Katedra Teoretickej Fyziky a Didaktiky Fyziky
Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzita Komenského, Bratislava

Homogénne a izotropné tenzory

(Bakalárska práca)
4.1.1 Fyzika

Márius Kádek

Vedúci: Doc. RNDr. Marián Fecko, PhD. Bratislava, 2011
Kód práce: 17929445-aee5-4008-8cdf-90a20293d157

Čestne prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne s použitím uvedených zdrojov.

Bratislava, 2. 6. 2011

. . . .

Márius Kádek

Tento text bol vysádzaný pomocou programu LaTeX.

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Márius Kádek
Študijný program: fyzika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 4.1.1. fyzika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Homogénne a izotropné tenzory

Cieľ: V teoretickej mechanike (a iste aj na iných prednáškach) sme sa stretli s folklórnou argumentáciou, že akýsi výraz, ktorý má niekoľko indexov, musí byť poskladateľný z Kroneckerových symbolov a Levi-Civitových symbolov. Keď túto ľudovú múdrosť prijmeme a využijeme, veci sa spravidla výrazne zjednodušia. (Napríklad sa takto nájde, že pružné vlastnosti homogénneho a izotropného kontinua sú opísané len dvoma konštantami.)

Ako však ľud na túto múdrosť prišiel?

Tak, že sa najprv zamyslel, aký význam vlastne do slov homogénny a izotropný vkladá a keď už v tom mal jasno, urobil príslušné výpočty. Prevažne z lineárnej algebry, tu i tam sa zíde vedieť niečo málo z Lieových grúp a algebier, čo sa doúča za pochodu.

(Ak by to mal záujemca príliš skoro hotové a už by sa nudil, pribudol by veľmi efektívny pohľadu cez Lieovu deriváciu.)

Cieľom práce by bolo urobiť príslušné výpočty a presvedčiť sa, že spomínaná folklórna pravda je naozaj pravdou a môžeme ju naďalej používať.

Vedúci: doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.
Katedra: FMFI.KTFDF - Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky
Dátum zadania: 11.10.2010

Dátum schválenia: 26.10.2010

prof. RNDr. Jozef Masarik, DrSc.
garant študijného programu

Kádek
študent

M. Fecko
Vedúci

Poďakovanie

Na prvom mieste sa chcem poďakovať vedúcemu tejto práce Doc. RNDr. Mariánovi Feckovi, PhD., že vymyslel takúto zaujímavú tému, ktorú potom so mnou konzultoval. Ďalej sa mu chcem poďakovať zato, že mi venoval svoj čas a trpezlivosť a zato, že mi poskytol vzácne rady pri písaní.
Ďalej chcem poďakovať svojim rodičom a babke, že som neumrel od hladu pri písaní tejto práce, a že pri mne celý ten čas stáli a podporovali ma.
Na koniec chcem poďakovať svojmu stredoškolskému učiteľovi matematiky a fyziky RNDr. Petrovi Roškovi, ktorý ma naučil, že každý problém sa dá vyriešiť pokiaľ to predčasne nevzdáme.

Abstrakt

Autor:	Márius Kádek
Názov práce:	Homogénne a izotropné tenzory
Škola:	Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta:	Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra:	Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky
Vedúci práce:	Doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.
Miesto:	Bratislava
Dátum:	2. 6. 2011
Počet strán:	49
Druh záverečnej práce:	Bakalárska práca

Abstrakt: V práci sa najprv zaoberáme tenzormi vo všeobecnosti, prečo a kde sa vo fyzike vyskytujú, ako aj lineárnou algebrou tenzorov. Ďalej v práci riešime, ako pôsobí Lieova grupa v priestore tenzorov, teda hovoríme o reprezentácii grupy v $T^p_q(L)$. Potom zavedieme pojem invariantného tenzora voči pôsobeniu grupy a vyšetrujeme jeho všeobecné vlastnosti. Špeciálnu pozornosť venujeme homogénnym a najmä izotropným tenzorom. Na koniec ilustrujeme teóriu na konkrétnych príkladoch, dôležitých najmä vo fyzike. Ako hlavný technický výsledok ukazujeme, že známy výraz pre všeobecný izotropný tenzor štvrtého rangu, používaný v teórii lineárnej pružnosti, nám vypadne ako špeciálny prípad (pre rang = 4) univerzálneho postupu, ktorým hľadáme invariantné tenzory.

Kľúčové slová: tenzor, izotropný tenzor, invariantný tenzor, grupa, reprezentácia

Abstract

Author:	Márius Kádek
Title:	Homogeneous and isotropic tensors
University:	Comenius University in Bratislava
Faculty:	Faculty of Mathematics, Physics and Informatics
Department:	Department of Theoretical Physics and Didactics of Physics
Advisor:	Doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.
City:	Bratislava
Date:	2. 6. 2011
Number of pages:	49
Type of thesis:	Bachelor thesis

Abstract: In this thesis we deal, first, with tensors in general, why and where do they emerge in physics, as well as with linear algebra of tensors. Then we discuss how a Lie group acts in tensor space, that is to say we discuss the representation of the group in $T^p_q(L)$. Next we introduce the concept of a tensor which is invariant with respect to the group action and we study its general properties. Special attention is paid to homogeneous and, especially, isotropic tensors. Finally, we illustrate the theory on certain examples important in physics. As a main technical result we show that the well known expression for the general isotropic tensor of rank 4, used in linear elasticity theory drops out as a particular, albeit fairly laborious, case of the scheme developed here.

Key words: tensor, isotropic tensor, invariant tensor, group, representation

Obsah

Zoznam obrázkov

Predhovor

Na začiatku tejto práce sa budeme zaoberať tenzormi, všeobecnou teóriou okolo tenzorov a povieme si, kde všade sa objavujú.

Na úvod spomenieme trochu histórie, teda odkiaľ sa tenzory vzali. Základy a pôvod tenzorovej analýzy pochádzajú z prác Carla Gaussa týkajúcich sa diferenciálnej geometrie. Tenzorový počet do veľkej miery rozvinul Gregorio Ricci-Curbastro okolo 1980. Všeobecné uznanie získal tento odbor s objavením sa Einsteinovej všeobecnej teórie relativity v roku 1915, ktorá tento jazyk vo veľkej miere využíva. Pričom je známe, že sám Einstein mal s tenzorovým počtom veľké ťažkosti, a vo svojich výpočtoch robil chyby, ktoré opravoval Levi-Civita vo vzájomnej korešpondencii.

Cieľom tejto práce však nie sú tenzory ako také. Budeme sa zaoberať hlavne *invariantnými* tenzormi. Po tom, ako sa s tenzormi zoznámime, bude našou úlohou zistiť ako pôsobí nejaká (Lieova) grupa v priestore tenzorov. Následne definujeme invariantný tenzor ako taký tenzor, ktorý toto pôsobenie necíti.

Vo fyzike sa často odvoláva na rôzne typy invariantných tenzorov. Spravidla sa pri využití nejakej symetrie – invariantnosti – daná úloha značne zjednoduší. Našim ďalším cieľom bude preto nájsť konkrétne invariantné (hlavne izotropné) tenzory v euklidovskom priestore. Asi najznámejší najnetriviálnejší príklad, kde sa odvolá na izotropnosť tenzora, je v mechanike lineárne pružného kontinua. Konkrétne je o tom písané v časti 4.1.

V úvodnej kapitole 1 ponúkame stručný, intuitívny pohľad na tenzory. Uvádzame tam miesta vo fyzike, kde je možné sa s tenzormi stretnúť.

V kapitole 2 sa zaoberáme matematickou teóriou tenzorov (multilineárnou algebrou). Spomíname tam niektoré dôležité vlastnosti tenzorov, na ktoré sa neskôr odvolávame. Táto kapitola je dôležitá na pochopenie zvyšných častí tejto práce, nevylučujeme však, že čitateľ je už zoznámený so všetkými informáciami uvedenými v tejto kapitole.

Kapitola 3 je venovaná pôsobeniu grupy G v priestore tenzorov. Zadefinujeme tu reprezentáciu Lieovej grupy, a nájdeme k nej odvodenú reprezentáciu Lieovej algebry[1].

Invariantný tenzor definujeme v kapitole 4. Študujeme tam aj jeho vlastnosti, ktoré budeme potom využívať v konkrétnych výpočtoch.

V poslednej kapitole 5 hľadáme konkrétne tvary invariantných tenzorov. Tu dokážeme aj spomínané tvrdenie o štruktúre izotropného tenzora stupňa 4, ktoré sa využíva v teórii pružnosti.

Na tomto mieste uvedieme centrálnu myšlienku, v duchu ktorej sa bude niesť táto

[1]Viac o Lieových grupách a algebrách je v dodatku A.

práca. Ide o taktiku, ktorú vymyslel Marius Sophus Lie, pomocou ktorej budeme hľadať invariantné tenzory. Lieova grupa je totiž vo všeobecnosti nelineárna štruktúra, a problém invariantných tenzorov je od podstaty *nelineárny*. Vieme pritom, že nelineárne problémy sú výrazne zložitejšie ako lineárne. Lie zistil, že pri Lieových grupách nepotrebujeme riešiť globálny problém (hľadanie tenzorov invariantných voči všetkým prvkom grupy). Stačí keď sa obmedzíme len na malé okolie jednotkového prvku grupy (= jednotky), kde sa nelineárny problém linearizuje, čím sa stáva jednoduchším. Môžeme to robiť tak preto, lebo (skoro) ľubovoľný prvok grupy (aj taký, čo je ďaleko) vieme poskladať (grupovým súčinom) z prvkov blízko jednotky. Ak teda vyriešime náš problém blízko jednotky, prakticky zadarmo dostávame aj globálne riešenie.

Kapitola 1

Úvod: Tenzory vo fyzike

Pred tým, ako sa pustíme do samotného štúdia invariantných (teda homogénnych alebo izotropných) tenzorov – čo je zadanie tejto práce, si musíme položiť niekoľko základných otázok týkajúcich sa tenzorov ako takých. Čo je to tenzor? Kde v prírode sa vyskytujú tenzory? Načo sú nám tenzory dobré? Po tom, ako sa pokúsime tieto otázky zodpovedať, si položíme sadu podobných otázok týkajúcich sa invariantných tenzorov.

Celá táto úvodná kapitola má hlavne motivačný charakter. Spomenieme niekoľko konkrétnych príkladov tenzorov vo fyzike, kde všade sa objavujú a hlavne prečo.

1.1 Tenzor zotrvačnosti

Existuje niekoľko rôznych definícii tenzora, niektoré matematicky korektnejšie, iné možno intuitívnejšie. Avšak väčšina študentov fyziky (alebo príbuzných odborov) sa s tenzorom stretne skôr ako stihnú prísť na rad matematické definície.

Jeden z prvých tenzorov, s ktorým sa čitateľ mohol zoznámiť na prednáškach z klasickej mechaniky, prípadne na kurzoch teoretickej mechaniky, je *tenzor zotrvačnosti*, definovaný nasledovne

$$I_{ab} := \int_V \rho(\vec{r}) \left(r^2 \delta_{ab} - r_a r_b \right) dV$$

kde δ_{ij} je Kroneckerov symbol, V je objem telesa a $\rho(\vec{r})$ je hustota telesa. Objaví sa v situáciách keď skúmame rotačný pohyb tuhého telesa, ktoré rotuje vzhľadom na ľubovoľnú os, danú vektorom uhlovej rýchlosti $\vec{\omega}$, pričom všeobecne pripúšťame, že táto os sa môže meniť v čase. Pre rotačnú časť kinetickej energie tuhého telesa platí[1]

$$T = \frac{1}{2} I_{ab} \omega_a \omega_b$$

kde používame Einsteinovu sumačnú konvenciu[2]. Podobne pre celkový moment hybnosti telesa $\vec{L}$ platí

$$L_a = I_{ab} \omega_b$$

[1]Podrobnejšie informácie o mechanike tuhého telesa môže čitateľ nájsť napr. v [2].

[2]Cez dvakrát opakovaný index sa automaticky sumuje, teda $\sum_{a=1}^{3} u_a v_a \equiv u_a v_a$.

V tomto druhom prípade priraďujeme vektoru uhlovej rýchlosti vektor momentu hybnosti, zatiaľ čo v prípade rotačnej energie sme priraďovali vektoru $\vec{\omega}$ *skalár* – energiu. Treba však zdôrazniť, že v skutočnosti priraďujeme *dvom* vektorom skalár, ibaže vzhľadom na to, že ide o kvadratickú formu, oba tieto vektory sú zhodne $\vec{\omega}$. V oboch prípadoch však ide o *lineárne* priradenie.

Prečo sa v tejto úlohe objaví tenzor? Je to tým, že rotačná dynamika tuhého telesa (všeobecne aj nesymetrického) závisí od osi rotácie, teda úloha je závislá od smeru. Všeobecný zotrvačník sa inak správa, keď sa točí okolo nejakej osi, ako keď sa točí okolo inej. Odporúčame čitateľovi skúsiť si roztočiť napr. koleso od bicykla okolo osi prechádzajúcej stredom kolesa, kolmo na koleso, a okolo osi ležiacej v rovine kolesa – ak aj udelí kolesu rovnaký impulz, to sa bude v týchto dvoch prípadoch točiť rozdielnou uhlovou rýchlosťou.

Táto závislosť od smeru, tzv. *anizotropia*, je dôvodom, prečo sa v kvantitatívnom popise úlohy objavia tenzory. Je nepísaným pravidlom, že vždy keď máme úlohu závislú od smeru, na scénu prichádzajú tenzory. Je to práve tenzor zotrvačnosti, ktorý úplne charakterizuje (čo sa týka rozloženia hmoty) tuhé teleso. Ak totiž poznáme celý tenzor zotrvačnosti, skalárny moment zotrvačnosti vzhľadom na os danú jednotkovým vektorom $\vec{n}$ z neho dostaneme ako

$$I(\vec{n}) = I_{ab} n_a n_b \qquad |\vec{n}| = 1 \tag{1.1}$$

Sú však prípady, keď predsa len máme dodatočnú symetriu – izotropnosť. V takom prípade sa na to môžeme pozerať, že ide o špeciálny príklad všeobecnejšieho, nesymetrického prípadu. Nazdávame sa, že za takýchto okolností by sme tenzory nepotrebovali. Uvedieme príklad pre tenzor zotrvačnosti[3]: Ak máme sféricky symetrický zotrvačník (homogénna kocka, guľa), na popis dynamiky nám predsa len stačí jediné číslo – skalárny moment zotrvačnosti. Je to preto, lebo ak máme os rotácie prechádzajúcu ťažiskom telesa, potom pri sférických zotrvačníkoch nezáleží na jej smere, moment zotrvačnosti je rovnaký vo všetkých smeroch.

Môžeme však uvažovať aj nasledovne: My sme pôvodne *mali* tenzor zotrvačnosti, ibaže vďaka dodatočnej izotropnosti sa výrazne zjednodušil, a to tak, aby bol daný jediným číslom. Z tohto uhľa pohľadu situáciu stále popisujeme tenzormi, ibaže kvôli izotropnosti dostávame špeciálny tvar tenzora zotrvačnosti.

Predchádzajúce úvahy sú zrejmé a intuitívne jasné pre tenzor zotrvačnosti, nemusí to však byť tak aj pre tenzory vyšších stupňov. Cieľom tejto práce je podchytiť izotropnosť tenzorov (všeobecne ich invariantnosť) *kvantitatívne*, a ukázať, aký to má dopad na tenzory všeobecnejšieho typu.

Na ilustráciu uvedieme ďalej niekoľko ďalších príkladov tenzorov z rôznych odvetví fyziky. Všade hrá dôležitú úlohu anizotropnosť, závislosť od smeru.

1.2 Mechanika kontinua

V mechanike kontinua sa zvyčajne uvažujú dva druhy síl, ktoré naň môžu pôsobiť. Ide o objemové (nekontaktné) a plošné (kontaktné) sily. Objemové sily pôsobia na celé kontinuum, príkladom je gravitačná sila. Dve rôzne časti kontinua, čo sú v kontakte na seba pôsobia plošnými

[3] Podrobnejšie je o tom písané v paragrafe 4.1 na strane 23.

silami. Práve tieto sily sú smerovo závislé, závisia od smeru kontaktnej plochy. Ak označíme $\vec{F}^{(\mathrm{pl})}$ celkovú plošnú silu. Potom *tenzor napätia* $\sigma_{ab}(\vec{r},t)$ je definovaný nasledujúcim vzťahom

$$F_a^{(\mathrm{pl})} = \oint_S \sigma_{ab}(\vec{r},t)dS_b$$

kde dS_a je vektor normály k plošnému elementu dS. Treba poznamenať, že v skutočnosti ide o *tenzorové pole*, pretože tento tenzor sa mení od bodu k bodu vo všeobecnosti, jeho komponenty sú funkcie priestorových súradníc a času.

Deformácia sa popisuje ďalším tenzorovým poľom, tzv. *tenzorom deformácie*, definovaným

$$\varepsilon_{ab} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_a}{\partial x_b} + \frac{\partial u_b}{\partial x_a}\right)$$

kde $u_a = u_a(\vec{r},t)$ je pole posunutia, popisujúce výchylku každého bodu voči svojej pôvodnej polohe.

Medzi deformáciou a napätím existuje konštitučný vzťah – zovšeobecnený Hookov zákon, platný pre malé deformácie

$$\sigma_{ab}(\vec{r},t) = c_{abcd}(\vec{r},t)\varepsilon_{cd}(\vec{r},t) \tag{1.2}$$

čo predstavuje najvšeobecnejšiu lineárnu závislosť napätia od deformácie. Zároveň zavádza do hry tenzor c_{abcd}, ktorý má nasledujúce symetrie:

$$c_{abcd} = c_{bacd} \qquad c_{abcd} = c_{abdc} \qquad c_{abcd} = c_{cdab} \tag{1.3}$$

Tenzor c_{abcd} ako tenzor štvrtého stupňa má $3^4 = 81$ komponentov. Vďaka symetriám má však len 21 nezávislých komponentov.

1.3 Ďalšie príklady

Väčšina materiálov má kryštalickú štruktúru, ktorá vo všeobecnosti nie je izotropná. Ideálny kryštál je síce symetrický objekt, avšak jeho symetria je nižšia ako v prípade kvapalín či plynov. To má za následok, že niektoré materiálové vlastnosti ako sú elektrická permitivita ε, magnetická permeabilita μ alebo elektrická vodivosť σ materiálu je daná tenzorom. Sú známe nasledujúce vzťahy medzi elektromagnetickými poliami $\vec{E},\vec{H}$ a $\vec{D},\vec{B}$

$$D_a = \varepsilon_{ab}E_b$$
$$B_a = \mu_{ab}H_b$$

Taktiež Ohmov zákon, ktorý udáva lineárny vzťah medzi elektrickým prúdom (jeho hustotou) $\vec{j}$ a elektrickým poľom $\vec{E}$ má tenzorový charakter pre anizotropné kryštály

$$j_a = \sigma_{ab}E_b$$

kde σ_{ab} je tenzor elektrickej vodivosti. Tento tenzorový vzťah okrem iného hovorí, že ak zmeníme smer elektrického poľa (a veľkosť nezmeníme), môžeme zmeniť veľkosť aj smer elektrického prúdu! Len pre porovnanie so štandardnou "skalárnou" formou Ohmovho zákona $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, tu má elektrický prúd vždy rovnaký smer ako elektrické pole a jeho veľkosť závisí len od *veľkosti* elektrického poľa, už nie od jeho smeru.

S tenzormi sa môžeme stretnúť aj v teórii elektromagnetického poľa, kde tok skalárnej veličiny (energie) je vektor (Poyntingov vektor), ale tok vektorovej veličiny (hybnosť, moment hybnosti) je už tenzor (tenzor toku hybnosti, tenzor toku momentu hybnosti).

V hojnej miere sa tenzory objavujú v špeciálnej ako aj všeobecnej teórii relativity.

Kapitola 2

Lineárna algebra tenzorov

V tejto kapitole podáme definíciu tenzora ako aj základy tenzorovej algebry potrebnej na prácu so samotnými invariantnými tenzormi. Na úvod treba poznamenať, že pokiaľ je čitateľ oboznámený s pojmom tenzora, základmi multilineárnej algebry, môže túto kapitolu pokojne preskočiť. V celej tejto kapitole bude L (prípadne s indexom) značiť ľubovoľný konečnorozmerný vektorový priestor ak nebude uvedenéináč.

Jeden špeciálny typ tenzora môže byť čitateľovi známy z lineárnej algebry. Ide o tzv. *lineárnu formu*, teda lineárne zobrazenie z vektorového priestoru L do poľa reálnych čísel. Je celkom možné, že sa s ním stretol iba v súvislosti s pojmom lineárneho zobrazenia, no v skutočnosti ide o veľmi užitočný pojem. A práve na zovšeobecnení takýchto zobrazení postavíme definíciu tenzora.

2.1 Motivácia

V lineárnej algebre sa obvykle študujú lineárne zobrazenia medzi dvoma (vo všeobecnosti rôznymi) vektorovými priestormi $A : L_1 \to L_2$. Lineárna forma je špeciálnym prípadom takéhoto zobrazenia, teda ak priestor L_2 je samotné pole reálnych čísel. V algebre sa ale tomuto prípadu nevenuje špeciálna pozornosť a čitateľ v tomto okamihu nemusí tušiť, prečo by tomu teraz malo byť inak.

Oveľa väčšia pozornosť sa však venuje *bilineárnym formám*, zobrazeniam $B : L \times L \to \mathbb{R}$ [1]. Bilinearita znamená, že pre $\forall u, v, w \in L, \lambda \in \mathbb{R}$ platí:

$$B(u + \lambda v, w) = B(u, w) + \lambda B(v, w)$$
$$B(u, w + \lambda v) = B(u, w) + \lambda B(u, v)$$

Majme k dispozícii bázu v L ($\dim L = n$), označenú e_i, teda

$$u = \sum_{i=1}^{n} u^i e_i \equiv u^i e_i$$

[1] Opäť ide o špeciálny prípad všeobecnejšieho bilineárneho zobrazenia $B : U \times V \to W$, kde U, V a W sú ľubovoľné vektorové priestory.

(poloha indexov bude vysvetlená neskôr). Potom

$$B(u,v) = B(u^i e_i, v^j e_j) = u^i v^j B(e_i, e_j) = u^i v^j B_{ij}$$

kde hodnota formy B na báze $B_{ij} := B(e_i, e_j)$ sa nazýva *matica bilineárnej formy*, presnejšie jej ij-ty komponent.

Obdobným spôsobom by sme zadefinovali trilineárnu formu, prípadne n-lineárnu formu. Pojem tenzora je veľmi úzko spätý s pojmom n-lineárnej formy, presnejšie povedané n-lineárna forma je špeciálny typ tenzora. K všeobecnej definícii tenzora však potrebujeme ešte čosi.

2.2 Duálny priestor a kovektory

Majme dve lineárne formy α a β. Ľahko sa dá ukázať, že ak zavedieme (pre $v \in L, \lambda \in \mathbb{R}$)

$$(\alpha + \lambda\beta)(v) := \alpha(v) + \lambda\beta(v) \tag{2.1}$$

čo je definícia lineárnej kombinácie dvoch (lineárnych) foriem, tak táto kombinácia bude znovu lineárna forma. Priestor lineárnych foriem je teda uzavretý na lineárne kombinácie a je tiež lineárnym priestorom. Tento priestor sa nazýva *duálny priestor*, alebo jednoducho *duál* a označujeme ho L^*. Prvky L^* (lineárne formy) budeme nazývať *kovektory*. Uvedieme teraz bez dôkazov niekoľko dôležitých vlastností duálnych priestorov, väčšina z nich sa dá ľahko nahliadnuť.

Nech v L máme zvolenú ľubovoľnú bázu e_a. Bázu v L^* značíme e^a (nazývame ju *duálnou*), a definujeme ju nasledovným spôsobom:

$$v \in L, \qquad e^a(v) \equiv e^a(v^b e_b) := v^a \tag{2.2}$$

Potom už pre ľubovoľný kovektor $\alpha \in L^*$ platí

$$\alpha = \alpha_a e^a \qquad \alpha_a := \alpha(e_a) \tag{2.3}$$

kde α_a sa nazývajú *komponenty kovektora*. Duálna báza sa dá definovať ekvivalentným spôsobom, a to nasledovne

$$e^a(e_b) := \delta^a_b \tag{2.4}$$

Občas budeme v súlade s bežnou praxou označovať hodnotu $\alpha(v)$ nasledujúcim spôsobom

$$\langle \alpha, v \rangle := \alpha(v) \tag{2.5}$$

Podobne ako sme ku L definovali jeho duál L^*, môžeme aj pre L^* definovať jeho duál, teda druhý duál $L^{**} := (L^*)^*$.

Z uvedených definícii sa dajú ukázať nasledujúce vlastnosti:

$$\dim L = \dim L^* \qquad L \sim L^* \qquad L \approx L^{**} \tag{2.6}$$

kde $\sim$ znamená nekanonický izomorfizmus (závisiaci od výberu bázy) a $\approx$ znamená kanonický izomorfizmus (nezávisiaci od výberu bázy).

Ak v L máme k dispozícii lineárny operátor (maticu) $A : L \to L$, pomiešanie bázy v L touto maticou už vedie na pomiešanie bázy v L^* inverznou maticou

$$e_a \mapsto e'_a = A^b_a e_b \qquad \Rightarrow \qquad e^a \mapsto e'^a = \left(A^{-1}\right)^a_b e^b \tag{2.7}$$

2.3 Základné vlastnosti tenzorov a operácie s nimi

2.3.1 Definícia tenzora

Teraz už sme pripravení podať úplnú definíciu tenzora. *Tenzor typu* $\binom{p}{q}$ je multilineárne (lineárne v každom argumente) zobrazenie t:

$$t : \underbrace{L \times \ldots \times L}_{q} \times \underbrace{L^* \times \ldots \times L^*}_{p} \to \mathbb{R} \tag{2.8}$$

Multilinearita sa dá zapísať

$$t\left(\ldots, v + \lambda w, \ldots\right) = t\left(\ldots, v, \ldots\right) + \lambda t\left(\ldots, w, \ldots\right) \tag{2.9}$$

kde $v, w \in L$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Množinu tenzorov typu $\binom{p}{q}$ značíme $T^p_q(L)$, pričom $T^0_0(L) := \mathbb{R}$. Obdobne ako pri lineárnych formách aj tu vieme zaviesť lineárnu kombináciu tenzorov rovnakého typu $t, \tau \in T^p_q(L), \lambda \in \mathbb{R}$ predpisom:

$$(t + \lambda\tau)(\ldots) := t(\ldots) + \lambda\tau(\ldots) \tag{2.10}$$

a ľahko sa nahliadne, že $t + \lambda\tau$ je znovu tenzor typu $\binom{p}{q}$, teda priestor $T^p_q(L)$ (keďže je uzavretý na lineárne kombinácie) je lineárnym priestorom.

Uvedieme teraz niekoľko konkrétnych a najdôležitejších typov tenzorov:

$$\begin{aligned}
T^0_0(L) &= \mathbb{R} && \text{skaláry}\\
T^0_1(L) &= L^* && \text{kovektory}\\
T^1_0(L) &\approx L && \text{vektory}\\
T^1_1(L) &\approx \hom(L, L) && \text{operátory } L \to L\\
&\approx \hom(L^*, L^*) && \text{operátory } L^* \to L^*\\
T^0_2(L) &= B_2(L) && \text{bilineárne formy v } L
\end{aligned}$$

Podobne ako pri kovektoroch v (2.3) je prirodzené definovať *komponenty tenzora* vzhľadom na bázu e_a:

$$t^{c\ldots d}_{a\ldots b} := t(e_a, \ldots, e_b; e^c, \ldots, e^d) \tag{2.11}$$

Ak poznáme všetky komponenty tenzora, potom je tento tenzor úplne daný vďaka linearite zobrazenia. Myslí sa tým to, že tento tenzor vieme "vyčísliť" na ľubovoľnom argumente, napr. pre tenzor typu $\binom{1}{2}$ platí pre $v = v^a e_a, w = w^a e_a, \alpha = \alpha_a e^a$:

$$t(v, w; \alpha) = t(v^a e_a, w^b e_b; \alpha_c e^c) = v^a w^b \alpha_c t(e_a, e_b; e^c) = v^a w^b \alpha_c t^c_{ab}$$

Teda označenie typu tenzora $\binom{p}{q}$ znamená, že komponenty tenzora majú p horných a q dolných indexov.

Ak chceme v L prejsť do novej bázy $e'_a := A^b_a e_b$ (v L^* je zmena bázy už daná (2.7)), potom musíme transformovať komponenty tenzora tak, aby sme zachovali linearitu zobrazenia. Tento transformačný zákon medzi "starými" komponentmi tenzora voči báze e_a a "novými" komponentmi voči báze e'_a je daný výlučne maticou prechodu A medzi bázami. Na ilustráciu uvedieme príklad pre tenzor typu $\binom{1}{2}$:

$$t'^c_{ab} = t(e'_a, e'_b; e'^c) = A^i_a A^j_b (A^{-1})^c_k t(e_i, e_j; e^k) = A^i_a A^j_b (A^{-1})^c_k t^k_{ij}$$

Pravidlo teda znie: Dolné indexy komponentov tenzora sa transformujú maticou A, zatiaľ čo horné indexy komponentov sa transformujú inverznou maticou A^{-1}.

Uvedieme teraz jemne odlišný pohľad na tento transformačný zákon, najprv špeciálne pre tenzory typu $\binom{1}{0}$, čiže vektory. Vychádzať budeme z invariantnosti samotného "celého" vektora pri zmene bázy. Vektor $v \in L$ vieme zapísať pomocou rôznych báz a komponentov voči nim, ide však vždy o ten istý vektor. V pozadí je racionálna požiadavka invariantnosti fyzikálnych zákonov, v ktorých sa vždy vyskytujú vektory (alebo tenzoy), voči zmene súradnicového systému. Keďže fyzikálne zákony nemôžu privilegovať niektorú konkrétnu bázu (súradnicovú sústavu), nevyskytujú sa v nich komponenty vektora (tenzora), a musia sa dať napísať v bezsúradnicovom tvare. Teda musí platiť pre $v \in L$

$$\begin{aligned} v = v'^a e'_a &\overset{!}{=} v^a e_a \\ \underbrace{v'^a A^b_a}_{v^b} e_b &= v^a e_a \\ v'^a A^b_a &= v^b \\ v'^a &= (A^{-1})^a_b v^b \end{aligned}$$

a posledný vzťah je transformačný zákon pre vektory, špeciálny prípad transformačného zákona platného pre tenzory.

Analogický postup sa dá urobiť aj pre tenzory, keďže $T^p_q(L)$ je lineárnym priestorom. Ľubovoľný tenzor z tohto priestoru sa dá zapísať pomocou svojich komponentov a pomocou bázy v $T^p_q(L)$. Ukazuje sa, že takáto báza sa dá skonštruovať iba pomocou obyčajnej bázy v L (a L^*) s využitím tenzorových súčinov.

2.3.2 Tenzorový súčin

Už sme sa zoznámili s jednou tenzorovou operáciou, menovite lineárnou kombináciou, ktorá dvom tenzorom rovnakého typu priradila tretí tenzor toho istého typu. Ďalšou veľmi dôležitou tenzorovou operáciou je *tenzorový súčin*. Je to operácia, ktorá dvom tenzorom *ľubovoľných* typov priradí tretí tenzor. Definovaný je nasledujúcim predpisom

$$\otimes : T^p_q(L) \times T^{p'}_{q'}(L) \to T^{p+p'}_{q+q'}(L)$$

$$\begin{aligned} (t \otimes \sigma)(v_1, \dots, v_q, w_1, \dots, w_{q'}; \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_{p'}) &:= \\ := t(v_1, \dots, v_q; \alpha_1, \dots, \alpha_p) \sigma(w_1, \dots, w_{q'}; \beta_1, \dots, \beta_{p'}) & \end{aligned} \tag{2.12}$$

kde $v_j, w_j \in L$ a $\alpha_j, \beta_j \in L^*$. Takto zadefinovaný súčin je naozaj tenzorovou operáciou (nahliadni), teda $t \otimes \sigma$ je tenzor – lineárne zobrazenie. Pre prehľadnosť uvedieme konkrétny príklad pre súčin tenzorov $H \in T^1_1(L)$ (operátor) a $B \in T^0_2(L)$ (bilineárna forma)

$$(H \otimes B)(u, v, w; \alpha) = H(u; \alpha)B(v, w)$$

Bez dôkazu uvedieme niektoré vlastnosti tenzorového súčinu:

$$t \otimes (\tau \otimes \sigma) = (t \otimes \tau) \otimes \sigma \qquad \text{asociatívnosť} \tag{2.13a}$$
$$t \otimes (\tau + \lambda\sigma) = t \otimes \tau + \lambda(t \otimes \sigma) \qquad \text{bilinearita, distributívnosť} \tag{2.13b}$$
$$t \otimes \tau \neq \tau \otimes t \qquad \text{nekomutatívnosť} \tag{2.13c}$$

Defníciu lineárnej kombinácie (2.10) a tenzorového súčinu (2.12) vieme zapísať aj pomocou komponentov tenzora (2.11)

$$(t + \lambda\tau)^{c\ldots d}_{a\ldots b} = t^{c\ldots d}_{a\ldots b} + \lambda\tau^{c\ldots d}_{a\ldots b} \tag{2.14a}$$
$$(t \otimes \tau)^{c\ldots dr\ldots s}_{a\ldots bk\ldots l} = t^{c\ldots d}_{a\ldots b}\tau^{r\ldots s}_{k\ldots l} \tag{2.14b}$$

Rozklad tenzora do bázy

Nech e_a je báza v L a e^a je k nej duálna báza v L^*. Potom ľubovoľný tenzor $t \in T^p_q(L)$ vieme zapísať ako

$$t = t^{c\ldots d}_{a\ldots b} e^a \otimes \ldots \otimes e^b \otimes e_c \otimes \ldots \otimes e_d \tag{2.15}$$

kde

$$e^a \otimes \ldots \otimes e^b \otimes e_c \otimes \ldots \otimes e_d \in T^p_q(L) \tag{2.16}$$

je báza v priestore $T^p_q(L)$ a

$$t^{c\ldots d}_{a\ldots b} := t(e_a, \ldots, e_b; e^c, \ldots, e^d)$$

sú komponenty tenzora t voči tejto báze.

Dôkaz: Keď chceme dokázať toto tvrdenie, stačí si uvedomiť, že vzťah (2.15) predstavuje rovnosť dvoch zobrazení. Túto rovnosť môžeme testovať tak, že do obidvoch strán rovnice dosadíme všeobecný argument, teda vektory a kovektory. Vďaka linearite tenzorov však stačí túto rovnosť testovať na báze. Ľavá strana na báze je (podľa (2.11))

$$t(e_i, \ldots, e_j; e^k, \ldots, e^l) = t^{k\ldots l}_{i\ldots j}$$

Pravá strana na báze

$$(t^{c\ldots d}_{a\ldots b} e^a \otimes \ldots \otimes e^b \otimes e_c \otimes \ldots \otimes e_d)(e_i, \ldots, e_j; e^k, \ldots, e^l) =$$
$$= t^{c\ldots d}_{a\ldots b} e^a(e_i) \ldots e^b(e_j) e^k(e_c) \ldots e^l(e_d) = t^{c\ldots d}_{a\ldots b} \delta^a_i \ldots \delta^b_j \delta^k_c \ldots \delta^l_d = t^{k\ldots l}_{i\ldots j}$$

kde sme využili vzťah medzi bázou a duálnou bázou (2.4).

Ako príklad uvedieme špeciálny prípad tohto tvrdenia pre tenzor $t \in T^1_2(L)$

$$t = t^c_{ab} e^a \otimes e^b \otimes e_c$$

Jednotkový tenzor

Dôležitým prípadom tenzora je jednotkový tenzor, ktorý je špeciálnym tenzorom typu $\binom{1}{1}$. Je definovaný takto:

$$\hat{1}(v;\alpha) := \langle \alpha, v \rangle \tag{2.17}$$

a teda platí vzhľadom na ľubovoľnú bázu

$$\hat{1}^a_b = \delta^a_b$$
$$\hat{1} = e^a \otimes e_a$$

Tento tenzor sa dá chápať aj ako identické zobrazenie (keďže je to operátor z $T^1_1(L)$)

$$\begin{array}{lll} \hat{1} : L \to L & v \mapsto v & v^a \mapsto \delta^a_b v^b = v^a \\ \hat{1} : L^* \to L^* & \alpha \mapsto \alpha & \alpha_a \mapsto \delta^b_a \alpha_b = \alpha_a \end{array}$$

2.3.3 Metrický tenzor

Ľubovoľný symetrický nedegenerovaný tenzor $g \in T^0_2(L)$ sa nazýva *metrický tenzor* v L. Zapísané v bezkomponentnom zápise a aj za pomoci komponentov

$$\begin{array}{lll} g(v,w) = g(w,v) & g_{ab} = g_{ba} & \text{symetričnosť} \end{array} \tag{2.18a}$$
$$\begin{array}{lll} \forall w \in L : g(v,w) = 0 \Rightarrow v = 0 & \det g_{ab} \neq 0 & \text{nedegenerovanosť} \end{array} \tag{2.18b}$$

kde komponenty sa myslia vzhľadom na ľubovoľnú bázu. Niekedy sa požaduje namiesto nedegenerovanosti kladná definitnosť (nedegenrovanosť je potom už samozrejmá), teda

$$g(v,v) \geq 0 \qquad g(v,v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

Z lineárnej algebry je známe, že v priestore L existuje báza, vzhľadom na ktorú má symetrická bilineárna forma (a teda aj metrický tenzor) tzv. *kanonický tvar*

$$b_{ab} = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{r}, \underbrace{-1,\dots,-1}_{s}, \underbrace{0,\dots,0}_{\dim L - r - s})$$

Vzhľadom na takúto bázu má metrický tenzor (kvôli nedegenerovanosti) tvar

$$\eta_{ab} = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{r}, \underbrace{-1,\dots,-1}_{s}) \tag{2.19}$$

kde dvojica (r,s) sa nazýva *signatúra* a platí $r + s = \dim L$. Báza voči ktorej má metrický tenzor kanonický tvar sa nazýva *ortonormovaná báza* a nie je určená jednoznačne. Pre kladne definitné metrické tenzory platí $s = 0$.

Definujeme g^{ab} ako prvky inverznej matice ku g_{ab}

$$g^{ac} g_{cb} := \delta^a_b \tag{2.20}$$

Potom sa dá ukázať pomocou transformačného zákona, že g^{-1} je opäť symetrický tenzor, ale už typu $\binom{2}{0}$, platí

$$g = g_{ab} e^a \otimes e^b \in T^0_2(L) \qquad \Rightarrow \qquad g^{-1} = g^{ab} e_a \otimes e_b \in T^2_0(L) \tag{2.21}$$

Spúšťanie a dvíhanie indexov

Pomocou metrického tenzora vieme definovať nasledovné zobrazenia

$$\flat_g : L \to L^* \qquad v \mapsto \flat_g v := g(v,\ .\ ) \tag{2.22a}$$
$$\sharp_g : L^* \to L \qquad \alpha \mapsto \sharp_g \alpha := g^{-1}(\alpha,\ .\ ) \tag{2.22b}$$

Bez dôkazu uvedieme ako, sa tieto zobrazenia správajú na bázach a v komponentoch

$$\flat_g : \qquad e_a \mapsto g_{ab}e^b \qquad v^a \mapsto v_a := g_{ab}v^b \qquad v^a e_a \mapsto v_a e^a \tag{2.23a}$$
$$\sharp_g : \qquad e^a \mapsto g^{ab}e_b \qquad \alpha_a \mapsto \alpha^a := g^{ab}\alpha_b \qquad \alpha_a e^a \mapsto \alpha^a e_a \tag{2.23b}$$

a tieto zobrazenia sú navzájom inverzné:

$$\flat_g \circ \sharp_g = \mathrm{id}_{L^*} \qquad \sharp_g \circ \flat_g = \mathrm{id}_L$$

Tieto operácie sú tenzorové, teda $\flat_g, \sharp_g$ priradia tenzoru vždy tenzor. Z týchto vzťahov je zrejmé prečo sa tieto operácie nazývajú dvíhaním a spúšťaním indexov, ide o spôsob ako vektoru $v^a e_a$ priradiť kovektor $v_a e^a$ a opačne.

Úplne analogicky vieme spúšťať resp. dvíhať indexy aj pre tenzory všeobecného typu. Vtedy je vhodné vyznačiť miesto, kam sa má daný index spustiť/dvihnúť. Spravidla sa to robí tak, že v každej horizontálnej pozícii je len jeden index, buď hore alebo dole. Uvedieme príklady pre tenzor t^c_{ab}:

$$t_{abc} := g_{bd}t_a{}^d{}_c \qquad t^{ab}{}_c := g^{ad}t_d{}^b{}_c$$

2.3.4 Kontrakcia

Dôležitá tenzorová operácia, s ktorou budeme neskôr pracovať je *kontrakcia (zúženie)*. Definovaná je pre tenzory typu $\binom{p}{q}$ kde $p, q \geq 1$ nasledovne

$$C : T^p_q(L) \to T^{p-1}_{q-1}(L) \qquad t \mapsto Ct := t(\ldots, e_a, \ldots; \ldots, e^a, \ldots) \tag{2.24}$$

vidíme pritom, že kontrakcie môžeme robiť viacerými spôsobmi, poloha argumentov cez ktoré sčitujeme (teda e_a a e^a) je súčasťou definície.

Priamo z definície hneď vidno, že naozaj ide o tenzorovú operáciu, kontrakcia nám vyrába nové tenzory ochudobnené o dva argumenty – tým pádom aj o dva indexy. Taktiež sa dá nahliadnuť pomocou (2.7), že táto operácia nezávisí od výberu bázy, ak zachováme dualitu $e_a \leftrightarrow e^a$.

Ak prepíšeme definíciu do komponentného tvaru, dostaneme

$$C : t^{\cdots\cdots}_{\cdots\cdots} \mapsto t^{\cdots a \cdot}_{\cdot a \cdots} \tag{2.25}$$

Teda obyčajným sčítaním cez jeden horný a jeden dolný index, vieme vyrobiť nový tenzor.

Niektoré tenzorové operácie vieme navzájom skladať. Často to vieme robiť práve pomocou kontrakcie. Ukážeme príklad, ako sa spúšťanie a dvíhanie indexov dá zložiť pomocou kontrakcie a tenzorového súčinu. Podľa (2.22a) a (2.23a) platí $\flat_g v = g(v,\ .\ )$, teda

$$(\flat_g v)_a = (\flat_g v)(e_a) = g(v,\ .\ )(e_a) = g(v, e_a) = g_{ab}v^b = (g \otimes v)^b_{ab} = (C(g \otimes v))_a$$

kde vidíme, že pustiť na vektor operáciu spúšťania indexu $\flat_g$ znamená vynásobiť ho tenzorovo s metrickým tenzorom, a potom urobiť kontrakciu. Podobný vzťah platí aj pre operáciu dvíhania indexu. Zhrnuté

$$\flat_g v = g(v,\ .\ ) = C(g \otimes v) \tag{2.26a}$$

$$\sharp_g \alpha = g^{-1}(\alpha,\ .\ ) = C(g^{-1} \otimes \alpha) \tag{2.26b}$$

2.4 Duálne zobrazenie

Pre neskoršie úvahy súvisiace so samotnými invariantnými (izotropnými prípadne homogénnymi) tenzormi bude užitočný pojem duálneho zobrazenia.

Majme k dispozícii dva lineárne priestory L_1 s bázou e_i a L_2 s bázou e_a. Nech A je lineárne zobrazenie $A : L_1 \to L_2$. Definujeme *duálne zobraznie* A^* predpisom:

$$\langle A^*(\alpha_2), v_1 \rangle := \langle \alpha_2, A(v_1) \rangle \qquad \alpha_2 \in L_2^*, v_1 \in L_1 \tag{2.27}$$

Podľa (2.5) sú ostré zátvorky lineárne a odtiaľ priamo vyplýva aj linearita zobrazenia $A^* : L_2^* \to L_1^*$. Ak do danej definície dosadíme bázove vektory/kovektory, ihneď dostaneme komponentné vyjadrenie

$$e_i \overset{A}{\mapsto} A^a{}_i e_a \qquad , \qquad e^a \overset{A^*}{\mapsto} (A^*)_i{}^a e^i \qquad \Rightarrow \qquad e^a \overset{A^*}{\mapsto} A^a{}_i e^i \tag{2.28}$$

a teda maticové vyjadrenie operátora A^* je

$$A^* = A^T \tag{2.29}$$

Spomenieme ešte súvis s v kvantovou mechanikou, kde sa obdobným spôsobom zadefinuje *hermitovsky združený* operátor A^* k operátoru A:

$$\langle A^* \psi | \varphi \rangle := \langle \psi | A \varphi \rangle \qquad |\varphi\rangle \in H, \langle \psi | \in H^*$$

kde H je Hilbertov priestor a H^* je jeho duál. Rozdiel je v tom, že Hilbertov priestor je komplexný, a pre skalárny súčin[2] platí $\forall \lambda \in \mathbb{C}$:

$$\langle \lambda \psi | \varphi \rangle = \overline{\lambda} \langle \psi | \varphi \rangle$$
$$\langle \psi | \lambda \varphi \rangle = \lambda \langle \psi | \varphi \rangle$$

čo má za následok, že matica operátora A^* je k matici A nie len transponovaná, ale aj komplexne združená

$$A^* = \overline{A^T}$$

čomu sa hovorí *hermitovsky združená*.

[2] V skutočnosti ide o *hermitovský skalárny súčin*.

Kapitola 3

Pôsobenie grupy v priestore $T_q^p(L)$

Na úvod tejto kapitoly treba poznamenať, že budeme v hojnej miere využívať aparát Lieových grúp, Lieových algebier a ich reprezentácii. Na porozumenie tejto aj nasledujúcich kapitol je potrebné mať z týchto oblastí určité vedomosti, ktoré je možné nájsť v bežnej literatúre o Lieových grupách[1]. Pokiaľ čitateľ potrebné vedomosti má, na prípadné osvieženie pamäti slúži dodatok A na strane 43.

Druhá poznámka sa týka niektorých označení. V celej tejto kapitole bude G predstavovať Lieovu grupu (ľubovoľnú slušnú, napr. $SO(n)$ alebo $U(n)$), $\mathcal{G}$ predstavuje k nej príslušnú Lieovu algebru. Ľubovoľný konečnorozmerný lineárny priestor budeme značiť L a jeho duál bude L^*. Tieto označenia platia pokiaľ explicitne nepovieme inak.

3.1 Úvod

Ideme teraz vysvetliť, že čo a prečo chceme v tejto kapitole robiť. Pokiaľ chceme študovať invariantné tenzory, potrebujeme si vyjasniť pojem invatiantnosti. Čo to znamená, keď o niečom povieme, že je to invariantné voči nejakej operácii?

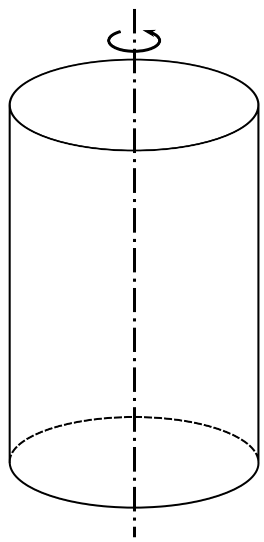
Aby sme mohli zodpovedať túto otázku, vezmeme si na pomoc ilustračnú pomôcku, a to dokonalý valec[2]. Otočme teraz tento valec o ľubovoľný uhol φ okolo osi tak, ako je znázornené na obrázku 3.1. Ak by sme urobili fotku valca *pred* a *po* otočení[3], zistili by sme, že tieto dve fotky sú úplne identické. Je to vďaka tomu, že valec má určitú *symetriu* (niekedy nazývanú cylindrickou alebo rotačnou), teda keď sa na valec pozeráme, nevime zistiť, či ho niekto otočil (pokiaľ sme ho nevideli ako otáča valcom), alebo či s ním nepohol. Učene povedané: Valec je *invariantný* voči otočeniu o ľubovoľný uhol okolo osi kolmej na podstavu valca prechádzajúcej stredom valca.

Teda keď sme chceli študovať symetrie telesa, potrebovali sme si ozrejmiť, čo to znamená otočiť teleso okolo nejakej osi – ako sa to otáčanie robí, a potom sme usúdili, že v prípade

[1] S aparátom diferenciálnej geometrie sa dajú potrebné vedomosti nájsť v kapitolách 10 až 13 v [1].

[2] Valec znázornený na obrázku 3.1 možno niekomu nepripadá dokonalý, ale autori robili, čo mohli. V každom prípade treba použiť fantáziu.

[3] Myslíme tým fotky urobené z rovnakého miesta, pod rovnakým uhlom, za rovnakého osvetlenia miestnosti a s tým istým fotoaparátom rovnako nastaveným.



Obr. 3.1: Dokonalý valec

keď má toto teleso nejakú napr. rotačnú symetriu (valec), toto otočenie si "nevšimneme".

Rovnaký postup zaujmeme aj v prípade tenzorov. Potrebujeme zistiť ako na nich pôsobí grupa, teda zistiť čo sa s nimi v takom prípade deje. Potom ak na tenzor zapôsobíme grupou, a tento tenzor ostane pred a po zapôsobení nezmenený, vyhlásime ho za invariantný voči danej grupe.

V tejto kapitole kvantitatívne vyšetríme, ako sa menia tenzory pod vplyvom nejakej grupy, teda ako sa robia *reprezentácie* grupy v priestore $T_q^p(L)$. Ešte pred tým si však dáme menej ambiciózny cieľ, a to povedať ako sa robia reprezentácie v priestore L^*, t. j. na kovektoroch (čo sú špeciálne tenzory), pričom predpokladáme, že už máme k dispozícii nejakú reprezentáciu v L na vektoroch.

3.2 Duálna reprezentácia

3.2.1 Reprezentácia grupy v L^*

Nech $\rho : G \to \operatorname{Aut} L$ je reprezentácia grupy G v lineárnom priestore L. Reprezentáciu v L^* by sme mohli urobiť rôznym spôsobom, nezávisle od ρ, lebo na L^* by sme sa mohli pozerať ako na nezávislý vektorový priestor (aj keď je závislý od L). My ju však chceme skonštruovať z ρ, a to tak, aby splnila určitú požiadavku. Aby sme po zafixovaní reprezentácie ρ vedeli už jednoznačne zostrojiť aj reprezentáciu v L^*[4].

Reprezentáciu grupy G v duálnom priestore L^* označíme $\check{\rho}$, a nazývame ju *duálna (kontragradientná reprezentácia)*. Spomínaná požiadavka, zároveň definícia $\check{\rho}$ je

$$\check{\rho} : G \to \operatorname{Aut} L^* \qquad \langle \check{\rho}(g)\alpha, \rho(g)v\rangle := \langle \alpha, v\rangle \qquad \alpha \in L^*, v \in L \tag{3.1}$$

[4] Je to podobná situácia, ako keď sme v paragrafe 2.2 konštruovali duálnu bázu. Tiež sme ju mohli zostrojiť nezávisle od bázy v L, my sme ju však zvolili tak, aby platilo $\langle e^a, e_b\rangle = \delta^a_b$. Teda ak zafixujeme bázu v L, potom duálna báza, ktorá splní túto požiadavku je už daná jednoznačne.

čo znamená, že vyčíslenie $\langle\alpha, v\rangle$ je invariantné voči pôsobeniu grupy G. Myslíme to tak, že ak pôsobíme na vektory danou reprezentáciou, na kovektory budeme pôsobiť novou reprezentáciou tak, aby sa číselná hodnota $\langle\alpha, v\rangle$ nezmenila. To už jednoznačne určuje reprezentáciu $\check{\rho}$.

Ekvivalentný zápis definície[5]

$$\langle\check{\rho}(g)\alpha, v\rangle := \left\langle\alpha, \rho(g^{-1})v\right\rangle \tag{3.2}$$

Odtiaľ sa dá ľahko nahliadnuť, že $\check{\rho}$ je naozaj reprezentácia[6].

Ak využijeme poznatky paragrafu 2.4 na strane 14 zistíme, že pri pôsobení na vzájomne duálne bázy e_a, e^a v L a L^* platí

$$\rho(g)e_a = A^b{}_a e_b \qquad \Rightarrow \qquad \check{\rho}(g)e^a = (A^{-1})^a{}_b e^b \tag{3.3}$$

teda na úrovni matíc

$$\rho : g \leftrightarrow A \qquad \Leftrightarrow \qquad \check{\rho} : g \leftrightarrow (A^{-1})^T \tag{3.4}$$

Dodatočná inverznosť matice A sa objaví, lebo v definícii (3.2) vystupuje $\rho(g^{-1})$.

3.2.2 Odvodená reprezentácia v L^*

Vzhľadom k tomu, že Lieova algebra je vďaka linearite výrazne jednoduchšia štruktúra ako Lieova grupa, oplatí sa nám študovať pôsobenie *algebry* na kovektoroch, teda odvodenú reprezentáciu.

Chceme nájsť $\check{\rho}'$, čo predstavuje reprezentáciu algebry $\mathcal{G}$ v priestore L^*. Nech ρ' je odvodná reprezentácia k ρ. Nech $g \in G, X \in \mathcal{G}$. Do prvého rádu v ε platí (v zmysle dodatku A)

$$g = \mathbb{I} + \varepsilon X$$

Súvis medzi reprezentáciou a jej odvodenou reprezentáciou je daný definičným vzťahom pre odvodenú reprezentáciu[7]

$$\rho(\mathbb{I} + \varepsilon X) \overset{!}{=} \mathbb{I} + \varepsilon\rho'(X)$$
$$\check{\rho}(\mathbb{I} + \varepsilon X) \overset{!}{=} \mathbb{I} + \varepsilon\check{\rho}'(X)$$

Odvodenú reprezentáciu $\check{\rho}'$ nájdeme z definičného vzťahu pre duálnu reprezentáciu (3.2), využijeme pritom, že ak $g = \mathbb{I} + \varepsilon X$, potom

$$g^{-1} = \mathbb{I} - \varepsilon X$$

Nahliadnuť sa to dá tak, že musí platiť

$$g^{-1}g = (\mathbb{I} - \varepsilon X)(\mathbb{I} + \varepsilon X) = \mathbb{I}$$

[5]Stačí si uvedomiť, že $w = \rho(g)v \Rightarrow v = \rho(g^{-1})w$, lebo ρ je homomorfizmus.

[6]Potrebujeme ukázať, že $\check{\rho}$ je homomorfizmus, a že $\check{\rho}(g)$ je obrátiteľný lineárny operátor.

[7]Pozri A.2 na strane 44.

čo je naozaj pravda do prvého rádu v ε. Trochu rigoróznejší spôsob je rozvinúť do radu exponenciálne zobrazenie, platí $\mathbb{I} = e^{\varepsilon X - \varepsilon X} = e^{\varepsilon X} e^{-\varepsilon X}$, kde $g = e^{\varepsilon X}$. Odtiaľ už vyplýva $g^{-1} = e^{-\varepsilon X} = \mathbb{I} - \varepsilon X + o(\varepsilon)$.

Vrátime sa k (3.2), dosadíme $g = \mathbb{I} + \varepsilon X$

$$\langle \check{\rho}(\mathbb{I} + \varepsilon X)\alpha, v\rangle = \langle \alpha, \rho(\mathbb{I} - \varepsilon X)v\rangle$$
$$\langle (\mathbb{I} + \varepsilon\check{\rho}'(X))\alpha, v\rangle = \langle \alpha, (\mathbb{I} - \varepsilon\rho'(X))v\rangle$$

odtiaľ hneď vyplýva

$$\langle \check{\rho}'(X)\alpha, v\rangle = -\langle \alpha, \rho'(X)v\rangle \tag{3.5}$$

Podobne ako v časti 3.2.1, aj tu nájdeme príslušný vzťah medzi maticami. Nech E_i je báza v Lieovej algebre $\mathcal{G}$ a e_a, e^a sú bázy v L, L^*. Rozpísaním (3.5) na bázach hneď dostaneme

$$\rho'(E_i)e_a := (\rho_i')^b{}_a e_b \qquad \Rightarrow \qquad \check{\rho}'(E_i)e^a = (\check{\rho}_i')_b{}^a e^b = -(\rho_i')^a{}_b e^b \tag{3.6}$$

teda na úrovni matíc

$$\rho_i' \equiv \rho'(E_i) \equiv A_i \qquad \Leftrightarrow \qquad \check{\rho}_i' \equiv \check{\rho}'(E_i) \equiv -A_i^T \tag{3.7}$$

3.3 Reprezentácia na tenzoroch

3.3.1 Reprezentácia grupy v $T_q^p(L)$

Nech $T_q^p(L)$ predstavuje priestor tenzorov typu $\binom{p}{q}$. Nech ρ je ľubovoľná reprezentácia na vektoroch v L a $\check{\rho}$ je k nej duálna (v zmysle paragrafu 3.2). V predchádzajúcom paragrafe stačilo zobrať nejakú reprezentáciu na vektoroch a jej duálna reprezentácia už bola daná jednoznačne. Teraz chceme obdobne “kanonicky” – teda len s použitím ρ – zostrojiť reprezentáciu $\hat{\rho}$ grupy G v priestore $T_q^p(L)$. Celé to spravíme tak, že na to, aby sme robili reprezentácie na tenzoroch, nám bude stačiť vedieť robiť reprezentácie na vektoroch.

$\hat{\rho}$ definujeme teda nasledujúcim spôsobom

$$\hat{\rho} : G \to \operatorname{Aut} T_q^p(L)$$
$$(\hat{\rho}(g)t)(v, \ldots; \alpha, \ldots) := t(\rho(g^{-1})v, \ldots; \check{\rho}(g^{-1})\alpha, \ldots) \tag{3.8}$$

Treba poznamenať, že ide o zovšeobecnenie reprezentácie na kovektoroch, ak napíšeme túto definíciu pre tenzor typu $\binom{0}{1}$, zistíme, že je zhodná s (3.2). Ľahko sa nahliadne, že takáto definícia reprezentácie je naozaj korektná, teda sú splnené nasledovné vlastnosti

$$\hat{\rho}(g_1 g_2) = \hat{\rho}(g_1)\hat{\rho}(g_2) \qquad \hat{\rho} \text{ je homomorfizmus} \tag{3.9a}$$
$$\hat{\rho}(g)(t + \lambda\tau) = \hat{\rho}(g)t + \lambda\hat{\rho}(g)\tau \qquad \hat{\rho}(g) \text{ je lineárny operátor} \tag{3.9b}$$

Takáto definícia reprezentácie na tenzoroch v skutočnosti nie je ničím výnimočným. Zostrojili sme ju pomocou akcii na *argumentoch* tenzora (vektoroch a kovektoroch). Je pritom všeobecným pravidlom, že ak máme nejaké zobrazenie (funkciu) a chceme definovať reprezentáciu na zobrazeniach (funkciách), stačí, ak vieme robiť akcie (v našom prípade reprezentácie) na argumentoch funkcie. Podobný postup sme uplatnili aj v časti 3.2.1, keď sme reprezentáciu na kovektoroch definovali pomocou reprezentácie na vektoroch – argumentoch kovektorov.

3.3.2 Odvodená reprezentácia v $T^p_q(L)$

Podobne ako v časti 3.2.2 (a aj z rovnakých dôvodov), tu bude našim cieľom nájsť reprezentáciu algebry $\mathcal{G}$ v priestore $T^p_q(L)$. Značiť ju budeme $\hat{\rho}'$ a opäť ju nájdeme pomocou $\hat{\rho}(\mathbb{I}+\varepsilon X) = \mathbb{I}+\varepsilon\hat{\rho}'(X)$, na všeobecnom argumente teda

$$\big[\hat{\rho}(\mathbb{I}+\varepsilon X)t\big](v_1,\dots,v_q;\alpha_1,\dots,\alpha_p) = \big[(\mathbb{I}+\varepsilon\hat{\rho}'(X))t\big](v_1,\dots,v_q;\alpha_1,\dots,\alpha_p)$$

Ďalej upravujeme ľavú stranu tak, že dosadíme $g = \mathbb{I}+\varepsilon X, g^{-1} = \mathbb{I}-\varepsilon X$ do definície (3.8), teda

$$\begin{aligned}\big[\hat{\rho}(\mathbb{I}+\varepsilon X)t\big](v_1,\dots;\alpha_1,\dots) &= t\big(\rho(\mathbb{I}-\varepsilon X)v_1,\dots;\check{\rho}(\mathbb{I}-\varepsilon X)\alpha_1,\dots\big)\\ &= t(v_1-\varepsilon\rho'(X)v_1,\dots;\alpha_1-\varepsilon\check{\rho}'(X)\alpha_1,\dots)\end{aligned}$$

Ďalej využijeme multilineárnosť t

$$\begin{aligned}&\big[\hat{\rho}(\mathbb{I}+\varepsilon X)t\big](v_1,\dots,v_q;\alpha_1,\dots,\alpha_p) =\\ &\quad= t(v_1,\dots,v_q;\alpha_1,\dots,\alpha_p) - \varepsilon\sum_{j=1}^{q} t(v_1,\dots,\rho'(X)v_j,\dots,v_q;\alpha_1,\dots,\alpha_p)\\ &\qquad - \varepsilon\sum_{j=1}^{p} t(v_1,\dots,v_q;\alpha_1,\dots,\check{\rho}'(X)\alpha_j,\dots,\alpha_p) + o(\varepsilon)\\ &\qquad\stackrel{!}{=} t(v_1,\dots,v_q;\alpha_1,\dots,\alpha_p) + \varepsilon\big(\hat{\rho}'(X)t\big)(v_1,\dots,v_q;\alpha_1,\dots,\alpha_p)\end{aligned}$$

odtiaľ vidno, že

$$\begin{aligned}\big(\hat{\rho}'(X)t\big)(v_1,\dots,v_q;\alpha_1,\dots,\alpha_p) = &-\sum_{j=1}^{q} t\big(v_1,\dots,\rho'(X)v_j,\dots,v_q;\alpha_1,\dots,\alpha_p\big)\\ &-\sum_{j=1}^{p} t\big(v_1,\dots,v_q;\alpha_1,\dots,\check{\rho}'(X)\alpha_j,\dots,\alpha_p\big)\end{aligned} \tag{3.10}$$

Pri tom sa sumácia myslí tak, že v každom jednom sčítanci je práve na jeden argument tenzora zapôsobené $\rho'(X)$ v prípade vektorových argumentov a $\check{\rho}'(X)$ v prípade kovektorov – teda prvý sčítanec vyzerá tak, že na v_1 pôsobí $\rho'(X)$, ostatné argumenty sú nezmenené atď.

Vďaka linearite vieme prepísať vzťah (3.10) do komponentného tvaru, teda na bázach. Nech E_i je báza v Lieovej algebre $\mathcal{G}$, e_a je báza v priestore L a e^a je báza k nej duálna. Potom

$$\begin{aligned}&\big(\hat{\rho}'(E_i)t\big)(e_{a_1},\dots,e_{a_q};e^{b_1},\dots,e^{b_p}) =\\ &\qquad -\sum_{j=1}^{q} t\big(e_{a_1},\dots,\rho'(E_i)e_{a_j},\dots,e_{a_q};e^{b_1},\dots,e^{b_p}\big)\\ &\qquad\qquad -\sum_{j=1}^{p} t\big(e_{a_1},\dots,e_{a_q};e^{b_1},\dots,\check{\rho}'(E_i)e^{b_j},\dots,e^{b_p}\big)\end{aligned}$$

Označme si teraz $\rho'(E_i)e_a := (\rho'_i)^b{}_a e_b$, kde ρ'_i je matica operátora $\rho'(E_i)$. Ak využijeme vzťahy (3.6) a (3.7) – teda $\breve{\rho}'_i = -\rho'^T_i$, dostaneme

$$\left(\hat{\rho}'(E_i)t\right)^{b_1\dots b_p}_{a_1\dots a_q} = -\sum_{j=1}^{q} (\rho'_i)^c{}_{a_j} t^{b_1\dots\dots\dots b_p}_{a_1\dots c\dots a_q} + \sum_{j=1}^{p} (\rho'^T_i)_c{}^{b_j} t^{b_1\dots c\dots b_p}_{a_1\dots\dots\dots a_q} \tag{3.11}$$

kde index c je vždy na j-tej pozícii v tenzore t, to znamená, že c postupne prebehne všetky indexové pozície a index, ktorý mal byť na jeho mieste sa ocitne v matici ρ'_i. Na pravej strane je $p+q$ sčítancov za každý člen sumy a kvôli sumačnej konvencii sa sumuje aj cez index c, ktorý môže mať celkovo $\dim L$ hodnôt. Spolu je to $(p+q).(\dim L)$ sčítancov. Celkový počet voľných indexov je $p+q+1$.

Tento vzťah nám hovorí, čo robí reprezentácia $\hat{\rho}'$ na komponentoch. Na ľavej strane máme všeobecný komponent "nového" tenzora (po zapôsobení reprezentáciou) a na pravej strane máme jeho súvis so "starými" komponentmi.

3.3.3 Prípad grupy $SO(3)$

V tejto časti ukážeme, aké dôsledky majú výsledky predchádzajúcich paragrafov pre prípad konkrétnej grupy, a to $SO(3)$[8]. Pôjde jednak o "hmatateľný" príklad slúžiaci na názornú ilustráciu prechádzajúcej teórie, a jednak je to dôležitý príklad, ktorý nám neskôr poslúži, keď budeme hľadať izotropné tenzory v E^3. Podstatné informácie o grupe $SO(3)$ a hlavne o jej algebre $so(3)$ je možné nájsť zhrnuté v dodatku B.

Teraz budeme považovať náš vektorový priestor za euklidovský, t. j. $L = E^3$. Zároveň $G = SO(3), \mathcal{G} = so(3)$. Reprezentáciu ρ budeme teraz uvažovať identickú, teda $\rho = \mathrm{id}$, potom aj $\rho' = \mathrm{id}$. Znamená to len toľko, že na vektory a kovektory budeme pôsobiť priamo maticami z Lieovej algebry, $\rho'(X) = X$. Bázu v $so(3)$ značíme $E_i = l_i$ a platí

$$(l_i)_{jk} = -\varepsilon_{ijk} \qquad\qquad l_i^T = -l_i$$

Dosadíme do rovnice (3.11)

$$\rho'_i = \rho'(l_i) = l_i \qquad\qquad \rho'^T_i = l_i^T = -l_i$$

dostaneme

$$\left(\hat{\rho}'(l_i)t\right)^{b_1\dots b_p}_{a_1\dots a_q} = -\sum_{j=1}^{q} (l_i)^c{}_{a_j} t^{b_1\dots\dots\dots b_p}_{a_1\dots c\dots a_q} - \sum_{j=1}^{p} (l_i)_c{}^{b_j} t^{b_1\dots c\dots b_p}_{a_1\dots\dots\dots a_q}$$

V tejto chvíli si treba všimnúť dve veci. Po prvé, v rovnici (3.11) sme mali dva typy členov, ktoré sčitujeme – "vektorové" a "kovektorové". Tie sa líšili jednak znamienkom a jednak transponovanosťou matice ρ'^T_i pri kovektorových členoch. Pre grupu $SO(3)$ to však dopadlo tak (akurát náhodou nám transponovanosť opravila opačné znamienko), že tieto pôvodne dva typy členov sa teraz už líšia len polohou indexov (ako sa na vektory a kovektory patrí), inak sú kvalitatívne úplne rovnakého druhu.

[8]Kriminalistickou terminológiou sme sa inšpirovali u doc. J. Mózera.

Po druhé, sme v priestore E^3, kde máme k dispozícii kladne definitný metrický tenzor, ktorý má v ortonormovanej báze tvar $g_{ij} = \delta_{ij}$. V tomto priestore vieme prakticky "zadarmo" znižovať aj zvyšovať indexy komponentov (bez zmeny ich číselnej hodnoty), inak povedané, na polohe indexov v E^3 nezáleží. Prísne vzaté, mali by sme rozlišovať polohu indexov a znižovať/zvyšovať ich pomocou metrického tenzora δ_{ij} v zmysle paragrafu 2.3.3 na strane 12, ale vzhľadom na fakt, že sa aj tak nemenia číselné hodnoty komponentov, budeme tieto jemné rozdiely ignorovať (ako sa to bežne robí) a indexy budeme pri práci s grupou $SO(3)$ v E^3 uvádzať všetky dole, pričom aj naďalej budeme mať na mysli sumáciu cez dvakrát opakovaný index.

Dokončíme teraz výpočet, dosadíme do posledného vzťahu $(l_i)_{jk} = -\varepsilon_{ijk}$, dostaneme

$$\big(\hat{\rho}'(l_i)t\big)_{a_1\dots a_q b_1\dots b_p} = \sum_{j=1}^{q} \varepsilon_{ica_j} t_{a_1\dots c\dots a_q b_1\dots b_p} + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_{icb_j} t_{a_1\dots a_q b_1\dots c\dots b_p}$$

označme $r := p + q$, čo je celkový stupeň (rang) tenzora – teda r predstavuje celkový počet indexov, ktoré má komponent tenzora, ale aj počet argumentov potrebných na vyčíslenie tenzora. Potom môžeme písať

$$\big(\hat{\rho}'(l_i)t\big)_{a_1\dots a_r} = \sum_{j=1}^{r} \varepsilon_{ica_j} t_{a_1\dots c\dots a_r} \tag{3.12}$$

kde index c je index na j-tej pozícii. Táto rovnica nám hovorí, čo sa deje s komponentmi tenzora pri pôsobení reprezentácie $\hat{\rho}'$.

Kapitola 4

Invariantné tenzory

V predchádzajúcej kapitole sme vyšetrili čo sa deje s tenzormi, keď na nich pôsobí grupa cez svoju reprezentáciu. V tejto kapitole uvedieme definíciu invariantného tenzora voči grupe a prešetríme niektoré jeho vlastnosti.

V úvode predchádzajúcej kapitoly, v časti 3.1 sme podali intuitívny pohľad na problematiku invariantnosti voči niečomu – symetrii. Navyše teraz už vieme, ako sa robia reprezentácie na tenzoroch, takže sme len malý krôčik od toho, aby sme kvantitatívne povedali, čo je to invariantný tenzor. Budeme však čitateľa ešte chvíľu napínať a napred poskytneme niekoľko fyzikálnych príkladov, kde sa odvoláva na invariantné tenzory.

4.1 Invariantné tenzory vo fyzike

V tejto časti nadviažeme na kapitolu 1, kde sme spomínali niekoľko príkladov tenzorov vo fyzike. Skúsime intuitívne nahliadnuť, ako by vyzerali tenzory, ktoré sú tam spomínané v prípade, že by sme od nich požadovali určitú invariantnosť.

Tenzor zotrvačnosti Ako prvý spomíname opäť práve tenzor zotrvačnosti – dôvod je prostý – je to pomerne názorný príklad, na ktorom si vieme vyskúšať našu intuíciu aj predstavivosť. V ďalších úvahách bude os (vzhľadom na ktorú počítame I, I_{ij}) vždy prechádzať stredom telesa (ťažiskom).

Asi každý, kto už počítal nejaký viacnásobný integrál, určite počítal tenzor zotrvačnosti pre sféru, guľu alebo kocku. Tam vyjde čosi takéto

$$I_{ij} = I\delta_{ij}$$

kde I je skalárny moment zotrvačnosti (iný pre sféru, guľu aj kocku) vzhľadom na ľubovoľnú os prechádzajúcu stredom telesa. Vieme pritom, že kocka aj sféra majú určitú symetriu, zjavnú na pohľad.

Navyše ak sa zaujímame o moment zotrvačnosti vzhľadom na os, ktorá má smer jednotkového vektora $\vec{n}, |\vec{n}| = 1$, dostaneme (podľa (1.1))

$$I(\vec{n}) = I_{ab}n_a n_b = I\delta_{ab}n_a n_b = I = \text{const}$$

Teda za takýchto okolností nám náš tenzor zabezpečí, že moment zotrvačnosti je rovnaký vzhľadom na ľubovoľnú os! Navyše je tento tenzor rovnaký vo všetkých bázach (stále v našich úvahách os prechádza stredom, posunutiami osi sa nezaoberáme). To v skutočnosti znamená, že $I_{ij} = I\delta_{ij}$ "necíti smer", je *izotropný* – invariantný voči otáčaniam.

Takýmto spôsobom sa dá intuitívne nahliadnuť, že $I\delta_{ij}$ je naozaj izotropný tenzor, nevieme však nahliadnuť, či je to *jediný* možný izotropný tenzor stupňa dva[1].

Poznámka Táto poznámka sa týka kocky a jej symetrie. Dôležité je uvedomiť si, že zatiaľ čo sféra (guľa) je naozaj invariantná voči rotáciám o *ľubovoľný* uhol okolo stredu, kocka *nie je*. Kocka je invariantná iba ak ju rotujeme o konkrétne diskrétne uhly – napr. o uhol $\pi/2$ okolo osi prechádzajúcej stredom kocky kolmo na jej stenu (rotáciu o iný uhol by sme si mohli "všimnúť"). Kocka má preto nižšiu symetriu ako sféra či guľa. Takýmto typom symetrie sa práca nezaoberá. Stojí za pozornosť poznamenať, že zatiaľ čo kocka nie je izotropná, jej tenzor zotrvačnosti *je*, tenzor má vyššiu symetriu ako samotná kocka.

Materiálové vzťahy Len v krátkosti spomenieme, že tenzorové vzťahy opísané v paragrafe 1.3 na strane 5 prejdú v izotropnom prípade – teda keď príslušné tenzory majú tvar $\lambda\delta_{ij}$ – na skalárny tvar

$$\begin{aligned} D_a &= \varepsilon_{ab}E_b && \rightarrow && \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \\ B_a &= \mu_{ab}H_b && \rightarrow && \vec{B} = \mu\vec{H} \\ j_a &= \sigma_{ab}E_b && \rightarrow && \vec{j} = \sigma\vec{E} \end{aligned}$$

čo napríklad v poslednom prípade (Ohmov zákon) znamená, že výsledný prúd $\vec{j}$ má vždy smer elektrického poľa $\vec{E}$ a veľkosť prúdu závisí len od veľkosti poľa (presne tak ako to bolo popísané v časti 1.3) – teda určitá izotropnosť.

Tieto izotropné prípady naozaj nastávajú v niektorých materiáloch. Sú to napríklad materiály s tzv. *kubickou mriežkou*, teda atómy alebo molekuly sú v materiáli usporiadané tak, že sedia v rohoch kocky. Táto kocka sa potom periodicky opakuje, čím vznikne ideálny kryštál[2].

Rovnako ako pri tenzore zotrvačnosti, aj tu nastáva jav, keď symetria materiálových tenzorov je vyššia ako symetria kubickej mriežky – zatiaľ čo mriežka *nie je* izotropná, príslušné tenzory *sú* izotropné.

Mechanika kontinua Uvedieme dva najbežnejšie prípady, kde sa v mechanike kontinua odvoláva na invariantné tenzory. V predchádzajúcich príkladoch sme si mohli spomínané tenzory často spočítať explicitne (tenzor zotrvačnosti pre sféru alebo elektrickú vodivosť pre

[1] Neskôr zistíme, že naozaj platí, že najvšeobecnejší izotropný tenzor stupňa dva má tvar $\lambda\delta_{ij}$ kde $\lambda \in \mathbb{R}$ je ľubovoľné.

[2] V reálnych materiáloch sa môžu vyskytovať nečistoty, alebo rôzne poruchy tejto mriežky, môže byť preto narušená jednak periodickosť kryštálu, jednak aj samotná kubická symetria, čo môže mať za následok aj narušenie izotropnosti príslušných tenzorov.

kubickú mriežku) a následne nahliadnuť, že tenzor je izotropný. V mechanike kontinua sa však niekedy povie – keď sa hľadajú pohybové rovnice kontinua, že tenzor vystupujúci v rovnici je invariantný (homogénny alebo izotropný), čo potom výrazne zjednoduší rovnice. My teda nevieme ako presne vyzerajú tieto tenzory, ale z nejakých dôvodov vieme, že naša úloha má symetriu, prípadne sa rozhodneme, že sa budeme zaoberať len symetrickým prípadom. Vtedy si zjednodušíme situáciu, ak vieme ako vyzerajú invariantné tenzory v danom prípade.

Prvý príklad je z mechaniky tekutín. V hydrostatickom prípade sa požaduje, aby napätia v kvapaline boli izotropné. To má za následok, že tenzor napätia má tvar

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$$

kde $p = p(\vec{r}, t)$ je hydrostatický tlak, ktorý vystupuje v rovnici ako neznáma. Tento výsledok platí v skutočnosti pre všetky neviskózne kvapaliny: Izotropnosť pokazia a do σ_{ij} pridajú ďalšie členy práve viskózne členy.

Pružné kontinuum Jeden z najzaujímavejších príkladov využitia invariantnosti tenzorov však prichádza, keď sa študujú vlastnosti pružného kontinua. Hookov zákon (1.2) totiž obsahuje $c_{ijkl}(\vec{r}, t)$, čo je tenzorové pole, ktoré má 21 nezávislých komponentov[3], pričom každý komponent je funkciou štyroch premenných. Preto $c_{ijkl}(\vec{r}, t)$ predstavuje 21 funkcii štyroch premenných – čo je evidentne dosť zložitý objekt.

Situácia sa zjednoduší tým, že začneme uvažovať iba *homogénne* a *izotropné* kontinuum. Homogénnosť znamená, že vlastnosti kontinua sú rovnaké v každom bode[4]. To nám zabezpečí, že na popis pružného kontinua nepotrebujeme 21 funkcii, ale iba 21 konštánt. Ďalej sa využije, že vďaka izotropnosti musí mať tenzor štvrtého stupňa tvar

$$c_{ijkl} = \lambda_1\delta_{ij}\delta_{kl} + \lambda_2\delta_{ik}\delta_{jl} + \lambda_3\delta_{il}\delta_{jk} \tag{4.1}$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ sú ľubovoľné. Symetrie (1.3) potom majú za následok, že vlastnosti homogénneho a izotropného pružného kontinua sú dané len dvoma nezávislými konštantami λ, μ, platí

$$c_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{4.2}$$

Tento výsledok predstavuje už výrazné zjednodušenie pôvodného problému. Dôkaz tohto tvrdenia sa však prakticky nikde neuvádza (zrejme nebude taký jednoduchý). V ďalšej kapitole ukážeme, že tento výsledok je naozaj korektný, a všeobecný izotropný tenzor štvrtého stupňa má tvar (4.1).

4.2 Všeobecná teória

4.2.1 Definícia invariantného tenzora

V tejto chvíli už asi nikoho neprekvapí nasledujúca definícia invariantného tenzora: Nech G je Lieova grupa, $\hat{\rho}$ je nejaká jej reprezentácia v $T^p_q(L)$ v zmysle paragrafu 3.3.1. Tenzor t

[3] Všeobecne je komponentov $3^4 = 81$, ale vďaka symetriám (1.3) je iba 21 z nich nezávislých.

[4] Viac o homogénnosti je v paragrafe 4.3.

považujeme za *invariantný* voči pôsobeniu grupy G, ak spĺňa rovnicu

$$\hat{\rho}(g)t = t \qquad\qquad g \in G \tag{4.3}$$

Postup je nasledovný: Vyrobme z grupového prvku g pomocou reprezentácie lineárny operátor – "mlynček" $\hat{\rho}(g)$, ktorý tenzoru priradí nový tenzor. Ak do tohto mlynčeka vhodíme tenzor t a vypadne nám *nezmenený* ten istý tenzor t, potom ho prehlásime za invariantný. Ak to bude platiť pre ľubovoľný grupový prvok $g \in G$, potom prehlásime, že tenzor je invariantný voči pôsobeniu grupy G.

Vieme, že každá grupa obsahuje jednotku, pričom podstatná informácia o grupe je skrytá práve v malom okolí jednotky. Tam môžeme nahradiť Lieovu grupu jednoduchšou, lineárnou štruktúrou – Lieovou algebrou. Prepíšme teraz vzťah (4.3) do infinitezimalnej podoby, teda zaujímajme sa, čo platí pre tenzory invariantné voči grupovým prvkom z okolia jednotky $g = \mathbb{I} + \varepsilon X$, kde $X \in \mathcal{G}$. Nech $\hat{\rho}'$ je odvodená reprezentácia algebry na tenzoroch (ako v (3.10)). Potom platí

$$\hat{\rho}(\mathbb{I} + \varepsilon X)t \overset{!}{=} t$$
$$\big(\mathbb{I} + \varepsilon\hat{\rho}'(X)\big)t = t + \varepsilon\hat{\rho}'(X)t \overset{!}{=} t$$

odtiaľ

$$\hat{\rho}'(X)t = 0 \qquad\qquad X \in \mathcal{G} \tag{4.4}$$

Toto je infinitezimálny tvar rovnice (4.3).

Prečo sa nám oplatí študovať prvky grupy z blízkeho okolia jednotky? Na túto otázku odpovieme názorným príkladom, ak ide o grupu $SO(3)$. Prvky tejto grupy sú rotácie v E^3. Študovať prvky $SO(3)$ blízke jednotke znamená zaoberať sa veľmi malými – infinitezimálnymi rotáciami. Nájsť tenzor, ktorý spĺňa (4.4) teda znamená nájsť tenzor invariantný voči infinitezimálnym rotáciám. Lenže platí, že ľubovoľné rotácie vieme poskladať z veľkého počtu malých rotácii. Preto ak chceme nájsť tenzor invariantný voči ľubovoľnej rotácii (aj veľkej), stačí nám riešiť rovnicu (4.4). Ak na takýto tenzor potom zapôsobíme ľubovoľnou rotáciou, predstavíme si to, že naň pôsobí veľké množstvo malých rotácii. Lenže náš tenzor je invariantný voči *každej* z nich, preto necíti ani veľkú rotáciu.

Preto neskôr, keď budeme hľadať invariantné tenzory, budeme riešiť (4.4). Prepíšme teraz túto rovnicu do komponentného tvaru (na báze). Nech E_i je báza v Lieovej algebre $\mathcal{G}$, e_a, e^a sú bázy v L, L^*. Na bázach vyzerá rovnica (4.4) nasledovne

$$\big(\hat{\rho}'(E_i)t\big)^{b_1\ldots b_p}_{a_1\ldots a_q} = 0 \tag{4.5}$$

Ak použijeme pre odvodenú reprezentáciu $\hat{\rho}'$ výraz (3.11), dostaneme konečný tvar rovnice, pomocou ktorej budeme hľadať invariantné tenzory

$$-\sum_{j=1}^{q}(\rho'_i)^c{}_{a_j} t^{b_1\ldots\ldots\ldots b_p}_{a_1\ldots c\ldots a_q} + \sum_{j=1}^{p}(\rho_i'^T)_c{}^{b_j} t^{b_1\ldots c\ldots b_p}_{a_1\ldots\ldots\ldots a_q} = 0 \tag{4.6}$$

kde index c je vždy na j-tom mieste a $\rho'_i = \rho'(E_i)$ je matica operátora $\rho'(E_i)$ vzhľadom na hore uvedenú bázu.

4.2.2 Vlastnosti invariantných tenzorov

Vráťme sa teraz k pôvodnej definícii (4.3). Vyšetrujme niektoré vlastnosti tejto rovnice.

Ako prvé si môžeme všimnúť, že vďaka linearite $\hat{\rho}(g)$ je táto rovnica lineárna. Znamená to, že ak máme 2 invariantné tenzory t_1, t_2 voči $\hat{\rho}(g)$, tak aj ich lineárna kombinácia bude invariantný tenzor. Teda platí

$$\hat{\rho}(g)t_1 = t_1 \qquad \hat{\rho}(g)t_2 = t_2 \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\rho}(g)(t_1 + \lambda t_2) = t_1 + \lambda t_2 \tag{4.7}$$

Druhé pozorovanie sa týka tenzorových súčinov. Tenzorový súčin dvoch reprezentácii $\hat{\rho}_1$ a $\hat{\rho}_2$ sa zavádza nasledovne

$$(\hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2)(g) := \hat{\rho}_1(g) \otimes \hat{\rho}_2(g)$$
$$(\hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2)(g)(t_1 \otimes t_2) := \hat{\rho}_1(g)t_1 \otimes \hat{\rho}_2(g)t_2$$

Preto ak máme t_1 invariantný voči $\hat{\rho}_1(g)$ a t_2 invariantný voči $\hat{\rho}_2(g)$, potom ich tenzorový súčin je invariantný voči $(\hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2)(g)$, platí

$$\hat{\rho}_1(g)t_1 = t_1 \qquad \hat{\rho}_2(g)t_2 = t_2 \qquad \Rightarrow \qquad (\hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2)(g)(t_1 \otimes t_2) = t_1 \otimes t_2 \tag{4.8}$$

Ďalej vyšetrujme kontrakcie. Chceme zistiť, aký je vzťah medzi invariantným tenzorom a jeho kontrakciou. Pomôžeme si nasledujúcim zistením. Nech $\hat{\rho}$ je reprezentácia v $T^p_q(L)$ a $\hat{\rho}_0$ je reprezentácia v $T^{p-1}_{q-1}(L)$ zadefinované v (3.8). Nech $C : T^p_q(L) \to T^{p-1}_{q-1}(L)$ je nejaká kontrakcia. Zistime, čomu sa rovná $\hat{\rho}_0(g)(Ct)$, $t \in T^p_q(L)$. Platí

$$\begin{aligned}\big(\hat{\rho}_0(g)(Ct)\big)(\overbrace{v,\dots}^{q-1};\overbrace{\alpha,\dots}^{p-1}) &= (Ct)\big(\rho(g^{-1})v,\dots;\check{\rho}(g^{-1})\alpha,\dots\big)\\ &= t\big(\underbrace{\rho(g^{-1})v,\dots,e_a,\dots}_{q};\underbrace{\check{\rho}(g^{-1})\alpha,\dots,e^a,\dots}_{p}\big)\end{aligned}$$

Označme teraz maticu operátora $\rho(g^{-1})$ ako A. Potom podľa (3.3) a (3.4) platí

$$\rho(g^{-1})e_a = A^b{}_a e_b \qquad\qquad \check{\rho}(g^{-1})e^a = (A^{-1})^a{}_b e^b$$

Maticu A prirobíme nasledovne

$$\begin{aligned}\big[\hat{\rho}_0(g)(Ct)\big](\overbrace{v,\dots}^{q-1};\overbrace{\alpha,\dots}^{p-1}) &= (AA^{-1})^a_b t\big(\dots,e_a,\dots;\dots,e^b,\dots\big)\\ &= t\big(\dots,A^a{}_c e_a,\dots;\dots,(A^{-1})^c{}_b e^b,\dots\big)\\ &= t\big(\dots,\rho(g^{-1})e_c,\dots;\dots,\check{\rho}(g^{-1})e^c,\dots\big)\\ &= \big(\hat{\rho}(g)t\big)\big(v,\dots,e_a,\dots;\alpha,\dots,e^a,\dots\big)\\ &= \big[C\big(\hat{\rho}(g)t\big)\big]\big(v,\dots;\alpha,\dots\big)\end{aligned}$$

Ukázali sme, že platí

$$\hat{\rho}_0(g)(Ct) = C\big(\hat{\rho}(g)t\big)$$

Teraz už ľahko nahliadneme, že ak je t invariantný voči $\hat{\rho}(g)$, tak aj jeho kontrakcia je invariantná voči $\hat{\rho}_0(g)$, teda

$$\hat{\rho}(g)t = t \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\rho}_0(g)(Ct) = Ct \tag{4.9}$$

Podľa (2.26) na strane 14 vieme aj spúšťanie a zdvíhanie indexov vyjadriť pomocou kontrakcie a tenzorového súčinu, môžeme písať

$$\flat_h t = C(h \otimes t)$$
$$\sharp_h t = C(h^{-1} \otimes t)$$

kde h je metrický tenzor. Odtiaľ možno ľahko nahliadnuť, že zdvíhaním (spúšťaním) indexov invariantného tenzora nepokazíme jeho invariantnosť, pri dodatočnom predpoklade, že aj náš metrický tenzor h je invariantný. Platí

$$\hat{\rho}(g)t = t \quad \hat{\rho}_h(g)h = h \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\rho}_1(g)(\flat_h t) = \flat_h t \quad \hat{\rho}_2(g)(\sharp_h t) = \sharp_h t \tag{4.10}$$

kde všetky vystupujúce reprezentácie sa dejú v príslušných priestoroch.

Ako poslednú vlastnosť uvedieme fakt, že ak zostrojíme z invariantného tenzora nový tenzor tak, že iba zmeníme poradie argumentov starého tenzora, znovu dostaneme invariantný tenzor. Keďže ide o jednoduché tvrdenie, nebudeme ho dokazovať, uvedieme iba konkrétny príklad ako to možno nahliadnuť. Nech $t \in T_2^0(L)$, a $\hat{\rho}(g)t = t$. Nech pre nový tenzor platí $\tilde{t}(u,v) = t(v,u)$. Potom

$$(\hat{\rho}(g)\tilde{t})(u,v) = \tilde{t}(\rho(g^{-1})u, \rho(g^{-1})v) = t(\rho(g^{-1})v, \rho(g^{-1})u) =$$
$$(\hat{\rho}(g)t)(v,u) = t(v,u) = \tilde{t}(u,v)$$

Zhrnutie [5]

1. Ak sú dva tenzory rovnakého typu invariantné, potom aj ich ľubovoľná lineárna kombinácia je invariantný tenzor.

2. Ak sú dva tenzory invariantné, potom aj ich tenzorový súčin je invariantný voči tenzorovému súčinu príslušných reprezentácii.

3. Kontrakcia invariantného tenzora je invariantný tenzor.

4. Tenzor, ktorý dostaneme z invariantného tenzora spúšťaním alebo dvíhaním indexov *pomocou invariantného* metrického tenzora je tiež invariantný.

5. Tenzor, ktorý dostaneme tak, že invariantnému tenzoru zmeníme poradie argumentov, je tiež invariantný.

[5] Pravdepodobne sa budeme uchádzať o zápis do Guinnessovej knihy rekordov za najväčší počet slov "invariantný" a "tenzor" na meter štvorcový.

4.3 Homogénne tenzory

V tejto práci sme sa doposiaľ zaoberali výlučne tenzormi, pohybovali sme sa v prostredí lineárnej algebry, argumenty tenzorov boli vektory a kovektory z L, L^*. Existujú však aj tzv. *tenzorové polia*, čo sú laicky povedané "premenlivé tenzory", teda také čo sa menia od bodu k bodu[6]. Každému bodu v priestore vieme pomocou tenzorového poľa priradiť tenzor.

S tenzorovými poľami sme sa už stretli v časti 1.2 alebo v 1.3. Väčšina tam uvedených tenzorov sú v skutočnosti tenzorové polia, vždy sa vzťahujú na určitý bod. Argumenty tenzorového poľa sú vektorové a kovektorové polia. Komponenty tenzorového pola sú funkcie priestorových súradníc (a nie len čísla z $\mathbb{R}$ ako to bolo v prípade tenzorov), prípadne aj času. Ide o zovšeobecnenie pojmov vektorové pole alebo skalárne pole.

Táto práca sa nezaoberá tenzorovými poľami, preto uvedieme len veľmi intuitívnu definíciu homogénneho tenzora. *Homogénny tenzor* je taký, ktorý sa nemení od bodu k bodu, teda je rovnaký bez ohľadu na to, na aký bod ho vzťahujeme. To znamená, že jeho komponenty sú konštantné funkcie (konštanty) v celom priestore[7]. Pre homogénny tenzor platí

$$t^{i\dots j}_{k\dots l}(\vec{r},\tau) = t^{i\dots j}_{k\dots l} = \text{const}$$

kde τ je čas. To znamená, že tentorové pole $t(\vec{r},\tau)$ je v tomto zmysle konštantné.

Treba poznamenať, že všetko, čo sme tu uviedli sa týka lineárnych priestorov (v skutočnosti *afinných*), napr. priestoru E^3. Obvykle sa uvažujú tenzorové polia na variete. Zatiaľ čo v E^3 vieme pomerne jasne povedať, čo je to konštantné tenzorové pole (a zadefinovať tak homogénny tenzor), na variete je situácia zložitejšia. Týmto sa však zaoberať nebudeme.

4.4 Izotropné tenzory

Izotropný tenzor nazývame tenzor invariantný voči pôsobeniu grupy $SO(3)$. Je to teda tenzor, ktorý "necíti" rotácie, má rovnaký tvar vo všetkých bázach, teda aj rôzne natočených.

V kapitole 3 sme povedali, ako presne pôsobí ľubovoľná grupa na tenzor – cez reprezentácie. V tejto kapitole sme povedali, čo to znamená, keď je nejaký tenzor invariantný voči pôsobeniu. Preto na záver tejto kapitoly uvedieme, ako vyzerá rovnica, pomocou ktorej budeme hľadať izotropné tenzory.

V časti 3.3.3 na strane 20 sme našli komponentné vyjadrenie odvodenej reprezentácie algebry $so(3)$ v $T^p_q(E^3)$. V časti 4.2.1 sme zase našli komponentné vyjadrenie rovnice pre invariantný tenzor. Ak dáme dohromady vzťahy (3.12) a (4.5), dostaneme

$$\sum_{j=1}^{r} \varepsilon_{ica_j} t_{a_1\dots c\dots a_r} = 0 \tag{4.11}$$

kde index c je vždy na j-tej pozícii a $r = p + q$ je stupeň tenzora. Hľadanie izotropných tenzorov sa redukuje na hľadanie riešení tejto rovnice, teda treba nájsť tenzor t, ktorý spĺňa túto rovnicu.

[6] Viac o tenzorových poliach je v [1].

[7] Máme namysli *kartézske* komponenty.

Kapitola 5

Konkrétne príklady

V celej tejto kapitole sa budeme venovať riešeniu rovnice (4.11), čo znamená, že budeme hľadať izotropné tenzory konkrétnych stupňov. V paragrafe 3.3.3 sme čiastočne zdôvodnili, prečo hrá pri grupe $SO(3)$ dôležitú úlohu iba stupeň tenzora – počet jeho argumentov a formálne nezáleží na tom, ktoré členy sú vektory a kovektory. V celej tejto kapitole budeme písať všetky indexy dole a aj naďalej budeme mať na mysli sumáciu cez dvakrát opakovaný index v súčine. Nebudeme rozlišovať medzi vektormi a kovektormi a ani medzi tenzormi typu $\binom{0}{2}$ a $\binom{1}{1}$ a podobne.

Dôvod prečo to môžeme robiť je nasledovný: V priestore E^3 štandardne používame metrický tenzor δ_{ij}. Ako sa neskôr ukáže, v časti 5.3, takýto metrický tenzor je invariantný (izotropný). A pokiaľ máme k dispozícii *invariantný* metrický tenzor, môžeme využiť vlastnosť (4.10). To znamená, že ak nájdeme napríklad invariantný tenzor typu $\binom{0}{2}$, vieme bez zmeny číselnej hodnoty komponentov meniť polohu indexov pomocou metrického tenzora δ_{ij} a vyrobiť tak tenzory typu $\binom{1}{1}$ a $\binom{2}{0}$, ktoré budú podľa (4.10) tiež invariantné. Stačí nám teda hľadať izotropné tenzory jedného typu, napríklad so všetkými indexmi dole.

5.1 Izotropný skalár

Pokiaľ ide o tenzory typu $\binom{0}{0}$, čiže skaláre, intuícia nám hovorí, že asi žiaden skalár by sa nemal meniť pri rotáciách. Vo fyzike je skalárnou veličinou napríklad hmotnosť[1] a tá je rovnaká vo všetkých sústavách.

Pohľad na vec cez reprezentácie je nasledovný. V (4.3) je reprezentácia na tenzore zadefinovaná tak, že mení jeho argumenty. Skalár má nula indexov a žiadne argumenty. Rovnica (4.3) je preto splnená identicky. A keďže nemáme k dispozícii žiadnu obmedzujúcu rovnicu, *ľubovoľný* skalár, teda tenzor typu $\binom{0}{0}$, je izotropný, ako sme čakali.

[1]Ide o hmotnosť hmotného bodu, alebo o celkovú hmotnosť telesa. Nie o rozloženie hmoty v priestore.

5.2 Izotropný vektor, kovektor

Opäť skúsime najprv intuitívny pohľad. Keď pôsobíme grupou $SO(3)$ na vektory, znamená to, že ich otáčame v priestore. Skúsme si predstaviť vektor, ktorý by sa nezmenil ak by sme ho v priestore otočili (ľubovoľným spôsobom!). Rýchlo zistíme, že taký vektor neexistuje.

Vyšetrime, čo na to povie rovnica (4.11). Tá pre tenzory prvého stupňa (vektory a kovektory) prejde na tvar

$$\varepsilon_{iaj} v_a = 0 \tag{5.1}$$

kde v_a je hľadaný izotropný vektor. Ak vynásobíme rovnicu ε_{ibj} a sčítame cez opakované indexy i, j, a dostaneme

$$\varepsilon_{ibj}\varepsilon_{iaj} v_a = 2\delta_{ab} v_a = 2v_b \stackrel{!}{=} 0$$

teda jedine vektor (kovektor)

$$\vec{v} = 0 \tag{5.2}$$

je izotropný. Alebo inak povedané: Žiaden netriviálny izotropný tenzor prvého stupňa (ani vektor ani kovektor) neexistuje, čo je v zhode s našou intuíciou.

5.3 Izotropný tenzor stupňa dva

V tejto chvíli nás intuícia začína pomaly opúšťať. Sme ale schopní nahliadnuť, tak ako bolo opísané v časti 4.1, že δ_{ij} je izotropný. A Podľa (4.7) aj $\lambda\delta_{ij}$ je izotropný pre ľubovoľné $\lambda \in \mathbb{R}$. Nevieme ale, či neexistujú aj *ďalšie* izotropné tenzory stupňa dva.

Riešme preto rovnicu (4.11) pre tento prípad (môžeme si predstaviť, že hľadáme izotropnú bilineárnu formu). Dostaneme

$$\varepsilon_{iaj} t_{ak} + \varepsilon_{iak} t_{ja} = 0 \tag{5.3}$$

Vynásobme rovnicu δ_{ij} a sčítajme cez opakované indexy.

$$\delta_{ij}(\varepsilon_{iaj} t_{ak} + \varepsilon_{iak} t_{ja}) = \varepsilon_{bak} t_{ba} \stackrel{!}{=} 0$$

kde sme premenovali sčítací index na b. Túto rovnicu vynásobme ε_{ijk}

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{bak} t_{ba} = (\delta_{bi}\delta_{aj} - \delta_{bj}\delta_{ai}) t_{ba} = t_{ij} - t_{ji} \stackrel{!}{=} 0$$

odkiaľ vyplýva, že izotropný tenzor t musí byť nutne symetrický

$$t_{ij} = t_{ji}$$

S touto novou vedomosťou sa teraz vráťme k pôvodnej rovnici (5.3) a vynásobme ju ε_{ilj}

$$\varepsilon_{ilj}(\varepsilon_{iaj} t_{ak} + \varepsilon_{iak} t_{ja}) = 2\delta_{al} t_{ak} + t_{kl} - \delta_{kl} t_{jj} = 3t_{lk} - \mu\delta_{lk} \stackrel{!}{=} 0$$

kde sme využili symetriu t a označili sme si $\mu := t_{jj}$ ako izotropný tenzor stupňa 0, čiže skalár (pripomíname, že ide o kontrakciu pôvodného tenzora, teda podľa (4.9) musí byť invariantný, čo skalár aj je). Platí

$$t_{ij} = \frac{\mu}{3}\delta_{ij}$$

Ale z (4.7) vieme, že ak je t invariantný, tak ľubovoľný skalárny násobok t je tiež invariantný. Môžeme preto najvšeobecnejší izotropný tenzor druhého stupňa vyjadriť v tvare:

$$t_{ij} = \lambda\delta_{ij} \tag{5.4}$$

kde λ je ľubovoľné reálne číslo.

5.4 Izotropný tenzor stupňa tri

V tejto chvíli nás už intuícia opustila, preto sa rovno pustíme do riešenia rovnice (4.11), ktorá pre tenzor stupňa tri vyzerá nasledovne

$$\varepsilon_{iaj}t_{akl} + \varepsilon_{iak}t_{jal} + \varepsilon_{ial}t_{jka} = 0 \tag{5.5}$$

Pred tým, ako sa pustíme do riešenia tejto rovnice, oplatí sa pouvažovať, ako to chceme robiť. Mohli by sme skúsiť metódu pokus–omyl, teda upravovať rovnicu až kým z nej nedostaneme nejaký výsledok. Zdôrazňujeme však, že rovnica pre stupeň tri je už dosť zložitá na to, aby sme sa k cieľu dostali neusporiadaným chaotickým postupom. Navyše, neskôr sa chystáme riešiť aj rovnicu pre tenzor stupňa štyri, a práve teraz je situácia, keď sa vieme na to dostatočne prezbrojiť. Rovnica pre stupeň tri je akurát vhodná na to, aby sme si museli vyjasniť postup, ktorý potom aplikujeme aj na stupeň štyri, je však názornejšia – tým sa myslí jednoduchý fakt, že budeme mať menej rovníc a menej členov v nich.

Začneme tým, že si uvedomíme, že na rovnicu (5.5) sa vieme pozerať aj ako na algebraickú rovnicu, kde vystupuje niekoľko neznámych. Potrebujeme preto oslobodiť členy typu t_{abc}. Dosiahneme to tak, že rovnicu vynásobíme ε_{imj}

$$\varepsilon_{imj}(\varepsilon_{iaj}t_{akl} + \varepsilon_{iak}t_{jal} + \varepsilon_{ial}t_{jka}) = 2t_{mkl} + t_{kml} - t_{jjl}\delta_{km} + t_{lkm} - t_{jkj}\delta_{lm}$$

Kontrakcia tenzora $t_{jjl} \equiv v_l$ je nejaký vektor (kovektor), ktorý ale podľa (4.9) musí byť tiež izotropný. Podľa (5.2) však jediný izotropný tenzor prvého stupňa je 0. Preto je člen $t_{jjl} = 0$, podobne aj $t_{jkj} = 0$ alebo aj $t_{ijj} = 0$. Dostávame

$$2t_{mkl} + t_{kml} + t_{lkm} \stackrel{!}{=} 0 \tag{5.6}$$

V tejto chvíli sme dostali jednoduchšiu rovnicu, ktorá má na ľavej strane iba tri členy. V úvode tejto časti sme spomínali, že na každý člen sa vieme pozerať ako na inú neznámu. Máme teda jednu rovnicu a tri neznáme. Otázka, ktorá je teraz na mieste, znie: Stačí nám táto rovnica na to, aby sme našli riešenie? Odpoveď je: Áno stačí.

Dá sa to nahliadnuť nasledovným spôsobom: Rovnica (5.6) síce obsahuje tri neznáme, ale v skutočnosti ide len o jeden neznámy tenzor t, ktorý je v rovnici prezentovaný v jeho troch (všeobecné rôznych) komponentoch, pričom tie komponenty sa navzájom líšia iba tým, že majú rôzne permutácie indexov. My však vieme tieto indexy preznačiť – prepermutovať rôznym spôsobom. Vieme to urobiť napríklad aj tak, že na prvé miesto, kde je člen $2t_{mkl}$, dostaneme člen $2t_{kml}$ len zámenou poradia indexov. Ďalšie členy sa potom zmenia obdobne. Takýmto spôsobom vieme na prvé miesto (dvojnásobný člen) dostať ľubovoľnú permutáciu indexov. Tých je $3! = 6$. Vieme tak vyrobiť 6 rovníc, ale teraz už v nich budú vystupovať všetky permutácie indexov, pôjde preto o 6 rovníc so 6 neznámymi, ktoré vieme riešiť niektorou z algebraických metód. To, že to naozaj funguje uvidíme v paragrafe 5.4.2.

Pred tým sa ale uberme elegantnejšou cestou.

5.4.1 Metóda nájdenia symetrii

Niekedy to býva tak, že spomínaných 6 rovníc so 6 neznámymi nie je lineárne nezávislých. To znamená, že nejaké premenné sústavy sú lineárnou kombináciou iných premenných. Takto to dopadlo aj pri tenzore stupňa dva, kde sme našli $t_{ij} = t_{ji}$. Tým je povedané, že t_{ij} a t_{ji} (čo teraz chápeme ako dve rôzne premenné), sú lineárne závislé. Vieme však, že pre tenzor t to znamená, že je *symetrický*. Aj pre tenzor stupňa tri môžeme skúsiť nájsť podobné "vzťahy závislosti", teda symetrie, antisymetrie, atď. Vedeli by sme tak obísť riešenie spomínanej sústavy, alebo prinajmenšom si ju zjednodušiť.

Zoberme pôvodnú rovnicu (5.5) a vynásobme ju ε_{imk}, dostaneme (podobne ako v časti 5.4, po vynulovaní všetkých kontrakcii t)

$$t_{mjl} + 2t_{jml} + t_{jlm} = 0$$

Spolu s (5.5) teda máme

$$\begin{aligned} 2t_{mkl} + t_{kml} + t_{lkm} &= 0 \\ t_{mjl} + 2t_{jml} + t_{jlm} &= 0 \end{aligned}$$

Ukazuje sa, že najvýhodnejšie je preznačiť indexy v týchto rovniciach tak, aby mali čo najviac spoločných členov. Zariadime to tak, že v druhej rovnici indexy jml nahradíme mkl, teda komponenty násobené dvojkou sú v oboch rovniciach rovnaké

$$\begin{aligned} 2t_{mkl} + t_{kml} + t_{lkm} &= 0 \\ t_{kml} + 2t_{mkl} + t_{mlk} &= 0 \end{aligned}$$

Ak odčítame jednu rovnicu od druhej, máme

$$t_{lkm} - t_{mlk} = 0$$

čo znamená, komponenty t necítia cyklickú zámenu

$$t_{ijk} = t_{kij} \tag{5.7}$$

Ak využijeme túto skutočnosť v rovnici (5.6), priamo dostaneme

$$t_{mkl} + t_{kml} = 0$$

Odtiaľ antisymetriu vzhľadom na zámenu v prvých dvoch indexoch

$$t_{ijk} = -t_{jik} \tag{5.8}$$

Vlastnosti (5.7) a (5.8) automaticky implikujú úplnú antisymetriu (teda antisymetriu vzhľadom na ľubovoľnú zámenu indexov). Vieme pritom, že úplná antisymetria a hodnota na jednej komponente úplne udávajú Levi-Civitov symbol. Keďže z rovníc sme nedostali žiadnu podmienku na hodnotu v niektorom komponente, môžeme tvrdiť, že izotropný tenzor tretieho stupňa vieme vyjadriť v tvare

$$t_{ijk} = \lambda \varepsilon_{ijk} \tag{5.9}$$

kde λ je ľubovoľné reálne číslo. Je to zároveň v zhode s vlastnosťou (4.7).

5.4.2 Metóda brute force

Stručne tu len uvedieme, čo by sme dostali, keby sme rozpísali všetky indexové permutácie rovnice (5.6). Rovnice vyzerajú nasledovne

$$\begin{aligned}
2t_{mkl} + t_{kml} + t_{lkm} &= 0\\
2t_{mlk} + t_{lmk} + t_{klm} &= 0\\
2t_{kml} + t_{mkl} + t_{lmk} &= 0\\
2t_{klm} + t_{lkm} + t_{mlk} &= 0\\
2t_{lmk} + t_{mlk} + t_{kml} &= 0\\
2t_{lkm} + t_{klm} + t_{mkl} &= 0
\end{aligned}$$

Ďalej uvedieme iba výsledok. Nahliadli sme, že determinant tejto sústavy je 0, čo je v zhode s tým, že v sústave sú ukryté symetrie (antisymetrie) pre t. Sústavu sme riešili úpravou matice riadkovo-ekvivalentnými úpravami, dostali sme

$$\begin{aligned}
t_{mkl} &= -t_{lkm} & t_{mlk} &= t_{lkm} & t_{kml} &= t_{lkm}\\
t_{klm} &= -t_{lkm} & t_{lmk} &= -t_{lkm}
\end{aligned}$$

Z rovníc sme nedostali žiadnu podmienku pre t_{lkm}, navyše ľubovoľné permutácie indexov vieme vyjadriť pomocou t_{lkm}. Tieto vzťahy predstavujú úplnú antisymetriu t, čo už dáva výsledok (5.9).

5.5 Izotropný tenzor stupňa štyri

Ako pri nižších stupňoch, aj v tomto prípade špecifikujeme rovnicu (4.11) pre prípad stupňa štyri. Čiže izotropný tenzor so štyrmi indexmi musí spĺňať

$$\varepsilon_{iaj} t_{aklm} + \varepsilon_{iak} t_{jalm} + \varepsilon_{ial} t_{jkam} + \varepsilon_{iam} t_{jkla} = 0 \tag{5.10}$$

Zo všeobecných úvah, ktoré sme spomínali v časti 4.2.2 vyplýva, že invariantným tenzorom štvrtého rangu bude určite tenzorový súčin dvoch Kroneckerových symbolov (keďže tie sú invariantné podľa (5.4)). Máme vlastne až tri takéto tenzorové súčiny, s rôznymi rozloženiami indexov, a to $\delta_{ij}\delta_{kl}, \delta_{ik}\delta_{jl}$ a $\delta_{il}\delta_{jk}$. *Každý* z nich je invariantný tenzor štvrtého rangu. Čiže každý z nich je riešením rovnice (5.10) (o čom sa čitateľ môže presvedčiť dosadením). Preto aj ich *ľubovoľná* lineárna kombinácia bude riešením tejto rovnice. Zatiaľ však *nie je* zrejmé, že iné riešenia táto rovnica nemá. Preto sa pustíme do jej riešenia bez akýchkoľvek predpokladov o štruktúre výsledného tenzora.

Postupujeme v duchu taktiky načrtnutej v paragrafe 5.4. Rovnicu vynásobíme ε_{inj}

$$2t_{nklm} + t_{knlm} - t_{aalm}\delta_{kn} + t_{lknm} - t_{akam}\delta_{nl} + t_{mkln} - t_{akla}\delta_{mn} = 0$$

Tu znovu využijeme tvrdenie (4.9) (kontrakcia invariantného tenzora je invariantný tenzor) a výsledok (5.4). Môžeme teda písať pre kontrakcie nasledujúce vzťahy (pre $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, zatiaľ ľubovoľné)

$$t_{aalm} = \lambda_1\delta_{lm} \qquad t_{akam} = \lambda_2\delta_{km} \qquad t_{akla} = \lambda_3\delta_{kl}$$

Dostaneme rovnicu

$$2t_{nklm} + t_{knlm} + t_{lknm} + t_{mkln} = \lambda_1\delta_{nk}\delta_{lm} + \lambda_2\delta_{nl}\delta_{km} + \lambda_3\delta_{nm}\delta_{kl}$$

Teraz sme opäť v situácii, kedy by sme mohli z tejto rovnice prepermutovaním indexov dostať $4! = 24$ rovníc s 24 neznámymi. Vyberieme sa ale radšej cestou hľadania symetrii. Z pôvodnej rovnice (5.10) si vieme postupným vynásobením $\varepsilon_{ink}, \varepsilon_{inl}, \varepsilon_{inm}$ vyrobiť tri ďalšie rovnice. Zavedieme pritom aj čísla $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$. Takto dostaneme štyri rovnice

$$\begin{aligned}
2t_{nklm} + t_{knlm} + t_{lknm} + t_{mkln} &= \lambda_1\delta_{nk}\delta_{lm} + \lambda_2\delta_{nl}\delta_{km} + \lambda_3\delta_{nm}\delta_{kl}\\
t_{njlm} + 2t_{jnlm} + t_{jlnm} + t_{jmln} &= \lambda_1\delta_{nj}\delta_{lm} + \lambda_4\delta_{nl}\delta_{jm} + \lambda_5\delta_{nm}\delta_{jl}\\
t_{nkjm} + t_{jnkm} + 2t_{jknm} + t_{jkmn} &= \lambda_2\delta_{km}\delta_{jn} + \lambda_4\delta_{nk}\delta_{jm} + \lambda_6\delta_{jk}\delta_{nm}\\
t_{nklj} + t_{jnlk} + t_{jknl} + 2t_{jkln} &= \lambda_5\delta_{nk}\delta_{lj} + \lambda_6\delta_{nl}\delta_{jk} + \lambda_3\delta_{nj}\delta_{kl}
\end{aligned}$$

kde sme zaviedli čísla $\lambda_i \in \mathbb{R}$ (zatiaľ ľubovoľné) nasledovne

$$\begin{aligned}
t_{aalm} &\equiv \lambda_1\delta_{lm} & t_{akam} &\equiv \lambda_2\delta_{km} & t_{akla} &\equiv \lambda_3\delta_{kl}\\
t_{jaam} &\equiv \lambda_4\delta_{jm} & t_{jala} &\equiv \lambda_5\delta_{jl} & t_{jkaa} &\equiv \lambda_6\delta_{jk}
\end{aligned}$$

Ako v paragrafe 5.4.1, aj tu sa ukazuje najvýhodnejšie preznačiť indexy v týchto štyroch rovniciach tak, aby pri člene s dvojkou bol vždy rovnaký člen. Dostávame štyri nezávislé rovnice, zhrnuté:

$$2t_{nklm} + t_{knlm} + t_{lknm} + t_{mkln} = \lambda_1\delta_{nk}\delta_{lm} + \lambda_2\delta_{nl}\delta_{km} + \lambda_3\delta_{nm}\delta_{kl} \tag{5.11a}$$

$$t_{knlm} + 2t_{nklm} + t_{nlkm} + t_{nmlk} = \lambda_1\delta_{kn}\delta_{lm} + \lambda_4\delta_{kl}\delta_{nm} + \lambda_5\delta_{km}\delta_{nl} \tag{5.11b}$$

$$t_{lknm} + t_{nlkm} + 2t_{nklm} + t_{nkml} = \lambda_2\delta_{km}\delta_{nl} + \lambda_4\delta_{nm}\delta_{lk} + \lambda_6\delta_{nk}\delta_{lm} \tag{5.11c}$$

$$t_{mkln} + t_{nmkl} + t_{nkml} + 2t_{nklm} = \lambda_5\delta_{km}\delta_{ln} + \lambda_6\delta_{ml}\delta_{nk} + \lambda_3\delta_{mn}\delta_{kl} \tag{5.11d}$$

Od rovnice (5.11a) odčítame rovnicu (5.11b), a od rovnice (5.11c) odčítame rovnicu (5.11d), dostaneme

$$t_{lknm} + t_{mkln} - t_{nlkm} - t_{nmlk} = (\lambda_2 - \lambda_5)\delta_{nl}\delta_{km} - (\lambda_4 - \lambda_3)\delta_{nm}\delta_{kl}$$
$$t_{lknm} + t_{nlkm} - t_{mkln} - t_{nmkl} = (\lambda_2 - \lambda_5)\delta_{nl}\delta_{km} + (\lambda_4 - \lambda_3)\delta_{nm}\delta_{kl}$$

Tieto rovnice sčítame, máme

$$t_{lknm} - t_{nmlk} = (\lambda_2 - \lambda_5)\delta_{nl}\delta_{km} \tag{5.12}$$

Vidíme, že pravá strana tejto rovnice necíti zámenu indexov $n \leftrightarrow l$ a $k \leftrightarrow m$ (za symetriu δ_{ij}). Ak urobíme obe tieto zámeny naraz, vyjde nám

$$t_{nmlk} - t_{lknm} = (\lambda_2 - \lambda_5)\delta_{nl}\delta_{km}$$

Keďže pravé strany sa rovnajú, musia sa aj ľavé

$$t_{lknm} - t_{nmlk} = -(t_{lknm} - t_{nmlk})$$
$$t_{lknm} - t_{nmlk} = 0$$

Odtiaľ sme dostali, že ľavá strana rovnice (5.12) je 0, teda aj pre pravú stranu musí platiť

$$(\lambda_2 - \lambda_5)\delta_{nl}\delta_{km} = 0$$

a keďže to má platiť pre ľubovoľné $n, l, k, m = 1, 2, 3$, jediný spôsob ako to zabezpečiť je položiť $\lambda_2 = \lambda_5$. Tiež potom dostávame automaticky symetriu pre t: ak vymeníme prvé a druhé *dvojice* indexov, hodnota komponentov t sa nezmení, teda

$$t_{ijkl} = t_{klij} \qquad\qquad \lambda_2 = \lambda_5 \tag{5.13}$$

Ak teraz znovu od rovnice (5.11a) odčítame rovnicu (5.11b), využijúc novozistené skutočnosti (5.13), dostaneme

$$t_{mkln} - t_{nlkm} = (\lambda_3 - \lambda_4)\delta_{nm}\delta_{kl}$$

čo je rovnica podobného typu ako (5.12). Pravá strana necíti zámenu $n \leftrightarrow m, k \leftrightarrow l$. Úplne analogicky ako vyššie vieme z tejto rovnice zistiť ďalšiu symetriu pre tenzor t, teda platí

$$t_{ijkl} = t_{lkji} \qquad\qquad \lambda_3 = \lambda_4 \tag{5.14}$$

Teraz už ľahko vieme ukázať (ak od (5.11a) odčítame (5.11c)), že $\lambda_1 = \lambda_6$. Vrátime sa k rovniciam (5.11). Zistíme vo svetle nových skutočností, že vzhľadom na symetrie tenzora t máme už iba jednu nezávislú rovnicu

$$2t_{nklm} + t_{knlm} + t_{lknm} + t_{mkln} = \lambda_1\delta_{nk}\delta_{lm} + \lambda_2\delta_{nl}\delta_{km} + \lambda_3\delta_{nm}\delta_{kl} \tag{5.15}$$

Na všetky ďalšie úvahy si postačíme s touto rovnicou a symetriami, o ktorých teraz už vieme. Potrebujeme oslobodiť jeden (hociktorý) člen na ľavej strane. Podobne ako v paragrafe 5.4 vieme komponenty s rôznymi permutáciami indexov chápať ako rôzne neznáme v rovnici. Preto potrebujeme viac rovníc. Tie vieme vyrobiť z tejto tak, že preznačujeme indexy – rovnicu píšeme pre rôzne ich permutácie (ako sme to robili v 5.4.2).

Pripomeňme, že v časti 5.4.2 sme rozpísali príslušnú sústavu 6 rovníc, a determinant sústavy vyšiel 0, čo znamenalo, že v rovniciach boli skryté symetrie (úplná antisymetria), a tie sme vedeli nájsť aj bez exaktného riešenia sústavy, čo sme robili v časti 5.4.1 (tam sme si síce iba tipli, že nájdeme symetrie a determinant sme nevypisovali ani neriešili). Teraz sa nám môže však stať, že vytvoríme podobnú sústavu využijúc symetrie, o ktorých už vieme, a determinant sústavy vyjde *nenulový*. To by znamenalo, že tenzor t už ďalšie symetrie (nezávislé od tých, čo už máme) nemá. Ak vyjde determinant nulový, potom vieme nájsť ďalšie symetrie. Znalosť tohto determinantu je preto pre nás kľúčová.

Ďalšie rovnice vyrobíme z (5.15) tak, že postupne preznačujeme indexy. Za každým dostaneme nejaké členy rovnaké ako v pôvodnej rovnici. Vďaka symetriám (5.13) a (5.14), vieme *vždy* zabezpečiť, že jeden z indexov sa dostane na prvú pozíciu. Povedzme, že chceme dostať na prvú pozíciu index a. Vieme to urobiť z hociktorej inej pozície, lebo platí $t_{abcd} = t_{dcba} = t_{cdab} = t_{badc}$. Rovnicu (5.15) teraz prepíšeme tak, aby bol index n na prvom mieste v každom člene.

$$2t_{nklm} + t_{nkml} + t_{nmlk} + t_{nlkm} = \lambda_1\delta_{nk}\delta_{lm} + \lambda_2\delta_{nl}\delta_{km} + \lambda_3\delta_{nm}\delta_{kl}$$

Keď chceme dostať ďalšie rovnice, ktoré budú nezávislé s touto, potrebujeme ich vyrobiť tak, aby index n ostal na svojom prvom mieste, v inakšom prípade budeme vždy vedieť vďaka symetriám index n dostať na prvé miesto, a môže sa nám stať, že vyrobíme rovnicu, ktorá bude *identická* tej pôvodnej. Teda počet všetkých permutácii zvyšných troch indexov je $3! = 6$, vieme tak vyrobiť 6 nezávislých rovníc, pričom máme 6 neznámych. Nasledujúce rovnice sme dostali zapísaním všetkých 6 permutácii

$$\begin{aligned}
2t_{nklm} + t_{nkml} + t_{nmlk} + t_{nlkm} &= \sigma_{nklm}\\
2t_{nlkm} + t_{nlmk} + t_{nmkl} + t_{nklm} &= \sigma_{nlkm}\\
2t_{nmlk} + t_{nmkl} + t_{nklm} + t_{nlmk} &= \sigma_{nmlk}\\
2t_{nkml} + t_{nklm} + t_{nlmk} + t_{nmkl} &= \sigma_{nkml}\\
2t_{nmkl} + t_{nmlk} + t_{nlkm} + t_{nkml} &= \sigma_{nmkl}\\
2t_{nlmk} + t_{nlkm} + t_{nkml} + t_{nmlk} &= \sigma_{nlmk}
\end{aligned}$$

kde

$$\sigma_{nklm} := \lambda_1\delta_{nk}\delta_{lm} + \lambda_2\delta_{nl}\delta_{km} + \lambda_3\delta_{nm}\delta_{kl}$$

Sústavu rovníc vieme prehľadnejšie zapísať do maticového tvaru

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{nklm}\\ t_{nlkm}\\ t_{nmlk}\\ t_{nkml}\\ t_{nmkl}\\ t_{nlmk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{nklm}\\ \sigma_{nlkm}\\ \sigma_{nmlk}\\ \sigma_{nkml}\\ \sigma_{nmkl}\\ \sigma_{nlmk} \end{pmatrix}$$

kde determinant sústavy je

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -80 \neq 0$$

Keďže matica tejto sústavy je regulárna (nesingulárna), sústava má jednoznačné riešenie, dané inverznou maticou. To nám zabezpečí, že každé riešenie je iba vhodnou lineárnou kombináciou pravých strán. Všetky pravé strany sú iba lineárnou kombináciou súčinov Kroneckerových symbolov, pričom tieto súčiny sú iba troch typov – pravá strana je $\sim \delta_{nk}\delta_{lm}, \delta_{nl}\delta_{km}, \delta_{nm}\delta_{kl})$. To sa nezmení ani v tom prípade, že urobíme lineárnu kombináciu "pravých strán", teda samotné jedno (hociktoré) riešenie rovnice bude lineárnou kombináciou $\delta_{nk}\delta_{lm}, \delta_{nl}\delta_{km}, \delta_{nm}\delta_{kl}$. Toto jedno riešenie je ale náš hľadaný tenzor (jeho všeobecný komponent) t_{ijkl}. Dostávame teda, že najvšeobecnejší izotropný tenzor stupňa 4 je tvaru

$$t_{ijkl} = \mu_1\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu_2\delta_{ik}\delta_{jl} + \mu_3\delta_{il}\delta_{jk} \tag{5.16}$$

kde μ_1, μ_2, μ_3 sú ľubovoľné reálne čísla. Tento výsledok je v zhode s výsledkom (4.1), ktorý sa využíva napríklad pri hľadaní vlastností homogénneho izotropného lineárne pružného kontinua. Potvrdilo sa to, že invariantný tenzor štvrtého rangu iný, ako poskladaný z invariantných tenzorov druhého rangu, neexistuje.

Záver

V závere tejto práce zhrnieme výsledky ku ktorým sme dospeli. Zistili sme ako sa správajú tenzory, keď na nich pôsobí grupa svojou reprezentáciou. Našli sme aj odvodenú reprezentáciu Lieovej algebry, čím sme umožnili linearizovať problém hľadania invariantných tenzorov. Ďalej sme vyšetrili všeobecné vlastnosti invariantných tenzorov. Nakoniec sme našli konkrétne tvary izotropných tenzorov rangov od 0 po 4 vrátane – tie sa využívajú vo fyzike najčastejšie. Dokázali sme teda aj tvrdenie spomínané v mechanike kontinua týkajúce sa tvaru najvšeobecnejšieho izotropného tenzora štvrtého rangu.

Poznamenáme, že ani jeden z týchto výsledkov nie je naozaj nový, avšak v literatúre vôbec nie je ľahké nájsť ich dôkazy. Špeciálne dôkaz tvrdenia týkajúceho sa spomínaného tenzora štvrtého rangu sa nám ani po značnom úsilí nepodarilo nájsť (čo neznamená, že sa nedá nájsť, len to, že je aspoň tak dobre zašitý, ako bol zašitý 36-miestny kód tejto práce v AIS2).

Na záver ešte jedna dôležitá poznámka. Pri hľadaní izotropných tenzorov rangu od 0 po 4 si čitateľ iste všimol, že všetky tieto tenzory sa dajú poskladať (pomocou lineárnych kombinácii a tenzorových súčinov) len z *dvoch* základných tenzorov, δ_{ij} a ε_{ijk}. To navodzuje dojem, že by to tak mohlo byť aj pre tenzory ľubovoľných rangov. Toto tvrdenie *je* pravdivé (v literatúre sa často spomína, ale jeho dôkaz sme nenašli). V tejto práci sme jeho platnosť *nepredpokladali*. Naše výsledky sa teda dajú chápať aj tak, že sme ho explicitne overili pre rangy 0 až 4. (Keby sme jeho platnosť predpokladali, všetky naše výpočty by boli zjavne zbytočné.)

Dodatok A

Lieove grupy a Lieove algebry

A.1 Grupa, algebra a ich súvis

Na tomto mieste uvedieme niektoré poznatky z teórie Lieových grúp, ktoré sú podstatné pri štúdiu invariantných tenzorov. Nesnažíme sa pritom o dôkladný výklad, ale skôr o zhrnutie základných vlastností.

Nech X je množina prvkov a $\circ : X \times X \to X$ je binárna operácia. Matematickú štruktúru $G = (X, \circ)$ nazývame *grupou*, ak spĺňa nasledujúce axiómy:

1. Uzavretosť: $g \in G \wedge h \in G \Rightarrow g \circ h \in G$

2. Asociatívnosť: $\forall a, b, c \in G : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

3. Jednotkový prvok: $\exists e \in G \; \forall g \in G : g \circ e = e \circ g = g$

4. Inverzný prvok: $\forall g \in G \; \exists h \in G : g \circ h = h \circ g = e$

Ak je operácia $\circ$ navyše komutatívna, grupu nazývame *komutatívnou (abelovskou) grupou.*

Grupy môžeme charakterizovať pomocou toho, akým spôsobom vieme vymenovať jej prvky. Ak jej prvky vieme zoradiť do diskrétnej postupnosti, grupu nazývame *diskrétnou.* Niektoré grupy vieme parametrizovať pomocou reálneho príp. komplexného parametra (alebo niekoľkých parametrov), teda každej hodnote parametra prislúcha jeden prvok z grupy. To znamená, že na nej môžeme zaviesť (lokálne) súradnice. Tým sa z grupy stane zároveň *varieta.* Máme teda v hre dve štruktúry, štruktútu grupy a štruktúru variety. Pre *Lieovu grupu* musia byť tieto dve štruktúry navzájom kompatibilné. Pod touto kompatibilitou sa myslí toto: Súčin v grupe sa dá chápať ako isté zobrazenie $G \times G \to G$, čo je zobrazenie dvoch variet. Žiada sa, aby bolo *hladké.* Podobne inverzný prvok indukuje zobrazenie $G \to G$, ktoré má byť tiež hladké.

Upozorňujeme, že v oboch spomínaných prípadoch nejde o presné matematické definície, ale o veľmi intuitívny pohľad, ktorý nám však bude stačiť.

Každá Lieova grupa obsahuje jednotkový prvok. Ukazuje sa, že podstatná informácia o grupe je ukrytá v malom okolí jednotky, kde sa veci spravidla zjednodušujú (linearizujú).

Lieovej grupe vieme priradiť jednoduchšiu (lineárnu) štruktúru nazývanú Lieovou algebrou, ktorá dobre charakterizuje vlastnosti skoro celej grupy G.

Nech $\mathcal{G}$ je lineárny priestor a $[\ .\ ,\ .\ ] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ je binárna operácia (*komutátor*). *Lieovou algebrou* nazývame lineárny priestor s komutátorom, pre ktorý musí platiť:

1. Uzavretosť: $X \in \mathcal{G} \wedge Y \in \mathcal{G} \Rightarrow [X, Y] \in \mathcal{G}$
2. Bilinearita: $[X_1 + \lambda X_2, Y] = [X_1, Y] + \lambda[X_2, Y]$
3. Antisymetria: $[X, Y] = -[Y, X]$
4. Jacobiho identita: $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$

Chceme teraz ukázať súvis medzi Lieovou grupou a Lieovou algebrou. Zoberieme si na pomoc jednoparametrickú podgrupu. *Jednoparametrická podgrupa* Lieovej grupy G je podgrupa, ktorá spĺňa

$$A = A(t) \in G \qquad A(t+s) = A(t)A(s) \qquad A(0) = \mathbb{I}$$

Pre $t = \varepsilon$, kde ε je dostatočne malé číslo, môžeme jej prvky zapísať v tvare

$$A(\varepsilon) = \mathbb{I} + \varepsilon X \qquad X \equiv \dot{A}(0)$$

Ukazuje sa, že Lieovu algebru $\mathcal{G}$ tvoria práve členy X. V tomto prípade ide o postup, ako zostrojiť k danej grupe G jej algebru $\mathcal{G}$.

Vráťme sa teraz naspäť k funkcionálnej rovnici $A(t+s) = A(t)A(s)$. Túto rovnicu vieme previesť na diferenciálnu tak, že ju zderivujeme podľa parametra s a položíme $s = 0$. Ak si označíme $X \equiv \dot{A}(0)$ a hľadáme riešenia, čo spĺňajú počiatočnú podmienku $A(0) = \mathbb{I}$, zistíme, že musíme riešiť úlohu

$$\dot{A}(t) = A(t)X \qquad A(0) = \mathbb{I}$$

Z kurzov analýzy alebo algebry vieme, že riešenie tejto úlohy je

$$A(t) = e^{tX}$$

Ak položíme $t = 1$, vidíme, že prvok z Lieovej grupy vieme vyjadriť pomocou prvku z Lieovej algebry vďaka *exponenciálnemu zobrazeniu*:

$$\exp : \mathcal{G} \to G \qquad \exp : X \to e^X$$

A.2 Reprezentácia grupy a algebry

Nech $(G, \circ), (H, \bullet)$ sú grupy. Potom *homomorfizmus grúp* $f : (G, \circ) \to (H, \bullet)$ je definovaný ako zobrazenie, ktoré zachováva štruktúru grúp, teda

$$g_1, g_2 \in (G, \circ) \qquad f(g_1 \circ g_2) = f(g_1) \bullet f(g_2)$$

Ak je homomorfizus zároveň aj bijekciou, hovoríme mu *izomorfizmus*. Ak je f izomorfizmus medzi dvoma *rovnakými* množinami, hovoríme mu *automorfizmus*. Grupu automorfizmov značíme $\mathrm{Aut}\, V$, teda

$$\mathrm{Aut}\, V := \{f : V \to V, f \text{ je izomorfizmus}\}$$

V prípade, že V je lineárny priestor, predstavuje $\mathrm{Aut}\, V$ množinu obrátiteľných lineárnych operátorov vo V.

Ku každému homomorfizmu medzi grupami vieme "odvodiť" homomorfizmus medzi ich príslušnými algebrami, podľa:

$$X \in \mathcal{G} \qquad\qquad f(e^{tX}) = e^{tf'(X)}$$

kde f je homomorfizmus grúp a f' nazývame *odvodeným homomorfizmom algebier*.

Ak máme popri grupe G k dispozícii aj lineárny priestor V, často vieme z prvkov grupy konštruovať lineárne operátory vo V, pomocou tzv. *reprezentácii grupy* G vo V. Ide o zobrazenie

$$\rho : G \to \mathrm{Aut}\, V$$

ktoré je navyše homomorfizmom, teda $\rho(g \circ h) = \rho(g)\rho(h)$. Pre maticové grupy je veľmi dôležitá *identická reprezentácia* $\rho = \mathrm{id}$, teda grupovému prvku priradí priamo jeho maticu (lineárny operátor).

Podobne ako k homomorfizmu grúp sme vedeli skonštruovať odvodený homomorfizmus algebier, keďže reprezentácia je tiež homomorfizmus, vieme k nej skonštruovať *odvodenú reprezentáciu (Lieovej) algebry*. Ak mám reprezentáciu ρ grupy G vo V, potom odvodenú reprezentáciu ρ' algebry $\mathcal{G}$ vo V vieme nájsť nasledovne

$$\rho(e^{tX}) = e^{t\rho'(X)}$$

alebo povedané infinitezimálne

$$\rho(\mathbb{I} + \varepsilon X) = \mathbb{I} + \varepsilon\rho'(X)$$

Dodatok B

Grupa $SO(n)$

Lieova grupa $SO(n)$ je maticová grupa, ktorej prvky sú ortogonálne unimodulárne matice, teda spĺňajú

$$A \in SO(n) \qquad\qquad \begin{aligned} A^T A &= \mathbb{I} \\ \det A &= 1 \end{aligned}$$

Prvá podmienka znamená, že A zachovávava nejakú (vopred danú) kladne definitnú bilineárnu formu h[1]. Nech h je navyše symetrická. Potom platí pre $\forall u, v \in V$

$$h(Au, Av) = h(u, v)$$

Symetrickosť a kladná definitnosť h znamenajú, že vo V máme štandardný skalárny súčin[2]. V tomto prípade ortogonálne matice zachovávajú skalárny súčin, teda automaticky aj vzájomné vzdialenosti bodov – dva body majú pred a po transformácii A rovnakú vzdialenosť.

Druhá podmienka znamená, že A zachováva navyše objem – objem, ktorý vytvoria vektory (rovnobežnosten) pred a po transformácii danej maticou A je rovnaký.

Lieovu algebru grupy $SO(n)$ značíme $so(n)$, tvoria ju antisymetrické matice $n \times n$, teda platí

$$X \in so(n) \qquad\qquad X^T = -X$$

Ďalej zhrnieme niekoľko poznatkov, ktoré platia pre špeciálny, o to však dôležitejší prípad $so(3)$.

Keďže $so(3)$ je Lieova algebra (teda aj lineárny priestor), vieme v nej zvoliť bázu. Typicky sa volia matice

$$l_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad l_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad l_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[1] Všeobecnú bilineárnu formu signatúry (p, q) zachovávajú matice z grupy $O(p, q)$.

[2] Konečnorozmerný lineárny priestor V s kladne definitným skalárnym súčinom nazývame *euklidovský priestor* a značíme ho E^n, kde n je rozmer priestoru.

teda platí

$$(l_i)_{jk} := -\varepsilon_{ijk}$$

a všeobecný element $X \in so(3)$ vieme napísať v tvare

$$X = \alpha\vec{n} \cdot \vec{l} \equiv \alpha n_i l_i \qquad \alpha \in \mathbb{R}, |\vec{n}| = 1$$

Potom vieme jednoparametrické podgrupy $SO(3)$ vyjadriť v tvare $R(\alpha, \vec{n}) = e^{\alpha\vec{n}\cdot\vec{l}}$, explicitne

$$R_{ij}(\alpha, \vec{n}) = \delta_{ij}\cos\alpha + (1 - \cos\alpha)n_i n_j - \varepsilon_{ijk} n_k \sin\alpha$$

čo predstavuje maticu otočenia v E^3 o uhol α okolo osi danej jednotkovým vektorom $\vec{n}$.

Literatúra

[1] M. Fecko: *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov*; IRIS, 2004, 2008 (Cambridge 2006)

[2] L. D. Landau, E. M. Lifshitz: *Mechanics*; Butterworth-Heinemann (3rd edition), 1976

[3] L. D. Landau, L. P. Pitaevskii, E. M. Lifshitz, A. M. Kosevich: *Theory of Elasticity*; Butterworth-Heinemann (3rd edition), 1986

[4] R. Hlubina: *Úvod do fyziky materiálov*; text dostupný na adrese `http://www.dep.fmph.uniba.sk/~hlubina/STUD_MATER/BAKALAR/bakalar.pdf`

[5] `http://en.wikipedia.org/wiki/Tensor`