t), \beta(x, t)$  platí

$$\begin{aligned} \partial_t\alpha &= \partial_x^2\alpha \\ \partial_t\beta &= \partial_x^2\beta \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

čo hovorí, že  $\alpha(x, t), \beta(x, t)$  sú riešeniami rovnice vedenia tepla (6.1). Dosadíme  $\beta(x, t)$  zo vzťahu (A.16). Potom platí

$$-\frac{1}{4}\partial_t^3 B(t)x^2 - \frac{1}{2}\partial_t^2\xi(t)x + \partial_t\rho(t) + \frac{1}{2}\partial_t^2 B(t) = 0$$

Ľavá strana je polynóm v  $x$ . Pri jednotlivých mocninách máme

$$\begin{array}{lll} x^2 & \partial_t^3 B(t) = 0 & \Rightarrow B(t) = c_2 + 2c_4t + 4c_6t^2 \\ x & \partial_t^2\xi(t) = 0 & \Rightarrow \xi(t) = c_1 + c_4x \\ 1 & \partial_t\rho(t) = -\frac{1}{2}\partial_t^2 B(t) & \Rightarrow \rho(t) = c_3 - 2c_6t \end{array}$$

Riešenia determinujúcej rovnice (6.6) sú funkcie

$$\begin{aligned} A(x, t, u) &= c_1 + c_4x + 2c_5t + 4c_6xt \\ B(x, t, u) &= c_2 + 2c_4t + 4c_6t^2 \\ C(x, t, u) &= (c_3 - c_5x - 2c_6t - c_6x^2)u + \alpha(x, t) \end{aligned}$$

kde  $c_1, \dots, c_6$  sú ľubovoľné reálne konštanty a  $\alpha(x, t)$  je podľa (A.17) ľubovoľným riešením rovnice vedenia tepla.



## Záver

*Symetria* diferenciálnej rovnice je *zobrazenie* fungujúce na priestore nezávislých a závislých premenných ( $X \times U$ ), ktoré *transformuje riešenia rovnice na iné riešenia*. V práci sme na jednoduchých príkladoch ukázali, ako sa symetrie hľadajú.

Symetriám sme priradili (najprv všeobecné) *vektorové pole*  $V$  na  $X \times U$  (generátor symetrie). Aby sme našli symetrie, prešli sme do *jetového priestoru* ( $X \times U \times U^{(n)}$ , kde  $U^{(n)}$  je priestor všetkých derivácií po  $n$ -té), v ktorom sa konštruovalo jetové *predĺženie vektorového poľa*  $V$ . *Diferenciálna rovnica* je v tomto priestore geometrickým objektom - *podvarietou*. Pole  $V$  volíme tak, aby podvarietá bola *invariantná vzhľadom na tok predĺženého poľa*. Nové riešenie sa hľadá tak, že staré sa nechá odtiesť tokom poľa  $V$ . Pripomeňme si dôležité obrázky 3.1 (str. 19) a 3.4 (str. 23), ktoré si treba uchovať v pamäti. O nich bola celá táto práca.

S rastúcim počtom premenných v rovnici dramaticky rastie počet členov v determinujúcej rovnici a situácia je menej prehľadná. Napríklad pre vlnovú rovnicu v dvoch rozmeroch  $u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy})$  má determinujúca rovnica 54 členov. Dá sa však rozbiť na sústavu 21 rovníc, ktoré vieme s trochou šikovnosti vyriešiť. Zvyšovanie počtu premenných nepredstavuje principiálny problém. Situácia je však horšia, keď sa determinujúca rovnica nedá rozdeliť na sústavu jednoduchších rovníc alebo nevieme riešiť niektoré z rovníc, na ktoré sa determinujúca rozpadne. Vtedy je na umeleckom cítení človeka, čo s tým dokáže spraviť (jeden nápad sme si ukázali v časti 6.2).

## Zoznam použitej literatúry

- [1] M. Fecko: Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov, Iris, 2004
- [2] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands: Feynmanovy prednášky z fyziky s řešenými příklady 1/3, Fragment, 2000
- [3] P. J. Olver: Applications of Lie groups to differential equations, Second edition, Springer, 1993
- [4] P. J. Olver: Equivalence, Invariants and Symmetry, Cambridge University Press, 1995
- [5] [http://symmetry.hu/related\\_definitions.html](http://symmetry.hu/related_definitions.html)