

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Aplikácie subriemannovskej geometrie

Lukáš Tomek

2011

Aplikácie subriemannovskej geometrie

DIPLOMOVÁ PRÁCA

(Evidenčné číslo: 6238f194-b535-4532-8b93-aac1d4c87389)

Lukáš Tomek

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky

Študijný odbor: 4.1.1 Fyzika
Študijný program: Teoretická fyzika

Vedúci diplomovej práce:
doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.

BRATISLAVA 2011

ZADANIE DIPLOMOVEJ PRÁCE

Študent(ka) **Lukáš Tomek**

vypracuje za účelom obhajoby v rámci záverečného konania vo vysokoškolskom magisterskom štúdiu na UK FMFI diplomovú prácu s (predbežným) názvom:

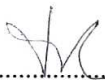
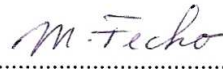
Aplikácie subriemannovskej geometrie

pod vedením pracovníka **Doc. RNDr. Mariána Fecka, PhD.** z pracoviska **KTFDF**

Cieľ diplomovej práce a ďalšie poznámky:

Subriemannovská geometria je zovšeobecnením riemannovskej geometrie, pri ktorom sa skalárny súčin vektorov definuje iba na istej distribúcii. Zaujímavými objektami sú v nej krivky, ktoré smerujú v každom bode do distribúcie. (Vo fyzikálnych aplikáciách vyjadrujú pohyby, ktoré sú kompatibilné s neholonómnymi väzbami.) A najzaujímavejšie z nich sú také, ktoré sú navyše aj najkratšie.

Cieľom práce je preniknúť do geometrie spojenej s hľadaním takýchto kriviek a na konkrétnych príkladoch si to hľadanie naozaj vyskúšať.

podpis študenta  podpis ved. dipl. práce 

Diplomová práca je tematicky priradená k špecializácii **Teoretická fyzika**

V Bratislave dňa *2.5.2011*

Abstrakt

<i>Autor:</i>	Lukáš Tomek
<i>Názov práce:</i>	Aplikácie subriemannovskej geometrie
<i>Škola:</i>	Univerzita Komenského v Bratislave
<i>Fakulta:</i>	Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
<i>Katedra:</i>	Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky
<i>Vedúci práce:</i>	doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.
<i>Miesto:</i>	Bratislava
<i>Dátum:</i>	3. 5. 2011
<i>Počet strán:</i>	83
<i>Druh záverečnej práce:</i>	Diplomová práca

Abstrakt: Subriemannovská geometria je podoblasť diferenciálnej geometrie. Ide o isté zovšeobecnenie riemannovskej geometrie, v ktorom sa študujú subriemannovské variety. Subriemannovská varieta je trojica (M, \mathcal{H}, g) , teda varieta M s distribúciou \mathcal{H} a metrickým tenzorom g operujúcim na distribúcii. Práca sa začína laickým úvodom, ktorý vysvetľuje rozdiel medzi riemannovskou a subriemannovskou geometriou. Ďalej sa čitateľ na intuitívnej úrovni zoznamuje so základmi teórie. Predstavujú sa rôzne možnosti aplikácie. Teória sa detailne demonštruje na probléme o mravcovi na gramofónovej platni. Hľadajú sa subriemannovské geodetiky a študujú sa ich vlastnosti.

Kľúčové slová: subriemannovská geometria, distribúcia, geodetiky

Predhovor

Táto diplomová práca sa venuje subriemannovskej geometrii a jej aplikáciám. Kapitola 3 predstavuje niekoľko príkladov zo širokého spektra aplikácii subriemannovskej geometrie. V kapitole 4 sa do hĺbky zaoberáme konkrétnou aplikáciou v klasickej mechanike.

Napriek tomu, že ide o matematickú tému, sa nebudú dokazovať žiadne vety. Ide predovšetkým o *intuitívne pochopenie* problematiky, čomu je prispôsobená miera rigórnosti práce a množstvo obrázkov (je ich vyše 50), ktoré by mali pomôcť vytvoriť predstavy o objektoch v subriemannovskej geometrii. Práca bola písaná s úmyslom, aby si čitateľ po jej prečítaní mohol samostatne sformulovať nejaký jednoduchý problém a postupujúc podľa receptu z časti 2.10 nájsť subriemannovské geodetiky pre svoj problém. Záujemcov o hlbšie štúdium teórie odkazujeme na monografiu Richarda Montgomeryho [18], ktorá bola základným zdrojom pri písaní práce.

Hlavným cieľom práce je preniknúť do subriemannovskej geometrie a na konkrétnych príkladoch si vyskúšať hľadanie *subriemannovských geodetík*.

Práca *predpokladá* znalosť *diferenciálnej geometrie* v rozsahu základnej prednášky z diferenciálnej geometrie v študijnom programe Teoretická fyzika na FMFI UK. Potrebné vedomosti sú zahrnuté v kapitolách 1 až 7, 14 a 15 v knihe [7]. Časti práce označené hviezdičkou nie sú nevyhnutné na celkové porozumenie textu a idú za rámec spomínaných vedomostí. Na ich zvládnutie sú potrebné aj znalosti v rozsahu kapitol 10 až 13 a 20 v knihe [7].

Na záver sa chcem poďakovať doc. RNDr. Mariánovi Feckovi, PhD. za zadanie zaujímavej témy a za podnetné konzultácie nielen o diferenciálnej geometrii. Ďakujem aj učiteľom a spolužiakom za inšpirujúce otázky a komentáre počas diplomových seminárov.

Privítam akékoľvek pripomienky či chyby, ktoré čitateľ objaví počas čítania textu.¹

Bratislava 1. 5. 2011

Lukáš Tomek

¹Kontakt: silenziott@gmail.com

Obsah

Predhovor	5
1 Úvod – čo je subriemannovská geometria	9
1.1 Riemannovská geometria	9
1.2 Subriemannovská geometria	10
2 Stručný úvod do subriemann. geometrie	12
2.1 Úvod	12
2.2 Opakovanie: Riemannovská geometria	12
2.3 Pojem fibrovanej variety	14
2.3.1 Hlavná G -fibrácia	15
2.4 Distribúcia na variete	16
2.5 Subriemannovská geometria – definícia	18
2.6 Kometrika a subriemannovský hamiltonián	20
2.7 Normálne geodetiky	21
2.8 Singulárne geodetiky	23
2.8.1 Singulárne krivky	23
2.8.2 Vyjasnenie terminológie	25
2.8.3 Pikoška na záver	26
2.9 Horizontálne spájanie bodov	26
2.9.1 Integrovaťelné distribúcie	26
2.9.2 Úplne neintegrovateľné distribúcie	29
2.10 Kuchynský recept	30
3 Aplikácie subriemannovskej geometrie	32
3.1 Problém kráľovnej Dido	32
3.2 Neurobiológia: videnie	33
3.3 Kvantová mechanika: Berryho fáza	34
3.4 Mechanika deformovateľných telies	35
3.4.1 Padajúca mačka, Hubblov teleskop a iné	35
3.4.2 Plávanie mikroorganizmov	36
3.5 Robotika a optimalizácia transportu	37
4 Mravec na gramofónovej platni	38
4.1 Úloha	38
4.2 Matematická formulácia	39
4.3 * Užitočný pohľad	40
4.4 Hrozba: Integrovaťelnosť distribúcie	41
4.5 Hrozba: Singulárne geodetiky	41
4.6 Kometrika a subriemannovský hamiltonián	42

4.7	Normálne geodetiky	42
4.7.1	Hamiltonove rovnice	42
4.7.2	Kružnice ako špeciálne riešenia	43
4.7.3	Radiálna podúloha	44
4.8	Príprava na numerické riešenie rovníc	45
4.9	Numerické riešenia	46
4.9.1	Geodetiky pre uhly $\alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$	47
4.9.2	Geodetiky pre uhly $\alpha > 180^\circ$	48
4.9.3	Prečo mravec pre uhly $\alpha > 180^\circ$ behá ako splašený?	49
4.9.4	Ďalšie geodetiky pre uhly $\alpha > 180^\circ$	51
4.9.5	Čo sa zmení pre $r_0 \neq 1$?	52
4.10	Minimálne geodetiky	53
4.10.1	Problém hladkosti minimálnych geodetík	54
4.11	Ponaučenie	56
5	Príklad so singulárnymi geodetikami	57
5.1	Matematická formulácia	57
5.2	Preverenie hrozieb	57
5.3	Kometrika a subriemannovský hamiltonián	58
5.4	Rovnice pre normálne geodetiky	59
5.5	Singulárne krivky	59
5.6	Minimálne singulárne geodetiky	60
6	Jednokolka	63
6.1	Úloha	63
6.2	Matematická formulácia	63
6.3	Súťaž	64
A	Dodatky k mravcovi	65
A.1	Poctivé nájdenie formy θ	65
A.2	Hľadanie singulárnych kriviek	65
A.3	Zjednodušenie rovníc pre normálne geodetiky	66
A.4	Veľmi malé uhly otočenia α	69
A.5	Ísť po kružnici sa vypláca	73
A.6	* Normálne geodetiky alternatívne	74
B	Dodatok ku príkladu so sing. geodetikami	77
B.1	Hľadanie singulárnych kriviek	77
C	* Dodatok ku Berryho fáze	79
C.1	Horizontálna distribúcia a subriemannovská metrika	79
	Záver	81
	Zoznam použitej literatúry	82

Kapitola 1

Úvod – čo je subriemannovská geometria

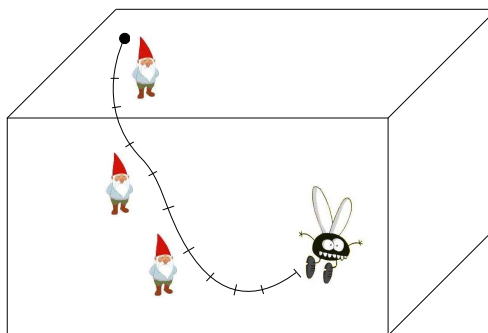
1.1 Riemannovská geometria

Predstavme si muchu žijúcu v prázdnej miestnosti, ktorá môže lietať bez akýchkoľvek obmedzení. Ak máme to šťastie, že naša mucha vie merať uhly a dĺžky (nosí v batohu uhlomer a pravítko), môžeme učene povedať, že ideme študovať *riemannovskú geometriu*, konkrétne riemannovskú geometriu v 3-rozmernom euklidovskom priestore. Matematici muchám neveria (alebo im chcú odľahčiť batoh) a radšej neekonomicky porozhadzujú uhloмеры a pravítka po celej miestnosti – do každého bodu jeden uhlomer a pravítko, a k tomu jedného trpaslíka¹, čo s nimi dokáže narábať. Navyše miestnosť musí byť mimo gravitačného poľa, aby nám nepopadalo všetko na zem.² Matematici takto vybavenú (a nekonečne veľkú) miestnosť nazývajú euklidovský priestor so *skalárnym súčinom*.

Všimnime si, že keď už máme takúto miestnosť, vieme vypočítať dĺžku dráhy, ktorú mucha preletí. Urobíme to tak, že trpaslíci poprikladajú pravítka pozdĺž celej dráhy muchy a každý z nich nám nahlási, koľko namerá (Obr. 1.1).³ Nahlasené údaje spočítame na eurokalkulačke a dostaneme dĺžku dráhy muchy.

Teraz by sme sa mohli zaujímať, ako by vyzerala *najkratšia* možná cesta medzi dvoma bodmi. Matematici hovoria, že sa zaujímajú o minimálne *geodetiky*. Samozrejme, v našom prípade vychádza, že najkratšia cesta je úsečka spájajúca začiatočný a koncový bod (teda let vzdušnou čiarou).

Riemannovská geometria však neštuduje len 3-rozmerný euklidovský priestor, ale všeobecný hocikolko-rozmerný a pokrútený priestor so skalárnym súčinom, ktorý sa v malom okolí každého bodu (lokálne) podobá na euklidovský priestor nejakého (konštantného) rozmeru. Takýto priestor sa nazýva *riemannovská varieta*. Varietou je na-



Obr. 1.1: Počítanie dĺžky dráhy muchy.

¹Trpaslík je terminus technicus docenta Černého.

²Chudáci trpaslíci.

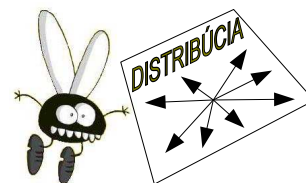
³Naozajstný trpaslík to robí ešte rafinovanejšie. Meria rýchlosť muchy a násobí ju časovým intervalom, počas ktorého okolo neho mucha letela. Tak dostane dĺžku ním meraného úseku.

príklad sféra alebo povrch plávacieho kolesa (torus). Riemannovská geometria hľadá najkratšie možné cesty aj na takýchto útvaroch. Tušíme, že tu riešením nebudú úsečky (tie ani nie sú prípustné – na sfére sa po úsečke nedá chodiť – po chvíli by sme boli mimo sféry), ale nejaké komplikovanejšie krivky. Napríklad v prípade sféry vyjdú časti hlavných kružníc.⁴

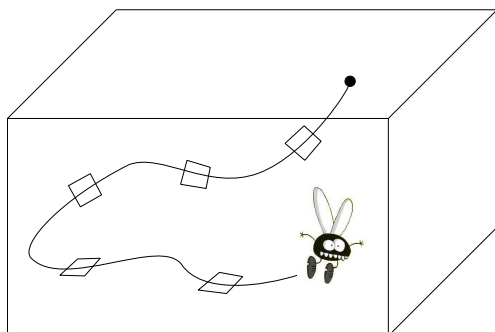
1.2 Subriemannovská geometria

Subriemannovská geometria zovšeobecňuje situáciu z predchádzajúceho odseku. Zovšeobecnenie spočíva v zavedení dodatočnej štruktúry – *distribúcie* na varietu.

V prípade muchy ide o isté obmedzenie jej možných smerov pohybov v každom bode. Predstavme si, že v miestnosti zavedieme špeciálne turistické značenie. Do každého bodu položíme malú doštičku (pozri Obr. 5.1 na strane 58). V miestnosti bude odteraz dovolené pohybovať sa v každom bode len v smere ležiacom v rovine doštičky (Obr. 1.2). Matematicky sa povie, že sme definovali 2-rozmernú *distribúciu* v 3-rozmernom euklidovskom priestore. Let muchy bude vyzeráť tak, že mucha vyštartuje v nejakom bode, chvíľku poletí v jednom zo smerov, ktorý dovoľuje doštička (distribúcia). Priletí do blízkeho bodu, kde nájde ďalšiu doštičku a znova si môže vybrať jeden z dovolených smerov. Takto pokračuje od bodu k bodu (Obr. 1.3). Ide teda o benevolentné turistické značenie, kde zostáva istá vôľa. Zakázané sú len pohyby, ktoré nejdú v smere distribúcie.



Obr. 1.2: Mucha musí letieť v smere distribúcie.



Obr. 1.3: Mucha letí v každom bode v jednom z dovolených smerov.

fungujúcim na nejakej distribúcii. Ak by sme v prípade našej muchy pripustili v každom bode všetky možné smery pohybu (definovali by sme 3-rozmernú distribúciu), tak by sme boli späť v *riemannovskej geometrii* z predchádzajúcej časti, kde neboli žiadne obmedzenia pohybu. Takto to funguje všeobecne, a teda riemannovská geometria je špeciálnym prípadom subriemannovskej.

Pri dopravných obmedzeniach, ktoré sme zaviedli v miestnosti, sa núka otázka, či sa vôbec mucha môže dostať, kam sa jej zachce. Keď si predstavíme, že všetky doštičky orientujeme rovnobežne s podlahou, tak je jasné, že mucha sa určite nebude nikdy môcť pohnúť v inom než vodorovnom smere, a teda sa nedostane všade. V časti 2.9.2 ukážeme,

Aby sme vedeli aj tu počítať dĺžky kriviek, potrebujeme, podobne ako v riemannovskej geometrii, skalárny súčin. Tu však stačí skalárny súčin definovať len na distribúcii.⁵ Vo všeobecnosti distribúcia nemusí byť len 2-rozmerná (doštičky). Mohli by sme napríklad pripustiť v každom bode pohyb iba v smere rovnej paličky (môže sa ísť v jej smere dopredu alebo dozadu). Vtedy by sme definovali 1-rozmernú distribúciu.

Subriemannovská geometria študuje ľubovoľné variety so skalárnym súčinom

⁴Viac o hlavných kružniciach možno nájsť vo Wikipédii [25].

⁵Chceme počítať dĺžky dráh slušných múch, ktoré dodržiavajú turistické značenie. Na to nám stačí pravítko, ktoré meria dĺžky len v smere doštičky.

ako musí vyzeráť distribúcia, aby bolo zaručené, že dovolenými cestami sa dá dostať kamkoľvek.

Ak zoberieme dva body v miestnosti, je zrejmé, že sa všeobecne môžu dať spojiť viacerými prípustnými cestami. Môžeme sa pýtať, ktorá z nich je najkratšia. Matematicky sa tento problém nazýva hľadanie minimálnych *subriemannovských geodetík* a je jedným z hlavných predmetov štúdia v subriemannovskej geometrii. Keďže sme obmedzovaní distribúciou, najkratšie cesty už nebudú (vo všeobecnosti) úsečky, ale nejaké komplikovanejšie krivky, ktorých tvar závisí od toho, ako zdefinujeme distribúciu.⁶

⁶Slušná a inteligentná mucha najprv musí sadnúť za stôl, vypočítať si najkratšiu možnú cestu a až potom sa vydať na let. Určite ste si všimli, že v lete muchy bezcieľne krúžia pod lampami. Sú len dve možnosti, buď sa im nechce hľadať najkratšiu možnú cestu do miesta, kam chcú letieť, alebo máte doma zle definovanú distribúciu a chúdence muchy sa nemôžu dostať, kam potrebujú. Ak platí druhý prípad, mali by ste rýchlo predefinovať distribúciu, lebo pracovníci zo Slobody zvierať majú túto prácu už dávno prečítanú.

Kapitola 2

Stručný úvod do subriemannovskej geometrie

2.1 Úvod

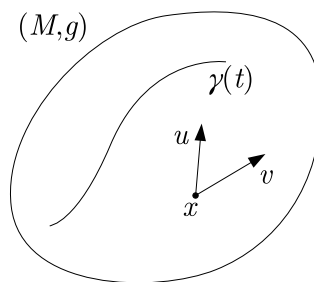
Úlohou tejto kapitoly je stručne priblížiť,¹ čo je *subriemannovská geometria* a ako sa technicky hľadajú *subriemannovské geodetiky*.² Najprv si zopakujeme v časti 2.2 základné poznatky z riemannovskej geometrie, na ktoré budeme nadväzovať. Pred samotným výkladom subriemannovskej geometrie, ktorý začne časťou 2.5, si priblížime pojem *fibrovanej variety* a *distribúcie na variete*, ktoré neboli v sylabe základnej prednášky z diferenciálnej geometrie.³

2.2 Opakovanie: Riemannovská geometria

Riemannovská geometria študuje *riemannovské variety*, čo sú variety so skalárnym súčinom definovaným pomocou metrického tenzora, teda dvojice (M, g) . Písmeno M označuje varietu a g je metrický tenzor, ktorý operuje na vektoro(vých polia)ch. Pobodovo

$$g(u, v) \in \mathbb{R} \quad u, v \in T_x M$$

kde $T_x M$ je dotykový priestor v bode x . Keď máme na variete metrický tenzor, ide o veľmi silnú štruktúru, ktorá umožňuje robiť mnoho ďalších vecí. Môžeme merať uhly, dĺžky, objemy, paralelne prenášať rôzne objekty (metrický tenzor indukuje konexiu),... Nás v tejto práci bude zaujímať hľadanie *geodetik* (súvisia s paralelným prenosom) a meranie ich dĺžok.



Obr. 2.1: Riemannovská varietu.

Riemannovské geodetiky

Geodetika v riemannovskej geometrii je zovšeobecnenie pojmu rovná čiara do zakriveného priestoru. Geodetiky definujeme viacerými ekvivalentnými spôsobmi. (Detaily o geodetikách a o ekvivalentnosti definícií možno nájsť v knihe [7] v časti 15.4.)

¹Celá kapitola je písaná v duchu „ako tomu intuitívne rozumieť“ a „ako sa to počíta“. Záujemcu o hlbšie štúdium teórie odkazujeme na Montgomeryho monografu [18].

²Stručným zhrnutím tejto kapitoly je prezentácia [8].

³Príde sa k nim až vo výberových prednáškach *Geometrické metódy klasickej mechaniky a Konexie a kalibračné polia*.

1. Pomocou metriky môžeme geodetiky definovať ako (lokálne) najkratšie spojnice bodov v priestore, čiže ako extrémaly funkcionálu dĺžky krivky

$$l[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} dt \equiv \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\gamma}\| dt$$

Vzdialenosť medzi dvoma bodmi A a B sa definuje ako infimum funkcionálu dĺžky, $d(A, B) = \inf l[\gamma]$. Poznamenať, že tu máme na mysli *kladne definitný* metrický tenzor g .

2. Pomocou konexie⁴ geodetiky opisujeme takto. Zoberme dotykový vektor v nejakom bode $\gamma(s)$ krivky γ . Paralelne ho prenese späť pozdĺž krivky do iného bodu $\gamma(t)$. Ak sa paralelne prenesený vektor $\dot{\gamma}^{\parallel}(t)$ zhoduje s dotykovým vektorom v tom istom bode ($\dot{\gamma}^{\parallel}(t) = \dot{\gamma}(t)$), tak naša krivka je geodetika (Obr. 2.2). Toto však musí platiť pre všetky body krivky a všetky dotykové vektory. Tento príbeh sa stručne zapisuje pomocou kovariantnej derivácie

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0 \quad \text{v súradniciach} \quad \ddot{x}^{\mu} + \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} \dot{x}^{\nu} \dot{x}^{\rho} = 0 \quad (2.1)$$

kde Γ_{jk}^i sú Christoffelove symboly. Vzťah (2.1) hovorí, že kovariantná derivácia dotykového vektora v smere krivky je nulová, čo znamená, že ide o pohyb s *nulovým zrýchlením*.

(Každá derivácia počíta rozdiel nejakej veličiny v dvoch infinitezimálne blízkych bodoch a delí ho vzdialenosťou bodov. Tu kovariantná derivácia (pomocou paralelného prenosu) porovnáva dotykové vektory, teda vektory rýchlostí. Už zo základnej školy vieme, že keď sme počítali rozdiel rýchlostí a delili ho časom, bola reč o zrýchlení.)

3. Pohybovať sa s nulovým zrýchlením znamená pohybovať sa *rovnomerne priamočiaro*. Intuitívia napovedá, že ak zoberieme lagranžián pre voľný pohyb (pohyb bez pôsobiacich síl, čiže bez zrýchlení), čo je lagranžián len s kinetickou časťou⁵

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} \equiv \frac{1}{2} g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \equiv \frac{1}{2} \|\dot{\gamma}\|^2$$

a napíšeme Lagrangeove rovnice, mohli by sme tiež dostať rovnice pre geodetiky. Jednoduchý výpočet ukáže, že je to naozaj tak (pozri v knihe [7] úlohu (15.4.4)). Geodetiky teda extremalizujú *účinnok* (preintegrovanú kinetickú energiu)

$$S[\gamma] = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) dt \equiv \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\gamma}\|^2 dt$$

Ak máme rovnice pre geodetiky napísané v lagrangeovskom formalizme, ľahko ich prepíšeme do hamiltonovského. Hamiltonián vychádza

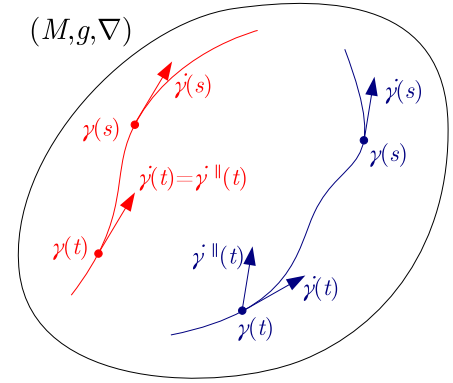
$$H(x, p) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_{\mu} p_{\nu} \equiv \frac{1}{2} g^{-1}(p, p) \quad (2.2)$$

a Hamiltonove rovnice pre tento hamiltonián sú rovnicami pre geodetiky.

⁴Aby išlo o ekvivalentný opis, treba metrickú a symetrickú konexiu. Pojem konexie v tejto práci nebudeme potrebovať. Viac o konexiách nájdete v knihe [7] v kapitole 15.

⁵Kinetická energia je kladne definitná symetrická nedegenerovaná kvadratická forma. Sme na riemannovskej variete (M, g) a prvé, čo sa núka, je vyrobiť kinetickú energiu zo štruktúry g , ktorú na variete máme.

Z týchto definícií si treba zapamätať, že riemannovské geodetiky sú rovné a lokálne najkratšie čiary, ktoré sú riešením istých Hamiltonových rovníc. Zdôrazňujeme, že slovíčko „lokálne“ je tu kľúčové. Keď spájame dva body geodetikou, globálna štruktúra variety niekedy pripúšťa aj geodetiky, ktoré nie sú globálne najkratšie. V rovine táto situácia nenastane, ale na sfére už áno. Tam sú geodetikami hlavné kružnice (kružnice s najväčším polomerom) a ich časti. Dva body, ktoré neležia presne oproti sebe môžeme spojiť kratšou alebo dlhšou časťou hlavnej kružnice, na ktorej ležia. Dlhšia časť je (ako to už v živote chodí) dlhšia ako kratšia, a teda otázku, či nájdená geodetika je globálne najkratšia spojnice bodov, treba riešiť dodatočne.



Obr. 2.2: Geodetiky schematicky. Červená čiara je geodetika, modrá čiara nie je.

2.3 Pojem fibrovanej variety

Už v riemannovskej geometrii sa rovnice pre geodetiky dali napísať ako isté Hamiltonove rovnice. Prezradíme, že podobne to bude aj v subriemannovskej geometrii. Hamiltonove rovnice sú diferenciálne rovnice prvého rádu na variete so súradnicami

$$(x, p) \equiv (x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)$$

ktorá sa volá *kodotyková fibrácia* a označuje sa T^*M . Ide o špeciálny prípad *fibrovanej variety*. V niektorých aplikáciách už samotné M bude fibrovanou varietou. Preto nezaškodí, ak sa oboznámime s fibrovanými varietami všeobecne.⁶

Pojem fibrovanej variety načrtneme na jednoduchom príklade *dotykovej fibrácie* TM . Predstavme si 1-rozmernú varietu M , čiže čiaru (Obr. 2.3 (a)). V každom jej bode máme dotykový priestor T_xM , ktorý si môžeme predstaviť ako priamku, ktorej body sú „konce“ dotykových vektorov v bode x . V diferenciálnej geometrii je často užitočné pozrieť sa na veci z pohľadu nejakej „väčšej“ variety. Tu sa oplatí poukladať všetky dotykové priestory (priamky) vedľa seba a zlepíť ich do jednej variety (roviny)

$$TM := \bigcup_{x \in M} T_xM$$

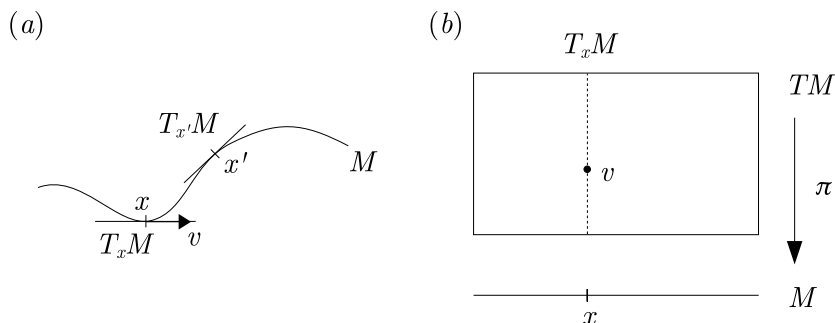
Teraz máme všetky vektory vo všetkých bodoch $x \in M$ prehľadne uložené ako *body* v TM . Schematicky to vidíme na Obr. 2.3 (b). Rovnakú konštrukciu môžeme spraviť pre n -rozmernú varietu a kresliť rovnaký schematický obrázok.

Všimnime si, že tu vzniká *kanonická* projekcia

$$\pi : TM \rightarrow M \quad \pi(v) = x \quad v \in T_xM$$

ktorá priradzuje vektoru v „jeho“ bod x . Ak máme zavedené súradnice (x^1, \dots, x^n) na oblasti $\mathcal{O} \subset M$, vieme hneď zaviesť súradnice na oblasti $\hat{\mathcal{O}} \subset TM$ ležiacej „nad“ oblasťou \mathcal{O} . Každý vektor vieme rozložiť voči súradnicovej báze $v = v^\mu \partial_\mu$. Čísla (v^1, \dots, v^n) spolu s číslami (x^1, \dots, x^n) dávajú súradnice na TM .

⁶Pekný úvod do problematiky fibrovaných variet je v knihe [22] v časti 2.9. Detailne sa o fibrovaných varietach hovorí v knihe [7] v 17. kapitole alebo v knihe [4] v 14. kapitole.



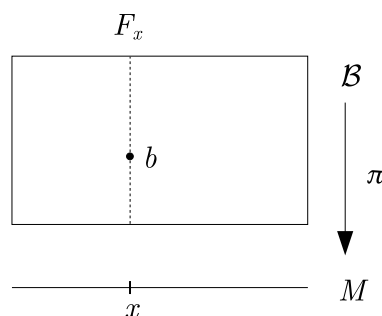
Obr. 2.3: (a) Čiara M a dotykové priestory. (b) Dotykové priestory „polepené“ do dotykovej fibrácie TM .

Podobne sa postupuje aj v prípade *kodotykovej fibrácie* T^*M . Do jedného celku sa polepia kodotykové priestory

$$T^*M := \bigcup_{x \in M} T_x^*M$$

Bodmi T^*M sú kovektory p . Projekcia je $\pi : T^*M \rightarrow M$. Ako súradnice použijeme $2n$ -ticu čísel $(x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)$. Kde p_μ berieme z rozkladu kovektora voči súradnicovej báze $p = p_\mu dx^\mu|_x$.

Variety TM a T^*M sme konštruovali tak, že v každom bode $x \in M$ sme mali ďalšiu varietu (T_xM , resp. T_x^*M). Všeobecnú *fibrovanú varietu*⁷ vyrobíme tak, že do každého bodu $x \in M$ „vložíme“ nejakú varietu F_x , ktorej sa hovorí *vlákno* (angl. fiber) v bode x . Vlákna musia byť difeomorfne nejakej spoločnej variete F . Varieta F sa volá *typické vlákno* a M je *báza*. „Veľkú varietu“ teraz polepíme z vlákien (Obr. 2.4)



Obr. 2.4: Fibrovaná varietu.

$$\mathcal{B} := \bigcup_{x \in M} F_x$$

Varieta \mathcal{B} sa volá *totálny priestor*. Zadať fibrovanú varietu znamená povedať, čo je M , čo je \mathcal{B} a ako vyzerá projekcia $\pi : \mathcal{B} \rightarrow M$.

2.3.1 Hlavná G -fibrácia

V práci nám príde vhod poznať špeciálnu triedu fibrovaných variet – *hlavných G -fibrácií*. Sú to fibrované variety s nasledujúcimi vlastnosťami.

- Totálny priestor \mathcal{B} je pravý G -priestor (t. j. varietu, na ktorej pôsobí grupa G pravou akciou R_A , kde $A \in G$).
- Vlákna sú difeomorfne grupe G .
- Akcia grupy G je
 - vertikálna (grupa rešpektuje vlákňitú štruktúru, $\pi \circ R_A = \pi$),

⁷Fibrovaná varietu je špeciálny prípad širšieho pojmu *fibrácie*. V tejto práci medzi nimi nebudeme rozlišovať. Viac o vzťahu týchto dvoch pojmov sa možno dočítať v knihe [4] v 14. kapitole.

- voľná (každé $A \neq e$ hýbe všetkými bodmi vlákna)⁸,
- tranzitívna vo vlákne (pre ľubovoľné body $b_1, b_2 \in F_x$ existuje grupový prvok A , ktorý ich „spojí“, čiže $b_2 = R_A b_1$).

Takže vlákto je hlavný homogénny G -priestor.

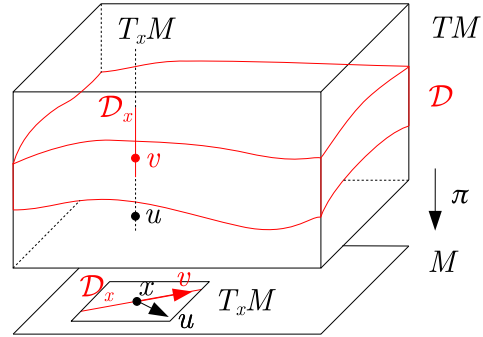
Ďalšie podrobnosti nájdete v knihe [7] v 20. kapitole. Pre potreby práce stačí uvedená definícia.

2.4 Distribúcia na variete

Predtým, než objasníme, čo je subriemannovská geometria, vysvetlíme pojem distribúcie na variete. V laickom úvode v časti 1.2 sme už intuitívne o distribúciách hovorili. Poďme sa teraz pozrieť na distribúcie z vedeckého hľadiska.⁹

Na n -rozmernej variete M máme v každom bode $x \in M$ (n -rozmerný) dotykový priestor $T_x M$. Fixujme v dotykovom priestore nejaký k -rozmerný podpriestor $\mathcal{D}_x \subset T_x M$. Keď to urobíme v každom bode variety, môžeme (s pocitom dobre vykonanej práce) prehlásiť, že sme definovali k -rozmernú distribúciu \mathcal{D} . Iný pohľad na vec je, že fixujeme podfibráciu $\mathcal{D} \subset TM$ v dotykovvej fibrácii (Obr. 2.5).

Distribúcie môžeme technicky opísať niekoľkými (rovnocennými) spôsobmi.



Obr. 2.5: Distribúcia na variete schematicky.

1. Zadáme k lineárne nezávislých *vektorových polí* e_a takých, že vektory $e_a(x)$ tvoria v každom bode bázu podpriestoru \mathcal{D}_x .

$$e_a \quad a = 1, \dots, k \quad \text{Span}(e_1(x), \dots, e_k(x)) = \mathcal{D}_x$$

Ak sú polia e_a hladké, hovoríme o hladkej k -rozmernej distribúcii.

2. Zadáme $(n - k)$ lineárne nezávislých *1-formiem* θ^i takých, že anihilujú všetky vektorové polia z distribúcie¹⁰

$$\langle \theta^i, V \rangle \stackrel{!}{=} 0 \quad i = k + 1, \dots, n \quad \text{pre všetky} \quad V \in \mathcal{D}$$

Vektorové polia z distribúcie môžeme rozložiť do bázy, $V = V^a(x)e_a$. Vzhľadom na ľubovoľnosť funkcií $V^a(x)$. Stačí splniť podmienku

$$\langle \theta^i, e_a \rangle \stackrel{!}{=} 0 \tag{2.3}$$

Formy θ^i sa nazývajú ohraničujúce formy distribúcie. Niekedy ich budeme označovať e^i .

⁸Písmeno e označuje jednotkový prvok grupy.

⁹Komu toto stručné zavedenie distribúcií nebude stačiť, môže otvoriť knihu [7] a prečítať si o distribúciách viac v časti 19.3.

¹⁰Keď v každom bode vektor $V(x)$ patrí do podpriestoru \mathcal{D}_x , hovoríme, že vektorové pole je z distribúcie ($V \in \mathcal{D}$).

3. Ďalšia možnosť je opis pomocou *tenzora h typu $\binom{2}{0}$ rangu k* . Tenzor použijeme ako zobrazenie z kovektorov do vektorov.

$$h : T^*M \rightarrow TM \quad h(p) = h(p, \cdot) \in TM$$

a požadujeme, aby platilo

$$\text{Im}(h) = \mathcal{D}$$

teda aby sa kovektory prostredníctvom h zobrazovali na celú distribúciu.

Zastavme sa nachvíľu pri (menej používanom) opise distribúcie pomocou tenzora h . Pozrime sa ako vyzerá h v báze (e_a, e_i) adaptovanej na distribúciu ($e_a \in \mathcal{D}$). *Všeobecný* tenzor typu $\binom{2}{0}$ má tvar

$$h = h^{ab}e_a \otimes e_b + h^{ai}e_a \otimes e_i + h^{ia}e_i \otimes e_a + h^{ij}e_i \otimes e_j$$

Vypočítajme obraz kovektora $p = p_a e^a + p_i e^i$.

$$h(p) = (p_b h^{ba} + p_i h^{ia})e_a + (p_a h^{ai} + p_j h^{ji})e_i$$

Aby platila podmienka $\text{Im}(h) = \mathcal{D}$, musí byť $h^{ai} = h^{ji} = 0$. Takže distribúciu opisujú všetky možné tenzory (rangu k)

$$h = h^{ab}e_a \otimes e_b + h^{ia}e_i \otimes e_a$$

Aby sme si zjednodušili život, vyberme si $h^{ia} = 0$ a $h^{ab} = h^{ba}$.¹¹ Napokon máme distribúciu zakódovanú v symetrickom tenzore

$$h = h^{ab}e_a \otimes e_b \quad h^{ab} = h^{ba} \quad h \leftrightarrow \begin{pmatrix} h^{ab} & h^{ai} \\ h^{ia} & h^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^{ab} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Celý čas sme sa na vec pozerali z pohľadu: „Mám distribúciu a chcem ju opísať.“ Dá sa však rozmýšľať aj opačne: „Mám jeden z objektov (množinu e_a , množinu e^i , alebo tenzor h) a je za tým nejaká distribúcia, ktorú treba nájsť.“ Odporúčame si v konkrétnych opisoch rozmyslieť, ako daný objekt definuje distribúciu resp. vektorové polia, ktoré patria do distribúcie.

V práci budeme potrebovať striedať jednotlivé spôsoby opisu distribúcie. Vyskúšajme si to na jednoduchom príklade.

Príklad

Majme v priestore \mathbb{R}^3 hladkú dvojrozmernú distribúciu danú vektorovými poľami (v cylindrických súradniciach (r, φ, z))

$$e_1 = \partial_\varphi \quad e_2 = \partial_z$$

To je spôsob opisu číslo 1. Distribúciu tvoria všetky polia tvaru

$$V = a\partial_\varphi + b\partial_z$$

kde a, b sú ľubovoľné funkcie súradníc (r, φ, z) .

¹¹Tento výber nám rang nepokazí, ale pri podobných zjednodušeníach života si treba dávať pozor. Keď je človek rozbehnutý a všetko pokladá rovné nule (tu by dal aj $h^{ab} = 0$), ani sa nenazdá a skončí s nulovým tenzorom, ktorý mu je na nič.

Nájďme opis distribúcie druhým spôsobom. Keďže $n = 3$ a $k = 2$, treba nájsť jednu ohraničujúcu formu

$$\theta^3 \equiv \theta = A dr + B d\varphi + C dz$$

kde A, B, C sú zatiaľ neznáme funkcie súradníc (r, φ, z) , ktoré nám zostáva identifikovať využitím vzťahu (2.3). Vychádza

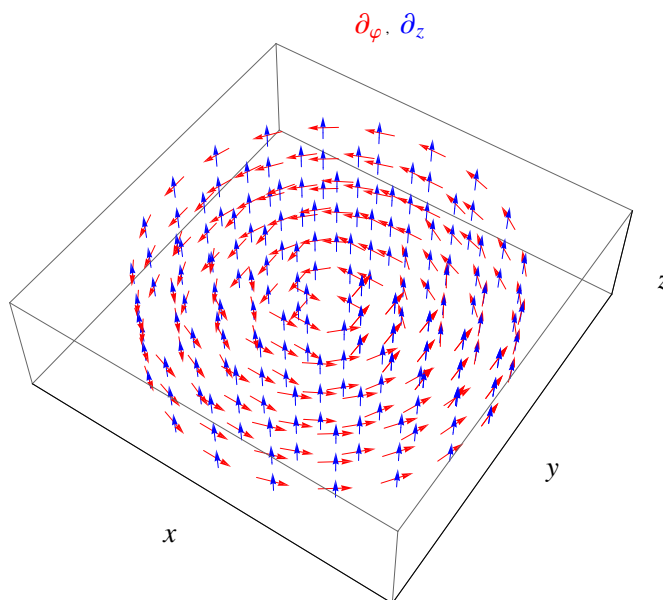
$$\left. \begin{array}{l} \langle \theta, e_1 \rangle = B \stackrel{!}{=} 0 \\ \langle \theta, e_2 \rangle = C \stackrel{!}{=} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = A dr$$

Distribúciu opisuje forma $\theta = A dr$ s ľubovoľnou funkciou A . Pre jednoduchosť môžeme voliť $A = 1$.

V treťom prístupe jednoducho dosadíme do vzťahu (2.4) a dostaneme potrebný tenzor.

$$h = h^{11} \partial_\varphi \otimes \partial_\varphi + h^{12} (\partial_\varphi \otimes \partial_z + \partial_z \otimes \partial_\varphi) + h^{22} \partial_z \otimes \partial_z$$

Keď si chceme distribúciu predstaviť v duchu kapitoly 1, nalepíme v každom bode priestoru na vektory $\partial_\varphi, \partial_z$ malú rovinku (Obr. 2.6). Distribúcia je tu teda sústava malých rovniek, ktoré predstavujú podpriestory $\mathcal{D}_x \subset T_x M$ dotkových priestorov. Keď pozrieme na Obr.2.6 a dobre zažmúrime oči, zbadáme súosové valce. Ak má niekto



Obr. 2.6: Polia $\partial_\varphi, \partial_z$ zadávajúce distribúciu.

pocit, že vidieť valce namiesto šípok je silná halucinácia, môže nazrieť do časti 2.9.1 (Obr. 2.12 na strane 27).¹² Keď už vidíme namiesto distribúcie valce, dostávame sa k otázke *integrovateľnosti distribúcie*, ktorú rozoberieme v časti 2.9.1.

2.5 Subriemannovská geometria – definícia

*Subriemannovská geometria*¹³ študuje *subriemannovské variety*. Sú to variety s distribúciou a skalárnym súčinom definovaným na distribúcii, teda trojice (M, \mathcal{H}, g) . Dis-

¹²Pozorný čitateľ si určite všimol, že ide o distribúciu, ktorá sa spomína v poznámke pod čiarou na strane 11. Pohybovať sa vždy v smere distribúcie tu znamená byť celý život na *jednom* valci.

¹³Používa sa tiež názov *Carnotova-Carathéodoryho geometria* alebo *neholonómna riemannovská geometria*.

tribúciám v subriemannovskej geometrii sa hovorí *horizontálne distribúcie* (označenie \mathcal{H}) a objekty (vektory, vektorové polia,...), ktoré sú dotykové ku distribúcii, majú prívlastok horizontálne. Skalárny súčin definovaný len na distribúcii je taký, ktorý počíta len skalárne súčiny horizontálnych vektorových polí (alebo vektorov). Pobodovo

$$g(u, v) \in \mathbb{R} \quad u, v \in \mathcal{H}_x \subset T_x M$$

Napriek tomu, že skalárny súčin g nie je poctivý (riemannovský) skalárny súčin, budeme ho volať (subriemannovská) metrika.

Predstavme si krivku γ , ktorá je v každom bode dotyková ku distribúcii. Inak povedané, dotykový vektor $\dot{\gamma}$ v ľubovoľnom bode krivky je horizontálny (patrí do podprie priestoru $\mathcal{H}_{\gamma(t)}$). Podľa úvodu tejto časti si krivka zaslúži meno *horizontálna*. Skalárny súčin $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$ má dobrý zmysel, a preto má zmysel merať dĺžku horizontálnej krivky

$$l[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} dt \equiv \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\gamma}\| dt$$

Funkcionál dĺžky krivky vyzerá formálne rovnako ako v riemannovskej geometrii. Rozdiel je, že g je subriemannovská metrika a definičný obor funkcionálu je tým obmedzovaný na horizontálne krivky.

(Presnejšie povedané, *absolútne spojité* horizontálne krivky. To sú spojité krivky, ktoré majú deriváciu skoro všade (okrem množiny miery 0) a derivácia je horizontálna tam, kde existuje. To znamená, že prípustné sú aj „zubaté“ krivky.)

Vzdialenosť medzi dvoma bodmi A a B definujeme rovnako ako v riemannovskej geometrii

$$d(A, B) = \inf l[\gamma] \tag{2.5}$$

Ak sa body A, B nedajú spojiť horizontálnou krivkou, definujeme $d(A, B) := \infty$. Otázkou existencie horizontálnej spojnice ľubovoľných bodov sa budeme zaoberať v časti 2.9.

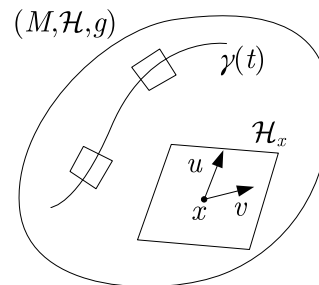
V subriemannovskej geometrii teda existuje kontrolný orgán – subriemannovská polícia. V bode B zadrží všetkých, čo prišli z bodu A . Polícia preverí, či cestou neporušovali zákon \mathcal{H} – či išli stále horizontálne. Toho, kto kontrolou prejde, pošlú na premeranie dĺžky jeho cesty subriemannovským geodetom. Potom, čo geodeti všetkých premerajú, vyhlásia, aká je *najkratšia* možná cesta z A do B .

Horizontálna krivka, ktorá realizuje vzdialenosť (2.5) medzi dvoma bodmi sa volá *minimálna subriemannovská geodetika*. Hľadanie minimálnych geodetik je jednou z hlavných úloh v subriemannovskej geometrii a aj v tejto práci.

Horizontálna krivka sa volá *subriemannovská geodetika*, keď je lokálne minimálnou subriemannovskou geodetikou. (Stačí, že je extrémom funkcionálu dĺžky, nemusí byť minimom.) Inými slovami, krivka $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ je subriemannovská geodetika, ak každé $t_0 \in I$ leží v (uzavretom) podintervale $J \subset I$ takom, že γ je na J minimálna subriemannovská geodetika.

Poznámka

Ak by sme chceli definovať subriemannovské geodetiky pomocou metrickej konexie (analogicky definíciu číslo 2 v riemannovskej geometrii), narazíme na problém, pretože na variete vo všeobecnosti žiadnu prirodzenú metricnú konexiu nemáme (nie je poriadna metrika, nedá sa z nej vyrobiť konexia).



Obr. 2.7: Subriemannovská varieta s horizontálnou krivkou γ .

Všeobecne fungujú len definície pomocou funkcionálu dĺžky $l[\gamma]$ a účinku $S[\gamma]$ (ten vyzerá formálne rovnako ako v riemannovskej geometrii, ale je, podobne ako funkcionál dĺžky, definovaný len pre horizontálne krivky γ). Užitočný pohľad na ekvivalentnosť definícií prostredníctvom Cauchyho-Schwartzovej nerovnosti je v knihe [18] v časti 1.4 (a platí aj v riemannovskej geometrii).

Špeciálny prípad: Riemannovská geometria

Poznamenajme, že ak distribúcia bude najväčšia, aká môže byť, teda

$$\dim \mathcal{H} = n \quad \leftrightarrow \quad \mathcal{H}_x = T_x M$$

tak g je obyčajný riemannovský metrický tenzor (funguje na všetkých vektoroch) a sme späť v riemannovskej geometrii. V tomto zmysle subriemannovská geometria zahŕňa riemannovskú ako svoj špeciálny prípad.

2.6 Kometrika a subriemannovský hamiltonián

Kometrika

V riemannovskej geometrii sa študovala dvojica (M, g) . Ukazuje sa, že v subriemannovskej geometrii si tiež vystačíme s istou dvojicou namiesto trojice (M, \mathcal{H}, g) . Od trojice ku dvojici prejdeme jednoducho tak, že informáciu o distribúcii \mathcal{H} a skalárnom súčine g zakódujeme do jedného objektu – *kometriky* h . V časti 2.4 sme prišli k záveru, že distribúciu môžeme opísať špeciálnym symetrickým tenzorom typu $\binom{2}{0}$

$$h = h^{ab} e_a \otimes e_b \quad h^{ab} = h^{ba}$$

Stále nám zostáva vôľa v symetrickej matici h^{ab} . Rozumý nápad je fixovať vôľu druhým symetrickým objektom – skalárnym súčinom g , ktorý už na variete máme. Matica skalárneho súčinu g v báze e_a je

$$g_{ab} = g(e_a, e_b)$$

Matica g_{ab} spolu s bázou e_a obsahujú *celú* informáciu o g . Maticu h^{ab} fixujeme voľbou

$$h^{ab} g_{bc} = \delta_c^a$$

Čiže maticu h^{ab} definujeme ako inverznú k matici g_{ab} . Označme ju g^{ab} . Subriemannovská varieta je teraz dvojica (M, h) , kde kometrika h má tvar

$$h = g^{ab} e_a \otimes e_b$$

Kódovanie $(\mathcal{H}, g) \rightarrow h$ sme opísali pomocou adaptovaných repných polí (lebo v práci budeme prakticky postupovať presne opísaným spôsobom), ktorých výber nie je jednoznačný. Mohlo by sa zdať, že ide o neobjektívnu procedúru. Čitateľ si môže overiť, že vzťah

$$g(h(p), V) := \langle p, V \rangle \quad p \in T^*M, \quad V \in \mathcal{H}$$

opisuje *objektívne* to isté kódovanie, čiže kometriku h máme na subriemannovskej variete *kanonicky*.

V riemannovskej geometrii môžeme tiež namiesto metriky g pracovať s kometrikou $h = g^{-1}$. Riemannovská geometria môže byť teda opisovaná dvojicou (M, g) alebo (M, h) . Subriemannovskej geometrii máme ako *dvojicu* len (M, h) , lebo opis pomocou (M, g) je bez \mathcal{H} nemožný. Z tohto pohľadu je kometrika *univerzálnejšia*, než metrika. Má dobrý zmysel v riemannovskej aj subriemannovskej geometrii.

Subriemannovský hamiltonián

Ak máme na (všeobecnej) variete M tenzorové pole typu $\binom{r}{0}$, môžeme mu priradiť funkciu na T^*M predpisom (pozri v knihe [7] úlohu (18.4.4))

$$A \mapsto \overset{\circ}{A}(p) := A_x(p, \dots, p) \quad (2.6)$$

príčom p vľavo je bod $p \in T^*M$ a p vpravo je zodpovedajúci kovektor p . V kanonických súradniciach

$$A = A^{\mu \dots \nu}(x) \partial_\mu \otimes \dots \otimes \partial_\nu \quad \mapsto \quad \overset{\circ}{A} = A^{\mu \dots \nu}(x) p_\mu \dots p_\nu$$

Prakticky vlastne stačí zameniť ∂ za p a tenzorové súčiny za obyčajné. Pre *symetrické* tenzorové polia a vektorové polia je priradenie $A \mapsto \overset{\circ}{A}$ vzájomne jednoznačné (dá sa vrátiť od $\overset{\circ}{A}$ ku A), lebo je injektívne (konkrétna funkcia $\overset{\circ}{A}$ je priradená len jednému poľu A).¹⁴

Takto poučení neotáľame a priradíme našej symetrickej kometrike h funkciu na T^*M

$$H(x, p) = \frac{1}{2} \overset{\circ}{h}(p) \equiv \frac{1}{2} h_x(p, p) = \frac{1}{2} g^{ab}(x) \overset{\circ}{e}_a(p) \overset{\circ}{e}_b(p) \equiv \frac{1}{2} g^{ab}(x) P_a P_b \quad (2.7)$$

ktorú pomenujeme *subriemannovský hamiltonián*. Špeciálne v *ortonormovanej* báze

$$H(x, p) = \frac{1}{2} \delta^{ab} P_a P_b \equiv \frac{1}{2} P_a P_a$$

Faktor $\frac{1}{2}$ je čisto konvenčný, rovnako dobre by sme obstáli aj bez neho. (Je tu, len aby nám pripomínal všetky možné kinetické energie, s ktorými sme sa v živote stretli.) Zaviedli sme označenie $P_a \equiv \overset{\circ}{e}_a(p)$. Funkcie P_a majú v kanonických súradniciach vyjadrenie

$$P_a = \overset{\circ}{e}_a(p) \equiv \langle p, e_a \rangle = (e_a)^\mu p_\nu \langle dx^\nu, \partial_\mu \rangle = (e_a)^\mu p_\mu$$

V literatúre (pozri [18] Definition 1.5.4) sa funkcii P_a hovorí *funkcia hybnosti* (angl. momentum function) priradená vektorovému poľu.

Napokon máme celú štruktúru na M zosobnenú v jedinom objekte – subriemannovskom hamiltoniáne.

2.7 Normálne geodetiky

Rovnako ako v riemannovskej geometrii, aj tu by sme sa chceli naučiť hľadať geodetiky. Prvý nápad by mohol byť napísať pre subriemannovský hamiltonián (2.7) Hamiltonove rovnice

$$\dot{x}^\mu = \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \quad \dot{p}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial x^\mu}$$

a dúfať, že ich riešeniami sú (po projekcii na M) geodetiky. Ukazuje sa, že prvý nápad je správny (bodaj by sme takéto šťastie mávali častejšie). S nadšením si teda môžeme prečítať nasledujúcu vetu.¹⁵

¹⁴Odporúča sa pookriať na duchu a rozmyslieť si tento sympatický fakt.

¹⁵Znenie je z knihy [18] Theorem 1.5.7. Tvrdenie o jednoznačnosti je tam chybné napísané, čo sa tam vyjasní až v časti 1.9.4.

Veta Nech krivka $\zeta(t) = (\gamma(t), p(t))$ je riešením Hamiltonových rovníc pre subriemannovský hamiltonián a $\gamma(t)$ je projekcia riešenia na M . Potom každý *dostatočne krátky* úsek krivky $\gamma(t)$ je *minimálna* subriemannovská geodetika. Navyše krivka $\gamma(t)$ je jednoznačná pre *dostatočne blízke* dva body, ktoré spája.

□

Riešenia Hamiltonových rovníc vo všeobecnosti nedávajú všetky geodetiky. Viac sa o tom hovorí v časti 2.8. Geodetiky, ktoré vyjdú riešením Hamiltonových rovníc sa volajú *normálne* subriemannovské geodetiky.

Poctivý dôkaz vety možno nájsť v Montgomerym [18] v časti 1.9. My si uvedieme len nepoctivý a chybný, ale za to poučný dôkaz, ktorý je v tej istej Montgomeryho knihe v časti 1.9.1.

„Dôkaz“ Na problém sa pozrieme v domácom prostredí riemannovskej geometrie, kde sme si už čo-to preskákali. Na M máme štandardný metrický tenzor g fungujúci na všetkých vektoroch. Majme navyše na M distribúciu \mathcal{H} . V zmysle g k nej môžeme definovať ortogonálny doplnok \mathcal{V} . Pre jednoduchosť budeme pracovať v *ortonormovanej* adaptovanej báze (e_a, e_i) (e_a je báza v \mathcal{H} a e_i je báza vo \mathcal{V}). Rozdeľme g na súčet dvoch tenzorov

$$g = g_{\mathcal{H}} + g_{\mathcal{V}} = e^a \otimes e^a + e^i \otimes e^i \quad \text{maticovo} \quad g \leftrightarrow \begin{pmatrix} \delta_{ab} & 0 \\ 0 & \delta_{ij} \end{pmatrix}$$

kde $g_{\mathcal{H}}$ je subriemannovská metrika a $g_{\mathcal{V}}$ je metrika na doplnkových priestoroch. Na to, aby sme z tejto riemannovskej geometrie vyrobili subriemannovskú, musíme zakázať pohyby v nehorizontálnom smere. Zavedme novú metriku

$$g_{\lambda} = g_{\mathcal{H}} + \lambda^2 g_{\mathcal{V}} = e^a \otimes e^a + \lambda^2 e^i \otimes e^i \quad \text{maticovo} \quad g_{\lambda} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \delta_{ab} & 0 \\ 0 & \lambda^2 \delta_{ij} \end{pmatrix}$$

Čím väčšie bude λ , tým budú mať nehorizontálne krivky väčšiu dĺžku. Opäť prichádza na scénu subriemannovská polícia, ktorá rázne pokutuje vertikálne cestovanie. Keď pôjdeme s λ do nekonečna, tak krivky s *konečnou* dĺžkou budú len *horizontálne* (vertikálne cestovanie si už ozať nikto nebude môcť dovoliť)¹⁶. Iverzná matica k matici metrického tenzora je

$$g_{\lambda}^{-1} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \delta^{ab} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda^2} \delta^{ij} \end{pmatrix}$$

Riemannovský hamiltonián (2.2) vychádza

$$H_{\lambda} = \frac{1}{2} \left(\delta^{ab} P_a P_b + \frac{1}{\lambda^2} \delta^{ij} P_i P_j \right) \equiv \frac{1}{2} \left(P_a P_a + \frac{1}{\lambda^2} P_i P_i \right)$$

a zodpovedajúce Hamiltonove rovnice sú rovnicami pre geodetiky γ_{λ} na (M, g_{λ}) . V limite $\lambda \rightarrow \infty$ konverguje hamiltonián H_{λ} k subriemannovskému hamiltoniánu (2.7) a geodetiky γ_{λ} k normálnym subriemannovským geodetikám.

□

Nanešťastie v limite $\lambda \rightarrow \infty$ je problém a niektoré krivky γ_{λ} sa pri limite neblížia k normálnym geodetikám, ale k *singulárnym* geodetikám, o ktorých bude reč v časti 2.8.

¹⁶Nevedno, či preto, že subriemannovskí ľudia nemajú nekonečne veľké peňaženky, z ktorých by zaplatili nekonečné pokuty, alebo nechcú prispievať polícii nekonečnými čiastkami, aby im nespôsobili nekonečný blahobyť a stratu pracovnej motivácie.

(Zo širšieho hľadiska ide o pomerne bežný problém komutovania limity s nejakou procedúrou, napríklad limity a integrálu (riešenia rovníc môžu vlastne byť tiež nejaké integrály). Niekedy je rozdiel, či najprv urobíme limitu a potom budeme integrovať, alebo opačne. Tu je rozdiel, či najprv robíme limitu a potom riešime rovnice, alebo naopak.)

2.8 Singulárne geodetiky

V riemannovskej geometrii sú všetky geodetiky riešeniami rovníc pre geodetiky. V subriemannovskej geometrii existujú minimálne geodetiky, ktoré *nie sú* riešeniami rovníc pre normálne geodetiky. Tieto čudné geodetiky sa volajú *abnormálne geodetiky*. Tento pojem sa často pletie s pojmom *singulárne geodetiky* (lebo takmer všetky singulárne geodetiky sú abnormalné). My v tejto tradícii budeme pokračovať. Zmäťok v terminológii dáme do poriadku v časti 2.8.2.

2.8.1 Singulárne krivky

Horúcimi kandidátmi na singulárne geodetiky sú tzv. *singulárne krivky*. Sú to kritické body (= body, kde derivácia neexistuje alebo je nulová) zobrazenia, ktoré zobrazí horizontálnu krivku do jej koncového bodu (angl. endpoint map)

$$\text{end}_x : \Omega(\langle 0, T \rangle, x, \mathcal{H}) \rightarrow M \quad \text{end}_x(\gamma) = \gamma(T)$$

Je to zobrazenie z priestoru $\Omega(\langle 0, T \rangle, x, \mathcal{H})$, horizontálnych kriviek parametrizovaných časom $t \in \langle 0, T \rangle$ so začiatkom v bode $x = \gamma(0)$, do variety M . Takéto zobrazenie máme pre každý bod x . Aby sa dalo hovoriť o kritických bodoch zobrazenia end_x a definovať singulárne krivky, potrebujeme vedieť počítať deriváciu end_x v konkrétnom bode(!) $\gamma \in \Omega$. (Na to treba aj zaviesť súradnice na Ω .) Toto sa robí v knihe [18] v kapitole 5.

Študovanie zobrazenia end_x ide za rámec tejto práce. Treba si len zapamätať, že singulárne krivky sú kritickými bodmi v priestore Ω vzhľadom na zobrazenie end_x , čo znamená, že sa v nejakom zmysle „dost odlišujú od svojho okolia“.

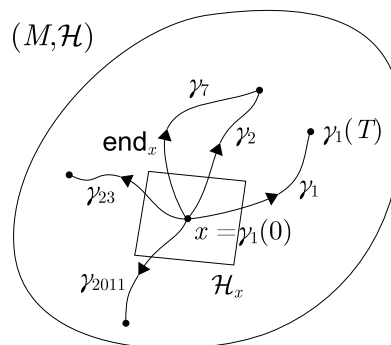
(Každá derivácia počíta nejaké rozdiely. Keď v nejakom bode derivácia neexistuje alebo je nulová, znamená to, že tento bod je pre konkrétne zobrazenie špecifický.)

Odlišnosť konkrétnych singulárnych kriviek od iných horizontálnych kriviek budeme študovať v jednoduchom príklade v kapitole 5. Tam spočíva zhruba v tom, že sa nedajú dobre horizontálne deformovať pri fixovaní začiatočného a koncového bodu. Viac o singulárnych krivkách sa dá nájsť v knihe [18].

O chvíľu si ukážeme jednoduchý algoritmus, podľa ktorého budeme hľadať singulárne krivky. Najprv si však priblížime okolnosti ich vzniku.

Kedy vznikajú singulárne krivky?

Označme $\mathcal{H}^\perp \subset T^*M$ podfibráciu kodotykovej fibrácie, do ktorej patria všetky 1-formy anihilujúce distribúciu \mathcal{H} . Na T^*M máme kanonickú symplektickú (uzavretú



Obr. 2.8: Zobrazenie do koncového bodu.

a nedegenerovanú) formu $\omega = dp_\mu \wedge dx^\mu$. Označme

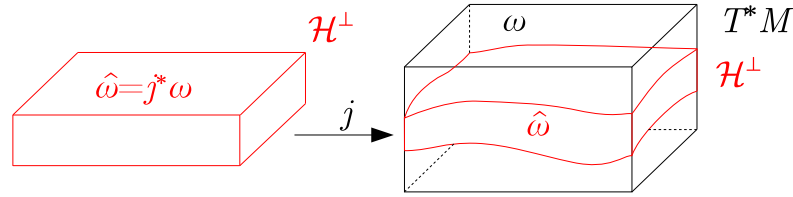
$$\hat{\omega} \equiv dp_\mu \wedge dx^\mu|_{\mathcal{H}^\perp}$$

ohraničenie¹⁷ kanonickej formy na \mathcal{H}^\perp . Ukazuje sa, že ak forma $\hat{\omega}$ *nie je* symplektická, tak distribúcia \mathcal{H} pripúšťa singulárne krivky (pozri [18] časť 5.2).

Ohraničenie $\omega|_{\mathcal{H}^\perp}$ prakticky robíme takto. Predstavme si zobrazenie

$$j : \mathcal{H}^\perp \rightarrow T^*M$$

ktoré je vloženie \mathcal{H}^\perp do T^*M (Obr. 2.9).



Obr. 2.9: Vloženie \mathcal{H}^\perp do T^*M .

Ľubovoľná forma $p \in \mathcal{H}^\perp$ je lineárnou kombináciou ohraničujúcich foriem, teda $p = \lambda_i \theta^i$. Čísla λ_i budeme používať ako „vláknové“ súradnice na \mathcal{H}^\perp . Tá istá forma p má v kanonických súradniciach na T^*M zápis $p = p_\mu dx^\mu$. Z toho dostaneme vzťah medzi λ_i a p_μ .

$$p = p_\mu dx^\mu \stackrel{!}{=} \lambda_i \theta^i = \lambda_i (\theta^i)_\mu dx^\mu$$

Funkcie $(\theta^i)_\mu(x)$ označujú komponenty formy θ^i vzhľadom na súradnicovú bázu. Vyšlo nám $p_\mu = \lambda_i (\theta^i)_\mu$. Súradnicové vyjadrenie vloženia preto vyzerá

$$j : (x^\mu, \lambda_i) \mapsto (x^\mu, p_\mu) = (x^\mu, \lambda_i (\theta^i)_\mu)$$

Forma $\hat{\omega}$ podľa schémy na Obr. 2.9 vzniká ako pull-back symplektickej formy ω prostredníctvom vloženia j . Vychádza

$$\begin{aligned} \hat{\omega} &= j^* \omega = j^*(dp_\mu \wedge dx^\mu) = d(j^* p_\mu) \wedge d(j^* x^\mu) \\ &= d[\lambda_i (\theta^i)_\mu(x)] \wedge dx^\mu = d\lambda_i \wedge \theta^i + \lambda_i d\theta^i \end{aligned} \quad (2.8)$$

Aby mohli vzniknúť singulárne krivky, forma $\hat{\omega}$ nemá byť symplektická. Symplektická forma je uzavretá nedegenerovaná forma. Naša $\hat{\omega}$ je uzavretá ($d\hat{\omega} = 0$), takže aby nebola symplektická, musí byť degenerovaná. To znamená, že forma $\hat{\omega}$ fungujúca ako zobrazenie

$$\hat{\omega} : T\mathcal{H}^\perp \rightarrow T^*\mathcal{H}^\perp \quad V \mapsto \alpha = \hat{\omega}(V) \equiv i_V \hat{\omega}$$

nemá v nejakom bode maximálny rang (ktorý je $(2n - k) = \dim T\mathcal{H}^\perp$). Pre nejaké vektory $V \neq 0$ musíme dostávať $i_V \hat{\omega} = 0$.

Ako sa hľadajú singulárne krivky?

Singulárna krivka $\gamma(t)$ je projekciou (na M) krivky $p(t)$, ktorá

¹⁷Ohraničiť formu na \mathcal{H}^\perp znamená zaprisahať sa, že do formy $\hat{\omega}$ budeme vkladať len vektory dotykové ku \mathcal{H}^\perp . Pozri v knihe [7] úlohu (7.6.8).

- je absolútne spojitá a leží celá v \mathcal{H}^\perp . Teda

$$p(t) \in \mathcal{H}^\perp \quad \text{pre ľubovoľné } t$$

- nie je nikde nulová ($p(t) \neq 0$). (Kovektor zodpovedajúci bodu $p(t)$ nie je nikde nulový.)

- spĺňa rovnicu

$$i_{\dot{p}}\hat{\omega} = 0 \quad \dot{p}(t) \in T_{p(t)}\mathcal{H}^\perp \quad (2.9)$$

všade tam, kde derivácia $\dot{p}(t)$ existuje.

Takže singulárne krivky sú (pred sprojektovaním) krivky, ktoré si najviac odskáču degenerovanosť formy $\hat{\omega}$. Forma $\hat{\omega}$ na ne neberie žiaden ohľad a pri dosadení dotykového vektora \dot{p} v ktoromkoľvek bode krivky dáva nulu tak isto ako pre „príživnícke krivky“, ktoré sú v skutočnosti len bodmi a majú $\dot{p} = 0$. Hovoríme o tom, len aby aspoň čitateľ vedel rozlíšiť medzi poctivými krivkami a darmožráčmi, keď už to forma $\hat{\omega}$ nezvláda.

Singulárna krivka spájajúca konkrétne dva body A, B môže byť kratšia než všetky normálne geodetiky spájajúce A, B . Ak sa tak stane, singulárna krivka realizuje vzdialenosť (2.5) medzi bodmi A, B a zaslúži si meno *singulárna geodetika*. Skúsenosť ukazuje, že zistiť, či konkrétna singulárna krivka je naozaj najkratšia spojnice, je zväčša technicky oveľa najnáročnejšie, než ju nájsť.

Všimnime si, že konštrukcia singulárnych kriviek nezávisí od výberu metriky. Singulárne krivky sú artefaktom samotnej distribúcie \mathcal{H} aj bez zavedenia metriky. Dokonca pre niektoré typy distribúcií stačí poznať singulárne krivky a vieme z nich rekonštruovať celú distribúciu. Viac sa o tom hovorí v knihe [18] v časti 5.5.

2.8.2 Vyjasnenie terminológie

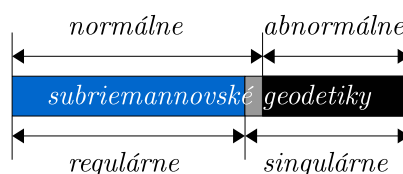
V subriemannovskej geometrii sú v hre 4 typy geodetik: normálne, abnormálne, singulárne a regulárne geodetiky. Diagram na Obr. 2.10 a nasledujúci text vyjasní, aký je medzi nimi vzťah.

Normálne geodetiky sú také, ktoré vziú z riešenia rovníc pre geodetiky (Hamiltonových rovníc pre subriemannovský hamiltonián).

Abnormálne geodetiky sú podľa definície tie, ktoré nie sú normálne, čiže neriešia rovnice pre geodetiky.

Singulárne geodetiky sú singulárne krivky, ktoré realizujú vzdialenosť (sú najkratšími horizontálnymi spojnicami bodov). Keďže nemajú nič spoločné s rovnicami pre normálne geodetiky, nemusia byť ich riešeniami. Spravidla ani nie sú, ale môže sa stať, že pre nejaký špeciálny výber metriky môžu vyjsť z rovníc pre normálne geodetiky aj krivky, ktoré sú zároveň singulárnymi geodetikami. (Metrika „hýbe“ rovnicami pre normálne geodetiky, ale nie singulárnymi krivkami.) Tento prípad nastane napríklad pre 2-rozmernú distribúciu v \mathbb{R}^3 danú ohraničujúcou formou $\theta = dz - y^2 dx$ a „plochú“ metriku $g = dx \otimes dx + dy \otimes dy$. (Tam dokonca všetky singulárne geodetiky sú zároveň aj normálnymi.) Väčšinou je prienik medzi singulárnymi a normálnymi geodetikami (sivý pásik na Obr. 2.10) prázdny, a preto si často nedávame pozor na jazyk a nerozlišujeme medzi abnormálnymi a singulárnymi geodetikami.

Regulárne geodetiky sú podľa definície tie, ktoré nie sú singulárne. Všetky regulárne geodetiky sú normálne.



Obr. 2.10: Subriemannovské geodetiky.

2.8.3 Pikoška na záver

Singulárne geodetiky objavil v roku 1991 Montgomery na jednoduchom príklade 2-rozmernej distribúcie v \mathbb{R}^3 danej ohraničujúcou formou $\theta = dz - y^2 dx$ (pozri v knihe [18] kapitolu 3). Pikoškou je, že pred objavom singulárnych geodetik sa v literatúre objavilo niekoľko chybných dôkazov, ktoré tvrdili, že všetky minimálne subriemannovské geodetiky riešia rovnice pre geodetiky, a teda žiadne singulárne geodetiky neexistujú. (Montgomery o tom viac píše v knihe [18] v časti 3.9.)

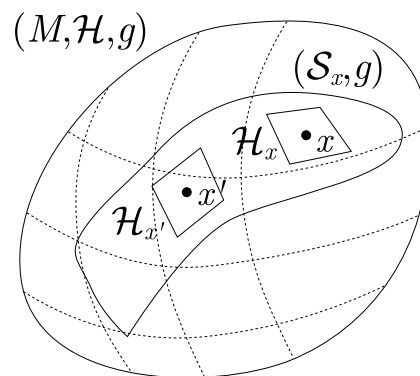
2.9 Horizontálne spájanie bodov

Už sme si zvykli, že distribúcia \mathcal{H} obmedzuje smery pohybu v každom bode na M . Prirodzene prichádza do úvahy otázka, či sa dá horizontálne dostať z konkrétneho bodu A do iného bodu B . Diplomatická odpoveď je slovne jednoduchá: Závisí to od typu distribúcie.

Autor a (snáď ani) čitateľ nie sú diplomati a takáto odpoveď ich neuspokojuje. Preto v celej tejto časti budeme analyzovať rôzne typy distribúcií a možnosti horizontálneho cestovania na varietách s takýmito distribúciami.

2.9.1 Integrovaťelne distribúcie

Najhoršia situácia je na integrovateľných distribúciách. Sú to distribúcie, ktoré varietu rozvrstvujú na menšie celky, *integrálne podvariety*. Rozvrstvenie si môžeme v reči podpriestorov \mathcal{H}_x , ktoré si predstavujeme ako k -rozmerné plôšky, predstaviť tak, že plôšky sa dajú polepiť (integrovať) do k -rozmerných integrálnych podvariety. Iný pohľad je, že si sadneme do bodu x a vedieme ním všetky možné horizontálne krivky. Tieto krivky vytvoria *integrálnu podvarietu* \mathcal{S}_x prechádzajúcu bodom x .¹⁸ Integrálna podvarieta je viacrozmerným ekvivalentom pojmu *integrálna krivka*. Na integrálne krivky sa môžeme pozeráť ako na integrálne podvariety 1-rozmerných distribúcií (zadaných jedným vektorovým poľom).



Obr. 2.11: Integrálna podvarieta.

Integrovaťelne distribúcie nie sú stavané pre náruživých horizontálnych cestovateľov, ktorí chcú precestovať celý svet (varietu). Keďže M je rozvrstvená, horizontálne sa dajú spájať len body ležiace na *tej istej* integrálnej podvariete.

Takéto distribúcie nájdú uplatnenie v *subriemannovskom safari*. Ak nechceme, aby nám tigre požrali všetky zebry (bez zebier je safari fádne), umiestnime tigre na jednu integrálnu podvarietu a zebry na vedľajšiu. V subriemannovskom safari sa zebry môžu tigrom vysmievať, až kým tigre nevyhľadnú natoľko, že sa rozhodnú prekonať (neko-nečnú!) vertikálnu vzdialenosť a preskočiť na podvarietu zebier.

Integrovaťelne distribúcie sú z pohľadu subriemannovskej geometrie *nezaujúmavé*. Na integrálnej podvariete \mathcal{S}_x máme metrický tenzor g , ktorý funguje na *celých* dotykových priestoroch \mathcal{H}_x , čiže na \mathcal{S}_x máme obyčajnú *riemannovskú* geometriu (Obr. 2.11).

¹⁸Používa sa aj názov *list* prechádzajúci bodom x (angl. leaf through x).

Frobeniovo kritérium

Frobeniovo kritérium hovorí, že distribúcia je integrovateľá práve vtedy, keď komutátor dvoch ľubovoľných vektorových polí z distribúcie tiež patrí do distribúcie. Matematicky

$$\mathcal{H} \text{ je integrovateľná} \quad \Leftrightarrow \quad \{U, V \in \mathcal{H} \Rightarrow [U, V] \in \mathcal{H}\}$$

Ak je distribúcia \mathcal{H} daná poľami e_a , kritérium vyzerá¹⁹

$$\mathcal{H} \text{ je integrovateľná} \quad \Leftrightarrow \quad [e_a, e_b] = c_{ab}^d e_d$$

Čiže stačí vypočítať komutátory polí e_a (každý s každým) a pozrieť sa, či výsledky sú lineárne kombinácie polí e_a .

Frobeniovo kritérium sa dá napísať aj v jazyku ohraničujúcich foriem θ^i (pozri v knihe [7] text nad úlohou (19.3.8)), to však nebudeme potrebovať.

Distribúcia, ktorú sme uviedli ako príklad v časti 2.4, bola zadaná vektorovými poľami

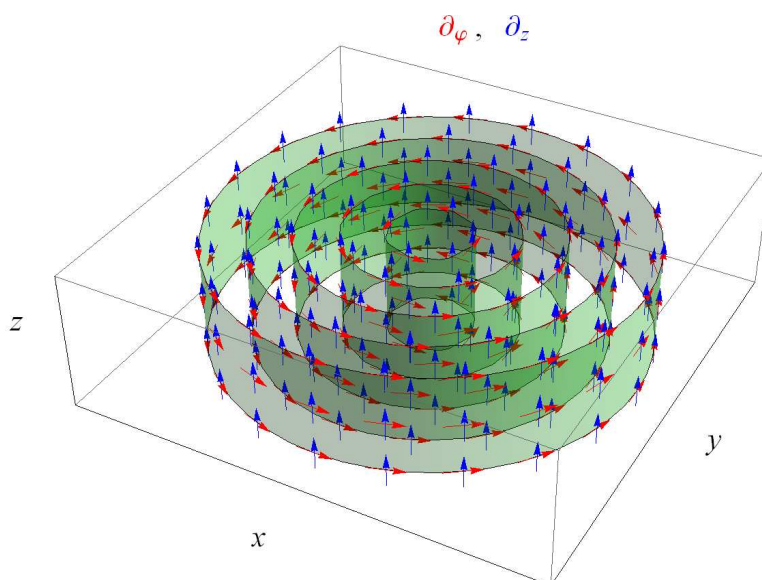
$$e_1 = \partial_\varphi \quad e_2 = \partial_z$$

Vypočítajme komutátor

$$[e_1, e_2] = 0 = 0e_1 + 0e_2$$

Dostali sme (triviálnu) lineárnu kombináciu vektorov e_1, e_2 . (Polia komutujú, lebo sú súradnicové.) To znamená, že distribúcia je integrovateľná. Integrálnymi podvarietami sú *valce* (Obr. 2.12) dané väzbou

$$\Phi(r, \varphi, z) = r - \text{konšt.} = 0$$



Obr. 2.12: Integrálne podvariety distribúcie $\mathcal{D} = \text{Span}(\partial_\varphi, \partial_z)$.

¹⁹Vďaka tomu, že ľubovoľné pole z distribúcie sa dá zapísať ako $V = V^a e_a$ a komutátor je (bi)lineárny, stačí počítať len komutátory polí e_a . Pozri v knihe [7] úlohu (19.3.6).

Poznámka o integrálnych podvarietách

Ak máme na všeobecnej variete s distribúciou nejakú (k -rozmernú) plochu danú väzbami²⁰

$$\Phi^i(x^1, \dots, x^n) \equiv \Phi^i(x) = 0 \quad \text{kde} \quad i = 1, \dots, (n - k)$$

a niekto nám tvrdí, že plocha je integrálnou podvariétou, treba skontrolovať, či platí

$$(e_a \Phi^i(x)) \Big|_{\Phi^i(x)=0} = 0 \quad \text{pre všetky polia } e_a \text{ a všetky } i \quad (2.10)$$

Ak to neplatí, treba dotyčného rásne uzemniť, že nás nemá otravovať s takými nezaujímavými plochami.

Rozoberme si, čo podrobne hovorí kritérium (2.10). Pre jednoduchosť uvažujme $(n - 1)$ -rozmernú plochu danú jednou väzbou $\Phi^1 \equiv \Phi$. Pole e_a je diferenciálny operátor počítajúci smerovú deriváciu (v smere šípok, ktorými ho reprezentujeme v obrázkoch). Tu sa počíta derivácia v smere e_a . Ak sedíme v bode P , kde má funkcia Φ nejakú hodnotu c a vypočítame deriváciu $e_a \Phi$, zistíme, či Φ mení funkčnú hodnotu v smere e_a . Ak vyjde $e_a \Phi = 0$, znamená to, že keď pôjdeme kúsok v smere e_a , bude tam mať Φ rovnakú hodnotu c . Špeciálne pre $c = 0$ pôjdeme z bodu P , kde platí $\Phi(P) = 0$ do bodu P' , kde tiež platí $\Phi(P') = 0$, čiže stále po ploche. Výpočet nás zaujíma len pre body na ploche, preto musíme vo vzťahu (2.10) urobiť ohraňenie $|_{\Phi=0}$. Túto procedúru robíme so všetkými poľami e_a a ak platí (2.10), znamená to, že polia e_a sú v každom bode dotykové ku ploche danej väzbou $\Phi = 0$.

V našom príklade vychádza

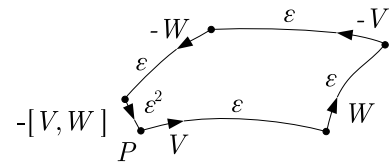
$$\begin{aligned} e_1 \Phi(r, \varphi, z) &= \partial_\varphi(r - \text{konšt.}) = 0 \\ e_2 \Phi(r, \varphi, z) &= \partial_z(r - \text{konšt.}) = 0 \end{aligned}$$

Dostávame nuly (aj bez ohraňenia na $\Phi = 0$). Polia $\partial_\varphi, \partial_z$ sa všade dotýkajú valcov a valce sú naozaj integrálne podvariety.

Geometrický zmysel komutátora $[V, W]$

Frobeniovmu kritériu sa dá dobre rozumieť, ak si spomenieme na geometrickú interpretáciu komutátora vektorových polí. Interpretácia je detailne rozpracovaná v knihe [7] v časti 4.5. Tu si len pripomenieme hlavnú myšlienku.

Majme na M dve vektorové polia V a W . Vykonajme z bodu P infinitezimálnu cestu pozostávajúcu zo 4 častí. Začnime krokom o ε v smere V ,²¹ pokračujeme o ε v smere W , ďalej o ε v smere $-V$ a nakoniec o ε v smere $-W$. Ukazuje sa, že do rádu ε sa vrátíme späť do bodu P , ale v ráde ε^2 už nie.



Obr. 2.13: Komutátor geometricky.

Výpočtom pomocou infinitezimálnych tokov vyjde, že musíme urobiť dodatočný krok o ε^2 v smere komutátora $-[V, W]$.

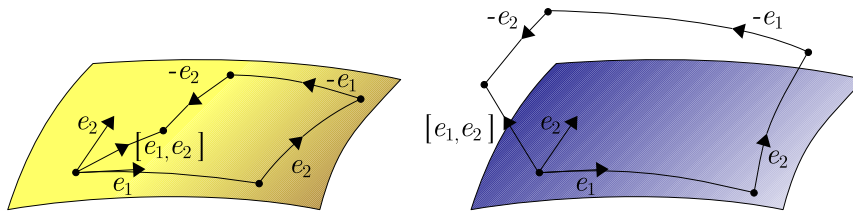
Frobeniovo kritérium pre intuitívneho geometra

Pozrime sa na Frobeniovo kritérium pomocou geometrickej interpretácie komutátora. Pre jednoduchosť začnime s 2-rozmernou distribúciou (Obr. 2.14). Počíta sa komutátor

²⁰Máme na mysli v každom bode nezávislé väzby. Pozri v knihe [7] časť 1.5.

²¹Myslí sa ísť po integrálnej krivke γ poľa V o parametrickú vzdialenosť ε z bodu $\gamma(0) \equiv P$ do bodu $\gamma(\varepsilon)$.

$[e_1, e_2]$ a pýtame sa, či výsledok leží v rovinke danej poľami e_1 a e_2 . Ak áno, tak infinitezimálna okružná cesta leží v 2-rozmernej integrálnej podvariete a dvojica e_1, e_2 tvorí bázu dotykového priestoru \mathcal{H}_x v každom bode podvariety. Ak nie, tak komutátor trčí mimo rovinky a žiadna integrálna podvarieta neexistuje.



Obr. 2.14: Frobeniovovo kritérium intuitívne. Žltá plocha je integrálna podvarieta. Modrá je len príznak, ktorý sa márne snaží stať integrálnou podvarieta, kde to ani nejde.

V prípade viacrozmernej distribúcie je to obdobne. Skúma sa, či všetky možné infinitezimálne okružné cesty ležia v k -rozmernej rovinke danej poľami e_1, \dots, e_k . Ak nejaký komutátor trčí mimo, nevznikajú integrálne podvariety.

2.9.2 Úplne neintegrovateľné distribúcie

Distribúcie, ktoré nie sú integrovateľné sa volajú (logicky) *neintegrovateľné*. Na všeobecnej neintegrovateľnej distribúcii nie je dopredu jasné, či sa dajú horizontálne spojiť niektoré dva body, ktoré si vyberieme. Existuje však špeciálna trieda *úplne neintegrovateľných distribúcií*, na ktorých sa dajú horizontálnymi krivkami spojiť *ľubovoľné* dva body.

Úplne neintegrovateľná distribúcia \mathcal{H} je taká, že keď zoberieme bázové polia e_a spolu s iterovanými komutátormi

$$[e_a, e_b], \quad [e_a, [e_b, e_c]], \quad [e_a, [e_b, [e_c, e_d]]], \quad [[e_a, e_b], [e_c, e_d]], \dots$$

a urobíme všemožné lineárne kombinácie, dostaneme celú dotykovú fibráciu TM . V konkrétnom bode x sa dá z vektorov $e_a(x)$ a ich iterovaných komutátorov vybrať báza dotykového priestoru $T_x M$.

Príklad

Majme v \mathbb{R}^3 dvojrozmernú distribúciu danú poľami

$$e_1 = \partial_x \quad e_2 = x^2 \partial_z + \partial_y$$

Vypočítajme komutátor

$$[e_1, e_2] = 2x \partial_z \equiv e_3$$

Vidíme, že trojica e_1, e_2, e_3 tvorí bázu všade okrem roviny $x = 0$, kvôli ktorej treba počítať iterovaný komutátor

$$[e_1, [e_1, e_2]] \equiv [e_1, e_3] = 2 \partial_z \equiv e_4$$

Zo štvorice e_1, e_2, e_3, e_4 už vieme vybrať bázu v ľubovoľnom bode, a teda distribúcia je úplne neintegrovateľná.

Chowova veta

Jedným z najdôležitejších tvrdení v subriemannovskej geometrii je Chowova veta. Jej znenie je nasledujúce.

Veta Ak máme na (súvislej) variete M úplne neintegrovateľnú distribúciu \mathcal{H} , tak sa horizontálnou krivkou dajú spojiť ľubovoľné dva body $A, B \in M$.

□

Dôkaz Chowovej vety sa dá nájsť v knihe [18] v 2. kapitole. Na intuitívne pochopenie vety nám opäť príde vhod geometrický zmysel komutátora. Keď komutátor $[e_a, e_b]$ dáva smer, ktorý nevieme poskladať z polí e_a , tak vlastne vieme pomocou infinitezimálnych horizontálnych cyklov (postupne o ε v smere $e_a, e_b, -e_a$ a $-e_b$) postupovať efektívne v novom *nehorizontálnom* smere $[e_a, e_b]$. Pomocou iterovaných komutátorov môžeme dosiahnuť pohyby v ďalších nových smeroch. Aby sme sa dostali kamkoľvek, stačí nám vypočítať dostatočne veľa komutátorov (kým nebudeme mať bázu pre celé TM) a pohybovať sa infinitezimálnymi cyklami, ktoré sú interpretované iterovanými komutátormi

Poznamenajme, že opak Chowovej vety všeobecne neplatí. Nie je pravda, že ak vieme horizontálne spojiť ľubovoľné body, tak potom je distribúcia úplne neintegrovateľná. (Kontrapríklad možno nájsť v knihe [18] v časti 2.1.)

2.10 Kuchynský recept

Hlavnou náplňou tejto práce je ukázať, ako sa hľadajú minimálne subriemannovské geodetiky. Stručný postup je nasledovný:

1. *Nápad.* Vymyslíme si (alebo narazíme na) problém, ktorý sa dá sformulovať v reči subriemannovskej geometrie.
2. *Matematická formulácia.* Identifikujeme trojicu (M, \mathcal{H}, g) . Teda postupne:
 - (a) Zistíme, aká varieta M opisuje náš problém.
 - (b) Nájdeme buď vektorové polia e_a , ohraničujúce formy θ^i , alebo tenzor h typu $\binom{2}{0}$, ktorý opíše distribúciu \mathcal{H} ukrytú v probléme.
 - (c) Napíšeme skalárny súčin g , ktorý počíta dĺžky horizontálnych kriviek na M tak, ako chceme.
3. *Preveríme hrozby:*
 - (a) *(Ne)integrovateľnosť distribúcie.* Počítame komutátory $[e_a, e_b]$.
 - Ak dostaneme lineárnu kombináciu polí e_a , ide o *integrovateľnú* distribúciu. Úlohu posunieme riemannovským geometrom.
 - Ak nie, počítame iterované komutátory a dúfame, že dostaneme bázu pre TM , čiže za problémom je *úplne neintegrovateľná* distribúcia. Potešíme sa, lebo máme zaručenú horizontálnu spojitelnosť ľubovoľných bodov.
 - Ak iterované komutátory nedajú bázu pre TM , smútime, lebo horizontálna spojitelnosť konkrétnych dvoch bodov je otázná.
 - (b) *Singulárne geodetiky.* Nájdeme 2-formu

$$\hat{\omega} = d\lambda_i \wedge \theta^i + \lambda_i d\theta^i$$

Ak je degenerovaná, v probléme hrozia singulárne geodetiky. Prakticky degenerovanosť vyšetrujeme priamym výpočtom v bode 6.

4. *Kometrika a subriemannovský hamiltonián.* Nájdeme kometriku

$$h = g^{ab} e_a \otimes e_b$$

Napišeme subriemannovský hamiltonián

$$H(x, p) = \frac{1}{2} \overset{\circ}{h}(p) \equiv \frac{1}{2} g^{ab}(x) P_a P_b$$

5. *Normálne geodetiky.* Napišeme Hamiltonove rovnice

$$\dot{x}^\mu = \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \quad \dot{p}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial x^\mu}$$

ktoré (ľavou zadnou) vyriešime. Sprojektujeme riešenia na M a dostaneme normálne geodetiky.

6. *Singulárne krivky.* Riešime rovnicu

$$i_p \hat{\omega} = 0$$

Projekcie riešení $p(t)$ na M sú singulárnymi krivkami.

7. *Minimálne geodetiky.* Pre dané dva body $A, B \in M$ nájdeme najkratšiu zo všetkých normálnych geodetik a singulárnych kriviek, ktoré ich spájajú.

Kapitola 3

Aplikácie subriemannovskej geometrie

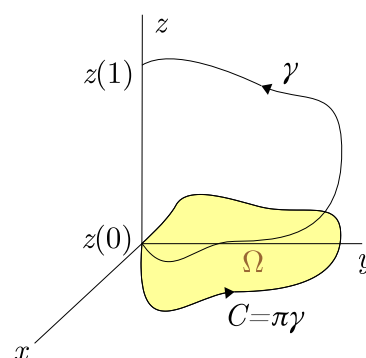
V tejto kapitole uvedieme niektoré aplikácie subriemannovskej geometrie. Neponúkame prierez celého spektra aplikácií, ale len zopár ukážok. Cieľom kapitoly nie je detailne vysvetliť, ako sa v konkrétnom probléme prídje k jeho formulácii v subriemannovskej geometrii. Ide skôr o to, aby čitateľ získal dojem, že „tá subriemannovská geometria je aj na niečo dobrá“. Čitateľa, ktorého zaujme niektorá z aplikácií, vždy odkazujeme na knihy a články, ktoré sa problému venujú hlbšie.

Vo fyzike sa veľmi často stáva, že skúmaný problém má nejakú (napríklad rotačnú) symetriu. Vtedy sa problém dobre formuluje v reči hlavnej G -fibrácie, kde grupa G je príslušnou grupou symetrií (napríklad $SO(2)$). Ak máme navyše na totálnom priestore konexiu a na báze fibrácie metriku, tak je za tým subriemannovská geometria. Horizontálnu distribúciu \mathcal{H} vyrobíme tak, že prehlásime za horizontálne tie vektory, ktoré sú horizontálne v zmysle konexie. Metriku na totálnom priestore dostaneme horizontálnym zdvihom metriky z bázy fibrácie (pričom do zdvihnutej metriky môžeme dosádzať len horizontálne vektory). V tejto kapitole takto vznikajú všetky geometrie okrem tej z časti 3.1.

3.1 Problém kráľovnej Dido

V textoch zaoberajúcich sa subriemannovskou geometriou (pozri knihy [18], [3], [2], prípadne text [15]) sa začína s najjednoduchšou subriemannovskou varietou, ktorou je Heisenbergova grupa. V geometrii Heisenbergovej grupy sa dá sformulovať problém kráľovnej Dido. Úloha je nájsť najkratšiu krivku C v rovine xy ohraničujúcu danú plochu. K rovine dodáme tretiu súradnicu z , ktorá bude mať zmysel prírastku plochy. Nebudeme podrobne písať, ako sa to robí. Výsledok je, že ako ohraničujúcu formu distribúcie treba zobrať

$$\theta = dz - \frac{1}{2}(x dy - y dx)$$



Obr. 3.1: Úloha kráľovnej Dido geometricky.

Overíme, že súradnica z funguje, ako má¹

$$\begin{aligned} z(1) - z(0) &= \int_{\gamma} dz = \int_{\gamma} \frac{1}{2}(x dy - y dx) = \\ &= \int_{C=\partial\Omega} \frac{1}{2}(x dy - y dx) = \int_{\Omega} dx \wedge dy =: \text{plocha} \end{aligned}$$

Po prejení krivky γ sa nám na osi z nazbierala plocha oblasti Ω , ktorú ohraničuje projekcia $C = \pi\gamma$. Keď chceme nájsť najkratšiu krivku C , treba hľadať subriemannovské geodetiky pre metriku $g = dx \otimes dx + dy \otimes dy$. Úloha sa dá analyticky vyriešiť, výsledkom sú kružnice. Viac nájdete v literatúre spomínanej v úvode tejto časti. Problémom kráľovnej Dido sa zaoberá aj práca [12].

3.2 Neurobiológia: videnie

Mozog spracováva vizuálnu informáciu zo sietnice oka vo viacerých vrstvách mozgovej kôry. Vedci zistili, že v tzv. primárnej vizuálnej kôre (ozn. V1) sa nachádzajú bunky, ktoré sú citlivé na smer gradientu jasu. Miestu (x, y) v zornom poli je priradený „stĺpec“ buniek vo V1, z ktorých každá reaguje na konkrétny uhol ϑ ktorý zvierá gradient jasu v s osou x (pozri Obr. 3.3). Prepojenosť týchto buniek sa dá modelovať na subriemannovskej variete $\mathbb{R}^2[x, y] \times S^1[\vartheta]$.

Na Obr. 3.2 vidíme obraz, ktorý bunky spracovávajú. Vektor gradientu jasu na hranici sivej machule je $v \sim \cos \vartheta \partial_x + \sin \vartheta \partial_y$ a smeruje kolmo na hranicu γ . Distribúcia \mathcal{H} sa dostane z požiadavky $\dot{\gamma} \perp v$. Vyjde

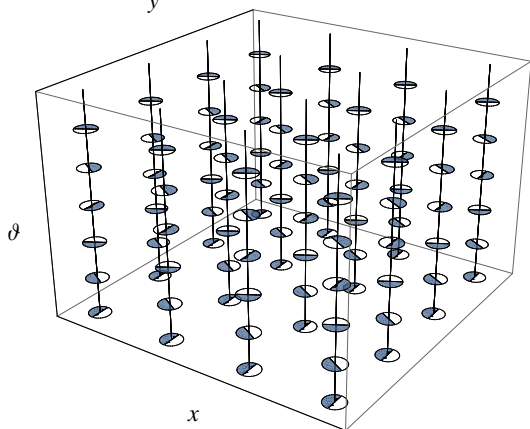
$$\theta = \cos \vartheta dx + \sin \vartheta dy$$

Bázové polia distribúcie \mathcal{H} vychádzajú

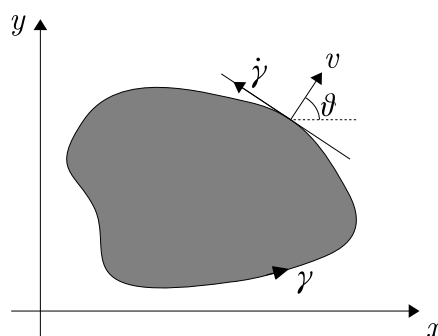
$$e_1 = \sin \vartheta \partial_x - \cos \vartheta \partial_y$$

$$e_2 = \partial_{\vartheta}$$

y



Obr. 3.3: Každému (x, y) zodpovedá stĺpec buniek, z ktorých každá reaguje na iné ϑ .



Obr. 3.2: Obraz v zornom poli.

Vo vizuálnej kôre hranica obrazu stimuluje bunky ležiace na krivke dotykovej ku distribúcii \mathcal{H} . Susediace bunky, medzi ktorými sa „chodí“ horizontálne, sú často stimulované súčasne, a preto sú silnejšie prepojené. Vedci ďalej skúmali, ako si mozog dopĺňa chýbajúcu informáciu, ak je časť hranice obrazu zakrytá. Mozog má vraj tendenciu uzatvoriť hranicu krivkou minimalizujúcou istú energiu, teda subriemannovskou geodetikou vzhľadom na nejakú metriku. Viac sa dá dozvedieť z článkov [20] a [21]. Okrajovo sa o tejto aplikácii píše aj v knihe [3] a v texte [15].

¹Porozumeniu jednotlivých krokov pomôže diskusia okolo vzťahu (5.10) na strane 60.

3.3 Kvantová mechanika: Berryho fáza

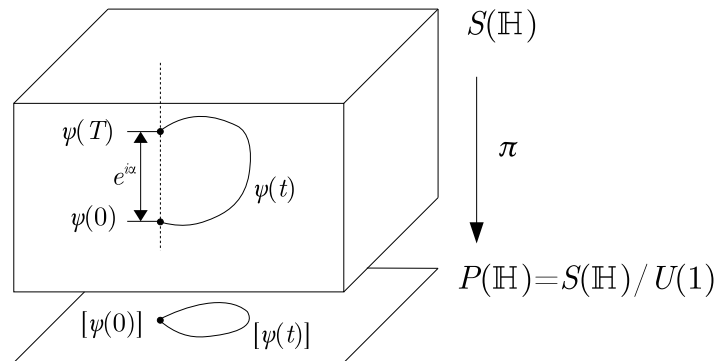
Príbeh kvantovej mechaniky sa odohráva v *Hilbertovom priestore* \mathbb{H} . Keďže (nenulové) vektory ψ a $\lambda\psi \in \mathbb{H}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) predstavujú *ten istý* stav systému, tak stavom systému je vlastne *komplexná priamka* prechádzajúca nulou (všetky nenulové komplexné násobky vektora ψ). Priestor takýchto priamok sa volá *projektívny Hilbertov priestor* a budeme ho označovať $P(\mathbb{H})$. Priestoru všetkých jednotkových vektorov ($\psi \in \mathbb{H}$, $\langle \psi | \psi \rangle = 1$) sa hovorí *Hilbertova sféra* a označuje sa $S(\mathbb{H})$. Jednotkových vektorov reprezentujúcich ten istý stav je veľa. Stále zostáva vôľa v podobe $\lambda = e^{i\alpha}$. *Hopfovo zobrazenie* π posiela vektor z Hilbertovej sféry do príslušnej priamky (bodu) v $P(\mathbb{H})$. Prichádzame k pojmu *Hopfovej fibrácie*

$$\pi : S(\mathbb{H}) \rightarrow P(\mathbb{H}) \quad \psi \mapsto [\psi] := \text{Span}_{\mathbb{C}}(\psi)$$

Hopfova fibrácia je vlastne hlavná $U(1)$ -fibrácia s totálnym priestorom $S(\mathbb{H})$ a bázou $P(\mathbb{H})$. V jednom vlákne ležia všetky jednotkové vektory reprezentujúce ten istý stav. Akcia grupy $U(1)$ vyzerá

$$R_{\alpha}(\psi) := e^{i\alpha}\psi \quad e^{i\alpha} \in U(1)$$

Situácia je schematicky znázornená na Obr. 3.4.



Obr. 3.4: Hopfova fibrácia schematicky. Slučka v priestore stavov nemusí byť slučkou v priestore jednotkových vektorov.

Aby sme sa presvedčili, že $S(\mathbb{H})$ je subriemannovská varieta, treba identifikovať *distribúciu* \mathcal{H} a *metriku* g . Podrobne to robíme v dodatku C.

Predstavme si, že sa stav systému vyvíja tak, že po istom čase T sa bude systém nachádzať v tom istom stave ako na začiatku, čiže trajektória v $P(\mathbb{H})$ je slučka $[\psi(t)]$ (Obr. 3.4). V priestore $S(\mathbb{H})$ to už však slučka byť nemusí. Vektor $\psi(t)$ môže byť na konci iný než na začiatku. Môže sa líšiť o akciu grupy $U(1)$.

$$\psi(T) = e^{i\alpha}\psi(0)$$

Číslo α sa volá *Berryho fáza*. Berry svoju fázu pôvodne študoval na príklade spinu $\frac{1}{2}$, kde Hilbertov priestor je $\mathbb{H} = \mathbb{C}^2$. Tomu zodpovedá $S(\mathbb{H}) = S^3$ a $P(\mathbb{H}) = \mathbb{C}P^2 = S^2$, takže ide o štandardnú Hopfovú fibráciu. Viac nájdete v knihe [18] v kapitole 13 a tam uvedených referenciách.

3.4 Mechanika deformovateľných telies

3.4.1 Padajúca mačka, Hubblov teleskop a iné

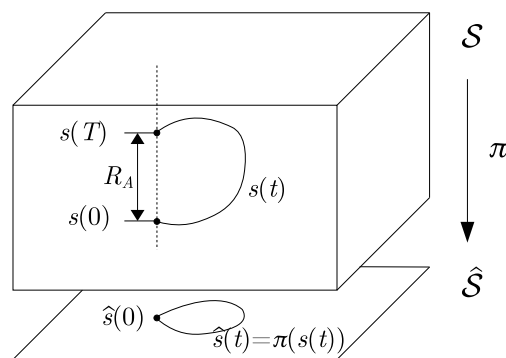
Keď pustíme z rúk mačku hore nohami, počas pádu mení svoj tvar, otočí sa a pristane na nohách.² Zaujímavé je, že mačka má počas celého pádu *nulový* moment hybnosti a napriek tomu sa *otočí*. Pointa je v tom, že mačka sa môže vhodnou zmenou svojho tvaru v konečnom dôsledku *otočiť* (a mať stále nulový moment hybnosti), ale nemôže sa *roztočiť*. Tento jav sa dá pekne opísať v geometrii istej hlavnej G -fibrácie.

Uvedomme si najprv, že mačka nijak nemôže ovplyvniť polohu svojho ťažiska v priestore. Nech sa zvrta, ako len chce, nebude sa hýbať v smere osí x a y a bude padať so zrýchlením nadol v smere osi z . Preto budeme pracovať v sústave s počiatkom v ťažisku mačky, v ktorej sa odohráva všetko podstatné.

Označme písmenom \mathcal{S} konfiguračný priestor mačky. Bod $s \in \mathcal{S}$ reprezentuje tvar mačky spolu s jej orientáciou v priestore. Priestor \mathcal{S} budeme volať *priestor umiestnených tvarov*.

Na variete \mathcal{S} prirodzene pôsobí grupa $SO(3)$ pravou akciou. Jej pôsobenie $s \mapsto R_A s$, kde $A \in SO(3)$, je otočenie mačky ako tuhého telesa. *Priestor abstraktných tvarov*, ktorý vznikne faktorizáciou konfiguračného priestoru podľa grupy $SO(3)$, označme $\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{S}/SO(3)$. Za problémom padajúcej mačky je teda hlavná $SO(3)$ -fibrácia (Obr. 3.5)

$$\pi : \mathcal{S} \rightarrow \hat{\mathcal{S}}$$



Obr. 3.5: Padajúca mačka ako hlavná $SO(3)$ -fibrácia.

Mačka počas svojho pádu vykoná svojimi deformáciami slučku $\hat{s}(t)$ v priestore abstraktných tvarov.³ Z pohľadu \mathcal{S} to však slučka nie je, lebo počiatok $s(0)$ a koniec $s(T)$ sa líši o akciu grupy $SO(3)$, teda $s(T) = R_A s(0)$, pričom A je matica zodpovedajúca otočeniu mačky z chrbta na nohy. Úloha pre mačku je nájsť slučku, ktorá toto otočenie zabezpečí.

Distribúcia \mathcal{H} sa dostane zo *zákona zachovania momentu hybnosti*, ktorý je stále nulový, $\mathbf{L} = \mathbf{0}$. Pomocou teórie konexíí sa to robí v článku [5]. Ako ohraničujúca forma distribúcie sa zoberie tam nájdená forma konexie. V probléme mravca na gramofónovej platni, ktorý patrí do tejto triedy problémov a analyzujeme ho v kapitole 4, sa ohraničujúca forma distribúcie nájde priamo z podmienky $\mathbf{L} = \mathbf{0}$.

Otázkou zostáva, čo je správna *subriemannovská metrika g* . Jedna možnosť je zobrať riemannovskú metriku vyrobenú z *kinetickej energie* a ohraničiť ju na distribúciu. Získame subriemannovskú varietu a môžeme sa pýtať, aká je optimálna stratégia $\hat{s}(t)$ zmeny tvaru, ktorá spôsobí otočenie mačky. Treba povedať, že a priori nie je jasné, prečo by mala mačka minimalizovať integrál z kinetickej energie a nie niečo iné. Je možné, že mačka ani nič neminimalizuje, len sa prirodzeným výberom vo vývoji vyselektovali mačky, ktoré sa stihnú otočiť, kým dopadnú na zem. Ďalšiu diskusiu čitateľ nájde v knihe [18] v časti 14.2.

Populárne sa o probléme padajúcej mačky hovorí aj v práci [6].

²Ak chcete tento jav vidieť a neohodláte trápiť vlastnú mačku, tak ho nájdete v spomalenom zábere na YouTube [28].

³Tvar mačky na začiatku a na konci sú približne rovnaké.

Podobné problémy

Rovnaký problém rieši aj kozmonaut vo voľnom priestore, keď sa nemôže o nič oprieť a chce sa otočiť. Podobne aj skokan do vody, ktorý začne svoj skok hlavou hore a nakoniec padá strmhlav do vody (pozri článok [11]).

Tento trik otočenia pri nulovom momente hybnosti sa používa aj pri smerovaní Hubblovho teleskopu (pozri stránku [27]) alebo družíc. Na Hubblovom teleskope sú 4 tzv. reakčné kolieska (angl. reaction wheels), ktorých vhodným otáčaním vieme zacieliť teleskop na želanú časť oblohy. Opäť sa môžeme pýtať, ako treba tieto manévry robiť optimálne.

Bežná situácia zo života, kde sa efekt využíva je nasledujúca. Človek stojí na hrane priepasti, stratí rovnováhu a začne sa pomaly nakláňať do priepasti.⁴ V pude sebazáchovy začne mávať ramenami, čo ho môže vrátiť do rovnovážnej polohy a zachrániť mu život. Čitateľovi ponechávame na premyslenie (a prípadné overenie experimentom), či treba ramenami krúžiť dopredu alebo dozadu. Ako je to, keď človek padá chrbtom a ako čelom? Aj tu sa dá riešiť optimalizačná úloha, *ako* presne treba krúžiť a hýbať rukami, aby človek nespadol. Autor práce zatiaľ problém nesformuloval v subriemannovskej geometrii, ale rada do života znie: *Rýchlo!*



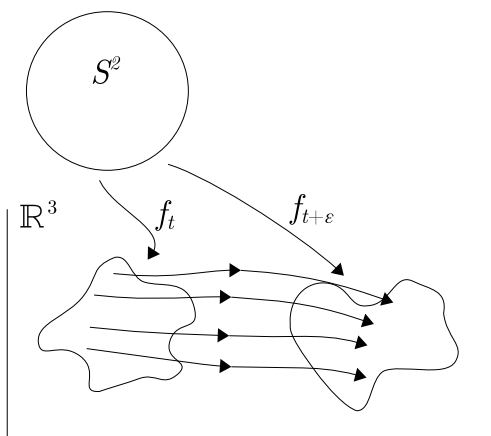
Obr. 3.6: Hubblov teleskop.

3.4.2 Plávanie mikroorganizmov

Organizmy vo vode plávajú tak, že konajú cykly v priestore svojich abstraktných tvarov. Pri veľkých organizmoch zohráva značnú úlohu zotrvačnosť. Človek urobí jeden kraulový záber a potom sa ešte hodnú chvíľu „vezie“. Vo svete mikroorganizmov však dominuje trecia sila a baktérie musia stále drieť, aby sa hýbali.

Mikroorganizmus modelujeme ako vloženie sféry do euklidovského priestoru

$$f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$



Obr. 3.7: Plávajúci mikroorganizmus schematicky.

Konfiguračný priestor pre plávajúci mikroorganizmus je priestor umiestnených tvarov \mathcal{S} . Prvkami tohto priestoru sú všetky možné vloženia f . Priestor abstraktných tvarov $\hat{\mathcal{S}}$ tentokrát vzniká faktorizáciou podľa grupy $SE(3)$, čo je grupa translácií a rotácií v \mathbb{R}^3 . Po jednom plávanom cykle (t. j. po prejdení slučky \hat{f}_t)⁵ v priestore $\hat{\mathcal{S}}$, bude mať mikroorganizmus rovnaký tvar, ale bude posunutý (prípadne pootočený). Úplné sformulovanie v subriemannovskej geometrii je v tomto

⁴Možno trochu bežnejšia situácia je, že človek stratí rovnováhu na rebríku.

⁵Pre každý čas t máme jedno vloženie f_t a $\hat{f}_t = \pi f_t$ je jemu zodpovedajúca projekcia. Pozri Obr. 3.7.

prípade pomerne netriviálne a robí sa v knihe [18] v časti 14.3 alebo v originálnom článku [23] s využitím Navierovej-Stokesovej rovnice z mechaniky kvapalín.

3.5 Robotika a optimalizácia transportu

V subriemannovskej geometrii sa dajú sformulovať mnohé problémy z teórie riadenia. Pozri napríklad knihy [1] a [14]. Z kategórie úloh na optimalizáciu transportu predvádzame v kapitole 6 formuláciu jednoduchého problému, pohybu jednokolky v rovine.

Kapitola 4

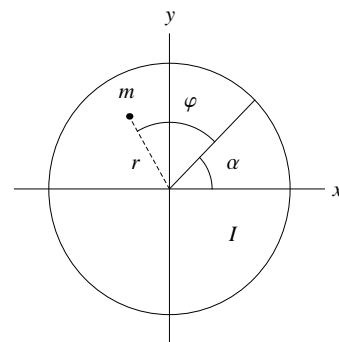
Mravec na gramofónovej platni

Touto kapitolou sa začína časť práce, kde na konkrétnych úlohách budeme demonštrovať teóriu z kapitoly 2. Budeme v zásade postupovať podľa kuchynského receptu z časti 2.10.

Začneme úlohou o mravcovi na gramofónovej platni. Ide o jednoduchý problém z klasickej mechaniky, ktorý sa dá sformulovať v reči subriemannovskej geometrie.

4.1 Úloha

Mravec žijúci na gramofónovej platni má súradnice (r, φ) vzhľadom na platňu. Uhol otočenia platne voči svetlu okolo označme α . Platňa sa môže bez trenia otáčať okolo zvislej osi prechádzajúcej jej stredom. Platňa je voľná (nepôsobí na ňu žiadna sila „zvonka“). Jediné, čo ju môže otáčať, je mravec. Pre sústavu mravec + platňa platí zákon zachovania momentu hybnosti L . Na začiatku mravec aj platňa stoja, teda $L = 0$. Keď sa mravec začne hýbať, platňa sa začne otáčať tak, aby celkový moment hybnosti L bol stále nulový.



Úloha: Mravec má otočiť platňu o dopredu zvolený uhol α_T . Aká je *najkratšia* možná *uzavretá* cesta (slučka), ktorá zrealizuje toto otočenie? Obr. 4.1: Zavedenie súradníc.

Dá sa sformulovať aj *duálna úloha*: Mravec má k dispozícii uzavretú cestu dĺžky l a jeho úlohou je ísť tak, aby platňa bola po prejdení cesty otočená o čo najväčší uhol α_T oproti pozícii na začiatku.

Je zrejmé, že keď fixujeme l a maximalizujeme otočenie α_T , dostaneme rovnakú krivku, ako keby sme pri fixnom α_T , ktoré nám vyšlo ako maximálne, minimalizovali dĺžku l . To znamená, že riešeniami pôvodnej úlohy (pre všemožné α_T) a duálnej úlohy (pre všemožné l) sú rovnaké krivky. V subriemannovskej geometrii vieme hľadať najkratšie krivky, preto používame prvú formuláciu úlohy.

4.2 Matematická formulácia

Varieta M

V predchádzajúcej časti sme už zaviedli v probléme súradnice (r, φ, α) . Správnou varietou je *konfiguračný priestor*

$$M = \mathbb{R}^2[r, \varphi] \times S^1[\alpha]$$

Distribúcia \mathcal{H}

Distribúcia všeobecne predstavuje *obmedzenie pohybu* na variete. Tu je pohyb v konfiguračnom priestore M obmedzovaný zákonom zachovania momentu hybnosti

$$L_m + L_P = 0$$

L_m je moment hybnosti mravca a L_P je moment hybnosti LP-čka¹. V našich súradniciach

$$\left. \begin{aligned} L_m &= mr^2(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}) \\ L_P &= I\dot{\alpha} \end{aligned} \right\} mr^2\dot{\varphi} + (I + mr^2)\dot{\alpha} = 0 \quad (4.1)$$

kde I je moment zotrvačnosti platne a m je hmotnosť mravca. Modelom pre našu úlohu je teda hmotný bod hmotnosti m v rovine s konečným momentom zotrvačnosti I . Vzťah (4.1) dáva obmedzenia na prípustné krivky $\gamma(t) : (r(t), \varphi(t), \alpha(t))$. Komponenty dotykového vektora

$$\dot{\gamma} = \dot{r}\partial_r + \dot{\varphi}\partial_\varphi + \dot{\alpha}\partial_\alpha \quad (4.2)$$

musia spĺňať podmienku (4.1). Zo zákona zachovania (4.1) treba vydolovať nejaký objekt opisujúci distribúciu. Jednoducho sa dá nájsť ohraničujúca forma θ . Formu θ naivne dostaneme zo vzťahu (4.1) vynásobením ľavej strany diferenciálom dt .

$$\theta = mr^2 d\varphi + (I + mr^2) d\alpha \quad (4.3)$$

Takýto postup samozrejme nie je matematicky v poriadku. Je len užitočnou skratkou, ktorá vedie k správne výsledku. Poctivý postup uvádzame v dodatku A.1.

Subriemannovská metrika g

Chceme vedieť správne počítať *dĺžky ciest* mravcov, preto použijeme metriku, ktorú mravce od nepamäti používajú.

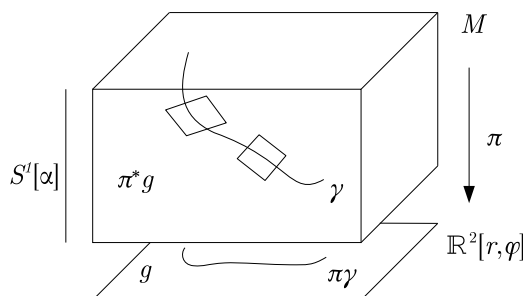
$$g = dr \otimes dr + r^2 d\varphi \otimes d\varphi$$

Lenže teraz fungujeme na konfiguračnom priestore M , kde prirodzene žiadnu metriku nemáme. Dostaneme ju pullbackovaním metriky g prostredníctvom projekcie (Obr. 4.2)

$$\pi : (r, \varphi, \alpha) \mapsto (r, \varphi) \quad (4.4)$$

Vychádza

$$\pi^*g = dr \otimes dr + r^2 d\varphi \otimes d\varphi$$



Obr. 4.2: Ako vzniká subriemannovská metrika.

¹Čitateľ určite oceňuje trefnosť označenia.

Pull-back g , vyzerá (v našich súradniciach) rovnako ako g , preto ho budeme označovať rovnako $\pi^*g \equiv g$.

(Tu si treba uvedomiť dôležitú vec. Do metriky g sa tu *dajú* dosádzať aj *nehorizontálne* vektory a vyjde nejaký konečný výsledok. To však nemáme brať vážne. Subriemannovská metrika tu funguje v istom zmysle len „na čestné slovo“. Musíme sľúbiť, že budeme do g dosádzať len horizontálne vektory. Pre nehorizontálne vektory podľa definície pojem dĺžky nemá zmysel.)

Z pohľadu počítania dĺžky horizontálnej krivky γ situácia vyzerá takto

$$l[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\pi^*g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g(\pi_*\dot{\gamma}, \pi_*\dot{\gamma})} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g(\hat{\gamma}, \hat{\gamma})} dt$$

kde $\hat{\gamma} \equiv \pi\gamma$ je projekcia horizontálnej krivky γ . Vidíme, že dĺžka krivky počítaná pomocou metriky π^*g „hore“ je rovnaká ako dĺžka sprojektovanej krivky $\hat{\gamma}$ počítaná pomocou g „dole“ (= euklidovská dĺžka), čo je presne to, čo sme chceli.

4.3 * Užitočný pohľad

Je zaujímavé pozrieť sa na úlohu z pohľadu geometrie na fibrovaných varietách. Varieta M je totálnym priestorom fibrácie

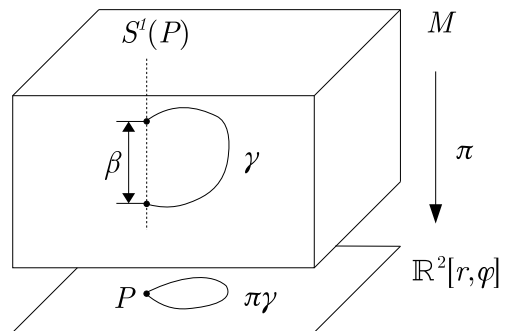
$$\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Báza je rovina \mathbb{R}^2 a typické vlákno je kružnica S^1 . Vzťah (4.4) je súradnicovým vyjadrením projekcie π . Vlákna sú difeomorfné grupe rotácií $SO(2)$. Grupové prvky sú matice $A(\alpha) \in SO(2)$ parametrizované uhlom α . Grupa $SO(2)$ má na M prirodzenú pravú *vertikálnu* akciu

$$R_{A(\beta)}(r, \varphi, \alpha) \equiv R_\beta(r, \varphi, \alpha) := (r, \varphi, \alpha + \beta)$$

Akcia je navyše *voľná* a *tranzitívna* vo vláknach (vlákna sú teda homogénne $SO(2)$ -priestory). To znamená, že $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ je *hlavná* $SO(2)$ -fibrácia (pozri časť 2.3.1). Jednoducho sa dá overiť, že distribúcia \mathcal{H} aj metrika g sú kompatibilné s grupovou štruktúrou ($R_{\beta*}\mathcal{H} = \mathcal{H}$ a $R_\beta^*g = g$).

Keď hľadáme slučku v rovine \mathbb{R}^2 (v duchu časti 3.4.1 je to priestor abstraktných tvarov), z pohľadu M (teda priestoru umiestnených tvarov) nejde o slučku, ale o krivku, ktorej konce sú v jednom vlákne a „líšia sa o β “ (myslí sa $\gamma(T) = R_\beta\gamma(0)$). Vzniká priradenie typu „slučka \mapsto grupový prvok“. Grupovému prvku priradenému slučke sa hovorí *holonómia*. Úloha o mravcovi na gramofónovej platni je vlastne úlohou nájsť najkratšiu slučku s *fixovanou* holonómiou. Takéto úlohy sa volajú *izoholonomické* a priviedli Montgomeryho k štúdiu subriemannovskej geometrie a neskôr k napísaniu monografie [18].



Obr. 4.3: Izoholonomická úloha.

4.4 Hrozba: Integrovateľnosť distribúcie

Máme 2-rozmernú distribúciu na 3-rozmernej variete ($n = 3$ a $k = 2$), preto distribúcia je buď integrovateľná, alebo úplne neintegrovateľná.

Najprv nájdeme vektorové polia e_a zadávajúce distribúciu. Hľadáme všeobecné horizontálne vektorové pole

$$V = A\partial_r + B\partial_\varphi + C\partial_\alpha$$

Kde A, B, C sú ľubovoľné funkcie súradníc (r, φ, α) . Aby bolo pole V horizontálne, musí platiť

$$\langle \theta, V \rangle = Bmr^2 + C(I + mr^2) \stackrel{!}{=} 0$$

Takže pole V musí mať tvar

$$V = A\partial_r + C \left[\partial_\alpha - \left(\frac{I}{mr^2} + 1 \right) \partial_\varphi \right]$$

Distribúciu \mathcal{H} teda zadávajú napríklad polia

$$\begin{aligned} e_1 &= \partial_r \\ e_2 &= \partial_\varphi - f(r)\partial_\alpha \quad \text{kde} \quad f(r) \equiv \frac{r^2}{a+r^2} \quad a \equiv \frac{I}{m} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Treba preveriť, či komutátor $[e_1, e_2]$ nie je lineárnou kombináciou polí e_1 a e_2 . Vychádza

$$[e_1, e_2] = -f'\partial_\alpha = -\frac{2ar}{(a+r^2)^2}\partial_\alpha \equiv e_3$$

Pole e_3 je v každom bode okrem $r = 0$ lineárne nezávislé od e_1, e_2 , takže trojica e_1, e_2, e_3 tvorí bázu pre TM všade okrem $r = 0$. Iterovaný komutátor vychádza

$$[e_1[e_1, e_2]] = -f''\partial_\alpha = -\frac{2a(a-3r^2)}{(a+r^2)^3}\partial_\alpha \equiv e_4$$

Trojica e_1, e_2, e_4 tvorí bázu pre $r = 0$. Distribúcia \mathcal{H} je úplne neintegrovateľná a máme zaručené, že horizontálnou krivkou spojíme ľubovoľné body na M .

4.5 Hrozba: Singulárne geodetiky

Najprv treba ohraničiť symplektickú formu $\omega = dp_\mu \wedge dx^\mu$ na distribúciu. Vzťah (2.8) pre náš prípad dáva

$$\hat{\omega} = d\lambda \wedge \theta + \lambda d\theta \quad \theta = mr^2 d\varphi + (I + mr^2) d\alpha$$

Singulárne krivky sú riešeniami rovnice (2.9) sprojektovanými na M . Hľadáme krivky $p(t)$, pre ktoré platí

$$i_p \hat{\omega} = 0 \quad \text{kde} \quad \dot{p} = \dot{r}\partial_r + \dot{\varphi}\partial_\varphi + \dot{\alpha}\partial_\alpha + \dot{\lambda}\partial_\lambda$$

Detailný výpočet je urobený v dodatku A.2. Výsledok je, že rovnica platí len pre $\dot{p} = 0$, čo je nezaujímavé. (Státím v jednom bode sa ešte nikomu nepodarilo spojiť dva rôzne body.) Takže v našom probléme nehrozia singulárne geodetiky. Týmto sme vybavili aj bod 6 v kuchynskom recepte z časti 2.10.

4.6 Kometrika a subriemannovský hamiltonián

Na výrobu kometriky

$$h = g^{ab}e_a \otimes e_b$$

potrebujeme invertovať maticu subriemannovskej metriky. Treba ju napísať v báze polí (4.5) zadávajúcich distribúciu. Vychádza

$$g_{ab} \equiv g(e_a, e_b) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

Inverzná matica je

$$g^{ab} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}$$

Kometrika na výrobu hamiltoniánu má tvar

$$h = \partial_r \otimes \partial_r + \frac{1}{r^2}(\partial_\varphi - f\partial_\alpha) \otimes (\partial_\varphi - f\partial_\alpha)$$

Teraz už môžeme napísať subriemannovský hamiltonián (2.7). Do kometriky treba ako oba argumenty vložiť $p = p_r dr + p_\varphi d\varphi + p_\alpha d\alpha$. Hamiltonián vychádza

$$H(x, p) = \frac{1}{2}h_x(p, p) = \frac{1}{2} \left[p_r^2 + \frac{1}{r^2}(p_\varphi - fp_\alpha)^2 \right] \quad (4.6)$$

4.7 Normálne geodetiky

4.7.1 Hamiltonove rovnice

Z hamiltoniánu (4.6) ľahko získame Hamiltonove rovnice pre normálne subriemannovské geodetiky. Naše rovnice sú takéto

$$\dot{r} = p_r \quad (4.7)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{r^2} - \frac{p_\alpha}{a + r^2} \quad (4.8)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{p_\alpha r^2 - p_\varphi(a + r^2)}{(a + r^2)^2} \equiv \dot{\varphi} \left(-\frac{r^2}{a + r^2} \right) \quad (4.9)$$

$$\dot{p}_r = \frac{p_\varphi^2}{r^3} - \frac{2a p_\alpha^2 r}{(a + r^2)^3} + \frac{p_\alpha(p_\alpha - 2p_\varphi)r}{(a + r^2)^2} \quad (4.10)$$

$$\dot{p}_\varphi = 0 \quad (4.11)$$

$$\dot{p}_\alpha = 0 \quad (4.12)$$

Zavedli označenie $a = \frac{I}{m}$. V rovnici (4.9) spoznáваме väzbu (4.1).

Pripomeňme, že tieto pohybové rovnice nehovoria, čo *sa bude diať*, keď dáme mravca na gramofónovú platňu. Ide skôr o rovnice z príručky pre inteligentných mravcov. Hovoria, čo *má robiť* mravec, keď sedí v bode (r, φ) a má za úlohu *efektívne* otáčať platňu.

Rovnice (4.11) a (4.12) hovoria, že

$$p_\varphi = \text{konšt.} \quad p_\alpha = \text{konšt.}$$

Rovnice (4.7) – (4.10) sa dajú zjednodušiť dvoma zámenami súradníc. (Prvou sa zbavíme konštanty a , druhou parametra p_α .) Robíme to v dodatku A.3. Zjednodušené rovnice

majú tvar

$$\dot{r} = p_r \quad (4.13)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{K}{r^2} - \frac{1}{1+r^2} \quad (4.14)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{r^2 - K(1+r^2)}{(1+r^2)^2} \equiv \dot{\varphi} \left(-\frac{r^2}{1+r^2} \right) \quad (4.15)$$

$$\dot{p}_r = \frac{K^2}{r^3} - \frac{2r}{(1+r^2)^3} + \frac{(1-2K)r}{(1+r^2)^2} \quad (4.16)$$

Zaviedli sme označenie $K = \frac{p_\varphi}{p_\alpha} = \text{konšt.}$ V rovniciach namiesto parametrov p_φ, p_α vystupuje efektívne len jeden parameter K .

Na hľadanie analytického riešenia týchto rovníc sme použili viacero metód. Skúšali sme riešiť rovnice také, ako ich tu máme, pokúšali sme sa aj vyriešiť rovnice s vylúčením parametrizácie t (stačia nám totiž cesty bez parametrizácie). Prepísali sme Hamiltonove rovnice na Četajevove rovnice a skúšali riešiť tie.

(Sú to obsahovo Hamiltonove rovnice, len v iných (nekanonických) súradniciach. Zvedavého čitateľa, ktorý má chuť zoznámiť sa s Četajevovými rovnicami, odkazujeme na prezentáciu [9].)

Pozreli sme sa na problém aj z pohľadu Hamiltonovej-Jacobiho formulácie klasickej mechaniky (pozri knihu [13] §47). Všeobecné analytické riešenie sa však nepodarilo nájsť. Rovnice vedú na integrály, ktoré nevieme analyticky vyriešiť. Nás však viac zaujíma, ako krivky približne vyzerajú, než aké je ich presné matematické vyjadrenie. Preto skúsime *numericcky* hľadať *približné* riešenia.

Poznámka

V časti 4.3 sme sa dozvedeli, že naša varieta je hlavná $SO(2)$ -fibrácia. Na hlavnej G -fibrácii sa dajú za istých podmienok normálne geodetiky hľadať aj ekvivalentným spôsobom v *riemannovskej* geometrii s Kaluzovou-Kleinovou metrikou. O tomto spôsobe sa hovorí v článku [16] a pre náš prípad to robíme v dodatku A.6. Rovnice, ktoré tam vyjdú, sú naozaj ekvivalentné rovniciam (4.7) – (4.12).

4.7.2 Kružnice ako špeciálne riešenia

Skúsme do rovníc (4.13) – (4.16) dosadiť ansatz

$$\gamma(t) : (r(t), \varphi(t), \alpha(t)) = (r_0, -\omega t, \alpha(t)) \quad t \in \left\langle 0, \frac{2\pi}{\omega} \right\rangle \quad (4.17)$$

Rovnica (4.13) potom hovorí, že $p_r = 0$ a rovnice (4.14) – (4.16) dávajú

$$\begin{aligned} -\omega &= \frac{K}{r_0^2} - \frac{1}{1+r_0^2} \\ \dot{\alpha} &= \omega \frac{r_0^2}{1+r_0^2} \\ 0 &= \frac{K^2}{r_0^3} - \frac{2r_0}{(1+r_0^2)^3} + \frac{(1-2K)r_0}{(1+r_0^2)^2} \end{aligned}$$

Sú to tri rovnice o dvoch neznámych konštantách ω, K a jednej neznámej funkcii $\alpha(t)$. Riešenie vychádza

$$\omega = \frac{2}{(1+r_0^2)^2} \quad K = \frac{r_0^2(r_0^2-1)}{(1+r_0^2)^2} \quad \alpha(t) = \frac{2r_0^2 t}{(1+r_0^2)^3} + \alpha_0 \quad (4.18)$$

Vyšlo nám, že krúženie mravca okolo stredu platne je riešením. Z rotačnej symetrie problému vyplýva, že riešením je aj krúženie pre ľubovoľné α_0 aj φ_0 . Zvoľme $\alpha_0 = 0$. Keď mravec obíde platňu dookola práve raz, platňa bude otočená o uhol

$$\alpha = \frac{2\pi r_0^2}{(1+r_0^2)} \quad (4.19)$$

4.7.3 Radiálna podúloha

Predtým, než sa pustíme do numeriky, pozrieme sa na radiálnu časť problému, ktorá nám pomôže lepšie rozumieť numerickým riešeniam.

Ak zderivujeme rovnicu (4.16) a dosadíme do (4.13), dostaneme rovnicu, v ktorej vystupuje iba r a \ddot{r} .

$$\ddot{r} = \frac{K^2}{r^3} - \frac{2r}{(1+r^2)^3} + \frac{(1-2K)r}{(1+r^2)^2} \quad (4.20)$$

Napriek tomu, že rovnice (4.13) – (4.16) sú navzájom zreťazené, radiálna súradnica funguje samostatne. Na pravej strane rovnice (4.20) je funkcia, ktorá závisí len od r . Rovnice takéhoto typu sú nám známe už z mechaniky. Tam sa často vyskytovala rovnica

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad \text{resp. v jednom rozmere} \quad F = m\ddot{x} = -\partial_x V(x)$$

kde $V(x)$ bol potenciál v mieste x . (Napríklad išlo o pohyb guľôčky na kopci, teda v potenciáli $V = mgh(x)$.) Ak si napíšeme prekladový slovník

$$x = r \quad m = 1$$

dostaneme rovnicu

$$\ddot{r} = -\partial_r V(r)$$

čo je presne rovnica (4.20). Potenciál vychádza

$$V(r, K) = \frac{K^2}{2r^2} - \frac{1}{2(1+r^2)^2} + \frac{1-2K}{2(1+r^2)} \equiv \frac{(K-r^2+Kr^2)^2}{2r^2(1+r^2)^2} \quad (4.21)$$

Tvar potenciálu závisí od toho, ako zvolíme parameter K .

Keď už máme potenciál, pre radiálnu súradnicu môžeme napísať zákon zachovania energie

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V(r, K) = E \quad (4.22)$$

Z toho máme

$$\int \frac{dr}{\sqrt{2[E - V(r, K)]}} = dt$$

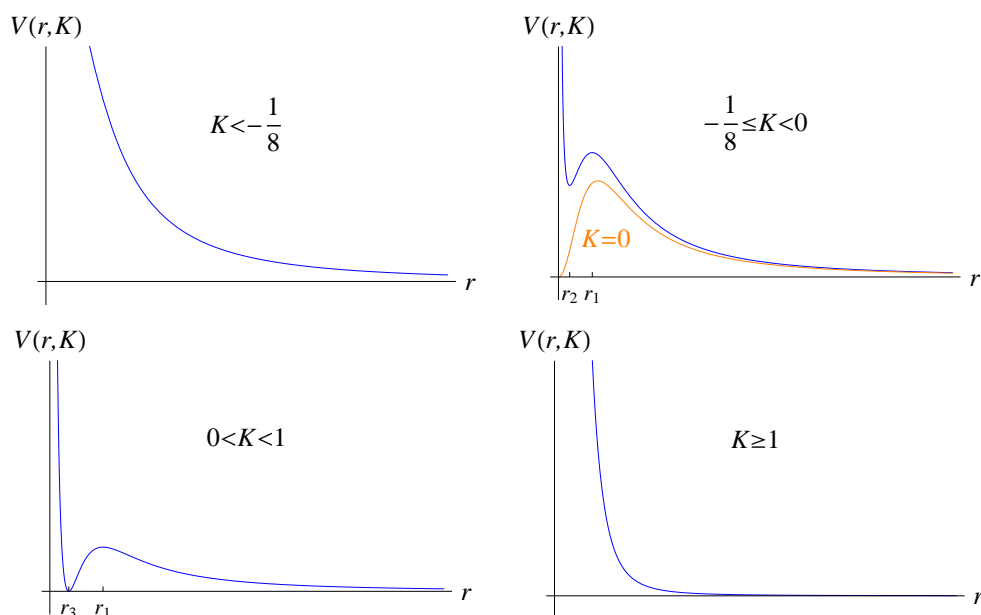
To nám ale veľmi nepomôže, lebo integrál na ľavej strane nevieme analyticky vyriešiť.

Ak má potenciál (4.21) lokálne minimum, rovnice dovoľujú *finitný pohyb* v okolí minima. (Keď sa bude súradnica r držať v nejakom rozmedzí, tak mravec určite „neutečie“.) Lokálne extrémny vychádzajú

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{\frac{1+2K+\sqrt{1+8K}}{2(1-K)}} & K \in \langle -\frac{1}{8}, 1 \rangle \\ r_2 &= \sqrt{\frac{1+2K-\sqrt{1+8K}}{2(1-K)}} & K \in \langle -\frac{1}{8}, 0 \rangle \\ r_3 &= \sqrt{\frac{K}{1-K}} & K \in \langle 0, 1 \rangle \end{aligned}$$

V mieste r_2 a r_3 má potenciál lokálne minimum a v mieste r_1 lokálne maximum.

Potenciál $V(r, K)$ pre rôzne hodnoty parametra K kreslíme na Obr. 4.4. Vidíme, že pre $K \in \langle -\frac{1}{8}, 1 \rangle$ má potenciál naozaj lokálne minimum.

Obr. 4.4: Tvar potenciálu $V(r, K)$ v závislosti od parametra K .

4.8 Príprava na numerické riešenie rovníc

Rovnice (4.13) – (4.16) sú diferenciálne rovnice prvého rádu. Riešime *okrajovú úlohu*: máme zadanú počiatocnú a konečnú polohu mravca a platne.

začiatok	koniec
$r(0) = r_0$	$r(T) = r_0$
$\varphi(0) = \varphi_0 = 0$	$\varphi(T) = \varphi_0 = 0$
$\alpha(0) = \alpha_0 = 0$	$\alpha(T) = \alpha_T \equiv \alpha$

Počiatocné φ a α sme zvolili bez ujmy na všeobecnosti nulové (problém je rotačne symetrický). Uhol otočenia na konci budeme označovať α . (Z kontextu bude vždy jasné, či ide o uhol otočenia na konci, alebo súradnicu.)

Približné riešenia hľadáme tak, že nastavíme počiatocnú polohu $(r_0, \varphi_0, \alpha_0)$, vykročíme ľubovoľným dovoleným smerom a pomocou metódy Runge-Kutta pôjdeme stále podľa rovníc. Budeme dúfať, že skončíme v bode $(r_0, 0, \alpha)$. Vykročiť ľubovoľným smerom znamená nastaviť počiatocné $p_r(0)$ a konštantu K na ľubovoľnú hodnotu. Ide o nastavenie počiatocnej rýchlosti mravca. Zafixovanie $p_r(0)$ a K fixuje $\dot{r}(0)$ a $\dot{\varphi}(0)$. (Vidno to z rovníc (4.13) a (4.14).)

$$\dot{r}(0) = p_r(0) \quad (4.23)$$

$$\dot{\varphi}(0) = \frac{K}{r_0^2} - \frac{1}{1+r_0^2} \quad (4.24)$$

Pohľadom na rovnicu (4.15) si všimnime, že $\dot{\alpha}(0)$ je tiež automaticky fixované. (Rovnice už zahŕňajú zákon zachovania momentu hybnosti (4.1).) Okrajovú úlohu sme preformulovali na *Cauchyho úlohu*, v ktorej budeme meniť počiatocnú rýchlosť.

nastavíme	budeme meniť	chceme skončiť v polohe
$r(0) = r_0$	$\dot{r}(0) = p_r(0)$	$r(T) = r_0$
$\varphi(0) = 0$	$\dot{\varphi}(0) = \frac{K}{r_0^2} - \frac{1}{1+r_0^2}$	$\varphi(T) = 0$
$\alpha(0) = 0$	T	$\alpha(T) = \alpha$

Týmto spôsobom budeme hľadať subriemannovské geodetiky, čo sú po sprojektovaní na $\mathbb{R}^2[r, \varphi]$ čiary, po ktorých má chodiť mravec, ak chce efektívne otočiť platňu o nejaký uhol α .

Detaily o numerickom riešení

Pri numerickom riešení rovníc sa použila metóda Runge-Kutta 4. rádu s adaptívnou dĺžkou kroku (pozri kapitoly 17 a 18 v knihe [19]).

Technicky sme postupovali tak, ako sa píše na konci predchádzajúceho odseku, s tým rozdielom, že hodnotu T (čas, kedy má mravec doraziť do bodu, kde začal) sme v skutočnosti nenastavovali. Jednoducho sme „poslali mravca na vandrovku“, čakali, či sa vráti, a bolo nám jedno kedy. (Keď už sa dlho nevracal, vyhlásili sme ho za mŕtveho a zamestnali sme nového mravca.)

4.9 Numerické riešenia

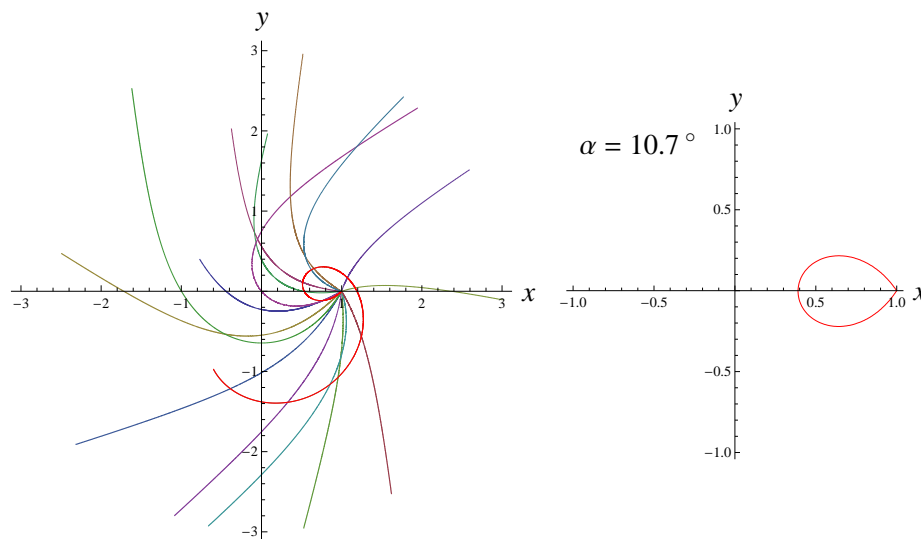
V tejto časti opíšeme tvar a vlastnosti niektorých približných riešení rovníc (4.13) – (4.16). Ide o pomerne hlbokú analýzu,² ktorú netreba čítať úplne dopodrobna³, ale môže byť pre čitateľa inšpiráciou pre numerickú analýzu iných diferenciálnych rovníc.

Najprv budeme uvažovať počiatočnú polohu mravca

$$(r_0, \varphi_0, \alpha_0) = (1, 0, 0)$$

Budeme kresliť projekcie riešení do roviny $\mathbb{R}^2[r, \varphi]$.

Najprv skúsme len tak náhodne natipovať počiatočné podmienky. Typický tvar riešení vidíme na Obr. 4.5 vľavo. Riešenia typicky vyzerajú tak, že mravec sa spočiatku



Obr. 4.5: Vľavo: Typický tvar riešení pre náhodné strieľanie. Vpravo: Prvá slučka.

zdržuje v neďalekom okolí bodu $(1, 0)$ a nakoniec „utečie“. Ale všimnime si, že začiatok červenej krivky na obrázku vľavo sa trochu podobá na slučku. Mierne doladíme počiatočné podmienky $\dot{r}(0), \dot{\varphi}(0)$ a dostaneme slučku, ktorá je na Obr. 4.5 vpravo. Príslušné otočenie je $\alpha = 10,7^\circ$.

²Dalo sa čakať, že na ozajstné porozumenie mravca bude potrebná mravčia práca.

³V extrémnom prípade stačí čítať jedným okom dnu, druhým von. Neovplyvní to porozumenie textu začínajúceho kapitolou 5.

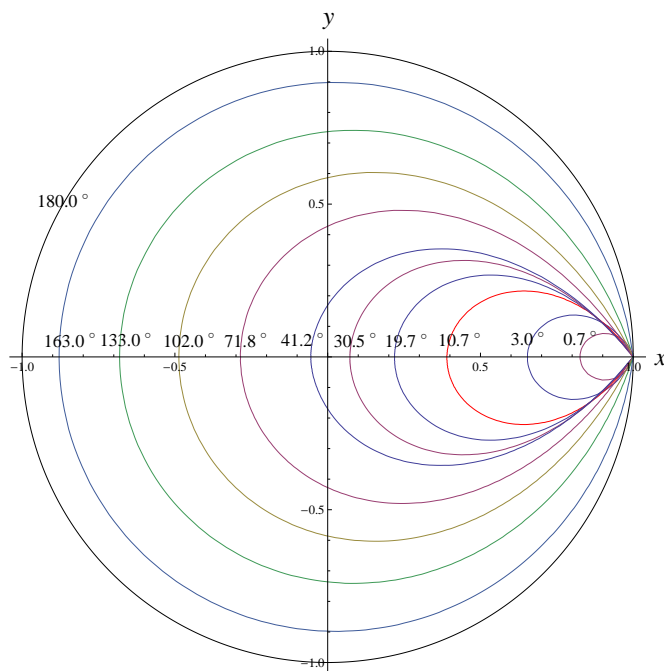
4.9.1 Geodetiky pre uhly $\alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$

Riešenie pre o kúsok väčší (resp. menší) uhol nájdeme tak, že prehľadáme blízke okolie v priestore počiatočných podmienok (pozri Obr. 4.9). Takto postupujeme ďalej a nájdeme riešenia pre stále väčší (resp. menší) uhol α . Výsledok je na Obr. 4.6.

Našli sme normálne geodetiky pre uhly $\alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$. Poznamenajme, že geodetika pre konkrétne α nemusí byť jednoznačným riešením rovníc. Vrátime sa k tomu v časti 4.10.

Pre veľmi malé uhly α sa dá približné riešenie hľadať analyticky. Robíme to v dodatku A.4. Vyjdú malé kružnice.

Všimnime si, že kružnica nám naozaj vyšla ako riešenie a aj príslušné $\alpha = 180^\circ$ súhlasí so vzťahom (4.19) pre $r_0 = 1$. Nejde o žiadne „magické“ číslo. Keby sme zvolili iné r_0 , kružnica by vyšla pre iné, „menej asociácií evokujúce“ α .



Obr. 4.6: Niektoré normálne geodetiky pre $\alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$. Chodí sa po nich v smere hodinových ručičiek.

Je zaujímavé, že slučka sa s rastúcim α zväčšuje bez problémov aj cez bod $r = 0$. Na Obr. 4.9 vidíme, že to nie je úplne bez problémov v počiatočných podmienkach. Modré a bledozelené bodky asymptoticky vybuchujú ku oranžovej čiare $\dot{\varphi}(0) = -0,5$. Tomu podľa (4.24) zodpovedá $K = 0$. Treba sa pozrieť na Obr. 4.4 na tvar potenciálu $V(r, K)$ pre K blízke nule v okolí $r = 0$. Čím chceme ísť bližšie ku $r = 0$, tým väčšiu energiu potrebujeme. Podľa (4.22) vidíme, že veľká energia sa dá docieľiť veľkým $\dot{r}^2(0)$ a to je presne to, čo sa tu deje.

(Do bodu $r = 0$ sa dá dostať len pre $K = 0$ (pozri na oranžový potenciál na Obr. 4.4). Tam však majú rovnice pre geodetiky problémy, ktoré sa prejavili v počiatočných podmienkach. Ide len o problém súradníc a Obr. 4.6 naznačuje (a praktická skúsenosť všetkých testovaných mravcov potvrdzuje), že fyzikálne žiaden problém nastáva.)

Ďalšia zaujímavá vec je, že kružnica vyšla pre $\dot{\varphi}(0) = -0,5$ (teda $K = 0$), pri ktorom akurát nastáva pred chvíľou opísaný problém. Ide len o náhodu súvisiacu s výberom $r_0 = 1$. Problém v počiatočných podmienkach pre všeobecné r_0 nastáva, keď $\dot{\varphi}(0)$ má

hodnotu (pozri rovnicu (4.24))

$$\dot{\varphi}(0) = -\frac{1}{1+r_0^2} \quad (4.25)$$

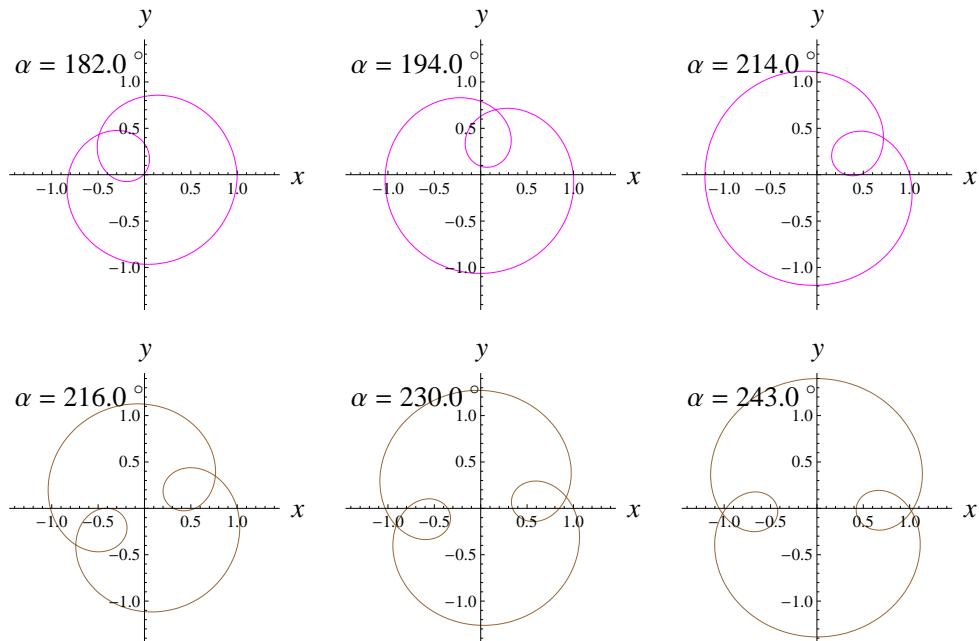
A kružnice vychádzajú pre (treba dať dohromady (4.17) a (4.18))

$$\dot{\varphi}(0) = -\frac{2}{(1+r_0^2)^2} \quad (4.26)$$

Oba vzťahy pre $\dot{\varphi}(0)$ dávajú v prípade $r_0 = 1$ náhodou 0,5.

4.9.2 Geodetiky pre uhly $\alpha > 180^\circ$

Pre uhly väčšie ako 180° sa začnú diať nečakané veci (Obr. 4.7 a 4.8). Nájdené geodetiky majú samopriesečky. (Samopriesečky vznikajú až po sprojektovaní na $\mathbb{R}^2[r, \varphi]$. Z pohľadu M ide o krivky bez samopriesečkov.)

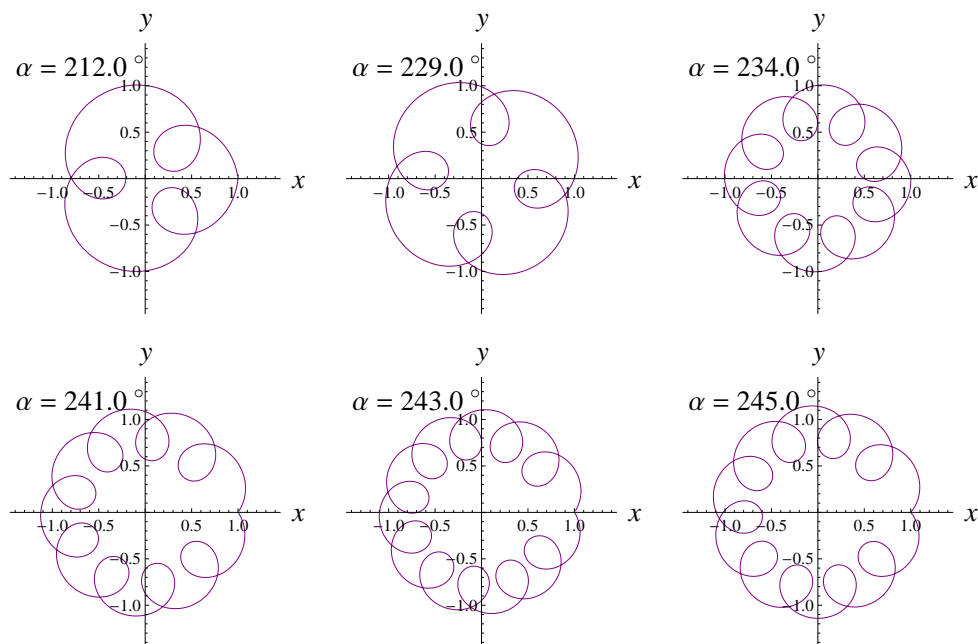


Obr. 4.7: Niektoré normálne geodetiky pre uhly $\alpha > 180^\circ$.

Pri pohľade na geodetiky na Obr. 4.8 má čitateľ právo zapochybovať, či sú vôbec hodné prívlastku normálne. Budeme ich volať *extravagantné geodetiky*. Keď človek zbadá, takéto geodetiky, mal by byť:

- *šokovaný* alebo prinajmenšom prekvapený, lebo toto naozaj nečakal.
- *zmätený*, lebo absolútne nerozumie, prečo vyšli aj takéto geodetiky.
- *nadšený*, lebo za tým bude určite niečo zaujímavé.
- *esteticky uspokojený*, lebo krivky sú pekné.

Veríme, že čitateľ prežíva podobnú zmes pocitov a s nadšením sa pokúsi spolu s nami aspoň čiastočne porozumieť tomuto výsledku.

Obr. 4.8: Niektoré extravagantné normálne geodetiky pre uhly $\alpha > 180^\circ$.

4.9.3 Prečo mravec pre uhly $\alpha > 180^\circ$ behá ako splašený?

Najprv vysvetlíme, odkiaľ vidno, že môžu vzniknúť geodetiky s podslučkami. V časti 4.7.3 zistili, že potenciál $V(r, K)$ má pre isté K lokálne minimum, čo dáva možnosť finitného pohybu pre vhodné $r_0, \dot{r}(0)$ a $\dot{\varphi}(0)$. Ak chceme finitný pohyb, treba pre ne napísať podmienku, ktorá hovorí, že mravec je na začiatku v potenciálovej jame. Podmienku vyjadruje sústava nerovnic

$$\frac{1}{2}r_0^2 + V(r_0, K) \leq V(r_1(K), K) \quad r_0 \leq r_1(K)$$

kde poloha $r_1(K)$ je lokálne maximum potenciálu uvedené na strane 44. Do nerovnic dosadíme za K zo vzťahu (4.24)

$$K = r_0^2 \left(\dot{\varphi}(0) + \frac{1}{1 + r_0^2} \right) \quad (4.27)$$

Nerovnice pre fixné r_0 viažu \dot{r}_0 a $\dot{\varphi}(0)$, takže ohraničujú nejakú oblasť v priestore počiatkových podmienok. Pre $r_0 = 1$ dostávame bledomodrú oblasť na Obr. 4.9.

Poznámka: situácia v priestore počiatkových podmienok na Obr. 4.9 je vlastne situáciou v dotykovom priestore

$$T_{(1,0)}\mathbb{R}^2[r, \varphi]$$

takže namiesto každej bodky si môžeme predstaviť šípku smerujúcu zo stredu ku bodke – dotykový vektor ku riešeniu v čase $t = 0$ (vektor rýchlosti v čase $t = 0$). Bledomodrá oblasť rozdeľuje vektory rýchlosti na dva tábory podľa toho, či mravec štartujúci s daným vektorom rýchlosti utečie, alebo nie. (Utečenecký tábor je všetko, čo neleží v bledomodrej oblasti.)

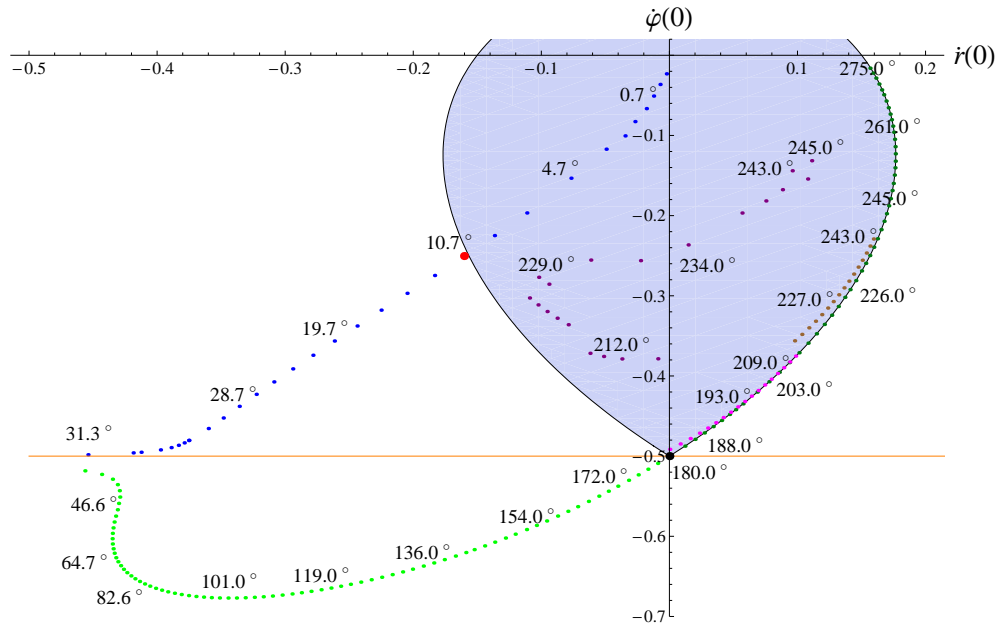
Počiatková podmienka pre geodetiku s podslučkami je vždy znázornená bodkou takej farby, akou sme ju kreslili.

Vidíme, že počiatkové podmienky pre všetky „kučeravé“ geodetiky ležia v oblasti finitného pohybu. To však ešte nevysvetľuje prítomnosť podslučiek. Keď mravec ide po

geodetike s podslučkami, tak na úsekoch bližšie ku stredu ide v protismere⁴. To znamená, že na geodetikách s podslučkami by sa malo meniť znamienko $\dot{\varphi}$. Keď dosadíme do rovnice (4.14) hodnoty r a K , ktoré nadobúdajú naše riešenia, zistíme, že $\dot{\varphi}$ naozaj mení znamienko.

Všimnime si, že mravec robí otáčanie v protismere inteligentne. Keď už „chce“ točiť platňu v protismere, ide radšej bližšie k osi rotácie. To súhlasí s fyzikálnou intuíciou – pohybujúc sa bližšie pri $r = 0$, mravec spôsobí menšie otočenie v protismere, než ďalej od $r = 0$.

Veľkosť podslučiek vieme pre konkrétnu geodetiku zistiť zo šírky jamy v potenciáli $V(r, K)$ vo výške rovnej energii, ktorú dostaneme zo vzťahu (4.22).



Obr. 4.9: Počiatočné podmienky pre jednotlivé riešenia a oblasť finitného pohybu.

Červená je počiatočná podmienka pre *prvú* nájdenú geodetiku ($\alpha = 10,7^\circ$).

Modré sú počiatočné podmienky pre geodetiky, ktoré *nepretnú os y*.

Bledozelené sú počiatočné podmienky pre geodetiky, ktoré *pretnú os y*.

Čierna je počiatočná podmienka pre *kružnicu*.

Tmavozelené sú počiatočné podmienky pre geodetiky z *časti 4.9.4*.

Purpurové sú počiatočné podmienky pre geodetiky *s jedným samopriesekom*.

Hnedé sú počiatočné podmienky pre geodetiky *s dvoma samopriesekami*.

Fialové sú *náhodne natipované* počiatočné podmienky, ktoré dávajú *extravagantné geodetiky*.

Oranžová čiara zodpovedá $K = 0$ (kritický parameter potenciálu $V(r, K)$).

Bledomodrá je oblasť počiatočných podmienok pre *finitné pohyby*.

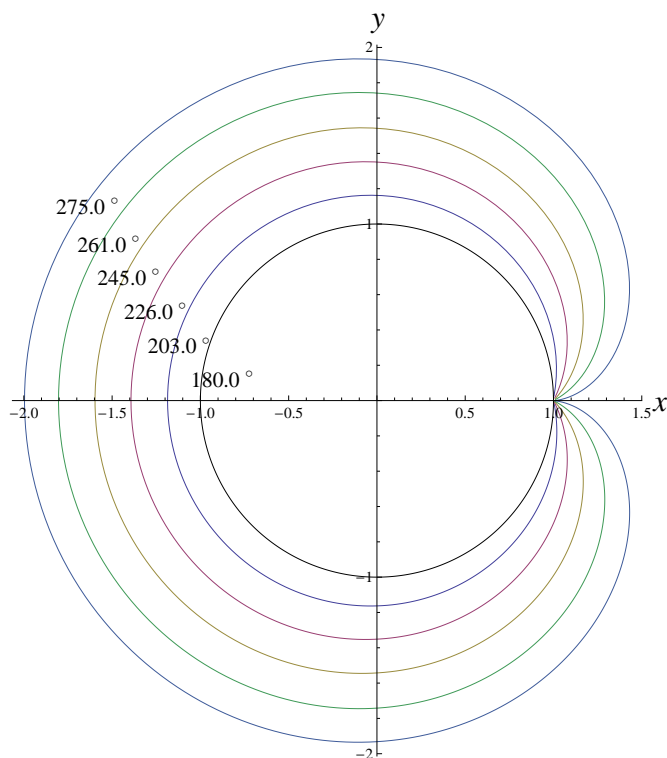
Všimnime si, že niektoré modré bodky ležia v bledomodrej oblasti. To znamená, že sú podslučkami nejakých dlhších finitných pohybov. Ostatné modré bodky a bledozelené bodky nie sú podslučkami finitných pohybov. Keby mravec po nich išiel ďalej, tak utečie. Treba si rozmyslieť, že tu nevzniká žiadne protirečenie. Pri infinitnom pohybe

⁴Protismerom budeme nazývať smer otáčania, kedy sa platňa točí v opačnom smere než je požadované výsledné otočenie α . V našom prípade chceme otočenie o kladné α (proti smeru hodinových ručičiek). Keď je mravec najbližšie ku bodu $r = 0$, platňa sa točí v smere hodinových ručičiek.

môžeme ľubovoľnú hodnotu r nadobudnúť najvyšš 2-krát (dá sa rozmyslieť pohľadom na potenciál $V(r, K)$), čo dovoľuje maximálne jednu slučku.

4.9.4 Ďalšie geodetiky pre uhly $\alpha > 180^\circ$

Na Obr. 4.9 sú ešte tmavozelené bodky, o ktorých sme zatiaľ nehovorili. Pozrime sa na Obr. 4.7 na geodetiku vpravo hore pre $\alpha = 214^\circ$. Predstavme si, že *štartujeme* v bode, kde má krivka *samopriesek*. Ideme v smere hodinových ručičiek, obídeme platňu a *skončíme* v mieste samoprieseku. Dostaneme takto typ krivky, ktorý sme zatiaľ nezašli. Ukazuje sa, že ak vhodne zvolíme počiatkové podmienky, tak môžeme krivku takéhoto typu dostať aj štartujúc v bode $(1, 0)$. Riešenia sú na Obr. 4.10.

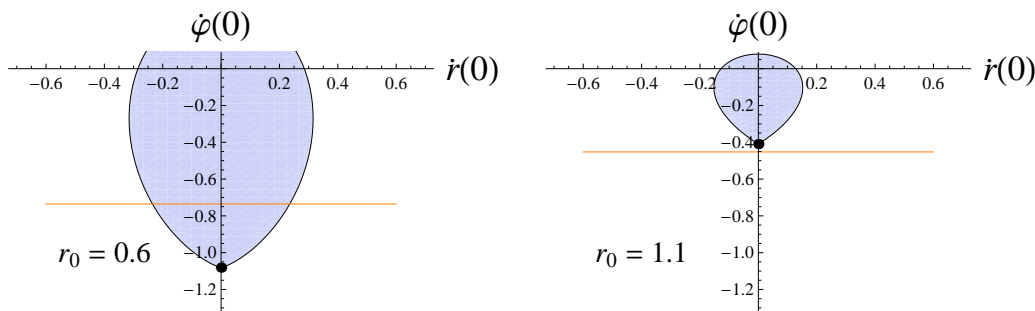


Obr. 4.10: Ďalšie normálne geodetiky pre uhly $\alpha > 180^\circ$ a kružnica pre $\alpha = 180^\circ$.

Počiatkové podmienky pre tieto geodetiky sú tmavozelené bodky na Obr. 4.9. Vidíme, že ležia veľmi blízko okraja oblasti finitných pohybov. Keď o kúsok zmeníme počiatkové podmienky smerom von z oblasti finitných pohybov, dostaneme infinitný pohyb. (Numericky ide o ladenie počiatkových podmienok na úrovni piateho desatinného miesta.) Keby sme po geodetikách pokračovali ďalej, dostaneme finitné pohyby so samopriesekmi (s podslučkami).

4.9.5 Čo sa zmení pre $r_0 \neq 1$?

V diskusii okolo vzťahov (4.25) a (4.26) sme zistili, že výber $r_0 = 1$ je dosť špecifický, čo sa na Obr. 4.9 prejavuje tým, že čierna bodka leží na oranžovej čiare. Pozrime sa, čo sa zmení na Obr. 4.9 pre iné hodnoty r_0 . Prvé pozorovanie je, že oblasť finitného pohybu sa s rastúcim r_0 znižuje.⁵ Ďalej vidíme, že počiatočná podmienka pre kružnicu (čierna



Obr. 4.11: Zmena situácie v prestore počiatočných podmienok pre $r_0 \neq 1$.

bodka) je stále dolnou hranicou bledomodrej oblasti. Uvidíme, že kľúčové je, čo sa deje s oranžovou čiarou:

pre $r_0 < 1$	oranžová čiara <i>pretína</i> oblasť finitných pohybov
pre $r_0 > 1$	oranžová čiara <i>nepretína</i> oblasť finitných pohybov

Ak poriadne podumáme nad doterajšou analýzou, zistíme nasledovné. Zoberme všetky (nie nutne uzavreté) riešenia, ktoré obsahujú podslučky (teda aj červenú čiaru na Obr. 4.5 vľavo). Tie, ktorých počiatočné podmienky ležia *nad* oranžovou čiarou sú také, pre ktoré sa platňa na niektorých úsekoch točí aj v protismere a tie, čo sú *pod* oranžovou čiarou zodpovedajú riešeniam bez protismerných rotácií. Inak povedané, zapichnime do $r = 0$ kolík a predstavme si, že riešenia sú špagáty. Ak budeme sťahovať podslučky riešení, tak tie, čo sú *nad* oranžovou čiarou, stiahneme bez toho, aby sme podslučkami obviazali kolík. Podslučky tých, čo sú *pod* oranžovou čiarou zostanú omotané okolo kolíka.

Ak to nie je jasné, treba sa na to pozrieť matematicky.⁶ Ako sme zistili v predchádzajúcej časti, protismerné rotácie vznikajú, keď $\dot{\varphi}$ mení znamienko. Dosaďme do rovnice (4.14) za K zo vzťahu (4.27). Dostávame

$$\dot{\varphi} = \frac{r_0^2 \left(\dot{\varphi}(0) + \frac{1}{1+r_0^2} \right)}{r^2} - \frac{1}{1+r^2}$$

Vidíme, že pod oranžovou čiarou, čiže pre

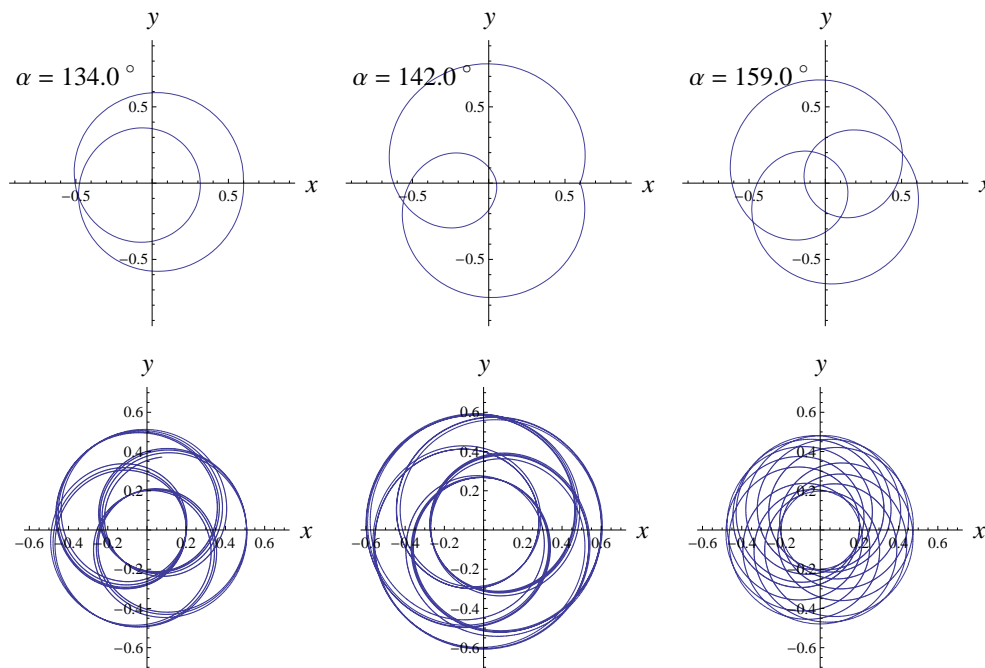
$$\dot{\varphi}(0) < -\frac{1}{1+r_0^2}$$

máme stále $\dot{\varphi} < 0$ a nevznikajú protismerné rotácie.

⁵Čitateľ môže mať podozrenie, že oblasť by mala byť vždy symetrická vzhľadom os $\dot{r}(0)$ (malo by sa dať finitne pohybovať aj s opačnými $\dot{\varphi}(0)$). Podozrenie je oprávnené a zaoberáme sa ním na konci dodatku A.3.

⁶Sila matematiky je aj v tom, že človek niekedy nemusí fyzikálne *naozaj* rozumieť, čo sa deje, ale matematika mu dá odpoveď. Richard Feynman o tejto schopnosti matematiky pekne hovorí v knihe [10] v kapitole 20.3 o zotrvačníku.

Čo z toho vyplýva pre Obr. 4.11? Pre $r_0 > 1$ nič zaujímavé, ale pre $r_0 < 1$ už áno. Mali by sme dostať *novú triedu riešení* – finitý pohyb bez protismerných rotácií. To je typ pohybu, ktorý vykonávajú planéty pri obíehaní okolo Slnka. Takéto riešenia pre vhodné počiatočné podmienky (také, čo ležia v dolnej časti bledomodrej oblasti, ktorú odreže oranžová čiara) naozaj vznikajú. Ukážky kreslíme na Obr. 4.12. Horné tri



Obr. 4.12: Nová trieda finitných pohybov.

krivky sú normálne geodetiky pre $r_0 = 0,6$. Dolné sú normálne geodetiky v tvare ružíc pre $r_0 = 0,2$ (mravca sme nechali poriadne sa vybláznit').

Pre $r_0 \geq 1$ takúto triedu riešení nedostávame. Z toho vyplýva, že systém diferenciálnych rovníc (4.13) – (4.16) nemá škálovaciu symetriu v radiálnej súradnici. (O trochu viac sa o symetriách rovníc hovorí v dodatku A.3.)

4.10 Minimálne geodetiky

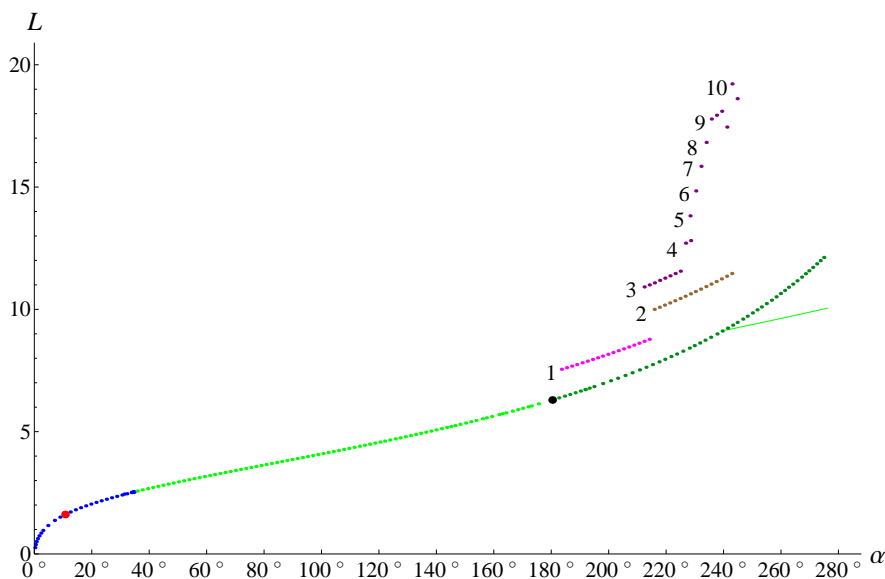
Zatiaľ sme len nahliadli, že rovnice dovoľujú mravcovi behať aj po veľmi čudných dráhach, ale nevieme, ktoré z nich sú naozaj najkratšie. Inak povedané, našli sme nejaké *normálne geodetiky*, ktoré *lokálne* minimalizujú funkcionál dĺžky (pozri znenie vety v časti 2.7). *Globálne* minimá zatiaľ nepoznáme. Aby sme vedeli s istotou povedať, že konkrétna geodetika je pre otočenie α najkratšia, mali by sme nájsť všetky možné geodetiky pre α a odmerať ich dĺžku.

Nájsť *minimálne* geodetiky je vo všeobecnosti oveľa ťažšie, než nájsť nejaké *normálne* geodetiky. Z bezpečnostných dôvodov o žiadnej čiare, ktorá tu vyšla, nebudeme tvrdiť, že je určite najkratšia. Dovoľme si aspoň vysloviť hypotézu:

Čiary na Obr. 4.6 sú naozaj minimálnymi subriemannovskými geodetikami.

Čiže pre daný uhol otočenia platne $\alpha \leq 180^\circ$ kratšia okružná cesta než slučka z Obr. 4.6 neexistuje. Intuitívny dôvod: Pre veľmi malé uhly sú *jednoznačnými* riešeniami malé kružnice (detailne sa to rozoberá v dodatku A.4). So zväčšujúcim sa uhlom α sa krivky *spojite* deformujú. Preto sa nazdávame, že by mohli byť najkratšími čiarami. Neskôr zistíme, že tento intuitívny argument nie je celkom v poriadku a keď spojite deformujeme krivky ďalej na tie z Obr. 4.10, tak argument od istého uhla určite neplatí.

Na Obr. 4.13 kreslíme závislosť dĺžky geodetík od uhla otočenia α . (Pôvod zelenej čiary sa vyjasní v časti 4.10.1.) Vidíme, že vždy, keď pribudne podslučka, nastáva skok



Obr. 4.13: Závislosť dĺžky geodetík L od uhla otočenia α . Čísla označujú počet podslučiek pre dané geodetiky.

v dĺžke. Všimnime si, že geodetiky s podslučkami určite nie sú minimálnymi geodetikami, lebo pod nimi v grafe sú kratšie geodetiky, ktoré zabezpečujú rovnaké otočenie. Preto sme sa nimi ďalej nezaoberali. Možno predpokladať, že keby sme hľadali ďalšie geodetiky s podslučkami, ležali by v grafe na čiarach „rovnobežných tmavozelenými bodkami“. Geodetiky s podslučkami nie sú síce najkratšie, ale čitateľ iste oceňuje ich estetickú kvalitu.⁷

4.10.1 Problém hladkosti minimálnych geodetík

Keď človek pozerá na Obr. 4.10, po niekoľkých týždňoch dostane nápad. Čo keby sme pre nejaké otočenie α , ktoré zabezpečí mravec idúci po geodetike γ , vedeli nájsť dve krátke slučky γ_1 a γ_2 z Obr. 4.6 s príslušnými uhlami α_1 a α_2 takými, že

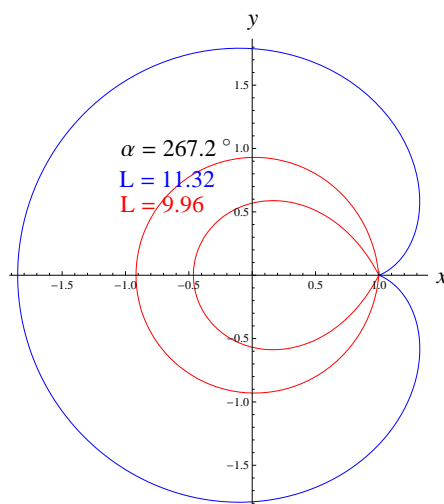
$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

a navyše tak, aby zložená krivka $\gamma_1 + \gamma_2$ bola kratšia ako γ . V reči Obr. 4.13 chceme

$$L(\alpha_1) + L(\alpha_2) < L(\alpha_1 + \alpha_2) \quad (4.28)$$

To sa naozaj dá urobiť. Výsledok je na Obr. 4.14.

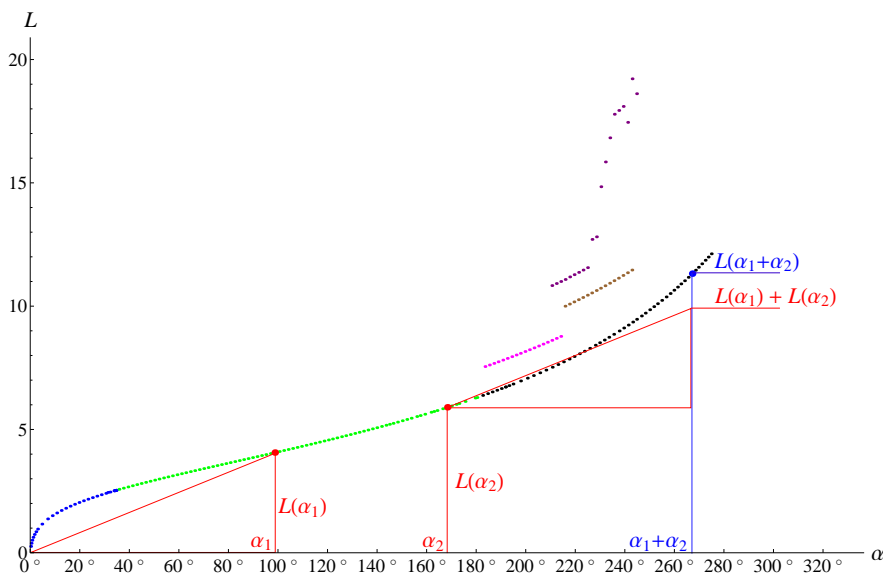
V Montgomeryho knihe [18] sa v časti 10.3 hovorí o hladkosti *minimálnych* geodetík ako o *otvorenom* probléme. Tu sme našli geodetiku, ktorá *nie je hladká* a je kratšia, než všetky doteraz nájdené riešenia. Svitá nádej, že mravec by mohol rozlusknúť tento otvorený problém.



Obr. 4.14: Skladaná geodetika.

⁷Nejeden by si nimi rád vymaľoval izbu a povyšival obrus v kuchyni.

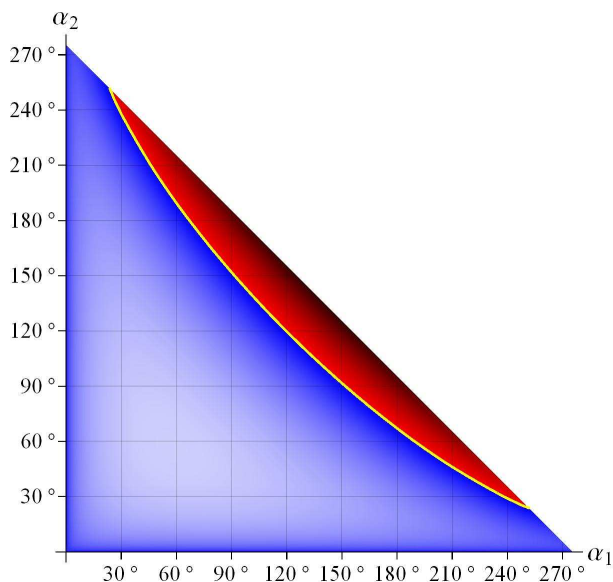
Najprv si na Obr. 4.15 ukážme, ako sa hľadajú skladané geodetiky geometricky. Hľadáme ich takto. Uhol α rozsekne na dve časti $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Zoberieme červený



Obr. 4.15: Hľadanie skladaných geodetik geometricky.

trojuholník s pravým uhlom v bode $(\alpha_1, 0)$ a priložíme ho ku druhej červenej bodke v bode $(\alpha_2, L(\alpha_2))$. Keď horný vrchol priloženého trojuholníka bude nižšie, než modrá bodka, tak sme vyhrali.

Zoberme všetky geodetiky, ktoré na Obr. 4.15 ležia na čiare, ktorú dostaneme interpoláciou modrých, bledozelených a tmavozelených bodiek. Urobme všetky možné kombinácie $\alpha_1 + \alpha_2$ a vypočítajme dĺžky $L(\alpha_1) + L(\alpha_2)$ príslušných skladaných geodetik. Takto dostaneme Obr. 4.16.



Obr. 4.16: Výsledky všetkých možných skladaní uhla α z α_1 a α_2 .

Modrá plocha zodpovedá $L(\alpha_1) + L(\alpha_2) > L(\alpha_1 + \alpha_2)$, takže *neskladaná* geodetika je *kratšia*. Čím bledšia modrá, tým väčší je rozdiel dĺžok.

Červená plocha zodpovedá $L(\alpha_1) + L(\alpha_2) < L(\alpha_1 + \alpha_2)$, takže *skladaná* geodetika je *kratšia*. Čím tmavšia červená, tým väčší je rozdiel dĺžok.

Žltá čiara zodpovedá $L(\alpha_1) + L(\alpha_2) = L(\alpha_1 + \alpha_2)$, takže skladaná geodetika je rovnako dlhá ako neskladaná geodetika.

Podľa Obr. 4.16 vidíme (a dá sa overiť numericky), že pre daný uhol dosiahneme skladaním najkratšiu geodetiku práve vtedy, keď $\alpha_1 = \alpha_2$. Treba si predstaviť priamku $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$ a uvedomiť si, že červená je najtmavšia pre $\alpha_1 = \alpha_2$. Takže najkratšie geodetiky získané skladaním slučiek sú také, že pre konkrétny uhol α treba 2-krát prebehnúť po geodetike s polovičným uhlom $\frac{\alpha}{2}$. Takto vzniknú geodetiky, ktoré na Obr. 4.13 ležia na zelenej čiare.

Netvrdíme, že sme našli minimálne geodetiky. Na to by bolo potrebné preskúmať všetky možné ďalšie skladania. Keby sme chceli geodetiky skladať z viacerých slučiek, tak nedostaneme žiadne kratšie geodetiky. (Dá sa nahliadnuť pomocou trojuholníkov, resp. overiť numericky.) Ale treba preveriť aj skladanie z normálnych geodetik, ktoré *nie sú* slučkami. Napr. na Obr. 4.5 sa dá vytvoriť uzavretá cesta aj tak, že mravec by išiel najprv po fialovej čiare, ktorá ide blízko okolo stredu a tesne pred koncom by „presadol“ na modrú čiaru a vrátil sa po nej na štart.

Možnosť hľadania kratších geodetik skladaním zo slučiek začína približne okolo uhla $\alpha = 240^\circ$. Pre menšie uhly takto nič kratšie nenájde. Nie je však vylúčené, že skladaním popísaným v predchádzajúcom odseku sa dajú nájsť kratšie cesty aj pre menšie uhly. S istotou môžeme tvrdiť len to, že krivky na Obr. 4.6 resp. Obr. 4.10 sú minimálnymi geodetikami len do istého kritického uhla α_k . Hodnotu α_k však nepoznáme. Vieme ju len zhora ohraničiť uhlom 240° .

Z toho, čo doteraz vieme o geodetikách v našom probléme, sa zdá, že pre počiatkové $r_0 \geq 1$ od istého uhla α_k , už neexistuje *hladká* normálna minimálna geodetika, lebo vieme nájsť kratšie (ale nie nutne minimálne) geodetiky skladaním. (Skladané geodetiky majú skoky už v prvej derivácii.) Mravec naznačuje, že by rád uzavrel Montgomeryho otvorený problém slovami: „Minimálne subriemannovské geodetiky vo všeobecnosti nie sú hladké krivky.“ Keďže sme neuviedli rigorózný dôkaz, ale len intuitívne argumenty, tak uzavretiu otvoreného problému radšej ponechávame otvorený koniec.

4.11 Ponaučenie

Na príklade mravca sme si podrobne vyskúšali hľadanie subriemannovských geodetik. Už v takomto jednoduchom probléme je pomerne dosť práce, keď chceme aspoň čiastočne porozumieť, čo sa deje. Horizontálna distribúcia \mathcal{H} je silná štruktúra a spôsobuje, že už na trojrozmernej mravcovej variete vznikajú geodetiky exotických tvarov, ktoré by nás ani vo sne nenapadlo očakávať. Hľadanie normálnych geodetik nepredstavuje veľký problém. Skutočné problémy sú až s hľadaním globálneho minima pre konkrétny uhol α .

Kapitola 5

Príklad so singulárnymi geodetikami

V tejto kapitole sa pozrieme na jednu z prvých subriemannovských variet, na ktorej Montgomery študoval singulárne geodetiky. V časti 2.8.3 hovoríme o prvom príklade singulárnych geodetik z roku 1991. Príklad v tejto kapitole je z článku [17] z roku 1994. Nejde o fyzikálny príklad, ale napriek tomu sa mu budeme venovať. Poodhalíme rúško tajomstva zahaľujúce singulárne geodetiky a upokojíme sa, že ide (na prvý pohľad) o úplne bežné krivky a žiadne „obludy“, ktoré by mohol evokovať prívlastok singulárne.

5.1 Matematická formulácia

Majme na $M = \mathbb{R}^3[r, \varphi, z]$ dvojrozmernú distribúciu \mathcal{H} zadanú ohraničujúcou formou

$$\theta = dz + A(r)d\varphi \quad \text{kde} \quad A(r) \equiv 2r^2 - r^4 \quad (5.1)$$

Takže do distribúcie smerujú krivky, pre ktoré platí $\dot{z} = -A\dot{\varphi}$. Distribúciu si môžeme predstaviť ako sústavu roviniek na Obr. 5.1.¹ Keď sa pohybujeme horizontálne v súradnici φ v smere hodinových ručičiek, tak pre $r < \sqrt{2}$ ideme hore kopcom a pre $r > \sqrt{2}$ dole kopcom. Pre $r = \sqrt{2}$ sú rovinky vodorovné, takže ideme po vodorovnej kružnici.

Budeme pracovať so subriemannovskou metrikou

$$g = dr \otimes dr + r^2 d\varphi \otimes d\varphi$$

Podobne ako v časti 4.2, aj tu ju vyrábame pull-backom euklidovskej metriky z $\mathbb{R}^2[r, \varphi]$ do M . To znamená, že dĺžky horizontálnych kriviek budú opäť euklidovskými dĺžkami projekcií kriviek do \mathbb{R}^2 .

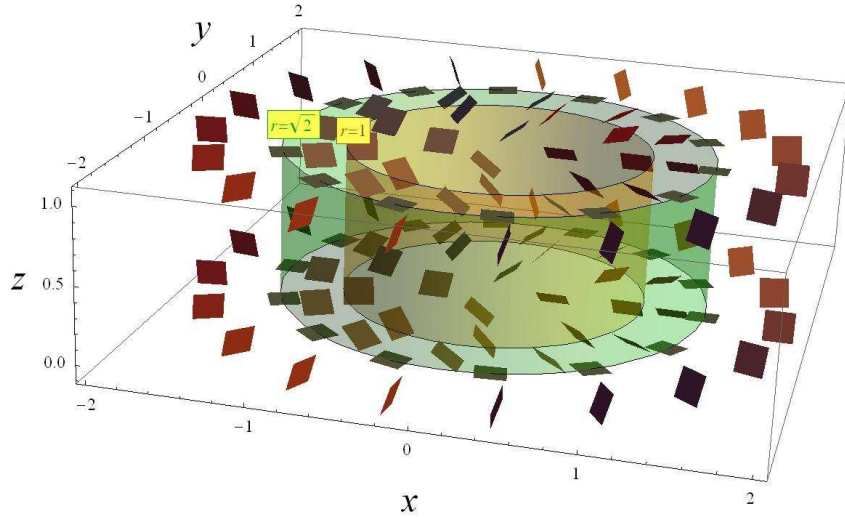
5.2 Preverenie hrozieb

Integrovaťnosť distribúcie

Využitím vzťahu (2.3) nájdeme bázové polia pre distribúciu \mathcal{H} . Sú nimi

$$\begin{aligned} e_1 &= \partial_r \\ e_2 &= \partial_\varphi - A(r)\partial_z = \partial_\varphi - r^2(2 - r^2)\partial_z \end{aligned} \quad (5.2)$$

¹Porozumenie Obr. 5.1 si môže vyžadovať silnú priestorovú predstavivosť. Ak čitateľ nemá chuť sa „priestorovopredstavivostne“ namáhať, môže sa naňho pokojne pozerať ako na abstraktnú geometrickú maľbu alebo listy tancujúce vo víre jesenného vetra. Pre pochopenie ďalšieho textu netreba obrázku rozumieť.



Obr. 5.1: Distribúcia ako sústava rovniiek. Valce majú polomer význačných bodov funkcie $A(r)$ vystupujúcej vo forme distribúcie θ ($A'(1) = 0$ a $A(\sqrt{2}) = 0$).

Ich komutátor vychádza

$$[e_1, e_2] = -A'\partial_z = 4r(r^2 - 1)\partial_z \equiv e_3$$

Polia e_1, e_2, e_3 tvoria bázu \mathcal{H} všade okrem priamky $r = 0$ a valca $r = 1$. Ak zoberieme do partie iterovaný komutátor

$$[e_1, [e_1, e_2]] = -A''\partial_z = 4(3r^2 - 1)\partial_z \equiv e_4$$

Tak pre $r = 0$ a $r = 1$ budeme mať bázu tvorenú trojicou e_1, e_2, e_4 . Distribúcia \mathcal{H} je úplne neintegrovateľná.

Singulárne geodetiky

Vyšetrovanie singulárnych geodetik odložíme do častí 5.5 a 5.6.

5.3 Kometrika a subriemannovský hamiltonián

Matica metriky g v báze polí (5.2) zadávajúcich distribúciu. Vychádza

$$g_{ab} \equiv g(e_a, e_b) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

Inverzná matica je

$$g^{ab} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}$$

Kometrika na výrobu hamiltoniánu má tvar

$$h = \partial_r \otimes \partial_r + \frac{1}{r^2}(\partial_\varphi - A(r)\partial_z) \otimes (\partial_\varphi - A(r)\partial_z)$$

Subriemannovský hamiltonián vychádza

$$H(x, p) = \frac{1}{2}h_x(p, p) = \frac{1}{2} \left[p_r^2 + \frac{1}{r^2}(p_\varphi + r^2(r^2 - 2)p_z)^2 \right]$$

5.4 Rovnice pre normálne geodetiky

Hamiltonove rovnice pre normálne subriemannovské geodetiky sú

$$\dot{r} = p_r \quad (5.3)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{r^2} + (r^2 - 2)p_z \quad (5.4)$$

$$\dot{z} = (r^2 - 2) [p_\varphi + r^2 (r^2 - 2) p_z] \quad (5.5)$$

$$\dot{p}_r = \frac{[p_\varphi + r^2 (2 - 3r^2) p_z] [p_\varphi + r^2 (r^2 - 2) p_z]}{r^3} \quad (5.6)$$

$$\dot{p}_\varphi = 0 \quad (5.7)$$

$$\dot{p}_z = 0 \quad (5.8)$$

Rovnice majú veľa podobných vlastností ako rovnice (4.7) – (4.12) pre mravca. Nebudeme ich však riešiť. Chceme ukázať, že existujú subriemannovské geodetiky, ktoré nie sú riešeniami rovníc (5.3) – (5.8).

5.5 Singulárne krivky

V tejto časti nájdeme singulárne krivky. Otázku, či sú dostatočne krátke, budeme riešiť v časti 5.6. Využijeme vzťah (2.8) a získame ohraničenie symplectickej formy $\omega = dp_\mu \wedge dx^\mu$ na horizontálnu distribúciu

$$\hat{\omega} = d\lambda \wedge \theta + \lambda d\theta \quad \text{kde} \quad \theta = dz + A(r)d\varphi$$

Singulárne krivky sú riešeniami rovnice (2.9) sprojektovanými na M . Hľadáme krivky $p(t)$, ktoré spĺňajú rovnicu

$$i_{\dot{p}} \hat{\omega} = 0 \quad \text{kde} \quad \dot{p} = \dot{r} \partial_r + \dot{\varphi} \partial_\varphi + \dot{z} \partial_z + \dot{\lambda} \partial_\lambda$$

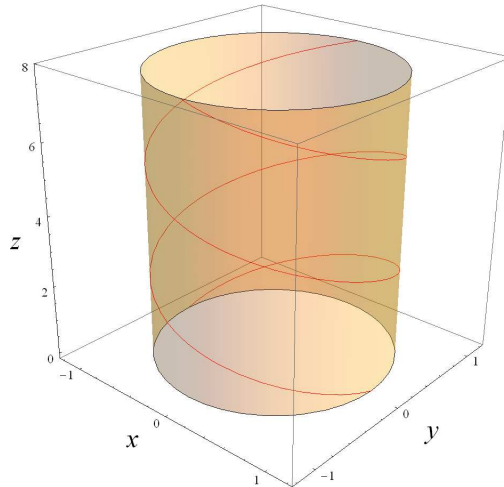
Detailný postup riešenia rovnice uvádzame v dodatku B.1. Nájdene singulárne krivky sú špirály (a ich časti) ležiace na jednotkovom valci

$$\gamma(t) : (r(t), \varphi(t), z(t)) = (1, \varphi_0 - t, z_0 + t) \quad t \in \langle 0, T \rangle \quad (5.9)$$

Pričom T je ľubovoľné. Príklady riešení kreslíme na Obr. 5.2. Dosaďme tieto krivky do rovníc (5.3) – (5.8). Dostávame

$$\begin{aligned} 0 &= p_r \\ -1 &= p_\varphi - p_z \\ 1 &= -(p_\varphi - p_z) \\ \dot{p}_r &= (p_\varphi - p_z)^2 \end{aligned}$$

To nie sú konzistentné rovnice (dosadenie do poslednej rovnice z predošlých dá $0 = 1$), takže špirály, resp. hocijaké ich časti, nie sú riešeniami rovníc pre normálne geodetiky a kandidujú na post (abnormálnych²) singulárnych geodetík.



Obr. 5.2: Niektoré singulárne krivky.

²Pozri vyjasnenie terminológie v časti 2.8.2.

5.6 Minimálne singulárne geodetiky

Na to, aby špirály (5.9) boli minimálnymi singulárnymi geodetikami, musíme overiť, že sú kratšie, než všetky ich konkurentky, ktoré riešia rovnice pre normálne geodetiky.

V Montgomeryho článku [17] sa uvádza intuitívny argument pre špirálu so začiatkom v bode (x_0, y_0, z_0) a koncom v bode (x_0, y_0, z_1) , čo je špirála s jedným celým závitom, ktorej projekcia do $\mathbb{R}^2[r, \varphi]$ je kružnica s polomerom $r = 1$. Po intuitívnom argumente v článku [17] nasleduje poctivý dôkaz, že *dostatočne krátky* úsek špirály je naozaj minimálnou geodetikou. My tu uvedieme všeobecnejší intuitívny argument pre ľubovoľnú časť špirály (teda aj pre krátky úsek).³

Vďaka rotačnej symetrii v uhle φ a traslačnej symetrii v súradnici z nám stačí uvažovať špirály γ so začiatkom v bode $(r_0, \varphi_0, z_0) = (1, 0, 0)$. *Fixujme* nejakú horizontálnu krivku σ , ktorá začína v bode $(1, 0, 0)$ a končí presne pod koncovým bodom krivky γ . Máme teda dve horizontálne krivky (Obr. 5.3)

krivka	začiatok	koniec
γ	$(1, 0, 0)$	$(1, \varphi, z)$
σ	$(1, 0, 0)$	$(1, \varphi, h)$

Výšky z a h koncových bodov kriviek sa počítajú takto

$$z = \int_{\gamma} dz \quad h = \int_{\sigma} dz$$

Vykonajme nasledujúcu dobrodružnú cestu. Zbehnime dole kopcom po krivke γ a potom vybehnime hore kopcom po krivke σ .⁴ Zmena výšky bude

$$-z + h = \int_{-\gamma+\sigma} dz \stackrel{1.}{=} - \int_{-\gamma+\sigma} A d\varphi \stackrel{2.}{=} - \int_{\partial\Omega} A d\varphi \stackrel{3.}{=} - \int_{\Omega} A' dr \wedge d\varphi \quad (5.10)$$

Kde $-\gamma$ je opačne orientovaná krivka γ . Písmeno Ω označuje oblasť z Obr. 5.3 a $\partial\Omega \equiv \pi\sigma - \pi\gamma$ je hranica oblasti Ω . Postupne sme využili:

1. väzbu (5.1), ktorá hovorí, že pre horizontálne krivky platí $\dot{z} = -A\dot{\varphi}$, a teda

$$dz = \dot{z} dt = -A \dot{\varphi} dt = -A d\varphi$$

2. správanie sa integrálu pri zobrazení variet (tu je zobrazením projekcia $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2[r, \varphi]$).⁵ Platí

$$\int_{\pi(-\gamma+\sigma)} A d\varphi = \int_{-\gamma+\sigma} \pi^*(A d\varphi) = \int_{-\gamma+\sigma} A d\varphi$$

3. Stokesovu vetu

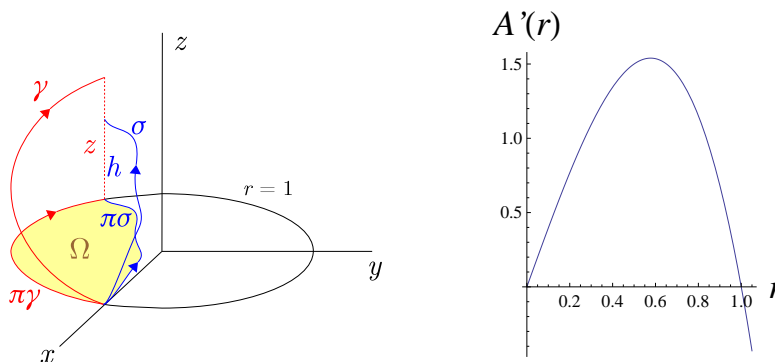
$$\int_{\partial\Omega} \alpha = \int_{\Omega} d\alpha$$

kde Ω je k -rozmerná oblasť a α je $(k-1)$ -forma.

³Motiváciou zovšeobecnenia je vidieť, že intuícia funguje aj pre dostatočne krátke krivky, o ktorých hovorí dôkaz v článku. Nie iba pre jednozavítoú špirálu, ktorej sa dôkaz nakoniec netýka.

⁴Zatiaľ vôbec nie je jasné, prečo by sme sa mali takto fyzicky namáhať. Bežný človek by si možno povedal: „V zdravom tele zdravý duch,“ a bez ďalších rečí by sa vydal na cestu. Lenže matfyzák si povie: „Veď ja mám aj tak zdravého ducha.“ Matfyzák si ale musí uvedomiť, že obrátenie implikácie „zdravé telo \Rightarrow zdravý duch“ neplatí, a treba si občas aj zašportovať. Teraz je ten správny čas.

⁵Pozri v knihe [7] časť 7.8.



Obr. 5.3: Vľavo: γ je singulárna krivka a σ je fixovaná horizontálna krivka. Vpravo: Priebeh funkcie $A'(r)$.

Zo vzťahu (5.10) dostávame

$$z = h + \int_{\Omega} A' dr \wedge d\varphi \quad (5.11)$$

Pripomeňme, že krivka σ je fixovaná, a teda aj h je fixované. Skúsme horizontálne deformovať krivku γ . Keď ju zdeformujeme tak, že na jej projekcii $\pi\gamma$ urobíme kopček, čo trčí von z kruhu, tak výška z klesne, lebo mimo kruhu je $A' < 0$ a do integrálu nám pribudnú záporné príspevky. Keď krivku γ zdeformujeme tak, že urobíme na projekcii $\pi\gamma$ kopček dovnútra kruhu, kde $A' > 0$, tak z opäť klesne, lebo sa zmenší oblasť Ω .

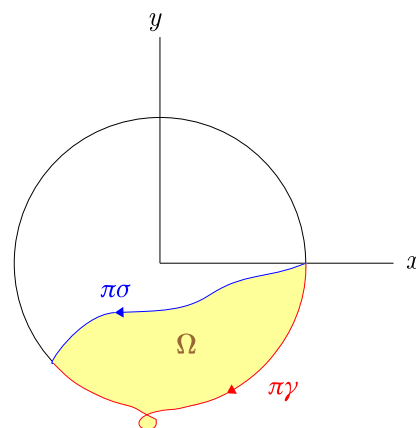
To isté sa dá rozmyslieť aj na Obr. 5.1. Singulárna krivka ide po valci s polomerom $r = 1$. Ak po ceste nachvíľku vybočíme von (alebo dovnútra) z valca, kde sú roviny menej strmé, skončíme nižšie, než keby sme nevybočili. (Strmosť rovínok je určená zetovou zložkou poľa e_2 , t. j. hodnotou funkcie $A(r)$. Tá má maximum pre $r = 1$.)

Takže nech sa snažíme, ako chceme, špirály sa nedajú spojiť horizontálne deformovať pri zachovaní koncových bodov. Každá deformácia spôsobuje zdvihnutie konca. To znamená, že špirála je izolovaným bodom v priestore horizontálnych kriviek spájajúcich jej konce. Keby sme varíovali funkcionál dĺžky $l[\gamma]$ pre krivku γ , ktorá je špirálou, zistíme, že okrem reparametrizácie špirály nemôžeme nič robiť, a preto je špirála lokálnym minimom funkcionálu dĺžky (a aj akéhokoľvek iného funkcionálu).

* Poznámka

Problém v tomto intuitívnom argumente je, že nepoužívame správnu triedu variácií. Opísané deformácie sú C^1 variáciami a C^1 topológia nie je tou správnou topológiou pre variačný počet. Špirály totiž nie sú izolovanými bodmi v Sobolevovej H^1 topológii, ktorá pripúšťa robiť na špirálach deformácie, ktoré po projekcii dávajú krivky $\pi\gamma$ s „malými uzlíčkami“. Jedna takáto krivka s (prehnane veľkým) uzlíčkom je na Obr. 5.4. Deformácie tohto typu dokážu zachovať koncové body špirály. Vidno to, keď si napíšeme integrál (5.11) pre krivku s uzlíčkom a rozdelíme ho na dve časti.

$$z = h + \int_{\Omega'} A' dr \wedge d\varphi - \int_{\bigcirc} A' dr \wedge d\varphi$$



Obr. 5.4: Krivka $\pi\gamma$, ktorá zachováva koncové body.

kde Ω' je veľká časť oblasti Ω a \bigcirc je malá oblasť ohraničená uzlíčkom. Kľúčové je, že pri druhom integráli máme znamienko mínus (za zmenu orientácie oblasti \bigcirc) a to, čo z výšky z stratíme za vybočenie z kružnice, môžeme získať na uzlíčku.

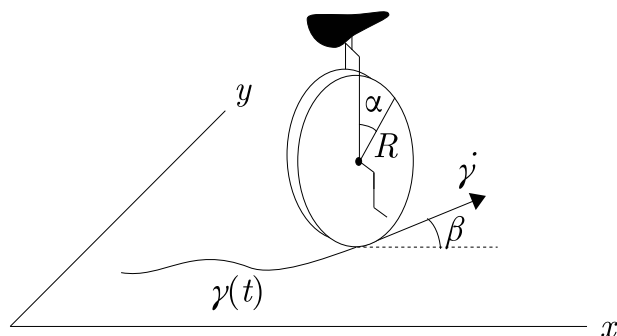
Intúícia napovedá a poriadny dôkaz potvrdí (pozri článok [17]), že tieto krivky nebudú kratšie než špirály. Preto špirály sú minimálnymi subriemannovskými geodetikami.

Kapitola 6

Jednokolka

6.1 Úloha

Jednokolka je dopravný prostriedok, ktorý má len jedno koleso a na ňom pedále a sedadlo (Obr. 6.1). Predstavme si zjednodušenú situáciu. Na jednokolke s kolesom polomeru R sa budeme bicyklovať, resp. „jednokolkovať“, po rovine $\mathbb{R}^2[x, y]$ bez prešmykovania a koleso bude stále kolmo na zem. Pohyb jednokolky ovládame dvoma parametrami: uhol α sa mení pedálovaním a uhol β napríklad analógom mačacieho triku z časti 3.4.1 (tentokrát v jednoduchšej $SO(2)$ verzii)¹. Riešime úlohu, ako sa optimálne dostať z bodu (x_0, y_0) do bodu (x_1, y_1) .



Obr. 6.1: Zavedenie súradníc.

6.2 Matematická formulácia

Varieta M

Fungujeme na variete $M = \mathbb{R}^2[x, y] \times S^1[\alpha] \times S^1[\beta]$, ktorá je totálnym priestorom hlavnej fibrácie s translačnou grupou T .²

$$\pi : \mathbb{R}^2[x, y] \times S^1[\alpha] \times S^1[\beta] \rightarrow S^1[\alpha] \times S^1[\beta]$$

Typické vlákno je \mathbb{R}^2 a báza je $S^1 \times S^1$.

¹Je to známy trik podobný otočeniu sa na klavírnej stoličke bez dotyku so zemou či akýmkoľvek iným predmetom.

²Odporúčame rozmyslieť si, prečo nie je správne uvažovať M ako totálny priestor $E(2)$ -fibrácie $\pi : M \rightarrow S^1[\alpha]$, čo by mohlo človeka napadnúť.

Distribúcia \mathcal{H}

Ohraničujúce formy distribúcie dostaneme z podmienky, že koleso neprešmykuje.

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &\stackrel{1.}{=} \dot{x}\partial_x + \dot{y}\partial_y \\ &\stackrel{2.}{=} R\dot{\alpha}(\cos\beta\partial_x + \sin\beta\partial_y)\end{aligned}$$

Z toho máme podmienky

$$\begin{aligned}\dot{x} &= R\dot{\alpha}\cos\beta \\ \dot{y} &= R\dot{\alpha}\sin\beta\end{aligned}$$

Rovnakou fintou ako v časti 4.2 dostávame ohraničujúce formy distribúcie

$$\begin{aligned}\theta^1 &= dx - R\cos\beta d\alpha \\ \theta^2 &= dy - R\sin\beta d\alpha\end{aligned}$$

Máme 2 ohraničujúce formy distribúcie, ktoré zadávajú 2-rozmernú distribúciu na 4-rozmernej variete M .

Subriemannovská metrika g

Je dôležité uvedomiť si, čo chceme optimalizovať. Keby sme chceli optimalizovať euklidovskú vzdialenosť medzi štartom a cieľom, tak nič zaujímavé nedostaneme. Použili by sme metriku

$$g' = dx \otimes dx + dy \otimes dy$$

To je ale metrika so symetriou vzhľadom na posúvanie sa medzi vláknami. Je zrejmé (a treba si premyslieť), čo by vyšlo. Z bodu (x_0, y_0) do bodu (x_1, y_1) by sme sa dostali najkratším spôsobom tak, že by sme nastavili vhodné β a pedálovali po rovnej čiare do cieľa. Zaujímavejšie je minimalizovať *námahu* „jednokolkára“. Na to sa hodí metrika

$$g = A d\alpha \otimes d\alpha + B d\beta \otimes d\beta$$

Kde A a B sú kladné konštanty, ktoré hovoria o tom, ako je náročné pedálovať (meniť α) a ako je náročné otáčať sa okolo zvislej osi (meniť β).

6.3 Súťaž

Úloha je matematicky sformulovaná a jej doriešenie ponechávam na čitateľov, ktorí majú chuť konečne si niečo v subriemannovskej geometrii vypočítať samostatne. Odporúča sa postupovať podľa kuchynského receptu z časti 2.10. Zámerne je ponechaná voľnosť vo výbere okrajových podmienok x_0, y_0, x_1, y_1 aj $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$ a treba vymyslieť, čo s tým. Za najkrajšie riešenie vypisujem odmenu 30 €. Sám som úlohu neriešil až do konca a neviem, ako to dopadne. Súťaž trvá do 1. 9. 2012. Želám veľa zábavy!

Dodatok A

Dodatky k mravcovi

A.1 Poctivé nájdenie formy θ

Máme krivku γ na M . Dotykový vektor (4.2) ku krivke γ musí mať kvôli zákonu zachovania (4.1) tvar

$$\dot{\gamma} = \dot{r}\partial_r + \dot{\varphi} \left[\partial_\varphi - \frac{1}{f(r)}\partial_\alpha \right] \quad \text{kde} \quad f(r) \equiv \frac{I}{mr^2} + 1$$

pričom \dot{r} a $\dot{\varphi}$ sú ľubovoľné. Hľadáme formu $\theta = adr + bd\varphi + cd\alpha$ s ľubovoľnými funkciami a, b, c , ktorá po naplnení ľubovoľným vektorom $\dot{\gamma}$ dá nulu. Zvoľme najprv $\dot{\varphi} = 0$. Dostaneme podmienku

$$\langle \theta, \dot{\gamma} \rangle = \langle adr + bd\varphi + cd\alpha, \dot{r}\partial_r \rangle = a\dot{r} \stackrel{!}{=} 0$$

Keďže \dot{r} je ľubovoľné, dostávame $a = 0$. Ak zvolíme $\dot{r} = 0$, máme podmienku

$$\langle \theta, \dot{\gamma} \rangle = \left\langle bd\varphi + cd\alpha, \dot{\varphi} \left[\partial_\varphi - \frac{1}{f(r)}\partial_\alpha \right] \right\rangle = \left[b - c\frac{1}{f(r)} \right] \dot{\varphi} \stackrel{!}{=} 0$$

Odtiaľ vychádza

$$c = bf(r)$$

Forma θ má tvar

$$\theta = b \left[d\varphi + \left(\frac{I}{mr^2} + 1 \right) d\alpha \right]$$

Rovnako dobre nám poslúži forma s akoukoľvek funkciou b . Ak zvolíme $b = mr^2$, dostaneme naivne odvodenú formu (4.3).

A.2 Hľadanie singulárnych kriviek

Forma $\hat{\omega}$ po dosadení za θ vyzerá

$$\hat{\omega} = d\lambda \wedge [mr^2d\varphi + (I + mr^2)d\alpha] + 2mr\lambda dr \wedge (d\varphi + d\alpha)$$

Riešime rovnicu $i_{\dot{\gamma}}\hat{\omega} = 0$ pre $\dot{p} = \dot{r}\partial_r + \dot{\varphi}\partial_\varphi + \dot{\alpha}\partial_\alpha + \dot{\lambda}\partial_\lambda$. Vychádza

$$\begin{aligned} i_{\dot{\gamma}}\hat{\omega} = & -2mr\lambda(\dot{\varphi} + \dot{\alpha})dr + mr(r\dot{\lambda} + 2\lambda\dot{r})d\varphi + \\ & + [(I + mr^2)\dot{\lambda} + 2mr\lambda\dot{r}]d\alpha - [mr^2\dot{\varphi} + (I + mr^2)\dot{\alpha}]d\lambda \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Dostávame sústavu štyroch rovníc

$$r\lambda(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}) = 0 \quad (i)$$

$$r(r\dot{\lambda} + 2\lambda\dot{r}) = 0 \quad (ii)$$

$$(I + mr^2)\dot{\lambda} + 2mr\lambda\dot{r} = 0 \quad (iii)$$

$$mr^2\dot{\varphi} + (I + mr^2)\dot{\alpha} = 0 \quad (iv)$$

Všimnime si, že rovnica (iv) je vlastne väzba (4.1) určujúca distribúciu. Takáto rovnica nám musí vyjsť vždy, aby boli riešenia horizontálne.

Ak $r = 0$, potom rovnice (i) a (ii) platia automaticky. Z rovníc (iii) a (iv) dostávame

$$I\dot{\lambda} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \lambda_0$$

$$I\dot{\alpha} = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = \alpha_0$$

Súradnica φ je ľubovoľnou funkciou času. Riešenie je

$$\gamma(t) : (r(t), \varphi(t), \alpha(t), \lambda(t)) = (0, \varphi(t), \alpha_0, \lambda_0)$$

čo je vlastne státie v bode.¹

Vyšetrimo ďalej prípad $r \neq 0$. Spomeňme si na definíciu singulárnych kriviek z časti 2.8.1, píše sa tam, že nemajú byť nikde nulové, teda $\lambda \neq 0$. Rovnica (i) potom vyzerá $\dot{\varphi} + \dot{\alpha} = 0$. Po dosadení za $\dot{\alpha}$ v rovnici (iv) dostávame

$$-I\dot{\varphi} = 0 \quad \text{preto} \quad \varphi = \varphi_0 \quad \text{a} \quad \alpha = \alpha_0$$

Rovnica (ii) dáva $\dot{\lambda} = \frac{-2\lambda}{r}\dot{r}$. V kombinácii s (iii) dostaneme výsledok $r = r_0$ a $\lambda = \lambda_0$. Opäť vyšlo len státie v bode.

A.3 Zjednodušenie rovníc pre normálne geodetiky

Pre normálne geodetiky sme dostali rovnice

$$\dot{r} = p_r \quad (A.1)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{r^2} - \frac{p_\alpha}{a + r^2} \quad (A.2)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{p_\alpha r^2 - p_\varphi (a + r^2)}{(a + r^2)^2} \quad (A.3)$$

$$\dot{p}_r = \frac{p_\varphi^2}{r^3} - \frac{2a p_\alpha^2 r}{(a + r^2)^3} + \frac{p_\alpha (p_\alpha - 2p_\varphi)r}{(a + r^2)^2} \quad (A.4)$$

$$\dot{p}_\varphi = 0 \quad (A.5)$$

$$\dot{p}_\alpha = 0 \quad (A.6)$$

V rovniciach (A.1) – (A.6) urobíme zámenu súradníc tak, aby sme sa zbavili parametra a a prešli k bezrozmerným dĺžkam. Vhodná zámena súradníc je

$$\begin{aligned} t' &= t \\ r' &= \frac{r}{\sqrt{a}} & p'_r &= \frac{p_r}{\sqrt{a}} \\ \varphi' &= \varphi & p'_\varphi &= \frac{p_\varphi}{a} \\ \alpha' &= \alpha & p'_\alpha &= \frac{p_\alpha}{a} \end{aligned}$$

¹Ľubovoľnosť $\varphi(t)$ veľký rozruch nenarobí. Je to niečo podobné ako atlét šprintujúci po rovnobežke na severnom póle. (Už predstava atléta v šortkách na ľadovci zdvíha kútiky úst. Búrlivý záchvat sme chu vyvoláva uvedomenie si tvaru rovnobežiek na severnom póle.)

Rovnice po tejto zámene prejdú na (kvôli prehľadnosti čiarky nepíšeme)

$$\dot{r} = p_r \quad (\text{A.7})$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{r^2} - \frac{p_\alpha}{1+r^2} \quad (\text{A.8})$$

$$\dot{\alpha} = \frac{p_\alpha r^2 - p_\varphi(1+r^2)}{(1+r^2)^2} \quad (\text{A.9})$$

$$\dot{p}_r = \frac{p_\varphi^2}{r^3} - \frac{2p_\alpha^2 r}{(1+r^2)^3} + \frac{p_\alpha(p_\alpha - 2p_\varphi)r}{(1+r^2)^2} \quad (\text{A.10})$$

$$\dot{p}_\varphi = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\dot{p}_\alpha = 0 \quad (\text{A.12})$$

Fyzikálna interpretácia: Keď vyriešime zmenené rovnice (A.7) – (A.12) a budeme chcieť riešenia pre pôvodné rovnice (A.1) – (A.6), stačí riešenia zmenených rovníc \sqrt{a} -krát radiálne natiahnuť ($r = \sqrt{a}r'$). Z toho vyplýva aj praktický dôsledok. Ak budeme chcieť použiť 4-krát ťažšieho mravca, bude sa parameter a meniť takto

$$\tilde{a} = \frac{I}{\tilde{m}} = \frac{I}{4m} = \frac{1}{4}a$$

potom r treba meniť nasledovne

$$\tilde{r} = \sqrt{\tilde{a}r'} = \frac{1}{2}\sqrt{ar'} = \frac{1}{2}r$$

Čiže ak zoberieme niektoré riešenie rovníc (A.7) – (A.12), ktoré je otočením platne o 30° , tak potom 4-krát ťažší mravec sa na dosiahnutie rovnakého efektu nebude musieť obťažovať ísť až tak ďaleko od stredu platne. Jemu bude stačiť 2-krát scvrknutá krivka. To naozaj súhlasí s fyzikálnou intuíciou. Podobné škálovanie sa dá robiť aj pre zmenu momentu zotrvačnosti I .

Pozor, toto *nie je* škálovanie v zmysle *škálovacej symetrie*.² Škálovacia symetria (resp. hocijaká iná symetria sústavy diferenciálnych rovníc) podľa definície zoberie riešenie rovníc a zobrazí ho na iné riešenie *tých istých* rovníc. Tu sa deje niečo iné. Pre každé a máme *iné* rovnice³ a z riešenia rovníc zodpovedajúcich a vieme nájsť riešenie rovníc zodpovedajúcich \tilde{a} .

Rovnice (A.11) a (A.12) sa vyriešia ľahko.

$$p_\varphi = \text{konšt.}$$

$$p_\alpha = \text{konšt.}$$

Zostáva nám popasovať sa s rovnicami (A.7) – (A.10). Urobíme ešte jednu zámenu súradníc

$$t'' = p'_\alpha t' \quad r'' = r' \quad \varphi'' = \varphi' \quad \alpha'' = \alpha' \quad p_r'' = \frac{p_r'}{p'_\alpha} \quad (\text{A.13})$$

Konštanta p'_α je zodpovedná za škálovanie času, ide teda o reparametrizáciu riešení.

²Symetriami diferenciálnych rovníc sa zaoberá práca [24].

³Rovnice (A.1) – (A.6) sú vlastne 1-parametrickou množinou sústav diferenciálnych rovníc.

Rovnice sa nám zjednodušia na (čiarky nepíšeme)

$$\dot{r} = p_r \quad (\text{A.14})$$

$$\dot{\varphi} = \frac{K}{r^2} - \frac{1}{1+r^2} \quad (\text{A.15})$$

$$\dot{\alpha} = \frac{r^2 - K(1+r^2)}{(1+r^2)^2} \equiv \dot{\varphi} \left(-\frac{r^2}{1+r^2} \right) \quad (\text{A.16})$$

$$\dot{p}_r = \frac{K^2}{r^3} - \frac{2r}{(1+r^2)^3} + \frac{(1-2K)r}{(1+r^2)^2} \quad (\text{A.17})$$

Zaviedli sme označenie $K = \frac{p_\varphi}{p_\alpha} = \text{konšt.}$

Ak máme $p_\alpha = 0$, zámenu (A.13) nemôžeme robiť. Rovnice (A.7) – (A.10) sa pre tento prípad dajú explicitne vyriešiť. Riešenia, ktoré vyjdú, nie sú po projekcii na $\mathbb{R}^2[r, \varphi]$ slučkami, preto sa prípadom $p_\alpha = 0$ nebudeme zaoberať.

Ak $p_\alpha < 0$, tak sa okrem škálovania aj obracia tok času. Keď s tým nechceme mať psychické (prípadne iné) problémy, treba robiť zámenu

$$t'' = |p'_\alpha| t' \quad r'' = r' \quad \varphi'' = \varphi' \quad \alpha'' = \alpha' \quad p_r'' = \frac{p_r'}{|p'_\alpha|}$$

Zjednodušené rovnice vtedy vyzerajú podobne až na tri znamienkové zmeny.

$$\dot{r} = p_r \quad (\text{A.18})$$

$$\dot{\varphi} = \frac{K}{r^2} + \frac{1}{1+r^2} \quad (\text{A.19})$$

$$\dot{\alpha} = \frac{-r^2 - K(1+r^2)}{(1+r^2)^2} \equiv \dot{\varphi} \left(-\frac{r^2}{1+r^2} \right) \quad (\text{A.20})$$

$$\dot{p}_r = \frac{K^2}{r^3} - \frac{2r}{(1+r^2)^3} + \frac{(1+2K)r}{(1+r^2)^2} \quad (\text{A.21})$$

Teraz máme $K = \frac{p_\varphi}{|p'_\alpha|} = \text{konšt.}$ V práci s touto dôležitou jemnosťou nebudeme čitateľa zaťažovať, ale pri riešení konkrétneho problému si na podobné zámenny súradníc treba dať pozor, aby sme (idúc len dopredu v čase) nestratili nejakú triedu riešení.

Ukazuje sa, že tu takto strácame riešenia rovníc (A.7) – (A.10), ktoré ale vieme dostať z riešení rovníc (A.14) – (A.17) *zrkadlením* v uhloch⁴

$$(\varphi, \alpha) \mapsto (-\varphi, -\alpha)$$

Odkiaľ to vidno? Rovnice (A.7) – (A.10) majú *diskrétnu symetriu*⁵

$$(\varphi, \alpha, p_\varphi, p_\alpha) \mapsto (-\varphi, -\alpha, -p_\varphi, -p_\alpha) \quad (\text{A.22})$$

pričom ostatné premenné sa netransformujú. Rovnice (A.14) – (A.17) už túto symetriu *nemajú*. Transformáciou (A.22) sa rovnice (A.14) – (A.17) *zmenia* a to presne na rovnice (A.18) – (A.21). Takže zjednodušenie rovníc (A.7) – (A.10) zámenu súradníc (A.13) máme teraz už úplne pod kontrolou.

(S tým súvisí aj asymetria bledomodrej oblasti na Obr. 4.9. Keď zoberieme do úvahy predchádzajúcu diskusiu, tak bledomodrú oblasť treba zrkadlovo rozšíriť aj nad os $\dot{r}(0)$.)

⁴Zrkadlenie vo φ na obrázkoch riešení v časti 4.9 zodpovedá vlastne preklopeniu okolo osi x , lebo $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, -r \sin \varphi) = (x, -y)$.

⁵Diskrétnymi symetriami sa práca [24] nezaobrá. V nej sa rozoberajú len *spojité* symetrie.

A.4 Veľmi malé uhly otočenia α

V tejto časti dodatku budeme do hĺbky analyzovať, čo sa deje pre veľmi malé uhly α otočenia platne. Keď chce mravec otočiť platňu o malé α , pohybuje sa iba blízko štartovného bodu $(r_0, 0)$. Preto urobíme *lokálny* výpočet. Budeme *linearizovať* rovnice pre geodetiky v okolí riešenia $(r(t), \varphi(t), \alpha(t)) = (r_0, 0, 0)$, čo je státie v štartovnom bode.

Z istých (prísne tajných) dôvodov je lepšie, keď namiesto polárnych súradníc (r, φ) budeme mať v rovine kartézské súradnice (x, y) .⁶ Hamiltonián (4.6) v nich má podobu

$$H(x, p) = \frac{1}{2} \left[\left(p_x + \frac{y}{1+x^2+y^2} p_\alpha \right)^2 + \left(p_y - \frac{x}{1+x^2+y^2} p_\alpha \right)^2 \right]$$

Hamiltonove rovnice pre normálne geodetiky potom vyzerajú takto.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x + \frac{y}{1+x^2+y^2} p_\alpha \\ \dot{y} &= p_y - \frac{x}{1+x^2+y^2} p_\alpha \\ \dot{\alpha} &= \frac{y p_x - x p_y}{1+x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2} \\ \dot{p}_x &= \frac{[(1+y^2)^2 - x^4] p_y p_\alpha}{(1+x^2+y^2)^3} + \frac{2xy p_x p_\alpha}{(1+x^2+y^2)^2} + \frac{x(x^2+y^2-1) p_\alpha^2}{(1+x^2+y^2)^3} \\ \dot{p}_y &= \frac{[-(1+x^2)^2 + y^4] p_x p_\alpha}{(1+x^2+y^2)^3} - \frac{2xy p_y p_\alpha}{(1+x^2+y^2)^2} + \frac{y(x^2+y^2-1) p_\alpha^2}{(1+x^2+y^2)^3} \\ \dot{p}_\alpha &= 0 \end{aligned}$$

Tieto rovnice budeme linearizovať v okolí riešenia

$$(x(t), y(t), \alpha(t)) = (x_0, 0, 0) = (1, 0, 0)$$

ktoré je státiť v štartovnom bode. Z rovníc dopočítame p -čka. Vychádza

$$(p_x, p_y, p_\alpha) = \left(0, \frac{p_\alpha}{2}, p_\alpha = \text{konšt.} \right)$$

Linearizácia rovníc znamená, že budeme hľadať približné riešenie v tvare

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \varepsilon \tilde{x}(t) \\ y(t) &= 0 + \varepsilon \tilde{y}(t) \\ \alpha(t) &= 0 + \varepsilon \tilde{\alpha}(t) \\ p_x(t) &= 0 + \varepsilon \tilde{p}_x(t) \\ p_y(t) &= \frac{p_\alpha}{2} + \varepsilon \tilde{p}_y(t) \end{aligned}$$

Pričom ε je veľmi malé reálne číslo. Ide teda o malý pohyb v okolí bodu $(x_0, 0, 0)$. Keď približné riešenie dosadíme do rovníc a pozbierame, čo bude pri ε , dostaneme pre

⁶V riešení v polárnych súradniciach vznikne istý problém, ktorý v kartézskych súradniciach nevznikne.

vlnovkované funkcie *lineárne* rovnice

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{p}_x + \frac{p_\alpha}{2} \tilde{y} \quad (\text{A.23})$$

$$\dot{\tilde{y}} = \tilde{p}_y \quad (\text{A.24})$$

$$\dot{\tilde{\alpha}} = \frac{1}{2} \tilde{p}_y \quad (\text{A.25})$$

$$\dot{\tilde{p}}_x = 0 \quad (\text{A.26})$$

$$\dot{\tilde{p}}_y = -\frac{p_\alpha^2}{4} \tilde{y} - \frac{p_\alpha}{2} \tilde{p}_x \quad (\text{A.27})$$

Navyše potrebujeme splniť okrajovú úlohu, podobne, ako ju formulujeme na začiatku časti 4.8. Tu v kartézskych súradniciach chceme zabezpečiť:

začiatok	koniec
$\tilde{x}(0) = 0$	$\tilde{x}(1) = 0$
$\tilde{y}(0) = 0$	$\tilde{y}(1) = 0$
$\tilde{\alpha}(0) = 0$	$\tilde{\alpha}(1) = \alpha$

Pre jednoduchosť sme zvolili konečný čas $T = 1$. Rovnice (A.23) – (A.27) sa dajú bez problémov vyriešiť. Keď navyše splníme okrajové podmienky, dostaneme (\tilde{p}_y nás nezaujímá, tak ho nepíšeme)

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \frac{c}{2\pi} \left[(1 - \cos 2\pi t) + \frac{p}{c} \sin 2\pi t \right] \\ \tilde{y}(t) &= \frac{c}{2\pi} \left[-\frac{p}{c} (1 - \cos 2\pi t) + \sin 2\pi t \right] \\ \tilde{\alpha}(t) &= \frac{c}{2\pi} \frac{1}{2} \left[\frac{p}{c} (1 - \cos 2\pi t) - \sin 2\pi t \right] \end{aligned}$$

Kde sme označili $p \equiv \tilde{p}_x = \text{konšt.}$ a c je ľubovoľná konštanta. Všimnime si, že napriek tomu, že sme splnili okrajovú úlohu, tak v riešení zostali dve voľné konštanty. Zaujímavé je, že koncová podmienka pre $\tilde{\alpha}(t)$ sa dá splniť iba tak, že $\tilde{\alpha}(1) = \alpha = 0$. Znamená to, že do rádu ε platňa nebude otočená oproti počiatočnej pozícii. Pre nenulové α by bolo treba hľadať riešenie s presnosťou do rádu ε^2 , to však nejde analyticky.

Celkové približné riešenie vyzerá

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + \varepsilon' [(1 - \cos 2\pi t) + q \sin 2\pi t] \\ y(t) &= \varepsilon' [-q(1 - \cos 2\pi t) + \sin 2\pi t] \\ \alpha(t) &= \frac{\varepsilon'}{2} [q(1 - \cos 2\pi t) - \sin 2\pi t] \end{aligned}$$

Kde sme označili $q \equiv \frac{p}{c}$ a $\varepsilon' \equiv \frac{c}{2\pi} \varepsilon$. Efektívne teda približné riešenie závisí od jednej ľubovoľnej konštanty q a maličkého ε' .

Keď sa pohráme s výsledkom, zistíme, že riešenia sú (po projekcii) kružnice

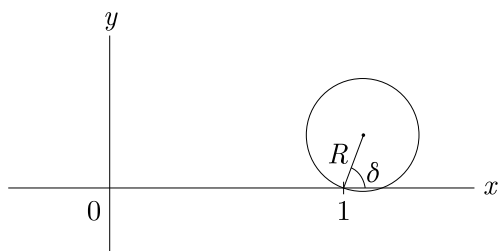
$$(x - (1 + \varepsilon'))^2 + (y + q\varepsilon')^2 = (\varepsilon' \sqrt{1 + q^2})^2 \quad (\text{A.28})$$

so stredom v bode $(1 + \varepsilon', -q\varepsilon')$ a polomerom $|\varepsilon'| \sqrt{1 + q^2}$. Zmenou ε' a q vieme hýbať polomerom aj stredom kružnice. Riešenie (A.28) je vhodné popísať namiesto parametrov ε' a q inými parametrami R a δ (Obr. A.1).

$$(x - (1 + R \cos \delta))^2 + (y - R \sin \delta)^2 = R^2 \quad (\text{A.29})$$

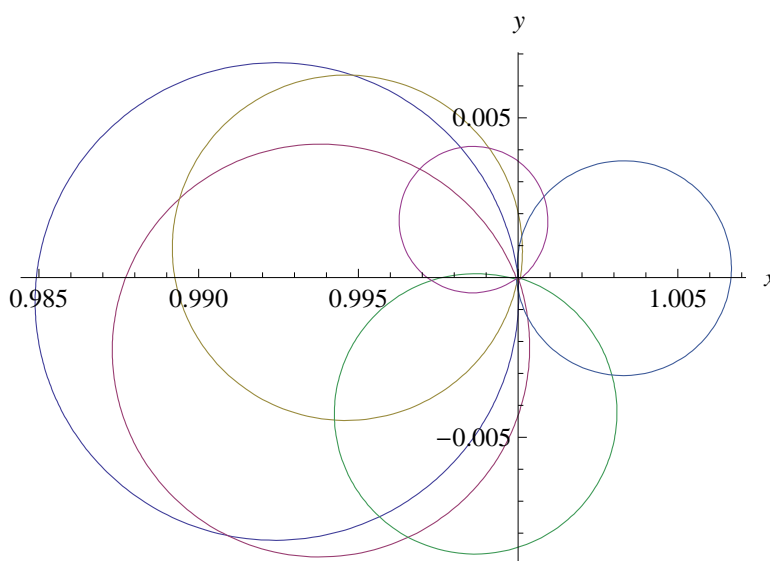
pričom

$$R \equiv |\varepsilon'| \sqrt{1 + q^2} \quad \delta \equiv \arccos \frac{\varepsilon'}{R} = \arccos \frac{\varepsilon'}{|\varepsilon'| \sqrt{1 + q^2}}$$



Obr. A.1: Približné riešenia sú kružnice.

(Na príklade mravca je zaujímavé uvedomiť si jeden poučný fakt. Na Obr. A.2 sú *približné* (numerické) riešenia *presných* rovníc. A kružnice (A.29) sú *presné* riešenia *približných* rovníc.⁷ Tieto dva prístupy všeobecne nemusia dávať rovnaké výsledky. Tu sú projekciami do $\mathbb{R}^2[x, y]$ v oboch prípadoch kružnice, ale v súradnici α to vychádza v každom prístupe inak.)

Obr. A.2: Numerické riešenia pre $\alpha < 0,006^\circ$. Osi x, y sa pretínajú v bode $(1, 0)$.

Núkajú sa dve prirodzené otázky:

1. Prečo do rádu ε vychádza $\alpha = 0$?
2. Čo je to za hlúposť, že pre maličké uhly tu máme nejednoznačné riešenie? Veď veta z časti 2.7 hovorila, že riešenie je na dostatočne krátkych úsekoch jednoznačné.

Na prvú otázku si intuitívne odpovieme pomocou Obr. 4.13. Idúc ku kratším a kratším uhlom, graf sa stáča veľmi prudko k bodu $(0, 0)$. To znamená, že keď máme nejaký veľmi malý uhol α , tak máme ešte stále dosť veľké L . Teda dĺžky geodetík klesajú pomalšie, než veľkosti uhlov α , a preto α je „vyššieho rádu malosti“ než L . Preto sa môže stať (a aj sa stalo), že keď robíme rozvoj riešenia v ε , tak príspevky ku α začnú pri vyšších mocninách ε .

⁷Toto si treba dobre rozmyslieť. V termínoch časti 3.2 z práce [24] je sústava diferenciálnych rovníc geometrickým objektom – viacrozmernou plochou v jetovom priestore. Tu sme túto plochu aproximovali rovinou v bode $(t; x, y, \alpha; p_x, p_y, p_\alpha) = (0; x_0, 0, 0; 0, \frac{p_\alpha}{2}, p_\alpha)$. Rovina reprezentuje približné rovnice, ktoré riešime presne.

Odpoveď na druhú otázku dostaneme, keď zoberieme kružnice (A.29) (čo sú projekcie riešení približných rovníc do $\mathbb{R}^2[x, y]$) a urobíme ich horizontálny zdvih (nájdeme k nim krivky, ktoré sú po projekcii kružnicami a idú stále do distribúcie). Zahodíme vypočítané približné $\alpha(t)$ a zistíme uhol otočenia α z horizontálneho zdvihu kružníc. Znie to možno zložito, ale technicky je to jednoduchá procedúra. Ohraničujúca forma (4.3) zapísaná v kartézskych súradniciach má tvar

$$\theta = \frac{1}{1+x^2+y^2}(x dy - y dx) + d\alpha$$

To znamená, že horizontálne krivky sú tie, pre ktoré platí

$$\dot{\alpha} = \frac{y \dot{x} - x \dot{y}}{1+x^2+y^2}$$

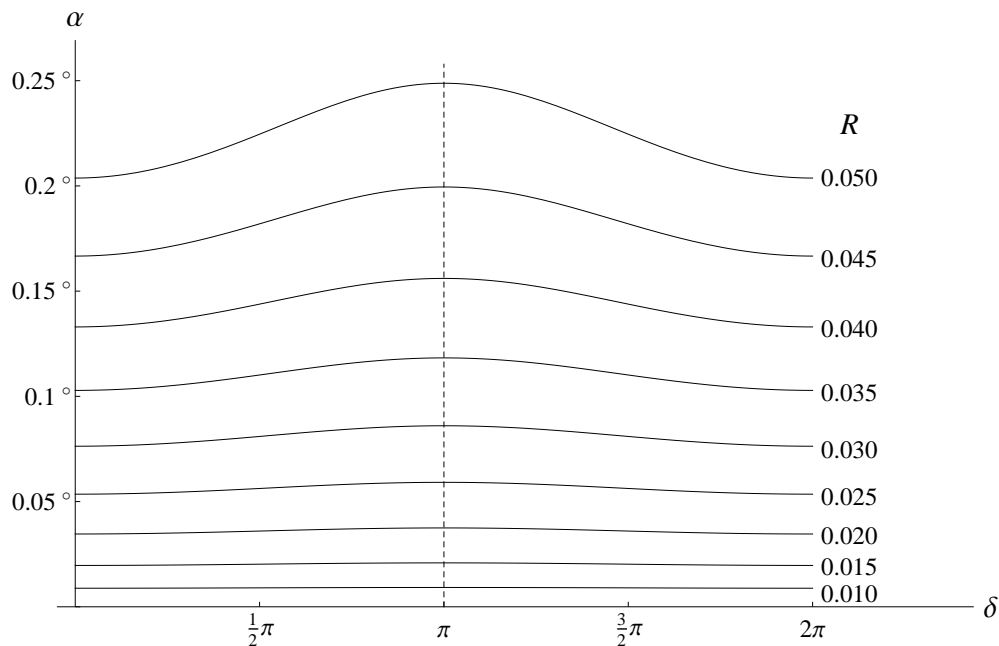
Keď chceme nájsť uhol otočenia α , treba vypočítať integrál

$$\alpha = \int_0^1 \frac{y \dot{x} - x \dot{y}}{1+x^2+y^2} dt \quad (\text{A.30})$$

Keď vypočítame uhol otočenia α , môžeme sa pýtať, ako sa mení pri *fixovanom* R v závislosti od natočenia kružnice δ , a zistiť, pre ktoré δ je uhol najväčší.⁸ Parametrizujme kružnice (A.29) prirodzeným parametrom – dĺžkou prejdenej cesty l .

$$\begin{aligned} x(l) &= 1 + R \cos \delta + R \cos \frac{l}{R} \\ y(l) &= R \sin \delta - R \sin \frac{l}{R} \end{aligned}$$

Potom bodky v deriváciách \dot{x}, \dot{y} znamenajú deriváciu podľa l a vo vzorci (A.30) integrujeme cez $l \in (0, 2\pi R)$. Integrál sme počítali numericky a výsledky sú v grafe na Obr. A.3.



Obr. A.3: Uhol otočenia α v závislosti od δ a R .

⁸Vlastne riešime duálnu úlohu sformulovanú v čase 4.1.

Na Obr. A.3 vidíme dve dôležité veci.

- Uhol otočenia platne α je pre fixované R vždy najväčší pre $\delta = \pi$. Takže (približnou) minimálnou geodetikou je spomedzi všetkých kružníc s rovnakým polomerom tá, ktorá má stred v bode $(1 - R, 0)$. To naozaj sedí intuitívne aj s Obr. 4.6. So zmenšujúcim sa uhlom α má slučka os súmernosti stále totožnú s osou x .
- So zmenšujúcim sa polomerom R je maximum na Obr. A.3 stále menej výrazné. To znamená, že pre veľmi malé kružnice môže byť problém numericky alebo riešením približných rovníc rozlíšiť, ktorá kružnica je efektívnejšia. A to sa tu presne deje. Ľudovo povedané, keď je R dosť malé, tak mravec v podstate nič nerobí a keď nič nerobí, je jedno ako to nerobí.⁹

Takže už poznáme odpoveď aj na druhú otázku. Normálna geodetika je pre veľmi malé uhly len jedna (a preto je zároveň minimálna) a limitne sa podobá na kružnicu. Zdanlivá nejednoznačnosť je len artefaktom približných metód.

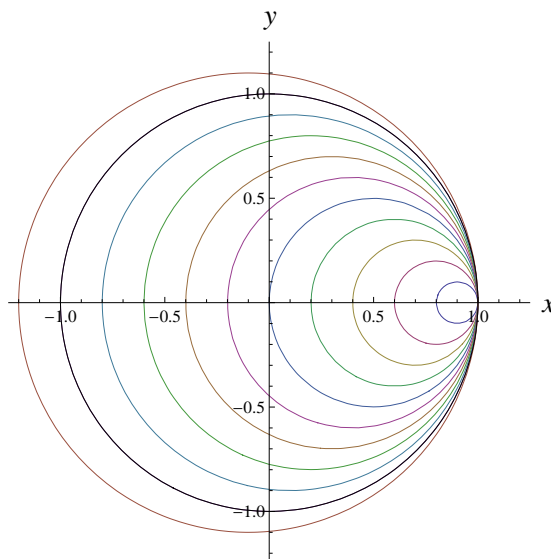
Vďalšej časti dodatku si môžete prečítať, prečo sú kružnice s väčším R celkom dobrými alternatívami ku normálnym geodetikám z Obr. 4.6 a Obr. 4.10.

A.5 Íšť po kružnici sa vypláca

Urobme len tak zo špásu jeden pokus. Zoberme kružnice (A.29) s $\delta = \pi$ (na Obr. A.4), ktoré vyšli ako najefektívnejšie zo všetkých kružníc, teda

$$(x - (1 - R))^2 + y^2 = R^2$$

a nájdime závislosť ich dĺžok od uhla otočenia α . Urobíme to aj pre veľké R . Výsledkom

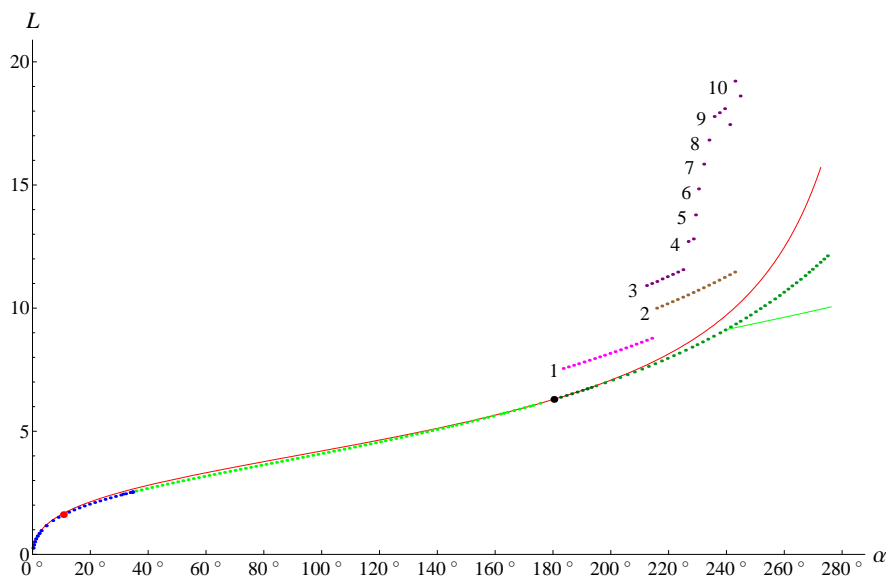


Obr. A.4: Kružnice $(x - (1 - R))^2 + y^2 = R^2$.

je červená čiara na Obr. A.5. Červená čiara sa na veľkom intervale drží tesne *nad* doteraz nájdenými bodkami. Pre malé uhly sme to čakali – krátke geodetiky sa podobajú na kružnice. Tiež sme očakávali, že čierna bodka, ktorá reprezentuje kružnicu, bude ležať na červenej čiare. Zaujímavé je, že keby sme pre $\alpha < 220^\circ$ išli namiesto geodetík po kružniciach, tak sa budeme len *málo* líšiť *v dĺžke* od geodetík,¹⁰ ale *dosť v tvare* kriviek.

⁹Mravec sa tu správa ako bežný človek. Keď sa už môže flákať, vie sa flákať na tisíc spôsobov.

¹⁰Preto sa v rýchlokurze subriemannovských cestovateľov učia mravce na prvej hodine o kružniciach.

Obr. A.5: Závislosť dĺžky geodetik a kružníc od uhla otočenia α .

A.6 * Normálne geodetiky alternatívne

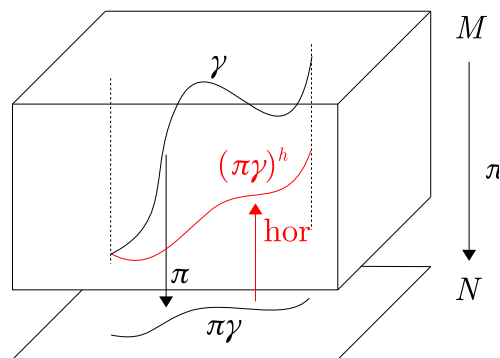
Ak fibrovaná varieta $\pi : M \rightarrow N$ je hlavná G -fibrácia, tak geodetiky sa dajú hľadať alternatívne nasledovne:

1. Rozšírime subriemannovskú metriku g na *riemannovskú* metriku K fungujúcu pre všetky vektory z TM .
2. Nájdeme *riemannovské* geodetiky pre metriku K .
3. Sprojektujeme geodetiky do bázy fibrácie (do N). (V prípade mravca do $\mathbb{R}^2[r, \varphi]$.)
4. Geodetiky horizontálne zdvihneme do M . (Pre mravca dopočítame $\alpha(t)$.)

V článku [16] je uvedený dôkaz, že tento postup je ekvivalentný štandardnému postupu hľadania subriemannovských geodetik.

Postup je schematicky naznačený na Obr. A.6. Krivka γ je (vo všeobecnosti) *nehorizontálna* riemannovská geodetika pre metriku K . Krivka $(\pi\gamma)^h$ je subriemannovská geodetika vyrobená z krivky γ .

Body 2. – 4. sú zrejmé. Otázka je, ako treba rozšíriť subriemannovskú metriku g . Zatiaľ sme neprezradili jeden dôležitý detail. V článku [16] sa píše, že správnu rozšírenú metriku vieme vyrobiť vtedy, keď máme v Lieovej algebre \mathcal{G} štruktúrnej grupy G metriku B invariantnú vzhľadom na pridruženú reprezentáciu Ad . Existencia metriky B umožňuje skalárne násobiť vertikálne vektory. (Myslí sa vektory smerujúce do vlákna. Fibráciu vertikálnych vektorov označujeme \mathcal{V} .) Každý vertikálny vektor (aj



Obr. A.6: Alternatívne hľadanie geodetik.

Každý vertikálny vektor (aj

vektorové pole) sa dá napísať ako lineárna kombinácia fundamentálnych polí akcie grupy G .

$$v = v^i \xi_{E_i} \equiv \xi_X \quad v \in \mathcal{V}_x \quad E_i, X \equiv v^i E_i \in \mathcal{G}$$

kde ξ_{E_i} je fundamentálne pole prislúchajúce bázovému prvku $E_i \in \mathcal{G}$. (Presnejšie by sme mali písať $\xi_{E_i}(x)$, teda hodnota fundamentálneho poľa v bode x .) Vertikálne vektory u, v budeme skalárne násobiť takto

$$\hat{B}(u, v) \equiv \hat{B}(\xi_X, \xi_Y) := B(X, Y) \quad X, Y \in \mathcal{G}$$

Tenzor \hat{B} je metrikou pre vertikálne vektory. Podľa článku [16] treba metriky g a \hat{B} spojiť do jednej riemannovskej metriky K tak, aby platilo:

1. Vertikálne vektory sú v zmysle K kolmé na horizontálne.

$$\mathcal{V} \perp \mathcal{H}$$

2. Ohraničenie metriky K na horizontálne (resp. vertikálne) vektory je metrika g (resp. \hat{B}).

$$K|_{\mathcal{H}} = g \quad K|_{\mathcal{V}} = \hat{B}$$

Ľubovoľné vektory $u, v \in T_x M$ teraz vynásobíme tak, že ich rozdelíme na horizontálne a vertikálne časti, horizontálne časti vynásobíme zvlášť pomocou subriemannovskej metriky g , vertikálne vynásobíme pomocou \hat{B} a výsledky sčítame.

$$K(u, v) \equiv (g \oplus \hat{B})(u, v) := g(\text{hor}(u), \text{hor}(v)) + \hat{B}(\text{ver}(u), \text{ver}(v))$$

Metrika K sa nazýva Kaluzova-Kleinova metrika a jej geodetiky sa volajú Kaluzove-Kleinove geodetiky.

(Heslo Kaluza-Klein znie v istých kruhoch priam magicky a nepatrí sa, aby sme okolo neho len tak bez debaty prešli. Kaluzova-Kleinova teória je rozšírenie všeobecnej teórie relativity zo 4-rozmernej variety, ktorou je náš priestoročas, na 5-rozmernú varietu – hlavnú $U(1)$ -fibráciu, kde bázou fibrácie je priestoročas. Takáto $U(1)$ -fibrácia s metrikou K , ktorá vyhovuje zmieneným podmienkam, sa volá Kaluzova-Kleinova geometria. Ziskom z tohto rozšírenia je, že ak nájdeme geodetiky pre Kaluzovu-Kleinovu metriku a sprojektujeme ich do priestoročasu, dostaneme trajektórie pohybu nabitých častíc v elektromagnetickom poli v zakrivenom priestore, teda elektromagnetizmus a gravitáciu súčasne. Viac nájdete vo Wikipédii [26] a tam uvedených referenciách. V našom príklade s mravcom máme namiesto priestoročasu rovinu platne $\mathbb{R}^2[r, \varphi]$ a štruktúrnou grupou je $SO(2)$, ktorá je izomorfná grupe $U(1)$.)

V prípade mravca je v úlohe G len 1-rozmerná grupa $SO(2)$. V jej Lieovej algebre $so(2)$ máme (až na konštantný násobok) jednoznačnú metriku

$$B = d\alpha \otimes d\alpha$$

kde α je súradnica na grupe $SO(2)$. Metrika je Ad-ivariantná.¹¹ Metrika \hat{B} vyzerá graficky rovnako

$$\hat{B} = d\alpha \otimes d\alpha$$

len teraz už je α súradnica vo vlákne.

Subriemannovská metrika g pre mravca je

$$g = dr \otimes dr + r^2 d\varphi \otimes d\varphi$$

¹¹Na komutatívnej grupe je $\text{Ad} = \text{Id}$, takže ľubovoľný objekt je automaticky Ad-ivariantný.

Výroba metriky K je technicky jednoduchá. Zoberieme bázové polia distribúcie (4.5) a vyrobíme z nich (lineárnymi kombináciami) polia \hat{e}_1, \hat{e}_2 , ktoré sú *ortonormované* vzhľadom na metriku g a pridáme k nim fundamentálne pole (označované \hat{e}_3) akcie grupy, ktoré je ortonormované vzhľadom na metriku \hat{B} . Dobrý výber je

$$\begin{aligned}\hat{e}_1 &= \partial_r \\ \hat{e}_2 &= \frac{1}{r} (\partial_\varphi - f(r)\partial_\alpha) \quad f(r) = \frac{r^2}{1+r^2} \\ \hat{e}_3 &= \partial_\alpha\end{aligned}$$

Polia $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ tvoria bázu TM . Nájdime duálnu bázu. Vychádza

$$\begin{aligned}\hat{e}^1 &= dr \\ \hat{e}^2 &= r d\varphi \\ \hat{e}^3 &= d\alpha + f d\varphi\end{aligned}$$

Metrika K potom vyzerá

$$\begin{aligned}K &= \hat{e}^\mu \otimes \hat{e}^\mu = dr \otimes dr + r^2 d\varphi \otimes d\varphi + (d\alpha + f d\varphi) \otimes (d\alpha + f d\varphi) \\ &= dr \otimes dr + (r^2 + f^2) d\varphi \otimes d\varphi + d\alpha \otimes d\alpha + f(d\varphi \otimes d\alpha + d\alpha \otimes d\varphi)\end{aligned}$$

Čitateľ si môže overiť, že podmienky na K sú naozaj splnené.

(Ohraničenie na \mathcal{H} resp. \mathcal{V} sa urobí tak, že si predstavíme, ako by dopadlo dosádzanie horizontálnych resp. vertikálnych vektorov. Napríklad keď do výrazu pre K dosádzame kombinácie polí \hat{e}_1 a \hat{e}_2 , tak člen $\hat{e}^3 \otimes \hat{e}^3$ dá vždy nulu (tak bolo \hat{e}^3 vyrobené) a nenulové výsledky dávajú iba prvé dva členy, teda metrika g . Čitateľ si môže rozmyslieť, že analogickým postupom vo všeobecnosti vyrobíme metriku K s požadovanými vlastnosťami.)

Všetko je pripravené na to, aby sme mohli hľadať riemannovské geodetiky metriky K . Lagranžián pre geodetiky vychádza

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} [\dot{r}^2 + (r^2 + f^2)\dot{\varphi}^2 + \dot{\alpha}^2 + 2f\dot{\varphi}\dot{\alpha}]$$

Rovnice pre geodetiky sú (s využitím zákonov zachovania za cyklické súradnice φ a α) takéto

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= r\dot{\varphi}^2 + (f\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}\dot{\alpha})f' & (i) \\ (r^2 + f^2)\dot{\varphi} + f\dot{\alpha} &= k_1 & (ii) \\ \dot{\alpha} + f\dot{\varphi} &= k_2 & (iii)\end{aligned}$$

Riešenia týchto rovníc by mali byť po projekcii do $\mathbb{R}^2[r, \varphi]$ rovnaké, ako sprojektované riešenia rovníc (A.7) – (A.12) (resp. rovníc (4.7) – (4.12) pre $a = 1$). V rovniciach (A.7) – (A.12) vystupuje \ddot{r} (vyjadrené spojením (A.7) a (A.10)) a $\dot{\varphi}$ nezávisle od α . Aby sme to mohli porovnať s tunajšími rovnicami, potrebujeme vyjadriť z rovníc (i) – (iii) rovnice pre \ddot{r} a $\dot{\varphi}$ tak, že nebudú závisieť od α . To sa naozaj dá. Z rovnice (iii) máme $\dot{\alpha} = k_2 - f\dot{\varphi}$. Ak to dosadíme do (i) a (ii), po úpravách dostaneme

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= \frac{(k_1)^2}{r^3} - \frac{2(k_2)^2 r}{(1+r^2)^3} + \frac{k_2(k_2 - 2k_1)r}{(1+r^2)^2} \\ \dot{\varphi} &= \frac{k_1}{r^2} - \frac{k_2}{1+r^2}\end{aligned}$$

Pre $k_1 = p_\varphi$ a $k_2 = p_\alpha$ to súhlasí s tým, čo hovoria rovnice (A.7) – (A.12). Hľadanie geodetik pomocou Kaluzovej-Kleinovej metriky je naozaj ekvivalentné štandardnému postupu.

Dodatok B

Dodatok ku príkladu so singulárnymi geodetikami

B.1 Hľadanie singulárnych kriviek

Ohraničenie symplektickej 2-formy na distribúciu vychádza

$$\hat{\omega} = d\lambda \wedge (dz + A(r)d\varphi) + \lambda A' dr \wedge d\varphi \quad A(r) = 2r^2 - r^4$$

Hľadáme krivky $p(t)$, pre ktoré platí

$$i_{\dot{p}}\hat{\omega} = 0 \quad \text{kde} \quad \dot{p} = \dot{r}\partial_r + \dot{\varphi}\partial_\varphi + \dot{z}\partial_z + \dot{\lambda}\partial_\lambda$$

Všetko dosadíme a dostaneme podmienku

$$i_{\dot{p}}\hat{\omega} = (-\lambda A'\dot{\varphi}) dr + (A\dot{\lambda} + \lambda A'\dot{r})d\varphi + \dot{\lambda}dz - (\dot{z} + A\dot{\varphi})d\lambda \stackrel{!}{=} 0$$

Podmienka je ekvivalentná sústave rovníc

$$\begin{aligned} \lambda A'\dot{\varphi} &= 0 & (i) \\ A\dot{\lambda} + \lambda A'\dot{r} &= 0 & (ii) \\ \dot{\lambda} &= 0 & (iii) \\ \dot{z} + A\dot{\varphi} &= 0 & (iv) \end{aligned}$$

Riešením rovnice (iii) je *nenulová* (pozri definíciu singulárnych kriviek z časti 2.8.1) konštanta $\lambda = \lambda_0 \neq 0$. Preto sa rovnice (i) a (ii) zjednodušia na

$$\begin{aligned} A'\dot{\varphi} &= 0 & (a) \\ A'\dot{r} &= 0 & (b) \end{aligned}$$

Pre $A' \neq 0$ je riešením len státie v bode. Pre

$$A' = 4r(1 - r^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 0 \quad \text{alebo} \quad r = 1$$

sú rovnice (a) a (b) splnené automaticky. Prípady $r = 0$ nie je zaujímavý (státie v bode). Pre $r = 1$ už však dostávame zaujímavé riešenie. Funkcia $\dot{\varphi}$ môže byť ľubovoľná, takže aj $\varphi(t)$ je ľubovoľná. Zvoľme $\varphi(t) = \varphi_0 - t$. Z rovnice (iv), ktorá je podmienkou na horizontalitu, vychádza

$$z(t) = z_0 + A(1)t = z_0 + t$$

Našli sme riešenie

$$p(t) : (r(t), \varphi(t), z(t), \lambda(t)) = (1, \varphi_0 - t, z_0 + t, \lambda_0) \quad t \in \langle 0, T \rangle$$

Pričom T je ľubovoľné. Singulárnymi krivkami sú špirály ležiace na jednotkovom valci.

$$\gamma(t) : (r(t), \varphi(t), z(t)) = (1, \varphi_0 - t, z_0 + t) \quad t \in \langle 0, T \rangle$$

s ľubovoľným $T \in \mathbb{R}^+$. Keby sme zvolili iné $\varphi(t)$, dostaneme tie isté čiary so zmenenou parametrizáciou.

Dodatok C

* Dodatok ku Berryho fáze

C.1 Horizontálna distribúcia a subriemannovská metrika

V Hilbertovom priestore máme Hermitovský skalárny súčin $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Dotykové priestory $T_\psi \mathbb{H}$ sú izomorfné \mathbb{H} a používame na nich ten istý skalárny súčin. Súčin zdedia aj vektory z $T_\psi S(\mathbb{H}) \subset T_\psi \mathbb{H}$. Tento súčin treba obmedziť na horizontálne vektory a získame subriemannovskú metriku.

Ako vyzerá vektor $v \in T_\psi S(\mathbb{H})$

Pre vektory $\psi \in S(\mathbb{H})$ platí podmienka

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1 \quad (\text{C.1})$$

Predstavme si krivku $\psi(t)$ idúcu stále po $S(\mathbb{H})$. Derivujme podmienku (C.1) v čase $t = 0$. Po úpravách vychádza

$$\operatorname{Re} \langle \psi | v \rangle = 0 \quad \text{kde} \quad \psi \equiv \psi(0) \quad v \equiv \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \psi(t)$$

Takže dotykové priestory ku Hilbertovej sfére sú

$$T_\psi S(\mathbb{H}) = \{v \in T_\psi \mathbb{H} = \mathbb{H}, \operatorname{Re} \langle \psi | v \rangle = 0\}$$

Vertikálne vektory

Vertikálne vektory majú smer fundamentálneho poľa akcie grupy $U(1)$. Fundamentálne pole vychádza

$$E_1 = \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_0 R_\alpha \psi = \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_0 e^{i\alpha} \psi = i\psi$$

Čitateľ si môže overiť, že vektor $i\psi$ naozaj patrí do $T_\psi S(\mathbb{H})$. Vertikálny podpriestor v bode $\psi \in S(\mathbb{H})$ je

$$\mathcal{V}_\psi = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(i\psi)$$

Keby sme nerobili Span cez \mathbb{R} , ale cez \mathbb{C} , tak dostaneme aj vektory, čo nepatria do $T_\psi S(\mathbb{H})$. Na to si treba vyskúšať, že podmienka na dotykovosť ku Hilbertovej sfére

$$\operatorname{Re} \langle \psi | v \rangle \stackrel{!}{=} 0$$

pripúšťa pre $v = z i\psi$, kde $z = a + ib \in \mathbb{C}$, len reálne z .

Horizontálne vektory

V našej situácii sa definuje horizontálny podpriestor ako kolmý na vertikálny v zmysle metriky v totálnom priestore. (Vysvetlenie, prečo to takto treba robiť, ide za rámec tejto práce. Nájdete ho v knihe [18] v kapitole 11.) Takže pre horizontálny vektor v v bode ψ platí $\langle i\psi|v\rangle = 0$. Z toho dostaneme

$$\mathcal{H}_\psi = \{v \in T_\psi S(\mathbb{H}), \langle \psi|v\rangle = 0\}$$

Takže už poznáme horizontálnu distribúciu. Subriemannovská metrika je skalárny súčin $\langle \cdot | \cdot \rangle$, ktorému sľúbime, že mu budeme dosadzovať len horizontálne vektory.

Záver

Subriemannovská geometria študuje subriemannovské variety, čo sú trojice (M, \mathcal{H}, g) , teda variety M s horizontálnou distribúciou \mathcal{H} a metrickým tenzorom g operujúcim na distribúcii. Zaujímavými krivkami v subriemannovskej geometrii sú *minimálne subriemannovské geodetiky*, najkratšie krivky spájajúce ľubovoľné dva body a smerujúce v každom bode do distribúcie \mathcal{H} .

Hlavným cieľom práce bolo *preniknúť* do subriemannovskej geometrie a na konkrétnych príkladoch si *vyskúšať* hľadanie subriemannovských geodetík. Oba ciele sa podarilo naplniť. Subriemannovská geometria sa najprv teoreticky študovala v kapitole 2. Hlavným prínosom kapitoly 2 je didaktické poňatie problematiky a množstvo obrázkov, ktoré dopomôžu čitateľovi k vytvoreniu intuitívnych predstáv. Hľadanie geodetík sme si vyskúšali v kapitolách 4 a 5. Kapitola 4 detailne rozpracovala úlohu o mravcovi na gramofónovej platni a v kapitole 5 sme uviedli jednoduchý príklad, v ktorom sa vyskytnú singulárne geodetiky.

Technickým problémom pri riešení úloh je, že prakticky takmer každá úloha, ktorú sformulujeme v subriemannovskej geometrii, sa nedá úplne riešiť analyticky a treba zapojiť numeriku. Pri numerike si treba dať pozor a pokiaľ sa dá, kontrolovať, či vychádzajú rozumné výsledky. Kontrolu rozumnosti numerických výsledkov sme v úlohe o mravcovi robili množstvom čiastkových analytických výpočtov (vyšetovanie radiálnej časti úlohy, približné analytické riešenie pre malé uhly otočenia platne, analýza vlastností riešení z tvaru rovníc,...).

Čo si z práce môže odniesť čitateľ?

- Intuitívny obraz o subriemannovskej geometrii, na ktorom môže stavať pri štúdiu ďalšej literatúry.
- Predstavu o možných aplikáciách subriemannovskej geometrie.
- Schopnosť sformulovať a v princípe aj riešiť úlohy v subriemannovskej geometrii. Na tieto účely bol v časti 2.10 uvedený kuchynský recept.
- Sumu 30 € za najkrajšie vyriešenie problému o jednokolke z kapitole 6.

Zoznam použitej literatúry

- [1] BLOCH, A. 2007. Nonholonomic Mechanics and Control, Springer
- [2] BONNARD, B., CHYBA, M. 2003. Singular Trajectories and their Role in Control Theory, Springer
- [3] CAPOGNA, L. , DANIELLI, D., PAULS, S. D., TYSON, J. T. 2007. An Introduction to the Heisenberg Group and the Sub-Riemannian Isoperimetric Problem, Birkhäuser
- [4] CRAMPIN, M., PIRANI, F. A. E. 1987. Applicable Differential Geometry (London Mathematical Society Lecture Note Series), Cambridge University Press
- [5] FECKO, M. 1995. "Falling cat" connections and the momentum map, J. Math. Phys. 36 (12), 6709 – 6719
- [6] FECKO, M. 2001. Menej tradičné aplikácie modernej diferenciálnej geometrie vo fyzike, Habilitačná práca. Dostupné na internete: <http://sophia.dtp.fmph.uniba.sk/~fecko/studenti.html>
- [7] FECKO, M. 2004. Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov, Iris
- [8] FECKO, M. 2009. Subriemannian geodesics - an introduction, prezentácia. Dostupné na internete: http://sophia.dtp.fmph.uniba.sk/~fecko/referaty/stara_lesna_2009.pdf
- [9] FECKO, M. 2010. Poincaré (non-holonomic Lagrange) Equations, prezentácia. Dostupné na internete: http://sophia.dtp.fmph.uniba.sk/~fecko/referaty/stara_lesna_2010.pdf
- [10] FEYNMAN, R. P., LEIGHTON, R. B., SANDS, M. 2000. Feynmanovy prednášky z fyziky s řešenými příklady 1/3, Fragment
- [11] FROHLICH, C. 1979. Do Springboard Divers Violate Angular Momentum Conservation? Am. J. Phys., 583 – 592, Jul 1979
- [12] GENZOR, J. 2010. Izoholonomické úlohy v klasickej mechanike, Bakalárska práca. Dostupné na internete: http://sophia.dtp.fmph.uniba.sk/~fecko/bakalar/bakalarske_prace.html
- [13] LANDAU, L. D., LIFSHITZ, E. M. 1976. Course of Theoretical Physics, Mechanics. Vol. 1 (3rd ed.)
- [14] LAUMOND, J. P. 1998. Robot Motion Planning and Control, Springer
- [15] LE DONNE, E. Lecture notes on sub-Riemannian geometry. Dostupné na internete: http://www.math.ethz.ch/~ledonnee/sub-Riem_notes.pdf

- [16] MONTGOMERY, R. 1990. Isoholonomic problems and some applications, *Commun. Math. Phys.* 128, 565 – 592
- [17] MONTGOMERY, R. 1994. Abnormal Minimizers, *SIAM J. Control and Optimization*, Vol. 32, no. 6, 1605 – 1620
- [18] MONTGOMERY, R. 2002. *A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications*, American Mathematical Society
- [19] PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S., VETTERLING, W., FLANNERY, B. 2007. *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing*, 3rd Edition
- [20] SARTI, A., CITTI, G., PETITOT, J. 2008. The symplectic structure of the primary visual cortex, *Biol. Cybernet.*, 98(1): 33 — 48
- [21] SARTI, A., BARBIERI, D., CITTI, G., SANGUINETTI, G. 2010. An uncertainty principle underlying the pinwheel structure in the primary visual cortex, zatiaľ nepublikované, dostupné na <http://arxiv.org>
- [22] SCHUTZ, B. 1980. *Geometrical Methods of Mathematical Physics*, Cambridge University Press
- [23] SHAPER, A., WILCZEK, F. 1987. Self-propulsion at low Reynolds number, *Phys. Rev. Lett.* 58: 2051 – 2054
- [24] TOMEK, L. 2009. Symetrie diferenciálnych rovníc, Bakalárska práca. Dostupné na internete: http://sophia.dtp.fmph.uniba.sk/~fecko/bakalar/bakalarske_prace.html
- [25] http://en.wikipedia.org/wiki/Great_circle
- [26] http://en.wikipedia.org/wiki/Kaluza-Klein_theory
- [27] http://hubblesite.org/the_telescope/nuts_.and._bolts/spacecraft_systems/pointing/
- [28] http://www.youtube.com/watch?v=Ua4Gh_4XdwQ