

Izoholonomické úlohy v klasickej mechanike

Bakalárska práca

Jozef Genzor

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky

Štúdijný odbor: 4.1.1 FYZIKA

Vedúci bakalárskej práce:
doc.RNDr. Marián Fecko, PhD.

Bratislava 2010

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že som bakalársku prácu vypracoval samostatne s použitím literatúry uvedenej v zozname.

Bratislava 8. 6. 2010

Jozef Genzor

Pod'akovanie

Na tomto mieste sa chcem pod'akovať doc.RNDr. Mariánovi Feckovi, PhD. za vzácny čas, užitočné rady a pomoc pri písaní tejto bakalárskej práce.

Abstrakt

<i>Autor:</i>	Jozef Genzor
<i>Názov práce:</i>	Izoholonické úlohy v klasickej mechanike
<i>Škola:</i>	Univerzita Komenského v Bratislave
<i>Fakulta:</i>	Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
<i>Katedra:</i>	Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky
<i>Vedúci práce:</i>	doc.RNDr. Marián Fecko, PhD.
<i>Miesto:</i>	Bratislava
<i>Dátum:</i>	8. 6. 2010
<i>Počet strán:</i>	46
<i>Druh záverečnej práce:</i>	Bakalárska práca

Abstrakt: Izoholonická úloha je úloha nájsť najkratšiu slučku s danou holonómiou. Jej špeciálnym prípadom je izoperimetrická úloha a najznámejšou izoperimetrickou úlohou je úloha Dido. Riešenie izoholonomickej úlohy sa dá previesť na hľadanie sub-Riemannovej geodetiky, ktorá sa hľadá riešením Hamiltonových rovníc. Najjednoduchšou sub-Riemannovou geometriou je Heisenbergova grupa. Tá zase prekvapivo súvisí s úlohou Dido.

Kľúčové slová: holonómia, distribúcia na variete, úloha Dido, sub-Riemannove geodetiky, Heisenbergova grupa

Obsah

Úvod	7
I Izoholonomické úlohy	8
1 Čo sú izoholonomické úlohy	8
2 Čo je holonómia	9
3 Úloha Dido	13
4 Sub-Riemannova geometria	17
5 Heisenbergova grupa ako subriemannovská varieta	19
5.1 L'avo-invariantné kovektorové polia	21
5.2 Návrat k úlohe Dido	26
II Diferenciálna geometria a Lieove grupy	31
6 Lineárna algebra tenzorov	31
7 Variety a tenzorové polia na nich	34
7.1 Varieta	34
7.2 Dotykový (tangenciálny) priestor	35
8 Metrický tenzor a Riemannova geometria	36
8.1 Hľadanie geodetík v riemannovskom prípade	36
8.2 Príklad: Geodetiky na sfére	38
9 Distribúcie na variete	40
10 Lieove grupy a l'avo-invariantnosť	42
10.1 Grupa	42
10.2 Lieova grupa a Lieova algebra	42
10.3 L'avo-invariantnosť foriem	42
10.3.1 L'avé translácie	43
10.3.2 Pull-back	43
10.3.3 L'avo-invariantnosť 1-foriem na Lieovej grupe	44

Zoznam obrázkov

1	Hlavná fibrovaná varieta s horizontálnym zdvihom slučky	9
2	Priestor umiestnených tvarov a priestor neumiestnených tvarov	11
3	Padajúca mačka	12
4	Úloha Dido	13
5	Plocha opísaná sprievodičom po krivke $\gamma(t)$	15
6	Symbolické znázornenie lokálnej podobnosti viariety M s \mathbb{R}^n	34

Úvod

Táto bakalárska práca je určená pre dva typy čitateľov. Ten prvý ešte za sebou nemá prednášku z diferenciálnej geometrie. Takýto čitateľ by mal začať čítaním druhej časti tejto práce, kde sa na jednoduchej úrovni oboznámi s potrebnými pojmami z diferenciálnej geometrie. Takto vyzbrojený bude môcť prejsť na prvú časť a ďalej čítať podobne ako druhý typ čitateľa.

Tí, ktorí už majú za sebou diferenciálnu geometriu, začnú prvou kapitolou, ktorá sa dá považovať za úvodnú. V prvej kapitole je naznačené, čo sú izoholonomické úlohy, keďže však správny čitateľ ešte celkom nevie, čo je to holonómia, je okrem základnej definície podaný už iba stručný prierez problematiky. V druhej kapitole o holonómiách je načrtnutý technický rámec úlohy, ktorým je hlavná fibrovaná varieta. V tejto kapitole sa čitateľ stretne s tromi príkladmi - paralelný prenos vektora, padajúca mačka a Berryho fáza. Úloha Dido je témou tretej kapitoly. Ukážeme si riešenie použitím variačného počtu, aby sme mali s čím porovnať výsledok v piatej kapitole. Úlohu Dido si preformulujeme do jazyka distribúcií a rozlúčime sa s ňou, aby sme sa vo štvrtej kapitole zoznámili so sub-Riemannovou geometriou. Najjednoduchším prípadom sub-Riemannovej geometrie je Heisenbergova grupa, ktorej je venovaná piata kapitola. V piatej kapitole si ukážeme súvis Heisenbergovej grupy s úlohou Dido a úlohu Dido vyriešime použitím sub-Riemannovho Hamiltoniánu.

Úlohou Dido sa zaoberáme pre jej jednoduchosť. Jej riešenie má za cieľ predviesť v čom spočíva riešenie izoholonomických úloh. Príkladom z klasickej mechaniky je padajúca mačka, riešiť taký komplikovaný príklad by však v tejto práci určite nemalo zmysel.

Časť I

Izoholonomické úlohy

Sem nesmie vstúpiť nikto, kto
neovláda geometriu!

Nápis nad bránou do Akadémie.

1 Čo sú izoholonomické úlohy

Izoholonomická úloha je úloha nájsť najkratšiu slučku s danou holonómiou¹. V takejto podobe bola sformulovaná pomerne nedávno (v roku 1990) v článku R. Montgomeryho [5]. Ten ukázal, že špeciálnym prípadom sú dávno známe *izoperimetrické úlohy*². Avšak, čo je dôležitejšie, ukázal aj spôsob, ako sa tieto úlohy dajú riešiť. Zviedol ich na hľadanie *sub-Riemannových geodetík*, čo je základná úloha v tzv. sub-Riemannovej geometrii³. Tam sa ukazuje, že na nájdenie sub-Riemannových geodetík stačí vyriešiť isté Hamiltonove rovnice⁴. Sub-Riemannova geometria je istým zovšeobecnením Riemannovej geometrie. V sub-Riemannovej geometrii existuje v každom bode k -rozmerný podpriestor a metrický tenzor je definovaný iba na týchto podpriestoroch. Tieto podpriestory môžu pospájaním vytvárať nejaké nadplochy alebo rozvrstvenie celého priestoru, ukazuje sa však, že v sub-Riemannovej geometrii je oveľa zaujímavejší prípad, keď sa tieto priestory nedajú pospájať. V Riemannovej geometrii je k zároveň aj rozmerom celého priestoru.

Izoholonomické problémy sa vynárajú napr. pri štúdiu tzv. Berryho fázy v kvantovej mechanike (je tu grupa $U(1)$), odkiaľ prišla aj motivácia pre celú problematiku, a pri ovládaní robotov a satelitov (kde ide o grupu rotácií, prípadne aj

¹Pojem holonómie si objasníme neskôr, pozri 2. kapitolu. Teraz len poznamenáme, že holonómia je istý grupový prvok, ktorý sa dá priradiť slučke.

²V izoperimetrických úlohách hľadáme slučku, ktorá pri danej dĺžke ohraničuje čo najväčšiu plochu. Základnou izoperimetrickou úlohou je úloha Dido (dávno vyriešená), ktorou sa budeme zaoberať v 3. kapitole a poslúži nám ako jednoduchý ilustratívny príklad, na ktorom si v ďalších kapitolách objasníme ako sa riešia izoholonomické úlohy.

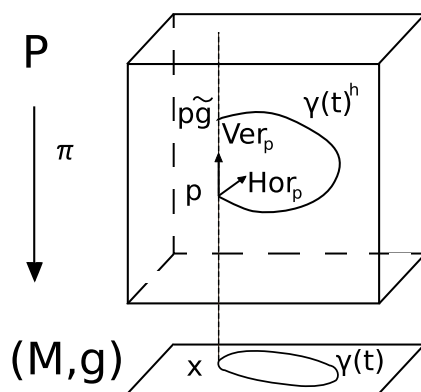
³O sub-Riemannovej geometrii bude reč v 4. kapitole. Príkladom na sub-Riemannovu geometriu je Heisenbergova grupa, ktorej je venovaná 5. kapitola. Zaujímavým prekvapením bude súvis medzi Heisenbergovou grupou a úlohou Dido, ale viac na tomto mieste predbiehať nebudeme.

⁴Ako sa zostavuje sub-Riemannov Hamiltonián si ukážeme v 4. kapitole. Konkrétny Hamiltonián zostavíme a vyriešime k nemu Hamiltonove rovnice v 5. kapitole. Nájdem tak geodetiku, ktorá prislúcha riešeniu úlohy Dido.

translácií). Krásny príklad z klasickej mechaniky na objasnenie toho, o čo ide pri izoholonomických úlohách je padajúca mačka, s ktorou (okrem iného) sa zoznámime v ďalšej kapitole.

2 Čo je holonómia

Nech (M, g) je (Riemannova) varieta (g je metrický tenzor). Majme projekciu $\pi : P \rightarrow M$ (celá štruktúra sa nazýva *fibráciou*⁵). Rozmer variety M nech je menší ako rozmer variety P a na variete P nemáme definovaný metrický tenzor.



Obrázok 1: Hlavná fibrovaná varieta s horizontálnym zdvihom slučky

π projektuje tak, akoby svietila cez varieta P a na variete M tvorila tieň bodov. Teda do jedného bodu z M sú projektované všetky body z P , ktoré sú "nad" týmto bodom. Body z P , ktoré sa projektujú do jedného bodu z M tvoria podvariety a takéto podvariety sú pre všetky body z M rovnakého rozmeru a nazývajú sa vláknami (navyše sú difeomorfne⁶ s nejakou spoločnou varietou - laicky to znamená, že sú si podobné). To, čo sme tu práve opísali je *fibrovaná varieta* a zhrnieme si, že sa skladá z dvoch variet (P, M) a jedného zobrazenia (π). Varietu P (to je tá zložená z vlákien (vlákno = fíber)) nazveme *totálnym priestorom*, varietu M prirodzene nazveme *bázou*. Chceme ešte, aby na variete P pôsobila grupa G pravými akciami a to tak, aby pravé akcie zachovávali vlákna (ak je prvok p z vlákna F_x , tak aj prvok $R_{\tilde{g}}p \equiv p\tilde{g}$ je z vlákna F_x - táto vlastnosť sa tiež nazýva *vertikálnosť*). Akcia $R_{\tilde{g}}$ má byť ďalej *vol'ná* (vol'nosť znamená, že každý bod p

⁵Samotná fibrácia nepotrebuje mať na M metrický tenzor, ten potrebujeme my, aby sme vedeli merať dĺžky kriviek.

⁶Presnú definíciu difeomorfности nájde čitateľ v [1], kapitola 1.4.

po zapôsobení nejednotkovým prvkom grupy odíde zo svojho pôvodného miesta), *tranzitívna* (ľubovoľné dva body sa dajú spojiť akciou grupy). Fibrovanú varietu s takou grupou G nazývame *hlavná fibrovaná varieta s grupou G* .

Vektory na P môžeme projektovať do bázy. Predstavme si to tak, že sprojektujeme body z dotykových kriviek, ktoré definujú vektor v totálnom priestore, do bázy a dostaneme nové dotykové krivky, ktoré definujú nový vektor. Teraz už vieme v každom bode totálneho priestoru prirodzene definovať *vertikálny* podpriestor. Tvoria ho vektory, ktorých projekcia do bázy je nula. Zvoľme si ešte *horizontálny* podpriestor⁷, ktorý bude doplnkový k vertikálnemu, čo znamená, že každý vektor z totálneho priestoru sa dá jednoznačne rozložiť do horizontálneho a vertikálneho podpriestoru. Výber horizontálneho podpriestoru v každom bode je ekvivalentný s nejakou distribúciou, pričom všetkým vektorom v z $T_x M$ vieme v bode p totálneho priestoru priradiť jednoznačný vektor v^h patriaci do horizontálneho podpriestoru.

Teraz príde to zaujímavé. Predstavme si na M nejakú slučku (štartuje a končí v rovnakom bode, vznikne ako hladké zobrazenie z reálneho intervalu na varietu). Chceme túto slučku horizontálne zdvihnúť tak, aby začínala v bode p totálneho priestoru. Je samozrejmé, že bod p je "nad" začiatočným (a zároveň konečným) bodom našej slučky. Konečný bod zdvihutej slučky bude tiež "nad" konečným (a zároveň začiatočným) bodom našej slučky, zdvihnutá slučka sa ale nemusí končiť v bode p , ale môže byť roztrhnutá a mať svoj koniec v bode $p\tilde{g}$. Tak vznikne zo slučky neslučka. Otázka je, ako slučku z M prakticky zdvihnúť. Robí sa to tak, že vezmeme vektor $\dot{\gamma}$ v začiatočnom bode krivky a tento vektor horizontálne zdvihneme do bodu p (v bode p mu priradíme vektor z horizontálneho podpriestoru, ktorý sa projektuje na $\dot{\gamma}$). Teraz sa na tomto zdvihnutom vektore posunieme o ε v smere vektora - a získame nový bod. Takto získaný bod sprojektujeme do bázy a procedúru opakujeme až dovtedy, kým sa dostaneme "nad" koncový bod slučky na báze.

Celá procedúra sa dá chápať ako *paralelné* prenášanie nejakého objektu po slučke, pričom na tento prenos je potrebné mať určený horizontálny podpriestor (ktorým je vlastne určená *konexia*⁸ a naopak). Ukazuje sa, že takto prenášaný objekt môže vo všeobecnosti prísť iný ako odišiel. Nový objekt sa získava zo starého nejakým grupovým prvkom. Tento prvok sa nazýva *holonómia* prislúchajúca slučke.

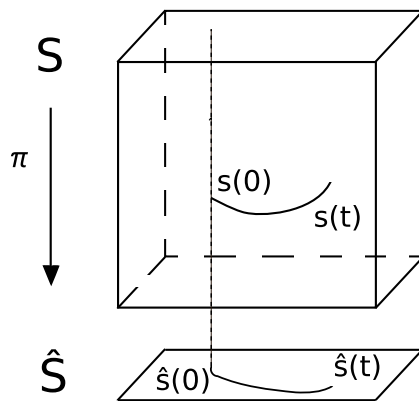
Každej slučke na báze teda jednoznačne prislúcha nejaký prvok \tilde{g} z našej grupy G . Ten vyjadruje o koľko sa slučka po horizontálnom zdvihu roztrhne ($p\tilde{g}$ je nový koniec). Problémy, v ktorých máme \tilde{g} rovnaké sa teda volajú *izoholonomic-*

⁷Pojem ortogonalita nemá zmysel, keďže v totálnom priestore nemáme zavedený metrický tenzor - horizontálny teda neznamená kolmý na ortogonálny.

⁸Čitateľ'a, ktorého zaujalo slovo konexia, odkazujeme na zdroj [1].

ké. Pri rovnakom \bar{g} máme v báze triedu slučiek, ktoré sa po zdvihu roztrhnú o rovnako. Prirodzene sa vynára úloha hľadať najkratšiu krivku na báze s pevne zadanou holonómiou. Ak sú prvky z G reálne čísla, tak môžeme daný problém obrátiť a hľadať slučku s pevne zadanou dĺžkou a extrémnou holonómiou, ktorá je tu obyčajným číslom.⁹

Príkladom na paralelný prenos je paralelný prenos vektora po sférickom pravouhlom trojuholníku. Majme vektor na severnom póle. Paralelný prenos spravíme tak, že zoberieme vektor a budeme ho posúvať po poludníku tak, aby bol k nemu stále tangenciálny. Keď sa s ním dostaneme až na rovník, tak ho začneme posúvať pozdĺž rovníka tak, aby bol náš vektor stále tangenciálny k tomu poludníku, na ktorom sa práve nachádza. Keď sa posunieme o uhol $\frac{\pi}{2}$, tak náš vektor opäť posunieme na severný pól (rovnakým spôsobom, ako sme ho posunuli k rovníku). Niečo sa stalo, nový vektor, ktorý sme dostali, je kolmý na pôvodný, holonómia je tu rotácia o uhol $\frac{\pi}{2}$. Necháme na čitateľovi premyslieť si, že pri paralelnom prenášaní vektora na sfére po inej slučke by sme mohli dostať inú holonómiu. Vnímový čitateľ si iste všimol, že v tomto príklade sme nepoužili jazyk hlavnej fibrovanej variety. Sú totiž možné dva prístupy, v ďalších príkladoch si ukážeme aplikáciu hlavnej fibrovanej variety.



Obrázok 2: Priestor umiestnených tvarov a priestor neumiestnených tvarov

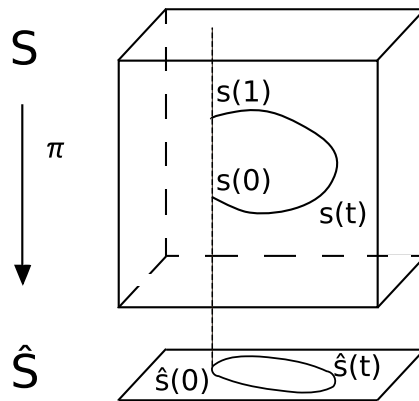
Príklad z klasickej mechaniky je padajúca mačka¹⁰. Mačka sa vie deformovať a mať rôzny tvar. Zároveň môže byť pri danom tvare v priestore rôzne orientovaná. Tvar bez určenej orientácie v priestore nazveme neumiestneným tvarom a

⁹Posledná veta je vlastne náznakom toho, že izoholonomické úlohy sú zovšeobecnením izoperimetrických.

¹⁰Padajúca mačka je podrobnejšie rozoberaná v [7].

tvar s určenou orientáciou nazveme umiesteným tvarom (obrázok 2). Tieto ne-umiestnené a umiestnené tvary tvoria dva priestory, medzi ktorými existuje určitý vzťah.

Predstavme si priestor neumiestených tvarov \hat{S} ako plochu. Každý tvar (každý bod priestoru neumiestených tvarov) môže mať rôznu orientáciu v priestore - z jedného umiestneného tvaru vieme dostať rotáciou ľubovoľnú inú orientáciu daného tvaru. Priestor umiestených tvarov S si môžeme predstaviť ako kocku, ktorá je nad plochou - priestorom neumiestených tvarov. Všetky body kocky ležiace "nad" nejakým bodom plochy prislúchajú rovnakému tvaru, ale rôznej orientácii. Keď mačka padá, tak sa deformuje a tým sa posúva v priestore neumiestených tvarov po trajektórii $\hat{s}(t)$, čo spôsobuje, že sa posúva aj v priestore umiestených tvarov po trajektórii $s(t)$ - ako jednoznačne určuje trajektória $\hat{s}(t)$ v priestore neumiestených tvarov, počiatočná poloha $s(0)$ v priestore umiestených tvarov a zákon zachovania momentu hybnosti (zachovanie momentu hybnosti určuje ako vplyva zmena tvaru na zmenu orientácie).



Obrázok 3: Padajúca mačka

Ak mačka dosiahne rovnaký tvar, ale rôznu orientáciu, tak v priestore neumiestených tvarov prešla slučkou, ale v priestore umiestených tvarov to slučka nebude - dostane sa do nového bodu $Rs(0)$ - daného príslušnou rotáciou východzieho bodu - pričom táto rotácia R sa nazýva holonómia a určuje ako sa zdvihol konečný bod oproti začiatočnému, konečný $s(1) = Rs(0)$ a začiatočný bod $s(0)$ budú totiž ležať nad sebou. Slučka z priestoru neumiestených tvarov sa vlastne zdvihla a vznikla z nej neslučka (obrázok 3). Izoholonomické problémy majú tento parameter - holonómiu - konštantný.

Príklad z kvantovej mechaniky je už spomenutá Berryho fáza. Ide o to, že hľadáme najkratšiu slučku s danou Berryho fázou. Holonómiou je tu fáza $e^{i\alpha}$, čo

je prvok grupy $U(1)$. Slučka sa tentokrát nachádza v priestore parametrov kvantového systému (napr. v priestore vektora vonkajšieho magnetického poľa \mathbf{B}). Technická realizácia je však bohužiaľ nad rámec našej práce.

3 Úloha Dido

Podľa Vergíliovho eposu Aeneas bola Dido kráľovská dcéra, ktorá musela utiecť z fenického mesta Tyru do Afriky. Od numidského kráľa Jarba, ktorý nepostrehol lest', kúpila toľko pôdy, koľko je možné ohraničiť stiahnutou volskou kožou. Dido rozrezala kožu na veľmi úzke prúžky a ohraničila nimi veľký pozemok v tvare časti kruhu. Tak vraj vzniklo Kartágo.

Riešenie úlohy Dido je časť kružnice, čo je už dlho známe. Na tomto mieste si predvedieme riešenie použitím klasického variačného počtu, až v nasledujúcich kapitolách vyriešime úlohu Dido použitím diferenciálnej geometrie. Riešenie úlohy Dido použitím diferenciálnej geometrie je ako ísť s kanónom na vrabce, ale tento masaker je ospravedlniteľný didaktickým zámerom vidieť fungovanie aparátu na dostatočne jednoduchom a ilustratívnom príklade. Pripomeňme, že úloha Dido je klasickou izoperimetrickou úlohou¹¹.

Ideme hľadať tvar krivky, ktorá má dĺžku l (súčet prúžkov volskej kože), jej konce ležia v bodoch A a B, a plocha uzavretá krivkou a úsečkou AB (úsečka AB predstavuje pobrežnú čiaru) je maximálna. Nech sú body A a B na osi x a majú



Obrázok 4: Úloha Dido

x -ové koordináty x_1 a x_2 . Potom

$$I = \int_{x_1}^{x_2} y dx$$

$$F = y$$

kde I je príslušná plocha, F je podintegrálna funkcia a pre dĺžku krivky platí

¹¹Ako sa môžeme dočítať v [6].

$$J = \int_{x_1}^{x_2} ds = l$$

$$G = \sqrt{1 + y'^2}$$

pričom G je podintegrálna funkcia integrálu J . Lagrangeovou metódou dostávame¹², že

$$F + \lambda G$$

má spĺňať Eulerovu rovnicu. Pripravíme si derivácie

$$\frac{\partial}{\partial y'}(F + \lambda G) = \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad \text{a} \quad \frac{\partial}{\partial y}(F + \lambda G) = 1$$

a Eulerova rovnica je

$$\frac{d}{dx} \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} - 1 = 0 \tag{1}$$

Rovnicu (1) postupne riešime (v prvom kroku ju zintegrujeme)

$$\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = x + c$$

$$\lambda^2 y'^2 = (x + c)^2 (1 + y'^2)$$

$$y'^2 [\lambda^2 - (x + c)^2] = (x + c)^2$$

$$dy = \frac{(x + c)dx}{\sqrt{\lambda^2 - (x + c)^2}}$$

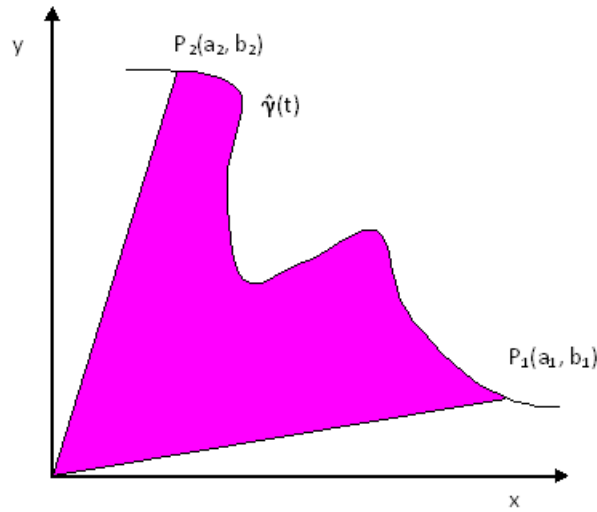
$$y + c' = -\sqrt{\lambda^2 - (x + c)^2}$$

$$(x + c)^2 + (y + c')^2 = \lambda^2$$

Ako riešenie sme teda dostali časť kružnice. Dido zrejme nepoznala Lagrangeovu metódu, podarilo sa jej však dospieť k rovnakému záveru ako my. Presvedčíme sa, že rovnaký výsledok dostaneme aj použitím diferenciálnej geometrie.

Úlohu si preformulujeme do jazyka distribúcií, pričom krivku zdvihneme do tretieho rozmeru. Ideme integrovať obsah plochy, ktorú prejde sprievodič pohybujúci sa po parametrizovanej krivke $\hat{\gamma}(t) : x(t), y(t)$. Z plošného integrálu prechá-

¹²Použitú riešenie možno nájsť v [4].



Obrázok 5: Plocha opísaná sprievodičom po krivke $\gamma(t)$

dzame na základe Greenovho vzorca (2)

$$\iint dxdy = \frac{1}{2} \oint xdy - ydx \quad (2)$$

ku krivkovému integrálu, pričom integrujeme po troch krivkách (ktoré spoločne tvoria slučku), najprv po priamke z bodu $(0, 0)$ do bodu, kde začína naša krivka $\hat{\gamma}(t)$, ďalej po krivke $\hat{\gamma}(t)$ od bodu kde začína krivka do bodu kde končí a tretí úsek tvorí úsečka z bodu, kde krivka $\hat{\gamma}(t)$ končí, do bodu $(0, 0)$. Výpočet sa dá v príslušnom parametrizovaní zapísať nasledovne

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \oint xdy - ydx = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^1 la_1b_1dl - \frac{1}{2} \int_0^1 lb_1a_1dl + \\ & + \frac{1}{2} \int_{t=0}^{\tau} x(t)\dot{y}(t)dt - \frac{1}{2} \int_{t=0}^{\tau} y(t)\dot{x}(t)dt + \\ & + \frac{1}{2}(-1) \int_0^1 la_2b_2dl - \frac{1}{2}(-1) \int_0^1 lb_2a_2dl = \\ & = \frac{1}{2} \int_{t=0}^{\tau} x(t)\dot{y}(t)dt - \frac{1}{2} \int_{t=0}^{\tau} y(t)\dot{x}(t)dt = z(\tau) \end{aligned}$$

Z výpočtu ľahko nahliadneme, že veľkosť plošného integrálu, ktorým sa tu zaoberáme, vlastne vôbec nezávisí od prvého a tretieho úseku (druhý a štvrtý riadok

výpočtu je rovný nule). Prvý a tretí úsek tvoria úsečky, ktoré je možné lineárne parametrizovať nasledovne: $x = a_1t, y = b_1t$ pre prvý úsek a $x = a_2t, y = b_2t$ pre tretí úsek, pričom $t \in (0, 1)$, naša krivka $\hat{\gamma}(t)$ sa začína v bode (a_1, b_1) a končí v bode (a_2, b_2) . Derivovaním posledného riadku dostávame diferenciálnu rovnicu pre $z(t)$

$$\dot{z}(t) = \frac{1}{2}x(t)\dot{y}(t) - \frac{1}{2}\dot{x}(t)y(t) \quad (3)$$

Diferenciálnu rovnicu (3) je možné prepísať do nasledujúceho tvaru

$$dz - \frac{1}{2}(xdy - ydx) = 0 \quad (4)$$

Celú "situáciu" si môžeme názorne predstaviť v 3-rozmernom priestore ako zdvih krivky $\hat{\gamma}(t)$ z roviny xy do tretieho rozmeru, pričom krivka $\hat{\gamma}(t)$ sa zdvihne o toľko, o koľko pribudne plochy opísanej sprievodičom (v bezrozmerných premenných). Dostaneme novú krivku, ktorú označíme ako $\gamma(t)$. Ak bola krivka $\hat{\gamma}(t)$ zadaná ako $\hat{\gamma}(t) : x(t), y(t)$, tak krivka $\gamma(t)$ je zadaná ako $\gamma(t) : x(t), y(t), z(t)$, kde $z(t)$ spĺňa rovnicu (3), pričom $x(t), y(t)$ poznáme, keďže pomocou nich je zadaná krivka $\hat{\gamma}(t)$. Rovnica (4) určuje distribúciu, po ktorej sa pohybujeme s krivkou $\gamma(t)$.

Treba si uvedomiť, že výraz na ľavej strane rovnice (4) je 1-forma v \mathbb{R}^3

$$dz - \frac{1}{2}(xdy - ydx)$$

a určuje nejaký 2-rozmerný dotykový priestor. Na základe 9. kapitoly v druhej časti práce nájdeme bázu tohto dotykového priestoru. Ohraničujúca 1-forma má anihilovať náš dotykový priestor, teda chceme aby platilo

$$\langle \frac{1}{2}ydx - \frac{1}{2}xdy + dz, a\partial_x + b\partial_y + c\partial_z \rangle = 0 \quad (5)$$

$a\partial_x + b\partial_y + c\partial_z$ je všeobecné vektorové pole (pripomíname, že a, b, c sú všeobecné koeficienty, ktoré môžu závisieť od x, y, z) a z rovnice (5) preň chceme získať podmienky. Po roznásobení ľavej strany rovnice (5) a ďalšími úpravami postupne dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= a\frac{y}{2} - b\frac{x}{2} + c \\ c &= -a\frac{y}{2} + b\frac{x}{2} \end{aligned}$$

A teda dostávame vektorové pole

$$\begin{aligned} V &= a\partial_x + b\partial_y + (-a\frac{y}{2} + b\frac{x}{2})\partial_z \\ V &= a\left[\partial_x - \frac{y}{2}\partial_z\right] + b\left[\partial_y + \frac{x}{2}\partial_z\right] \end{aligned}$$

s bázou (ktorá je lineárne kombinovaná vo V)

$$\begin{aligned} e_1 &= \partial_x - \frac{v}{2}\partial_z \\ e_2 &= \partial_y + \frac{x}{2}\partial_z \end{aligned}$$

Úloha teraz vyzerá tak, že hľadáme krivku, ktorá prekoná daný výškový rozdiel (keďže plocha je teraz zakódovaná do výšky z) a jej priemet do roviny bude čo najkratší, pričom krivka samozrejme ide stále v smere kombinácie e_1 a e_2 .

4 Sub-Riemannova geometria

V *sub-Riemannovej geometrii* existuje v každom bode k -rozmerný podpriestor D_x , ktorý je podmnožinou n -rozmerného dotykového priestoru T_xM , a metrický tenzor je definovaný iba na týchto podpriestoroch. Tento k -rozmerný podpriestor v bode x sa nazýva *horizontálny podpriestor* v bode x . Tým máme danú k -rozmernú horizontálnu distribúciu D na M a sub-Riemannova metrika g je definovaná iba na D . Celá štruktúra (M, D, g) sa nazýva sub-Riemannova štruktúra na M . Zo sub-Riemannovej geometrie sa stane Riemannova, keď bude k zároveň aj rozmerom celého priestoru a teda budeme mať metriku zadefinovanú pre celý dotykový priestor v každom bode priestoru. Preto hovoríme, že sub-Riemannova geometria je zovšeobecnením Riemannovej geometrie.

Ľubovoľné dva body variety M vieme spojiť krivkou prechádzajúcou cez horizontálny podpriestor vtedy, keď distribúcia nie je *integrovateľná*¹³. Integrovateľnosť distribúcie znamená, že existuje rozvrstvenie variety M na k -rozmerné podvariety, ktoré spájajú (integrujú) susedné podpriestory D_x do jedného celku. Či je distribúcia integrovateľná alebo neintegrovateľná umožňuje zistiť Frobeniovo kritérium¹⁴. Integrovateľná distribúcia teda rozvrstvuje priestor na podvariety a pokiaľ dva body neležia na tej istej podvariete, nevieme medzi nimi zmerať vzdialenosť (nájsť sub-Riemannovu geodetiku). Zaujímame sa preto o neintegrovateľné distribúcie.

Na zadanie našej distribúcie použijeme tenzorové pole¹⁵ h typu $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, pričom rank k tenzorového poľa h bude zhodný s dimenziou distribúcie.

¹³Aby sme boli presní, iba neintegrovateľnosť nestačí. Aby sme vedeli spájať ľub. dva body variety krivkou cez horizontálny podpriestor musí byť naša distribúcia neintegrovateľná špeciálneho typu, tzv. "bracket-generating", viac v [6].

¹⁴V našej práci nie je Frobeniovo kritérium vysvetlené, čitateľ ho však nájde v [1], kapitola 19.3. Je ľahko overiteľné, že distribúcia v úlohe Dido, ktorú sme dostali v 3. kapitole, je neintegrovateľná.

¹⁵Ak sa čitateľ s určením distribúcie cez tenzorové pole ešte nestretol, odkazujeme ho na 9. kapitolu o distribúciách v druhej časti práce, kde je použitý spôsob vysvetlený ako tretí v poradí.

$$D = \text{Im } h$$

$$h : L^* \rightarrow L \quad \alpha \mapsto h(\alpha; \cdot)$$

$$h \leftrightarrow \begin{pmatrix} h^{ab} & h^{ai} \\ h^{ia} & h^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^{ab} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad h^{ab} = h^{ba}$$

Tenzor h môže obsahovať informáciu o metrike na distribúcii (inde metriku ani nemáme). Vyberme také h , aby platilo

$$h = h^{ab} e_a \otimes e_b \quad h^{ab} g_{bc} = \delta_c^a$$

kde $g_{ab} := g(e_a, e_b)$. Keďže g_{ab} je nesingulárne, existuje (jednoznačne určené) inverzné g^{ab} a my vlastne vyberáme $h^{ab} = g^{ab}$. Samotný tenzor h bude takto niest' plnú informáciu o distribúcii D ako aj o metrike g . Poznamenajme ešte, že tenzor h nie je nesingulárny (neexistuje k nemu inverzný tenzor), preto ďalej použijeme Hamiltonov formalizmus (Lagrangeov nemôžeme, pretože nemôžeme invertovať h). Tenzor h nám definuje *kometriku*. Kometrika je univerzálnejšia než metrika, pretože "funguje" ako v Riemannovej, tak aj sub-Riemannovej geometrii, na rozdiel od metriky, ktorá "funguje" iba v Riemannovej geometrii.

Teraz sa ideme zaoberať tým, ako sa hľadajú sub-Riemannove geodetiky. Ako sme už spomínali v úvode, treba riešiť isté Hamiltonove rovnice. Ukazuje sa,¹⁶ že príslušný Hamiltonián sa konštruuje vhodným zdvihom kometriky do T^*M . "Zdvíhanie" symetrických kontravariantných tenzorov z M na funkcie z T^*M je definované všeobecným vzťahom

$$\mathring{t}(p) := t(p, \dots, p)$$

pričom p vľavo je bod T^*M a p -čka vpravo sú kovektory, ktoré mu zodpovedajú. To isté v kanonických súradniciach (x^μ, p_μ)

$$\mathring{t}(x, p) := t^{\mu \dots \nu}(x) p_\mu \dots p_\nu$$

Takže \mathring{t} žije ako funkcia v kodotykovej fibrácii a živí sa kovektormi ("nad" nejakým bodom x) takým spôsobom, ako keby sme do každého okienka pôvodného tenzoru t vhodili ten istý kovektor p . Vektorové pole

$$V = V^\mu(x) \partial_\mu$$

transformujeme na funkciu na T^*M podľa vzťahu

$$\mathring{V} = V^\mu(x) p_\mu$$

¹⁶Dôkaz, že sa to má robiť takto je nad rámec tejto práce, pozri [6].

a \mathring{V} nazveme *moment* prislúchajúci k V . Analogicky, súradnicovú a nesúradnicovú bázu transformujeme

$$\mathring{\partial}_\mu = p_\mu \quad (6)$$

$$\mathring{e}_a = e_a^\mu(x)p_\mu \equiv P_a(x, p) \quad (7)$$

Hamiltonián zostavíme tak, že zdvihneme kometriku $h = h^{ab}e_a \otimes e_b$

$$\begin{aligned} H(x, p) &\equiv \frac{1}{2}\mathring{h} = \frac{1}{2}h^{ab}P_aP_b \\ &= \frac{1}{2}h^{ab}(x)(e_a^\mu(x)p_\mu)(e_b^\nu(x)p_\nu) \\ &= \frac{1}{2}h^{\mu\nu}(x)p_\mu p_\nu \end{aligned}$$

Netriviálny fakt teda spočíva v tom, že riešenia Hamiltonových rovníc pre tento Hamiltonián dávajú (po projekcii na M) sub-Riemannove geodetiky pre geometriu opísovanú kometrikou h .

5 Heisenbergova grupa ako subriemannovská varieta

Heisenbergova grupa je najjednoduchší a často používaný modelový prípad *sub-Riemannovej* geometrie. Ukážeme čitateľovi, čo je to Heisenbergova grupa a ako ju možno parametrizovať. Z nášho hľadiska je zaujímavá tým, že úzko súvisí s formuláciou a riešením úlohy Dido. (Konkrétne, sub-Riemannove geodetiky pre tento prípad dávajú, po projekcii, riešenia úlohy Dido.) Mostom medzi týmito dvoma zdanlivo nesúvisiacimi oblasťami je vzťah (4) pre počítanie plochy

$$dz - \frac{1}{2}(xdy - ydx) = 0$$

ktorý sme získali zdvihom krivky do tretieho rozmeru. Tento súvis si neskôr objasníme.

Grupa horných trojuholníkových matíc sa nazýva aj *Heisenbergova grupa*. Dajú sa na nej zaviesť globálne súradnice

$$A(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O tom, že ide o grupu nás presvedčí to, že keď vynásobíme dve všeobecné horné trojuholníkové matice s jednotkami na diagonále, tak dostaneme opäť hornú trojuholníkovú maticu s jednotkami na diagonále. Ide vlastne o podmienku uzavretosti na násobenie, ďalšie podmienky ako asociatívnosť, existencia jednotkového

a inverzného prvku sú triviálne, keďže ide o násobenie matíc - násobenie matíc je asociatívne, jednotkový prvok je jednotková (diagonálna) matica a inverzný prvok existuje, keďže determinant všeobecnej hornej trojuholníkovej matice s jednotkami na diagonále je rovný jednej a nie nule a teda taká matica je, samozrejme, regulárna.

Násobenie takýchto matíc

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+x & c+z+ay \\ 0 & 1 & b+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

môžeme zapisovať nasledujúcim spôsobom

$$A(a, b, c)A(x, y, z) = A(a+x, b+y, c+z+ay) \quad (8)$$

Heisenbergova grupa má vlastnosti Lieovej grupy a teda tejto grupe prislúcha Lieova algebra¹⁷. Táto algebra je vektorovým priestorom s bázou E_1, E_2, E_3

$$X(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = xE_1 + yE_2 + zE_3$$

kde

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Komutačné vzťahy sú

$$[E_1, E_2] = E_3 \quad [E_1, E_3] = 0 \quad [E_2, E_3] = 0$$

a pripomínajú kanonické komutačné vzťahy z kvantovej mechaniky (preto názov Heisenbergova)

$$[\hat{p}, \hat{x}] = -i\hbar \quad [\hat{p}, i\hbar] = 0 \quad [\hat{x}, i\hbar] = 0$$

Teraz sa pozrieme na inú užitočnú parametrizáciu Heisenbergovej grupy. Všimneme si, že pre všeobecný prvok Lieovej algebry, ktorú tu máme, platí

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & xy \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¹⁷Pripomeňme, že Lieova algebra sa hľadá tak, aby prvky tvaru $(\mathbb{1} + \varepsilon X)$, t.j. blízke jednotke, boli z grupy.

exponenciála z X je teda jednoducho

$$e^X = \mathbb{1} + X + \frac{1}{2}X^2 = \begin{pmatrix} 1 & x & z + \frac{1}{2}xy \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Násobenie matíc v tejto parametrizácii môžeme potom zapisovať nasledovne

$$A(a, b, c)A(x, y, z) = A(a + x, b + y, c + z + \frac{1}{2}(ay - bx)) \quad (9)$$

5.1 Ľavo invariantné kovektorové polia

Ideme hľadať ľavo invariantné kovektorové polia na Heisenbergovej grupe v oboch parametrizáciách.

Výpočet v prvej parametrizácii

V prvej parametrizácii sú zavedené na Heisenbergovej grupe súradnice nasledovne

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ľavo invariantnosť nám pre kovariantné pole dáva

$$\begin{aligned} & A(a + x, b + y, z + c + ay)d(x + a) + \\ & + B(a + x, b + y, z + c + ay)d(y + b) + \\ & + C(a + x, b + y, z + c + ay)d(z + c + ay) = \\ & = A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz \end{aligned}$$

Pričom na ľavej strane máme *pull-back* aplikovaný na kovariantné pole a na pravej strane pôvodné kovariantné pole. Ďalej môžeme písať (kladíme tu prirodzene do rovnosti koeficienty s rovnakým dx , dy a dz , aby sa posunuli v rovnakých koordinátach rovnali)

$$A(x + a, y + b, z + c + ay) = A(x, y, z) \quad (I.)$$

$$C(x + a, y + b, z + c + ay) = C(x, y, z) \quad (II.)$$

$$B(x + a, y + b, z + c + ay) + aC(x + a, y + b, z + c + ay) = B(x, y, z) \quad (III.)$$

Teraz vyriešime sústavu rovníc (I.) až (III.) pre koeficienty A , B a C . Rovnice majú platiť pre ľubovoľné a , b , c , takže aj pre špeciálne kombinácie. Ak napr.

položíme $a = 0$, $c = 0$, $b = \varepsilon$, kde ε je malé (aj ďalej vo výpočtoch považujeme vždy ε za malé) pre (I.) tak postupne dostávame

$$\begin{aligned} A(x, y + \varepsilon, z) &= A(x, y, z) \\ A(x, y + \varepsilon, z) - A(x, y, z) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} A(x, y, z) \varepsilon &= 0 \end{aligned}$$

a vidíme, že A nezávisí od premennej y , teda druhý "chlievik" v A si môžeme odmyslieť. Postupujme ďalej, teraz položme $a = 0$, $c = \varepsilon$

$$\begin{aligned} A(x, z + \varepsilon) &= A(x, z) \\ \frac{\partial}{\partial z} A(x, z) \varepsilon &= 0 \end{aligned}$$

a dostávame, že A nezávisí ani od z . Ak položíme $a = \varepsilon$

$$A(x + \varepsilon) = A(x)$$

tak vidíme, že A nezávisí ani od x a teda A je konštantné. Rovnaké úvahy vedú k tomu, že $C(x, y, z)$ je tiež konštantné (všimnime si podobnosť rovnice (I.) pre A s rovnicou (II.) pre C). Rovnicu (III.) teda môžeme prepísať ako

$$B(x + a, y + b, z + c + ay) + aC = B(x, y, z)$$

a položením $a = 0$, $c = 0$, $b = \varepsilon$ dostávame

$$B(x, y + \varepsilon, z) + 0 = B(x, y, z)$$

čo už poznáme a vieme, že B nezávisí od y . Položme ďalej $a = 0$, $c = \varepsilon$

$$B(x, z + \varepsilon) + 0 = B(x, y, z)$$

takže B nezávisí ani od z , ostáva ešte x - nech tentokrát $a = \varepsilon$

$$\begin{aligned} B(x + \varepsilon) + \varepsilon C &= B(x) \\ \frac{\partial}{\partial x} B &= -C \\ B(x) &= -Cx + C' \end{aligned}$$

Súhrnne sme teda dostali

$$\begin{aligned} A &= C_1 = \text{const.} \\ C &= C_3 = \text{const.} \\ B(x) &= -C_3x + C_2 \end{aligned}$$

a naše ľavo invariantné kovektorové pole sa teda dá zapísať takto

$$\alpha = C_1 dx + C_2 (dz - xdy) + C_3 dy \quad (10)$$

resp.

$$\alpha = C_1 e^1 + C_2 e^2 + C_3 e^3 \quad (11)$$

pričom (vzhľadom na to, že máme 3 ľubovoľné konštanty)

$$e^1 = dx \quad e^2 = dy \quad e^3 = dz - xdy \quad (12)$$

K nájdenej báze kovektorových polí nájdeme duálnu bázu vektorových polí využívajúc

$$\langle e^a, e_b \rangle = \delta_b^a \quad (13)$$

Vypočítajme duálny prvok k e^1

$$\begin{aligned} \langle dx, a_1 \partial_x + b_1 \partial_y + c_1 \partial_z \rangle &= 1 &\Rightarrow & a_1 = 1 \\ \langle dy, \partial_x + b_1 \partial_y + c_1 \partial_z \rangle &= 0 &\Rightarrow & b_1 = 0 \\ \langle dz - xdy, \partial_x + b_1 \partial_y + c_1 \partial_z \rangle &= 0 &\Rightarrow & c_1 = xb_1 = 0 \\ e_1 &= \partial_x \end{aligned}$$

duálny prvok k e^2

$$\begin{aligned} \langle dx, a_2 \partial_x + b_2 \partial_y + c_2 \partial_z \rangle &= 0 &\Rightarrow & a_2 = 0 \\ \langle dy, b_2 \partial_y + c_2 \partial_z \rangle &= 1 &\Rightarrow & b_2 = 1 \\ \langle dz - xdy, b_2 \partial_y + c_2 \partial_z \rangle &= 0 &\Rightarrow & c_2 = xb_2 = x \\ e_2 &= \partial_y + x \partial_z \end{aligned}$$

a nakoniec duálny prvok k e^3

$$\begin{aligned} \langle dx, a_3 \partial_x + b_3 \partial_y + c_3 \partial_z \rangle &= 0 &\Rightarrow & a_3 = 0 \\ \langle dy, b_3 \partial_y + c_3 \partial_z \rangle &= 0 &\Rightarrow & b_3 = 0 \\ \langle dz - xdy, c_3 \partial_z \rangle &= 1 &\Rightarrow & c_3 = \partial_z \\ e_3 &= \partial_z \end{aligned}$$

Pre bázu ľavoinvariantných vektorových polí teda máme

$$e_1 = \partial_x \quad e_2 = \partial_y + x \partial_z \quad e_3 = \partial_z \quad (14)$$

Existuje aj druhý, technicky jednoduchší spôsob, ktorým sa dá dopracovať k výsledku (12). Bez odvedenia¹⁸ si ukážeme ako sa používa. Ešte raz pripomíname, že hľadáme bázu ľavo invariantného kovektorového poľa (a následne z nej vypočítame bázu ľavo invariantného vektorového poľa) na Heisenbergovej grupe. Návod, ktorý si ukážeme sa dá použiť na hľadanie báz ľavo invariantných 1-foriem na ľubovoľnej *maticovej* grupe. Robí sa to tak, že vezmeme všeobecnú maticu $X(z)$ (z sú koordináty) z príslušnej maticovej grupy, invertujeme ju a $X^{-1}(z)$ vynásobíme s maticou $dX(z)$ (matica $X(z)$ po aplikovaní d na každý jej prvok). Z $X^{-1}(z)dX(z)$ už stačí iba vyzbierať nezávislé elementy (1-formy), tie tvoria bázu hľadaného kovektorového poľa. V prvej parametrizácii máme

$$X^{-1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & -x & xy - z \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad dX(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & dx & dz \\ 0 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X^{-1}(x, y, z)dX(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & dx & dz - xdy \\ 0 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dostali sme teda zhodu s predchádzajúcim výsledkom (12).

Výpočet v druhej parametrizácii

V druhej parametrizácii parametrizujeme Heisenbergovu grupu nasledovne

$$\begin{pmatrix} 1 & x & (z + \frac{1}{2}xy) \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Chceme nájsť všeobecné kovektorové pole, ktoré by bolo ľavo invariantné vzhľadom na Heisenbergovu grupu. Postupujeme podobne ako pri prvej parametrizácii. Ľavo invariantnosť nám dáva

$$\begin{aligned} & A(a+x, b+y, z+c + \frac{1}{2}(ay-bx))d(a+x) + \\ & + B(a+x, b+y, z+c + \frac{1}{2}(ay-bx))d(a+y) + \\ & + C(a+x, b+y, z+c + \frac{1}{2}(ay-bx))d(c+z + \frac{1}{2}(ay-bx)) = \\ & = A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz \end{aligned}$$

¹⁸Pozri [1], kapitola 11.1.

Čo podrobnejšie znamená

$$\begin{aligned} A(x, y, z) &= A(x + a, y + b, z + c + \frac{1}{2}(ay - bx)) - \\ &- \frac{b}{2}C(x + a, y + b, z + c + \frac{1}{2}(ay - bx)) \end{aligned}$$

$$C(x, y, z) = C(x + a, y + b, z + c + \frac{1}{2}(ay - bx))$$

$$\begin{aligned} B(x, y, z) &= B(x + a, y + b, z + c + ay) + \\ &+ \frac{a}{2}C(x + a, y + b, z + c + ay) \end{aligned}$$

a vyplýva z toho

$$\begin{aligned} A(y) &= \frac{C_3}{2}y + C_1 \\ B(x) &= -\frac{C_3}{2}x + C_2 \\ C &= C_3 = \text{const.} \end{aligned}$$

Kovektorové pole sa teda dá zapísať takto

$$\alpha = C_1 dx + C_2 dy + C_3 \left(\frac{y}{2} dx - \frac{x}{2} dy + dz \right) \quad (15)$$

resp.

$$\alpha = C_1 e^1 + C_2 e^2 + C_3 e^3 \quad (16)$$

pričom

$$e^1 = dx \quad e^2 = dy \quad e^3 = dz + \frac{y}{2} dx - \frac{x}{2} dy \quad (17)$$

Pre duálnu bázu vektorových polí potom máme

$$e_1 = \partial_x - \frac{y}{2} \partial_z \quad e_2 = \partial_y + \frac{x}{2} \partial_z \quad e_3 = \partial_z \quad (18)$$

Alebo môžeme postupovať analogicky ako na konci predchádzajúceho paragrafu (kde sa aj nachádza vysvetlenie použitej metódy hľadania báz ľavo-invariantných 1-foriem na maticových grupách) a dopracujeme sa k výsledku (17) (nezávislé elementy matice $X^{-1}(x, y, z)dX(x, y, z)$ tvoria našu bázu)

$$X^{-1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & -x & \frac{1}{2}xy - z \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$dX(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & dx & dz + \frac{1}{2}xdy + \frac{1}{2}ydx \\ 0 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X^{-1}(x, y, z)dX(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & dx & dz + \frac{1}{2}ydx - \frac{1}{2}xdy \\ 0 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nezávislé elementy výslednej matice sa zhodujú s bázou (17).

Poznamenajme, že keď nájdeme sub-Riemannovu geodetiku na Heisenbergovej grupe, tak ju môžeme ľubovoľne posúvať pôsobením Heisenbergovej grupy a stále zostane sub-Riemannovou geodetikou. Dôvodom je, že celá sub-Riemannova štruktúra je vybudovaná z ľavo-invariantných objektov, takže aj všetky jej "dôsledky" (typu geodetik) budú ľavo-invariantné. Dá sa to napr. využiť tak, že keď nájdeme geodetiku z počiatku, tak ju už máme odkiaľkoľvek, pretože ľavá transtácia na grupe je tranzitívna, takže ľubovoľný bod sa dá dosiahnuť z ľubovoľného iného, špeciálne z počiatku.

5.2 Návrat k úlohe Dido

Hľadáme tvar krivky, ktorá obopína najväčšiu plochu. Použijeme pri tom *sub-Riemannov Hamiltonián*, o ktorom bola reč v kapitole (4). V tomto paragrafe sa pokúšame predviesť riešenie konkrétnej úlohy (extremalizácia plochy) a popri tom ukázať (všeobecnejšiu) príslušnú teóriu.

Všimnime si zaujímavú zhodu medzi výrazom na ľavej strane rovnice (4)

$$dz - \frac{1}{2}(xdy - ydx)$$

a výrazom vystupujúcim ako tretí element bázy konvektorového priestoru e^3 , ktorý sme získali z podmienky ľavo-invariantnosti vzhľadom na Heisenbergovu grupu (celá báza je pod označením (17)). Práve táto zhoda je v pozadí súvisu geometrie Heisenbergovej grupy s úlohou Dido.

Naša báza

$$\begin{aligned} e_1 &= \partial_x - \frac{y}{2}\partial_z \\ e_2 &= \partial_y + \frac{x}{2}\partial_z \\ e_3 &= \partial_z \end{aligned}$$

je bázou dotykového priestoru duálnou ku báze kodotykového priestoru, ktorá je ľavo invariantná vzhľadom na Heisenbergovu grupu. V kapitole (3) o úlohe Dido sme si ukázali, že keď zdvíhame našu krivku vždy o toľko, o koľko nám pribudlo opísanej plochy (zdvih do tretieho rozmeru), tak dostávame *1-formu*, ktorá zadáva distribúciu s bázou (prvé dva prvky z predchádzajúcej bázy ostávajú, tretí vypadáva)

$$\begin{aligned} e_1 &= \partial_x - \frac{y}{2}\partial_z \\ e_2 &= \partial_y + \frac{x}{2}\partial_z \end{aligned}$$

Vidíme teda, že distribúcia, ktorá sa objavila v úlohe Dido, sa z pohľadu Heisenbergovej grupy naťahuje na ľavo invariantné polia e_1, e_2 .

Chceme zostaviť sub-Riemannov Hamiltonián. Najprv zdvihneme vektorové polia e_1, e_2 podľa vzťahov (6) a (7). V našom prípade dostaneme (využijúc $P_a(x, p) = e_a^\mu(x)p_\mu$)

$$\begin{aligned} P_1 &= p_x - \frac{1}{2}yp_z \\ P_2 &= p_y + \frac{1}{2}xp_z \end{aligned}$$

Ostáva povedať, ako bude vyzerat' naše h^{ab} vystupujúce v Hamiltoniáne

$$H(x, p) \equiv \frac{1}{2}\dot{h} = \frac{1}{2}h^{ab}P_aP_b$$

V 4. kapitole sme spomenuli súvis s metrickým tenzorom g_{ab} a síce $h^{ab} = g^{ab}$. Prezradíme, že naše h^{ab} bude rovné δ^{ab} . V intuitívnej rovine sa to dá chápať tak, že keď robíme priemet bázových prvkov našej distribúcie do roviny xy , tak dostávame ∂_x, ∂_y , čo sú dva na seba kolmé jednotkové vektory

$$\begin{aligned} \pi_{xy}e_1 &= \pi_{xy}(\partial_x - \frac{y}{2}\partial_z) = \partial_x \\ \pi_{xy}e_2 &= \pi_{xy}(\partial_y + \frac{x}{2}\partial_z) = \partial_y \end{aligned}$$

Ukradnime si pre našu distribúciu D metriku z roviny xy (robíme to tak preto, aby dĺžka meraná metrikou na distribúcii bola rovnaká ako dĺžka sprojektovanej krivky v rovine xy), teda položíme $g_{ab} = \delta_{ab}$ a naše h bude v súradnicovom tvare vyzerat'

$$h = h^{11}e_1 \otimes e_1 + h^{22}e_2 \otimes e_2 = e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2$$

a v maticovom tvare

$$h^{ab} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Konečne môžeme napísať náš Hamiltonián

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(P_1P_1 + P_2P_2) \\ &= \frac{1}{2}(p_x^2 - yp_xp_z + \frac{1}{4}y^2p_z^2 + p_y^2 + xp_yp_z + \frac{1}{4}x^2p_z^2) \\ &= \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + \frac{1}{4}p_z^2(x^2 + y^2) + xp_yp_z - yp_xp_z) \end{aligned}$$

a riešiť pre náš príklad *Hamiltonove rovnice* (bodka nad súradnicami znamená deriváciu podľa parametra)

$$\dot{x}^\mu = \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \quad \dot{p}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial x^\mu}$$

a príslušným derivovaním nášho Hamiltoniánu dostávame rovnice

$$(I.) \quad \dot{x} = p_x - \frac{y}{2}p_z$$

$$(II.) \quad \dot{y} = p_y + \frac{x}{2}p_z$$

$$(III.) \quad \dot{z} = \frac{p_z}{4}(x^2 + y^2) + \frac{x}{2}p_y - \frac{y}{2}p_x$$

$$(A) \quad \dot{p}_x = -\frac{p_z}{4}x - \frac{p_yp_z}{2}$$

$$(B) \quad \dot{p}_y = -\frac{p_z}{4}y + \frac{p_xp_z}{2}$$

$$(C) \quad \dot{p}_z = 0$$

Z rovnice (C) vyplýva, že $p_z = \text{const.}$, konštantu označíme ako k

$$p_z = k$$

Povedzme, že k je rôzne od nuly, prípad $k = 0$ rozoberieme neskôr. Ďalej upravíme rovnicu (III.)

$$(I.) \text{ vynásobíme } \frac{y}{2}(-1) \rightarrow -\frac{y}{2}\dot{x} = -\frac{y}{2}p_x + \frac{y^2}{4}p_z$$

$$(II.) \text{ vynásobíme } \frac{x}{2} \rightarrow \frac{x}{2}\dot{y} = \frac{x}{2}p_y + \frac{x^2}{4}p_z$$

Rovnice, ktoré sme dostali v poslednom kroku sčítame a dostávame

$$\frac{x}{2}\dot{y} - \frac{y}{2}\dot{x} = \frac{x}{2}p_y - \frac{y}{2}p_x + \frac{p_z}{4}(x^2 + y^2)$$

$$\frac{p_z}{4}(x^2 + y^2) = (\frac{x}{2}\dot{y} - \frac{y}{2}\dot{x}) - (\frac{x}{2}p_y - \frac{y}{2}p_x)$$

Dosadíme do rovnice (III.) za výraz $\frac{p_z}{4}(x^2 + y^2)$ pravú stranu poslednej rovnice a dostávame pre \dot{z}

$$(III.') \quad \dot{z} = \frac{x}{2}\dot{y} - \frac{y}{2}\dot{x}$$

Po týchto úpravách dostávame nasledujúcu sústavu rovníc, ktorú ideme vyriešiť

$$\dot{x} = p_x - \frac{y}{2}k \qquad \dot{p}_x = -\frac{k^2}{4}x - \frac{k}{2}p_y$$

$$\dot{y} = p_y - \frac{x}{2}k \qquad \dot{p}_y = -\frac{k^2}{4}y + \frac{k}{2}p_x$$

Úpravami iba týchto štyroch rovníc postupne dostávame

$$p_x = \dot{x} + \frac{y}{2}k$$

$$p_y = \dot{y} - \frac{x}{2}k$$

$$\dot{p}_x = -\frac{k^2}{4}x - \frac{k}{2}(\dot{y} - \frac{x}{2}k) = -\frac{k}{2}\dot{y}$$

$$p_x = -\frac{k}{2}y + c_1$$

$$\dot{p}_y = -\frac{k^2}{4}y + \frac{k}{2}(\dot{x} + \frac{y}{2}k) = -\frac{k}{2}\dot{x}$$

$$p_y = \frac{k}{2}x + c_2$$

$$\dot{x} = -\frac{k}{2}y + c_1 - \frac{k}{2}y = -ky + c_1$$

$$\dot{y} = \frac{k}{2}x + c_2 + \frac{k}{2}x = kx + c_2$$

$$\ddot{x} = -k\dot{y}$$

$$k\ddot{y} = k^2x + kc_2$$

$$-\ddot{x} = k^2x + kc_2$$

$$x = A \cos(kt + \varphi_0) - c_2/k$$

$$\dot{y} = k[A \cos(kt + \varphi_0) - c_2/k] + c_2$$

$$y = A \sin(kt + \varphi_0) + B$$

$$c_2/k = -C$$

$$A^2 = (x - C)^2 + (y - B)^2$$

V prípade, že $k = 0$, dostávame:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= p_x \\ \dot{y} &= p_y \\ \dot{p}_x &= 0 \\ \dot{p}_y &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= c_1 \\ \dot{y} &= c_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= c_1 t + c_3 \\ y &= c_2 t + c_4\end{aligned}$$

Vyšla nám priamka, čo zodpovedá takej situácii, že dĺžka lana sa presne rovná vzdialenosti spájaných bodov. V tomto degenerovanom prípade očividne nie je čo riešiť.

Vidíme, že (pre nedegenerovaný prípad) sme dostali rovnicu kružnice so stredom v bode (C, B) a polomerom A (zhoda s Didoniným riešením a riešením z variačného počtu). Keďže $t \in (0, \tau)$ ide vlastne o časť kružnice. Záver je taký, že plocha, ktorú opíše sprievodič pohybujúci sa po krivke, je minimálna pre krivku, ktorá je časťou kružnice. Kebyže máme úlohu spojiť body P_1 a P_2 krivkou dĺžky l (pevná dĺžka) tak, aby sprievodič po krivke opísal najmenšiu plochu, tak nájdeme kružnicu, na obode ktorej budú ležať naše dva body a ich vzdialenosť po tejto kružnici bude práve l . Dostaneme vlastne dve kružnice s rovnakým polomerom (umiestnené osovo-symetricky, pričom os je spojnice bodov P_1 a P_2), ale ľahko uvidíme, ktorú máme vybrať (tú, ktorá bude vyklenutá smerom k počiatku).

Časť II

Diferenciálna geometria a Lieove grupy

Vy, čo vstupujete, zanechajte
všetky nádeje!

Nápis nad bránou do
Danteho pekla.

Táto časť práce je pre čitateľa, ktorý sa ešte nestretol s diferenciálnou geometriou. Oboznámime sa tu so základnými pojmami, ktoré používame v prvej časti, a to iba na takej úrovni, aká bude nevyhnutná, takže nebudeme zachádzať do (pre nás) zbytočných detailov. Kľúčové pre takeého čitateľa je pochopiť *distribúcie* a hľadanie *geodetík*.

6 Lineárna algebra tenzorov

Majme ľubovoľný n -rozmerný lineárny priestor L (vektorový priestor) nad poľom \mathbb{R} . Lineárne formy na L , t.j. lineárne zobrazenia

$$\alpha : L \rightarrow \mathbb{R} \quad \alpha(v + \lambda w) = \alpha(v) + \lambda \alpha(w) \quad v, w \in L, \lambda \in \mathbb{R}.$$

tvoria tiež lineárny priestor, duálny priestor L^* . Jeho prvky sa zvyknú volať *kovektory* na L . Pôsobenie kovektora na vektor môžeme znázorniť aj iným spôsobom

$$\langle \alpha, v \rangle := \alpha(v) \quad (19)$$

ktorý zdôrazňuje emancipáciu pôsobenia vektorov na kovektory s pôsobením kovektorov na vektory. Kovektory majú bázu, ktorá je duálna voči e_a

$$\alpha = \alpha_a e^a \quad \alpha_a := \langle \alpha, e_a \rangle,$$

čo je ekvivalentné s výrazom

$$\langle e^b, e_a \rangle = \delta_a^b$$

Tensor je také zaujímavé zobrazenie, do ktorého sa vkladajú vektory a kovektory (ďalej si povieme ako) a tenzor vyplúje číslo. Teda, tenzor má nejaké

okienka (vstupy) pre vektory a iné okienka pre kovektory a iba jednu rúrku (výstup), z ktorej sa sypú čísla, pričom tenzor je v každom okienku lineárny. Počet okienok pre vektory si označme ako q a počet okienok pre kovektory si označme ako p a máme tenzor typu $\binom{p}{q}$. Množinu tenzorov typu $\binom{p}{q}$ nad L budeme označovať $T_q^p(L)$ a pre $T_0^0 := \mathbb{R}$. Symbolicky zapisujeme uvedené vlastnosti nasledovne

$$t : \underbrace{L \times \dots \times L}_q \times \underbrace{L^* \times \dots \times L^*}_q \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\underbrace{(v, \dots, w)}_q; \underbrace{(\alpha, \dots, \beta)}_p \mapsto t(v, \dots, w, \alpha, \dots, \beta) \in \mathbb{R}$$

$$t(\dots, v + \lambda w, \dots) = t(\dots, v, \dots) + \lambda t(\dots, w, \dots)$$

Tenzor je plne určený, ak poznáme jeho hodnoty na všetkých bázových prvkoch. Čísla

$$t_{a\dots b}^{c\dots d} := t(e_a, \dots, e_b; e^c, \dots, e^d)$$

sa nazývajú zložkami (komponentami) tenzora t voči báze a ďalej platí (pričom rozklady argumentov vyzerajú takto: $v = v^a e_a$, $\alpha = \alpha_a e^a$)

$$t(v, \dots, w; \alpha, \dots, \beta) = t_{a\dots b}^{c\dots d} v^a \dots w^b \alpha_c \dots \beta_d$$

Ďalej sa pozrieme na tenzorový súčin \otimes . Tenzorový súčin je zobrazenie

$$\otimes : T_q^p(L) \times T_{q'}^{p'}(L) \rightarrow T_{q+q'}^{p+p'}(L)$$

Toto násobenie sa definuje predpisom

$$(t \otimes \sigma)(v_1, \dots, v_q; w_1, \dots, w_{q'}; \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_{p'}) :=$$

$$:= t(v_1, \dots, v_q; \alpha_1, \dots, \alpha_p) \sigma(w_1, \dots, w_{q'}; \beta_1, \dots, \beta_{p'})$$

čo znamená, že najprv vkladáme vektory a kovektory do prvého tenzora až kým nebude plný (dostaneme číslo) a potom zvyšné vektory a kovektory do druhého tenzora (dostaneme číslo). Potom tieto dve čísla vynásobíme. Tento súčin využijeme na definovanie bázy tenzora. Tenzor $t \in T_q^p(L)$ v rozklade do bázy vyzerá nasledovne

$$t = t_{a\dots b}^{c\dots d} e^a \otimes \dots \otimes e^b \otimes e_c \otimes \dots \otimes e_d$$

Na tomto mieste sa stručne zmienime o jednom zaujímavom použití tenzorov. Ukážeme si to na pár jednoduchých príkladoch. Predstavme si, že sme pod stromček dostali tenzor typu $\binom{1}{1}$, teda tenzor s dvomi okienkami rôznych typov - $t(\cdot; \cdot)$ (ľavá bodka znamená, že "sem treba vložiť vektor" a pravá bodka, že "sem treba vložiť kovektor")

$$t : L \times L^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(v, \alpha) \mapsto t(v, \alpha) \in \mathbb{R}$$

Z minulých Vianoc máme ešte odložený jeden vektor (kovektor sme požičali kamarátovi). Aby sme sa nenudili, tak náš vektor vhodíme do okienka pre vektory na našom tenzore (do okienka pre kovektory nepasuje, to sme skúšali ako prvé). Zrazu sa stane niečo zvláštne, náš tenzor bude vyzerat' tak, že mu ostane prázdne už iba jedno okienko - to pre kovektory - $t(v; \cdot)$ a bude čakať už iba na kovektor, zmení sa teda na tenzor typu $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Povedzme si ešte, že to, čo čaká na kovektor je vlastne akoby vektor (niečo sme už naznačili vzť'ahom (19)). Náš tenzor typu $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sme teda použili ako zobrazenie, ktoré vektorom priraďuje vektory

$$t : L \rightarrow L$$

$$v \mapsto t(v; \cdot)$$

Niečo podobné dostávame aj keď do $t(\cdot; \cdot)$ vhodíme iba kovektor, ostane prázdne okienko pre vektory - máme teda tenzor typu $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, čo je vlastne kovektor. V tomto prípade sme použili náš tenzor ako zobrazenie, ktoré priraďuje kovektorom kovektory

$$t : L^* \rightarrow L^*$$

$$\alpha \mapsto t(\cdot; \alpha)$$

Predstavme si ešte, že sme dostali tenzor h typu $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, ktorý má dve okienka určené pre kovektory - $h(\cdot, \cdot)$.

$$h : L^* \times L^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\alpha, \beta) \mapsto h(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$$

Vhodením jedného kovektora do h dostaneme čosi, čo čaká iba na kovektor. Niečo, čo čaká iba na kovektor je vlastne vektor. Teraz sme použili tenzor ako zobrazenie, ktoré priraďuje kovektorom vektory.

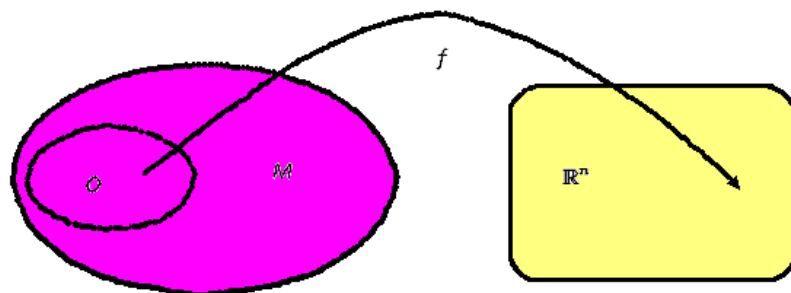
$$h : L^* \rightarrow L$$

$$\alpha \mapsto h(\alpha, \cdot)$$

7 Variety a tenzorové polia na nich

7.1 Varieta

Pre naše potreby nie je veľmi dôležité rozumieť presne, čo to je *varieta*, ale pre základnú predstavu skúsime niečo o variete povedať. **Varieta M je množina bodov, ktorá je lokálne ako \mathbb{R}^n** , pričom dimenzia M je n . Byť lokálne ako \mathbb{R}^n znamená jednoducho asi toľko, že na každej časti (otvorenej množine O) našej variety M môžeme zaviesť *lokálne súradnice* pozostávajúce z n -tice reálnych čísel. Pojem variety môžeme definovať aj trochu presnejšie¹⁹. Množina M je varietou, ak každý bod z M patrí do nejakého otvoreného okolia O takého, že existuje jeho spojitě bijektívne zobrazenie f do otvorenej množiny z \mathbb{R}^n (spojitosť zobrazenia f tu znamená, že každá otvorená množina z \mathbb{R}^n obsahujúca $f(x)$ obsahuje obraz z otvorenej množiny z M). Dvojica (O, f) sa zvykne nazývať *mapa*.



Obrázok 6: Symbolické znázornenie lokálnej podobnosti variety M s \mathbb{R}^n

Hovoríme o zavádzaní lokálnych súradníc, resp. o lokálnej podobnosti s \mathbb{R}^n , keďže zaviesť globálne súradnice by nemuselo byť možné, resp. globálne môže varieta vyzerat' úplne ináč ako \mathbb{R}^n . Ako príklad si uvedieme povrch gule, teda sféru. Skúsme zaviesť na sfére globálne súradnice. Zoberme obyčajné sférické súradnice, pričom $\theta \equiv x^1$ a $\varphi \equiv x^2$. Zdá sa potom, že sféra je zobrazovaná na obdĺžnik $0 \leq x^1 \leq \pi, 0 \leq x^2 \leq 2\pi$. Ale čo sa deje na póle $\theta = 0$? Tento jeden bod je zobrazený na celú priamku $x^1 = 0, 0 \leq x^2 \leq 2\pi$, takže v tomto bode nemáme mapu. Druhý problém nastáva pre $\varphi = 0$, kde sú body zobrazované na dve miesta: $x^2 = 0$ a $x^2 = 2\pi$, takže tu opäť nemáme mapu. Aby sme sa vyhli týmto ťažkostiam, môžeme vybrať otvorenú oblasť $0 < x^1 < \pi, 0 < x^2 < 2\pi$ a polkružnicu $\varphi = 0$ s pólmi z tejto mapy vynecháme. Ako druhú mapu zoberieme napríklad iné sférické súradnice s $\varphi = 0$ na rovníku prvého systému, kde $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$. Každý bod sféry bude teda aspoň v jednej z týchto dvoch máp (a súbor

¹⁹Tu sme zvolili výklad podľa [3]. Ak sa to niekomu nepáči, môže sa pozrieť do [1].

máp, ktoré pokrývajú celú varietu, nazveme *atlasom*). Je možné vymýšľať ďalšie mapy pre sféru, ale všetky zlyhajú aspoň v jednom bode.

7.2 Dotykový (tangenciálny) priestor

Keďže sme si už jednoducho predstavili *varietu*, tak sa pozrieme na vektory na *variete*. Vektory na variete predstavujú isté zovšeobecnenie nám známym vektorom v dvoj- a troj- rozmernom priestore a vyžadujú si trochu iný prístup. Klasická predstava vektorov ako šípčiek rýchlo zlyháva na zakrivených povrchoch (priestoroch), takáto (rovná) šípka by vlastne mohla vytŕčať z nášho priestoru, čo by vôbec nedávalo zmysel.

V každom bode P n -rozmernej variety M možno definovať istý n -rozmerný vektorový priestor. Jeho elementy sa nazývajú vektory v bode $P \in M$. Tento priestor nazveme *dotykovým priestorom* a prístupíme k nemu cez pojem dotýkajúcich sa kriviek. Krivky $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ sa dotýkajú v bode P vtedy, keď pre $t = 0$ sú v bode P a ich derivácia podľa parametra t pre všetky zložky súradníc je rovnaká pre obe krivky

$$\begin{aligned}\gamma_1(0) &= \gamma_2(0) = P \\ \frac{d}{dt}x^i(\gamma_1(t)) &= \frac{d}{dt}x^i(\gamma_2(t))\end{aligned}$$

Vidíme, že pohyb po týchto krivkách je vlastne do prvého rádu rovnaký a krivky, ktoré sa dotýkajú, nazveme ekvivalentnými krivkami a povieme, že tvoria triedu ekvivalencie. Každý takejto triede ekvivalencie zodpovedá vektor, alebo by sa dalo povedať, že vektor je jednoznačne určený triedou ekvivalencie. Množina tried ekvivalencie tvorí náš dotykový priestor $T_P M$, pričom dolný index P znamená, že náš dotykový priestor sa viaže k bodu P . Pojem dotykového priestoru je možné ekvivalentne zaviesť aj inými spôsobmi. Pre nás bude praktické zaviesť vektory ako diferenciálne operátory prvého rádu (operátory sú zobrazenia, ktoré priradujú funkciám funkcie) s konštantnými koeficientami, t.j. výraz

$$a^i \partial_i|_P$$

(vychádzajúc zo smerovej derivácie funkcie - ako názov napovedá, smerová derivácia v sebe nesie informáciu o smere - v koeficientoch a^i). Používame označenie parciálnej derivácie

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Vektorové pole môžeme potom písať v tvare (vektorové pole priraduje každému bodu vektor, ako možno vidieť z výrazu nižšie a koeficienty nie sú konštantné)

$$V = V^i(x)\partial_i = V^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

pričom $i = 1, 2, \dots, n$, kde n je rozmer nášho vektorového poľa V .

Ako je už asi zrejmé, aj kovektorové polia majú koeficienty závisiace od polohy

$$\alpha = \alpha_a(x)e^a \quad \alpha_a(x) := \langle \alpha, e_a \rangle.$$

Tensorové pole typu $\binom{p}{q}$ na M je predpis, ktorý každému bodu priradí uje jeden tenzor typu $\binom{p}{q}$, môžeme si ho predstaviť ako tenzor s nekonštantými zložkami (komponentami). Samotný tenzor v bode $P \in M$ si berie ako argumenty vektory a kovektory v P . Na úrovni polí sa toto deje v každom bode.

8 Metrický tenzor a Riemannova geometria

Metrický tenzor na L je symetrický nedegenerovaný tenzor typu $\binom{0}{2}$, t.j. $g \in T_2^0(L)$

$$\begin{array}{ll} g(v, w) = g(w, v) & \text{symetrickosť} \\ g(v, w) = 0 \text{ pre všetky } w \Rightarrow v = 0 & \text{nedegenerovanosť} \end{array}$$

Kanonický tvar metrického tenzora (dá sa dosiahnuť vhodným výberom bázy - tzv. *ortonormovanej bázy*) je

$$g_{ab} = \eta_{ab} \equiv \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$$

pričom kladných prvkov 1 na diagonále je r a záporných prvkov -1 je s a hovoríme, že metrický tenzor má signatúru (r, s) . Kladná definitnosť znamená, že $s = 0$. Ako príklad na variete si uvedieme metrický tenzor na obyčajnej euklidovskej rovine v kartézskych súradniciach

$$g = dx \otimes dx + dy \otimes dy$$

8.1 Hľadanie geodetík v riemannovskom prípade

Geodetika je najkratšia spojnica dvoch bodov. Podľa našej intuície je to rovná čiara. Po rovných čiarach (po priamkach) sa rovnomerným pohybom pohybujú telesá (ak práve nestoja) bez pôsobenia vonkajších síl (alebo s nulovou výslednicou vonkajších síl, ale podobné nepodstatnosti ponechajme na stredoškolských učiteľov fyziky). Túto analógiu pohybu telesa bez pôsobenia síl (bez potenciálu) použijeme na to, aby sme ukázali, že rovnicu geodetiky dostaneme z Lagrangeovej rovnice pre voľné teleso (je tam v nejakom zmysle ekvivalencia). Rovnica *geodetiky* je

$$\ddot{q}^a + \Gamma_{bc}^a(q)\dot{q}^b\dot{q}^c = 0 \quad (20)$$

kde

$$\Gamma_{bc}^a := (T^{-1})^{ad}(q)\Gamma_{dbc}(q)$$

je *Christoffelov symbol 2. druhu* a

$$\Gamma_{abc}(q) = \frac{1}{2}(T_{ab,c} + T_{ac,b} - T_{bc,a})$$

je *Christoffelov symbol 1. druhu*, pričom

$$T_{ab,c} = \frac{\partial}{\partial q^c} T_{ab}$$

Pre voľné teleso v lagrangeovskom formalizme máme

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q})$$

(L je Lagranžián a všeobecne je rovný rozdielu kinetickej energie a potenciálnej energie). Kinetická energia bola zavedená ako

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}T_{ab}(q)\dot{q}^a\dot{q}^b$$

Teleso sa bude pohybovať po dráhe (pohyb telesa je analógia, samozrejme u nás sa v skutočnosti nebude hýbať nič), ktorá spĺňa Lagrangeovu rovnicu

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial L}{\partial q^a} = 0 \quad (21)$$

Dosadením našej kinetickej energie za Lagranžián a dostatočným pohrkaním rovnice (21) dostaneme rovnicu geodetiky (20).

Teraz sa pozrieme na *Hamiltonov formalizmus* (bez potenciálu), čo je ekvivalentná metóda riešenia mechanických úloh. Hamiltonov formalizmus dostaneme Legendreovou transformáciou súradníc (namiesto \dot{q}^a - a -tej zovšeobecnenej rýchlosti - sa používa p^a - a -ta zovšeobecnená hybnosť, q^a - a -ta zovšeobecnená poloha ostáva nezmenená). Potom dostávame Hamiltonián (ako inverznú transformáciu) v tvare

$$H(q, p) = p_i \dot{q}^i(q, p) - L(q, \dot{q}(q, p)) \quad (22)$$

a Hamiltonove rovnice

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

Hamiltonián môžeme prepísať do pre nás krajšieho tvaru. Vieme, že Hamiltonián vyjadruje celkovú energiu, v našom prípade kinetickú. Prepíšeme teda vzťah pre kinetickú energiu

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} T_{ab}(q) \dot{q}^a \dot{q}^b$$

využívajúc, že pre hybnosti platí

$$p_a \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} = T_{ab} \dot{q}^b$$

a teda

$$\dot{q}^a = (T^{-1})^{ab} p_b$$

čo po dosadení do vzťahu pre kinetickú energiu dáva

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} T_{ab} (T^{-1})^{ac} p_c (T^{-1})^{bd} p_d \\ &= \frac{1}{2} (T^{-1})^{cd} p_c p_d \end{aligned}$$

a teda

$$H(q, p) = \frac{1}{2} (T^{-1})^{ab} p_a p_b$$

Riešením Hamiltonových rovníc s našim Hamiltoniánom sa dopracujeme k $x^a(t)$ a $p_a(t)$. Časť $x^a(t)$ nám dáva geodetiky. Časť $p_a(t)$ nie je pre nás potrebná, musíme ju však žiaľ pri riešení vypočítať.

8.2 Príklad: Geodetiky na sfére

Lagrangeov formalizmus

Kinetická energia sférického kyvadla vo sférických súradniciach (bez potenciálnej energie $g = 0$, l je dĺžka závesu) je

$$T(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2} (l^2 \dot{\vartheta}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta)$$

Počítajme ďalej, najprv si pripravme derivácie do Lagrangeovej rovnice pre ϑ

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = ml^2 \dot{\vartheta}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = ml^2 \ddot{\vartheta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \vartheta} = ml^2 \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta$$

Rovnica pre ϑ bude

$$ml^2 \ddot{\vartheta} - ml^2 \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = 0$$

Teraz vyjadríme derivácie pre φ

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \ddot{\varphi} 2 \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + ml^2 \ddot{\varphi} \sin^2 \vartheta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

a prislúchajúca rovnica

$$\ddot{\varphi} \sin^2 \vartheta + \dot{\varphi} 2 \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta = 0$$

Rovnice, ktoré sme dostali nebudeme ďalej riešiť, ukážeme si iba dve riešenia. Prvé, ktoré vyhovuje obom rovniciam je $\vartheta = \pi/2$, $\varphi = \omega t$ (t je parameter, podľa ktorého derivujeme (bodkujeme)) - stačí dosadiť. Ide o rovnomerný pohyb po rovníku. Príklad je ale rotačne invariantný (bez poľa tu nie je význačná orientácia), čo znamená, že všetky kružnice také ako rovník (veľké kružnice) sú geodetikami. Druhé riešenie sú poludníky: $\varphi = \varphi_0$ (ľub. pevný uhol), $\vartheta = \omega t$, ale to už sme si mali domyslieť na základe predchádzajúcej úvahy (a státie na póloch pre nás nie je zaujímavé).

Hamiltonov formalizmus

V Hamiltonovom formalizme dostávame

$$p_\varphi = ml^2 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta$$

$$p_\vartheta = ml^2 \dot{\vartheta}$$

$$H = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta)$$

ale pozor, Hamiltonián má byť vyjadrený cez hybnosti namiesto cez obodkované súradnice

$$H(\vartheta, \varphi, p_\vartheta, p_\varphi) = \frac{1}{2} \left(p_\vartheta^2 \frac{1}{ml^2} + p_\varphi^2 \frac{1}{ml^2 \sin^2 \vartheta} \right)$$

Dostávame teda Hamiltonove rovnice

$$\dot{p}_\varphi = 0$$

$$\dot{p}_\vartheta = p_\varphi^2 \frac{1}{ml^2} \frac{\cos \vartheta}{\sin^3 \vartheta}$$

$$\dot{\varphi} = p_\varphi \frac{1}{ml^2 \sin^2 \vartheta}$$

$$\dot{\vartheta} = p_\vartheta \frac{1}{ml^2}$$

Nechávame na čitateľa detaily previerky, že riešenia spomenuté v lagrangeovskom formalizme sa dajú použiť aj tu.

9 Distribúcie na variete

Na n -rozmernej variete M môžeme definovať k -rozmernú distribúciu D . k -rozmerná distribúcia je vlastne v každom bode fixovaný k -rozmerný podpriestor priestoru $T_x M$

$$D_x \subset T_x M \quad \dim D_x = k$$

Keď máme takúto distribúciu na M , tak nás môže zaujímať, či je možné varietu M rozvrstviť na k -rozmerné podvariety, ktoré by spájali susedné podpriestory

do jedného celku. Ak je to možné, tak distribúciu nazveme integrovateľnou, ak nie, tak neintegrovateľnou.

k -rozmerné podpriestory v našom n -rozmernom priestore môžeme opisovať viacerými spôsobmi, na tomto mieste sa pozrieme na dva. Je celkom prirodzené zobrať k -ticu lineárne nezávislých vektorov. Keďže vyberáme vektory v každom bode, tak ide vlastne o k vektorových polí. Druhý spôsob je vybratie $(n - k)$ -tice kovektorov v každom bode, teda $(n - k)$ ohraničujúcich 1-foriem. Prvý a druhý spôsob určujú ten istý podpriestor (distribúciu), keď všetky ohraničujúce 1-formy anihilujú vektorové polia

$$\langle \theta^i, e_\alpha \rangle$$

Pre nás bude výhodné zadať distribúciu iným spôsobom a to cez tenzorové pole h typu $\binom{2}{0}$. Zvolíme si také tenzorové pole h (ranku k) aby obraz tohto tenzorového polia bola naša distribúcia D (k -rozmerná)

$$D = \text{Im } h$$

Tenzorové pole používame ako zobrazenie, ktoré kovektorom priradí vektory

$$h : L^* \rightarrow L \quad \alpha \mapsto h(\alpha; \cdot)$$

Povedzme, že e_a sú bázové prvky distribúcie D (je ich k , keďže D je k -rozmerná distribúcia) a e_i sú zvyšné prvky do bázy celého n -rozmerného vektorového priestoru L . Potom máme *adaptovanú* bázu priestoru L a to: $e_\alpha = (e_a, e_i)$ a naše tenzorové pole môžeme rozpísať spolu s bázami nasledovne

$$h = h^{ab} e_a \otimes e_b + h^{ai} e_a \otimes e_i + h^{ia} e_i \otimes e_a + h^{ij} e_i \otimes e_j$$

Pre lepšiu predstavu si vhodíme do tenzora h kovektor $\alpha = \alpha_c e^c$ a dostaneme takýto vektor

$$h(\alpha, \cdot) = \dots = (\alpha_b h^{ba} + \alpha_i h^{ia}) e_a + (\alpha_a h^{ai} + \alpha_j h^{ji}) e_i$$

a keďže chceme dostať, že $D = \text{Im } h$, tak položíme h^{ai} a h^{ji} rovné nule. Ďalej si stanovíme ako podmienku, že $h^{ia} = 0$ a $h^{ab} = h^{ba}$. Takže vidíme, že celá distribúcia je určená ako

$$h = h^{ab} e_a \otimes e_b \quad h^{ab} = h^{ba}$$

Alebo v maticovom tvare

$$h \leftrightarrow \begin{pmatrix} h^{ab} & h^{ai} \\ h^{ia} & h^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^{ab} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad h^{ab} = h^{ba}$$

10 Lieove grupy a ľavo-invariantnosť

10.1 Grupa

Grupa je množina, na ktorej je definovaná operácia násobenia ako binárna operácia, pričom sa násobia navzájom prvky z danej grupy. Táto operácia násobenia (označuje sa ako krúžok) musí byť asociatívna, čo znamená, že je možné zmeniť poradie násobenia (zátvorky) bez zmeny výsledku. Ďalej tu musí existovať jednotkový prvok, ktorým keď násobíme ľubovoľný prvok z našej grupy, tak dostaneme pôvodný prvok. A nakoniec, pre všetky prvky z našej grupy musí existovať inverzný prvok, ktorým keď násobíme pôvodný prvok, tak dostaneme jednotkový prvok.

10.2 Lieova grupa a Lieova algebra

Na Lieovej grupe fungujú dve štruktúry - grupa a varieta. To znamená, že Lieova grupa je po prvé grupou a po druhé je možné na nej zaviesť nejaké súradnice (veľmi zjednodušene povedané, ale na tomto mieste to bude stačiť).

Lieova algebra musí spĺňať dve podmienky:

1. Musí byť lineárnym (vektorovým) priestorom (rozmeru n), čo znamená uzavretosť na lineárne kombinácie.
2. Musí byť na nej definovaná bilineárna operácia - komutátor (Lieova zátvorka), ktorá je bilineárna, antisymetrická a spĺňa Jacobiho identitu.

Lieovej grupe možno priradiť Lieovu algebru, ako uvidíme v časti o Heisenbergovej grupe.

10.3 Ľavo-invariantnosť foriem

Aby sme pochopili súvis Heisenbergovej grupy so vzťahom (4), musíme ešte vybrať z bohato prestretého stola diferenciálnej geometrie jedno sústo - *ľavo-invariantnosť*. Po jeho prežití si ukážeme aké kovektorové polia sú ľavo-invariantné vzhľadom na Heisenbergovu grupu a opätovne objavíme vzťah (4) pre zdvihnutú krivku.

10.3.1 Ľavé translácie

Ľavá translácia (chápeme ju ako zobrazenie) je definovaná nasledovne (pre ľubovoľné $g \in G$)

$$L_g : G \rightarrow G \quad h \mapsto L_g h := gh \quad (23)$$

Vidíme, že prvok h z grupy G , na ktorý je aplikovaná ľavá translácia L_g , je vlastne akoby iba vynásobený zľava prvkom g . Analogicky je možné zaviesť pravé translácie, v našej práci to však nebude potrebné.

10.3.2 Pull-back

Pre jednoduchosť začneme *pull-backom* funkcie. Funkcia na variete M je (hladké) zobrazenie

$$f : M \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$$

Predstavme si nejaké zobrazenie variet $f : M \rightarrow N$ (pričom M môže byť totožné s N). Ďalej si predstavme, že na M máme funkciu χ a na N funkciu ψ

$$\mathbb{R} \xleftarrow{\chi} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}$$

Zložením zobrazení f a ψ dostávame nové zobrazenie

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}$$

$$\psi \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}$$

a záver pre nás je taký, že funkcie sa dajú prenášať smerom "dozadu" (odtiaľ *pull-back*). V súradnicovom vyjadrení vyzerá *pull-back* nasledovne (f je zobrazenie variet, χ funkcia na variete, tak ako vyššie)

$$f : x^i \mapsto y^a(x) \quad \Rightarrow \quad (f^* \chi)(x) = \chi(y(x))$$

z čoho zreteľne vidíme, že ak by M a N boli totožné, tak *pull-back* vlastne aplikuje funkciu χ na varietu N vyjadrenú cez "staré" súradnice (súradnice z M) - $y(x)$.

Teraz pristúpime k *pull-backu* kovektorov. V súradnicovom tvare sa to dá vyjadriť ako

$$f^* dy^a = J_i^a dx^i \quad \Rightarrow \quad f^*(\alpha_a dy^a) = (\alpha_a J_i^a) dx^i$$

Pull-back kovariantného tenzorového poľa (v našom prípade 1-formy, pre "viac-formy" to nebudeme potrebovať - robíme teda vlastne *pull-back* všeobecného kovektorového poľa) definujeme nasledovne

$$f^* \alpha = \alpha_a(y(x)) dy^a(x) = \alpha_a(y(x)) J_i^a(x) dx^i \quad (24)$$

pričom

$$J_i^a = \frac{\partial y^a}{\partial x^i} \quad (25)$$

10.3.3 Ľavoinvariantnosť 1-foriem na Lieovej grupe

Pull-back L_g^* ($g \in G$) aplikovaný na ľubovoľné kovektorové pole na grupe G je opäť kovektorové pole na G . Predmetom nášho záujmu bude hľadanie kovektorových polí, ktoré sa pôsobením takýchto pull-backov nemenia, také kovektorové polia nazveme *L_g -invariantné*. Dokonca nájdeme kovektorové polia, ktoré sú invariantné voči všetkým $g \in G$ súčasne. Podmienka ľavoinvariantnosti teda je

$$L_g^* \alpha = \alpha \quad \text{pre všetky} \quad g \in G \quad (26)$$

Všeobecné kovektorové pole sa dá zapísať ako

$$\alpha = \alpha_a(y) dy^a \quad (27)$$

Podmienka ľavoinvariantnosti je v súradnicovom tvare²⁰

$$f^* \alpha = \alpha_a(y(x)) J_i^a dx^i = \alpha_i(x) dx^i \quad (28)$$

kde

$$J_i^a = \frac{\partial y^a}{\partial x^i} \quad (29)$$

²⁰ $J_i^a dx^i$ môžeme chápať ako $dy^a(x)$.

Záver

Po prečítaní našej práce by mal čitateľ získať základnú predstavu o tom, čo sú to izoholonomické úlohy a ako sa riešia. Ukázali sme niekoľko príkladov takýchto úloh a vždy mali spoločné to, že sa v nich paralelne prenáša nejaký objekt po slučke, pričom na konci je tento objekt iný ako na začiatku. Objekt na konci sa získava zo začiatočného nejakým grupovým prvkom, tomuto prvku hovoríme holonómia. Skúmame triedu slučiek s rovnakou holonómiou, pričom z nej vyberáme optimálnu slučku (napr. najkratšiu). Úlohu sme formulovali v jazyku fibrovanej variety, na ktorej sme dvíhali slučku z bázy do totálneho priestoru, kde sa z nej stala neslučka. Koncový bod sa získa zo začiatočného opäť nejakým grupovým prvkom.

Riešenie izoholonomických úloh sme predviedli na úlohe Dido, ktorej jednoduchosť ju umožňuje riešiť aj na bakalárskom stupni. Išlo o úlohu nájsť slučku s danou dĺžkou, ktorá by obopínala najväčšiu plochu. Úloha Dido je izoperimetrická, čo je však špeciálnym prípadom izoholonomických úloh. Slučku sme zdvihli do tretieho rozmeru, ktorý predstavoval opísanú plochu. Našli sme distribúciu, po ktorej sa takto zdvihnutá slučka pohybuje. Aby sme našli riešenie - subriemannovskú geodetiku - zostavili sme subriemannovský Hamiltonián a vyriešili Hamiltonove rovnice. Dostali sme dávno známe riešenie - časť kružnice.

Heisenbergovu grupu sme predstavili ako jednoduchý príklad sub-Riemannovej geometrie. Ako bonus sme zistili (tiež to nie je žiadna novinka), že úloha Dido má rovnakú geometriu ako Heisenbergova grupa a distribúcia v úlohe Dido sa nat'ahuje na bázu, ktorá je rovnaká ako isté ľavo invariantné polia nájdené na Heisenbergovej grupe.

Literatúra

- [1] M. Fecko: Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov
Iris, 2004, 2008 (Cambridge 2006)
- [2] M. Fecko: Subriemannian geodesics - an introduction
Stará Lesná, Slovakia, August 24 - 30, 2009
http://sophia.dtp.fmph.uniba.sk/~fecko/referaty/stara_lesna_2009.pdf
- [3] Bernard F. Schutz: Geometrical methods of mathematical physics
Cambridge University Press 1980
- [4] Mary L. Boas: Mathematical methods in the physical sciences
John Wiley & Sons, Inc., 1966, 1983
- [5] R. Montgomery: Isoholonomic Problems and Some Applications
Communications in Mathematical Physics, 1990, Volume 128, Number 3 /
March, 565-592
- [6] R. Montgomery: A Tour of Subriemannian Geometries Their Geodesic and
Applications
American Mathematical Society (November 2001)
- [7] M. Fecko: Menej tradičné aplikácie modernej diferenciálnej geometrie
vo fyzike
Bratislava: FMFI UK, 2001, Habilitačná práca
<http://sophia.dtp.fmph.uniba.sk/fecko/habil/habilpraca.pdf>