Katedra Teoretickej Fyziky a Didaktiky Fyziky
Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzita Komenského, Bratislava

Synchronizácia Hodín v Neinerciálnej Vzťažnej Sústave

Bakalárska práca

4.1.1. Fyzika

Peter Mészáros

Vedúci: doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.

Bratislava, 2012

Kód práce: 114ff3ae-c114-47f0-affa-e9e0e1bd4b3b

Synchronizácia hodín v neinerciálnej vzťažnej sústave

Bakalárska práca

Peter Mészáros

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Študijný odbor: 4.1.1 FYZIKA

Vedúci bakalárskej práce:
doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.

BRATISLAVA, 2012

Čestné vyhlásenie

Čestne prehlasujem, že túto bakalársku prácu som vypracoval samostatne s použitím literatúry uvedenej v zozname.

Bratislava 2012

Peter Mészáros

46190683

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta:	Peter Mészáros
Študijný program:	fyzika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor:	4.1.1. fyzika
Typ záverečnej práce:	bakalárska
Jazyk záverečnej práce:	slovenský

Názov: Synchronizácia hodín v neinerciálnej vzťažnej sústave

Cieľ: Popis zadania: Veľká časť pozoruhodností špeciálnej teórie relativity vyplýva z toho, že čas je trochu zložitejšia vecička, ako by si človek na základe celoživotných skúseností a zdravého rozumu naivne myslel (a ako si aj do objavenia ŠTR naozaj myslel). Napríklad v ŠTR je relatívny pojem súčasnosti, čo je – uznáte sami - dosť neintuitívne (ak pre jedného pozorovateľa prebehli dve udalosti súčasne, pre iného to tak byť nemusí) . Ak chceme robiť výpovede o časoch udalostí v rôznych bodoch priestoru, je dobré mať v týchto bodoch (navzájom) synchronizované hodiny (také, aby ukazovali „v rovnakom čase" rovnaký čas). Procedúra synchronizácie sa v učebniciach štandardne opisuje pomocou svetelných signálov. Dá sa to technicky urobiť aj ináč, priamym využitím metrického tenzora v Minkowského priestore (tie svetelné lúče sú v ňom implicitne prítomné a objektívne ide o to isté). Procedúra synchronizácie sa dá opísať takto: priestorový smer je taký, ktorý je kolmý na časový smer. Na kolmosť potrebujeme metrický tenzor (aké šťastie - ten práve máme!). Infinitezimálne blízka udalosť, ktorá je odo mňa v čisto priestorovom smere, má mať rovnaký čas, ako mám ja. Ak blízke hodiny v čisto priestorovom smere odo mňa neukazujú taký čas, ako moje, treba ich trochu posunúť tak, aby ukazovali. Keď ich takto posuniem, tak už sú synchronizované s mojimi. Ak sa hodiny postupne synchronizujú (v dostatočne „zlej" sústave, napríklad rotujúcej) pozdĺž uzavretej krivky (slučky), tak sa môže stať, že tie „predposledné" napodiv nie sú synchronizované s poslednými (= prvými). Čo je jedno z mnohých prekvapení v ŠTR. Cieľ úlohy: Prvým cieľom bude zvládnuť potrebné (pomerne jednoduché) veci z (istých častí) diferenciálnej geometrie, na ktorých stojí pochopenie vyššie opisovanej metódy synchronizácie. Kľúčovým objektom záujmu je istá synchronizačná 1-forma (dá sa vyrátať priamo z metrického tenzora) . Táto 1-forma by sa potom rátala z konkrétnych metrických tenzorov zodpovedajúcich neinerciálnym sústavám (rotujúcej, rovnomerne zrýchľujúcej) a dedukovalo by sa z nej, ako to je so synchronizáciou hodín v tej-ktorej sústave.

Vedúci: doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.

Dátum zadania: 13.05.2011

Dátum schválenia: 20.10.2011

prof. RNDr. Jozef Masarik, DrSc.
garant študijného programu

46190683

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Mn
....
študent

Fecho
....
vedúci

Poďakovanie

Na tomto mieste chcem poďakovať svojmu vedúcemu Doc. RNDr. Mariánovi Feckovi, PhD. za užitočné rady, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce. Ďakujem tiež svojej mame za opravu gramatických chýb a preklepov.

Abstrakt

Autor:	Peter Mészáros
Názov páce:	Synchronizácia hodín v neinerciálnej vzťažnej sústave
Škola:	Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta:	Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra:	Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky
Vedúci práce:	Doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.
Miesto:	Bratislava
Dátum:	27.5.2012
Počet strán:	45
Druh záverečnej práce:	Bakalárska práca

Abstrakt:

Bakalárska práca skúma problém synchronizovateľnosti hodín v neinerciálnych vzťažných sústavách. Najprv sa odvodí postup na zosynchronizovanie hodín v dvoch blízkych svetobodoch na susedných svetočiarach. Pomocou neho sa odvodí vzťah pre výpočet časovej odchýlky pre synchronizovanie hodín v dvoch vzdialených bodov ako integrál zo synchronizačnej 1-formy. Táto synchronizačná 1-forma sa dá vyjadriť priamo z metrického tenzora. Potom sa počítajú časové odchýlky v jednotlivých vzťažných sústavách. Z hľadiska otázky synchronizovateľnosti sústav sú zaujímavé integrály zo synchronizačnej 1-formy po uzavretých krivkách. Nakoniec sa odvodia podmienky synchronizovateľnosti vyjadrené opäť pomocou metrického tenzora. Tieto kritériá sa odvádzajú tromi spôsobmi, kde sa využíva najmä Frobeniovo kritérium integrovateľnosti distribúcií. Tieto kritériá sa potom aplikujú na predchádzajúce príklady.

Kľúčové slová:

metrický tenzor, synchronizačná 1-forma, Frobeniovo kritérium.

Abstract

Author:	Peter Mészáros
Title:	Synchronization of cloks in noninertial reference frame
University:	Comenius University in Bratislava
Faculty:	Faculty of Mathematics, Physics and Informatics
Department:	Department of Theoretical Physics and Didactics of Physics
Advisor:	Doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.
City:	Bratislava
Dátum:	27.5.2012
Number of pages:	45
Type of thesis:	Bachelor thesis

Abstract:

This bachelor thesis examines the problem of synchronizability of clocks in noninertial reference frames. Firstly a procedure to synchronize clocks at two nearby points on the neighboring worldlines is derived. It helps to derive a procedure to calculate the time variance for synchronization of clocks at two distant points as the integral of synchronizing 1-form. This synchronizing 1-form can be expressed directly in terms of the metric tensor. Then, the time variances in certain reference frames are calculated. To answer the question of synchronizability of reference frames it is interesting to examine integrals of synchronizing 1-forms over closed curves. Finally, criteria of synchronizability are derived expressed in terms of the metric tensor again. These criteria are derived in three ways using mainly Frobenius criterion of integrability of distributions. These criteria are then applied to the previous examples.

Key words:

metric tensor, synchronizing 1-form, Frobenius criterion.

Obsah

Predhovor **11**

Úvod **12**

1 Synchronizácia - teoretický úvod **13**
1.1 Súradnice a metrický tenzor . . . 13
1.2 Synchronizácia . . . 14
1.3 Horizontálna a vertikálna časť vektora . . . 15
1.4 Synchronizácia po krivke . . . 19

2 Odvodenie špeciálnych Lorentzových transformácií pomocou normovania metrického tenzora **22**
2.1 Metrický tenzor . . . 22
2.2 Synchronizácia (diagonalizácia) . . . 23
2.3 Normovanie . . . 24
Doplňujúce výpočty . . . 25

3 Rotácia okolo premennej osi a sústva spojená s bodom na povrchu rotujúcej gule **27**
3.1 Sústava rotujúca okolo premennej osi . . . 27
3.1.1 Transformácia do nových súradníc . . . 27
3.1.2 Synchronizácia po kružnici pre jednoduchý precesný pohyb . . . 29
3.2 Sústava na povrchu rotujúcej gule (bez gravitácie) . . . 30
3.2.1 Dodatočná transformácia . . . 30
3.2.2 Synchronizačná 1-forma . . . 30
3.2.3 Synchronizácia . . . 31
Doplňujúce výpočty . . . 33

4 Sústava s pohyblivým stredom a so stálou osou rotácie a nerovnomerný pohyb po priamke **38**
4.1 Sústava s pohyblivým stredom a so stálou osou rotácie . . . 38
4.1.1 Transformácia metrického tenzora . . . 38
4.1.2 Integrovanie synchronizačnje 1-formy po slučke . . . 39
4.2 Nerovnomerný pohyb po priamke . . . 39
Doplňujúce výpočty . . . 40

5 Kritérium synchronizovateľnosti **44**
5.1 Distribúcia . . . 44
5.2 Frobeniovo kritérium . . . 45
5.3 Priamy prístup . . . 46
5.4 Ďalší prístup . . . 48
5.5 Zhrnutie . . . 51

6 Aplikácia kritéria synchronizovateľnosti na príklady **52**
6.1 Rotácia okolo premennej osi 52
6.2 Sústava s pohyblivým stredom a so stálou osou rotácie 53
6.3 Rovnomerný a nerovnomerný pohyb po priamke 53

Záver **55**

Literatúra **56**

Predhovor

Táto práca skúma synchronizovateľnosť neinerciálnych vzťažných sústav na úrovni znalostí špeciálnej teórie relativity, niektorých základných ideí týkajúcich sa úvodu do všeobecnej teórie relativity a niektorých častí diferenciálnej geometrie.

Skúmajú sa jednotlivé neinerciálne vzťažné sústavy, pričom dôraz sa kladie na výpočet integrálov zo synchronizačných 1-foriem po krivkách spájajúcich body, ktoré chceme zosynchronizovať. Hodnota tohto integrálu predstavuje čas, o ktorý treba posunúť hodiny v jednom bode, aby boli synchronizované s hodinami v druhom bode. Z hľadiska skúmania možnosti alebo nemožnosti zosynchronizovať danú sústavu je zaujímavé počítať integrály po uzavretých krivkách. Aby totiž bolo možné sústavu zosynchronizovať, tento integrál nesmie závisieť od integračnej cesty ale len od začiatočného a koncového bodu.

V kapitole **2** sa odvádzajú špeciálne Lorentzove transformácie pomocou synchronizácie, ktorá nám uľahčuje nájsť súradnice, v ktorých má metrický tenzor kanonický tvar. Myšlienka tohto odvodenia je založená na ekvivalentnosti všetkých inerciálnych sústav, čiže v každej inerciálnej sústave musíme vedieť nájsť taký súradnicový systém, v ktorom má metrický tenzor kanonický tvar. Táto kapitola bola zavedená do práce najmä preto, lebo dobre ilustruje rozdiel medzi "skutočnými fyzikálnymi" súradnicami a súradnicami zavedenými abstraktnejším spôsobom a význam metrického tenzora v súvislosti s nimi, čo je kľúčová vec potrebná pre správne porozumenie celej práci.

Kritériá synchronizovateľnosti sa dajú odvodiť mnohými spôsobmi. V tejto práci sú uvedené tri. Dve z nich sú založené na Frobeniovom kritériu integrovateľnosti distribúcií. Ilustrujú užitočnosť distribúcií definovaných pomocou súčasnosti udalostí v časopriestore a súlad s intuitívnou predstavou o ich geometrickom význame.

Kvôli zostručneniu vzťahov sa využíva Einsteinova sumačná konvencia. Malé latinské písmená označujú indexy 1 až 3 a malé grécke písmená označujú indexy 0 až 3, kde index 0 zodpovedá časovej súradnici: $x^0 = ct \equiv t$ a indexy 1 až 3 zodpovedajú priestorovým súradniciam: $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$. Taktiež sa kladie rýchlosť svetla $c = 1$ ako bezrozmerné číslo. Pri tejto voľbe sa čas meria v metroch a prevodový vzťah medzi metrami a sekundami v sústave SI je daný hodnotou rýchlosti svetla v sústave SI.

Úvod

V nerelativistickej fyzike synchronizácia hodín vo vzťažnej sústave nepredstavuje významný problém. Jedna z jej realizácií spočíva vo využití svetelných lúčov. Predstavme si vzťažnú sústavu so zavedeným súradnicovým systémom, ktorý slúži na meranie vzdialeností jej bodov. Stačí si zvoliť jeden referenčný bod a nejaký čas t_0 predstavujúci hodnotu času, ktorú začnú ukazovať hodiny v tomto bode. Z tohto referenčného bodu potom v čase t_0 vyšleme svetelný signál, ktorý sa bude šíriť po celej vzťažnej sústave. Keď tento signál dorazí do nejakého bodu sústavy, hodiny v tomto bode nastavíme tak, aby ukazovali čas t_0 plus čas, ktorý svetelný lúč potreboval na to, aby k nemu dorazil z referenčného bodu. Tento čas je daný len rýchlosťou svetla a vzdialenosťou od referenčných hodín, pričom rýchlosť svetla vo vákuu je prírodná konštanta, ktorú poznáme a na meranie vzdialeností slúži zavedený súradnicový systém.

Keby sme takto zosynchronizovali všetky body v jednej vzťažnej sústave, mohli by sme túto sústavu použiť na veľmi rýchle zosynchronizovanie iných vzťažných sústav. Stačilo by, keby sme hodiny v každom bode druhej sústavy všetky naraz nastavili podľa hodín v prvej - referenčnej sústave, s ktorými sa práve stretávajú, pričom zabezpečiť aby sa to udialo v jednom časovom okamihu by nebol problém práve vďaka tomu, že prvá sústava je už zosynchronizovaná. Tento postup funguje vďaka tomu, že v nerelativistickej fyzike je pojem súčasnosti udalostí dobre definovaný.

V teórii relativity je však situácia zložitejšia. Pri opise vzťažných sústav nám už totiž nestačí zaviesť priestorové a časové súradnice nezávisle od seba. Postup synchronizovania pomocou svetelných lúčov, kde sme najprv zaviedli priestorové súradnice a až následne pomocou nich sme zavádzali časovú súradnicu, zlyhá na tom, že priestorovú vzdialenosť dvoch bodov nemožno vyčítať priamo z ich priestorových súradníc. Často sa totiž stáva, že do priestorových odľahlostí svetobodov prispievajú aj časové zložky ich súradníc a do časových odľahlostí zase priestorové zložky. Druhý postup zase zlyhá na relatívnosti pojmu súčasnosti.

Jediné čo máme pri popise vzťažných sústav v teórii relativity k dispozícii sú súradnicový systém a k nim prislúchajúci metrický tenzor. Tento metrický tenzor však meria len časopriestorové intervaly a o samotných priestorových a časových odľahlostiach vypovedá len málo. Našťastie existuje postup na synchronizovanie dvoch blízkych svetobodov, ktorý si vystačí iba so samotným metrickým tenzorom. Keď už vieme zosynchronizovať infinitezimálne blízke svetobody, vieme odvodiť postup na zosynchronizovanie aj dvoch vzdialených svetobodov a to tak, že počítame integrál zo synchronizačnej 1-formy vyjadrenej z metrického tenzora po krivke, ktorá tieto body spája. Tieto postupy sú podrobne odvodené v prvej kapitole. V druhej kapitole sa tento postup aplikuje na zosynchronizovanie inerciálnej vzťažnej sústavy, čo sa dá využiť na odvodenie špeciálnych Lorentzových transformácií.

Pri takomto synchronizovaní však môžu nastať určité problémy. Prvým problémom je to, že synchronizovanie môže závisieť nielen od koncových bodov, ale aj od synchronizačnej cesty. Vtedy tento postup zlyháva a sústavu nie je možné zosynchronizovať. Druhým problémom je to, že aj keď vieme vzťažnú sústavu zosynchronizovať v jednom okamihu, neskôr už prestáva byť zosynchronizovaná. V tretej a štvrtej kapitole sa rozoberajú príklady, ktoré tieto problémy dobre ilustrujú. V piatej kapitole sa potom pomocou zväčša geometrických úvah odvádzajú kritériá synchronizovateľnosti, ktoré sa v šiestej kapitole použijú na prešetrenie predchádzajúcich príkladov. Príklady budú dostatočne všeobecné na to, aby sa z nich v šiestej kapitole dali vyvodiť všeobecné závery.

Kapitola 1

Synchronizácia - teoretický úvod

1.1 Súradnice a metrický tenzor

Zaviesť súradnicový systém vo vzťažnej sústave znamená každému jej svetobodu priradiť usporiadanú štvoricu čísel, jednu časovú a tri priestorové súradnice. Môžeme si to predstaviť tak, že v každom bode priestoru sú hodiny merajúce čas. Časopriestorové intervaly sa potom merajú pomocou metrického tenzora g. V inerciálnej sústave S' sa priestorové súradnice (x', y', z') zavádzajú pomocou kladne orientovanej euklidovsky ortonormálnej bázy a časová súradnica t' predstavuje čas, v ktorom udalosť nastala. Metrický tenzor má potom kanonický tvar:

$$g = dt' \otimes dt' - dx' \otimes dx' - dy' \otimes dy' - dz' \otimes dz' \tag{1.1}$$

a nazýva sa Minkowského metrický tenzor. Teraz opíšeme spôsob, ako zaviesť súradnicový systém v neinerciálnej vzťažnej sústave S [1]. Z pohľadu inerciálnej sústavy S' hodiny spojené s priestorovými bodmi sústavy S vykresľujú systém svetočiar. Tieto svetočiary musia byť spojité do rovnakého rádu ako metrický tenzor a nesmú sa pretínať. Zároveň musí byť ich sklon väčší ako 1, tj. musia ležať vo svetelných kužeľoch, keďže žiaden hmotný bod nesmie dosiahnuť rýchlosť svetla. Tieto svetočiary sa dajú chápať ako triedy ekvivalencie svetobodov sústavy S. Každému svetobodu možno preto jednoznačne priradiť svetočiaru, na ktorej leží. Ak tejto svetočiare bijektívnym spojitým zobrazením [1] priradíme usporiadanú trojicu čísel, tj. každá usporiadaná trojica čísel je priradená len jednej svetočiare a blízkym svetočiaram sú priradené blízke usporiadané trojice čísel, tak týmto spôsobom sú definované priestorové súradnice svetobodu. Časová súradnica zase charakterizuje konkrétny bod na svetočiare, tj. každému svetobodu na svetočiare je spojitou monotónnou a bijektívnou funkciou priradené reálne číslo - súradnicový čas. Taktiež sa tento súradnicový čas musí meniť spojito od svetočiare k svetočiare.

Z takto zavedených súradníc nemusíme vždy vedieť priamo vyčítať časopriestorové intervaly. Na to nám poslúži metrický tenzor. Ide o ten istý metrický tenzor, ako v inerciálnej sústave S', musíme ho však transformovať, aby bol kompatibilný so súradnicami zavedenými v sústave S. Transformáciu súradníc $(t', x', y', z') \leftrightarrow (t^{SUR}, x^{SUR}, y^{SUR}, z^{SUR})$ bude výhodné voliť tak, aby

$$t' = t^{SUR} \tag{1.2}$$

čo nie je v rozpore s vyššie opísanými podmienkami na zavádzanie časovej súradnice v sústave S. Zvyšné transformácie priestorových súradníc budú:

$$x'^i = \phi^i(t', x^{SUR}, y^{SUR}, z^{SUR}) = \phi^i(t^{SUR}, x^{SUR}, y^{SUR}, z^{SUR}) \tag{1.3}$$

kde funkcia ϕ^i určuje i-tu priestorovú súradnicu udalosti tak, ako sa javí z pohľadu inerciálnej sústavy S' v čase t', keď sa z pohľadu sústavy S nachádza v bode so súradnicami

[1] difeomorfizmus

$(x^{SUR}, y^{SUR}, z^{SUR})$. Inak povedané, trojica funkcií ϕ^i určuje pohyb bodov spojených so sústavou S z pohľadu inerciálnej sústavy S'. Vidíme tiež, že voľba transformácie časov (1.2) bola výhodná kvôli úprave v (1.3), kde sme funkciu ϕ^i potrebovali vyjadriť len pomocou súradníc v S. Metrický tenzor v sústave S teda získame tak, že Minkowského metrický tenzor (1.1) zo sústavy S' transformujeme pomocou transformácií (1.2) a (1.3).

1.2 Synchronizácia

Súradnice v sústave S sme skonštruovali tak (1.2), že udalosti ktoré sú z pohľadu inerciálnej sústavy S' súčasné, majú rovnaký súradnicový čas v sústave S. Avšak udalosti, ktoré sú súčasné v jednej sústave, nemusia byť súčasné v inej sústave, preto súradnice $(t^{SUR}, x^{SUR}, y^{SUR}, z^{SUR})$ v S majú ten nedostatok, že udalosti, ktoré majú rovnaký súradnicový čas, v skutočnosti nenastali v rovnakom čase. To znamená, že sústava S popísaná týmito súradnicami nie je synchronizovaná. Zaujímavou otázkou je, či existujú súradnice $(t^{SYN}, x^{SUR}, y^{SUR}, z^{SUR})$, v ktorých sú udalosti s rovnakým časom t^{SUR} súčasné, tj. či je sústavu S možné zosynchronizovať. Pri synchronizácii sa hodiny s priestorovými súradnicami $(x^{SUR}, y^{SUR}, z^{SUR})$ v čase t^{SUR} posunú o časovú odchýlku Δt^{SUR}, ktorá môže závisieť nielen od týchto priestorových súradníc, ale aj od času.

$$t^{SYN} = t^{SUR} + \Delta t(t^{SUR}, x^{SUR}, y^{SUR}, z^{SUR}) \tag{1.4}$$

Čo znamená, že sa môže stať, že hoci je možné sústavu zosynchronizovať v jednom čase, v inom čase už prestáva byť synchronizovaná a treba ju znova synchronizovať.

Z relatívnosti súčasnosti vyplýva aj to, že pri synchronizácii hodín v neinerciálnej sústave S si nemôžeme pomôcť inou inerciálnou sústavou, ktorú by sme považovali za synchronizovanú. Pri synchronizácii nám teda nepomôže "pohľad z vonka", ale celá synchronizácia musí prebehnúť takpovediac "vo vnútri" sústavy, ktorú synchronizujeme. Najprirodzenejším spôsobom synchronizácie je preto využitie svetelných lúčov.

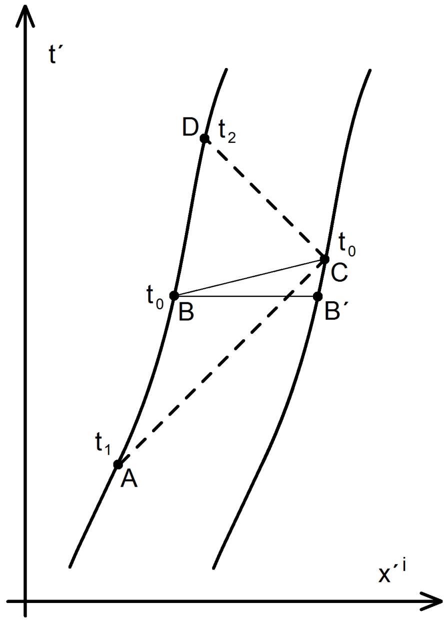
Najprv preskúmame možnosti synchronizácie dvoch hodín na blízkych svetočiarach. [2] Pojem blízkosti svetočiar je dobre definovaný, pretože náš súradnicový systém má spojité vlastnosti, tj. keď sú dve hodiny infinitezimálne blízko v jednom čase, musia byť aj vo všetkých ostatných časoch. Povedzme, že jedny hodiny sú referenčné a druhé hodiny na susednej svetočiare budeme podľa nich synchronizovať. Najjednoduchšou možnosťou je z referenčných hodín vyslať svetelný lúč k druhým hodinám s informáciou o čase, v ktorom bol vyslaný. Na druhých hodinách sa potom nastaví tento čas plus čas, ktorý svetelný lúč potreboval na to, aby k nim od referenčných hodín dorazil. Tento čas je daný vzdialenosťou hodín, ktorá sa počas tohto procesu, keďže ide o blízke svetočiary, mení len veľmi málo. Lenže určiť ich priestorovú vzdialenosť je problém, keďže metrický tenzor, ktorý máme k dispozícii, meria len časopriestorové intervaly a o samotných časových a priestorových odľahlostiach svetobodov nám nič nehovorí. Takto definovaný spôsob synchronizácie preto musíme upraviť nasledovne:

Najprv sa z referenčných hodín v čase, keď budú ukazovať čas t_1, vyšle svetelný lúč. Keď tento svetelný lúč v čase, keď referenčné hodiny ukazujú čas t_0, dorazí k druhým hodinám, odrazí sa od nich späť k referenčným hodinám a dorazí k nim v čase, keď tieto hodiny budú ukazovať čas t_2. Celá situácia je znázornená na obrázku.

Keďže ide o dve infinitezimálne blízke svetočiary, vzdialenosť medzi hodinami sa počas tohto procesu nemení, resp. zmena ich vzdialenosti je nekonečne malá veličina vyššieho rádu ako vzdialenosť svetočiar. Svetelnému lúču preto trvá rovnako dlho prejsť jedným aj druhým smerom. Takže platí:

$$t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

[2] Ideovo blízkym spôsobom (hoci matematicky iným postupom) sa synchronizácia odvádza aj v knihe od Landaua a Lifshitza [2] v kapitole 10, paragraf 84.



Obr. 1.1: Synchronizovanie hodín na blízkych svetočiarach

Svetobody B a C majú po synchronizácii rovnaké časy [3]. Keď máme dané obe svetočiary a bod B na referenčnej svetočiare, tak bod C je už jednoznačne daný vyššie popísaným spôsobom synchronizácie pomocou svetelných lúčov. Všimnime si, že pri tomto postupe sme na rozdiel od prvého postupu nepotrebovali vedieť nič o priestorovej vzdialenosti hodín na týchto svetočiarach. Svetobody B a B' majú rovnaké časy z pohľadu sústavy S'. Keďže nám pri zadefinovaní transformácií nič nebránilo položiť $t' = t^{SUR}$, [4] tvrdenie o svetobodoch B a B' sa dá preformulovať tak, že tieto svetobody majú rovnaké súradnicové časy pred synchronizáciou. Takže samotná synchronizácia sa spraví nasledovne: Najprv zafixujeme súradnicový čas. V súlade s obrázkom ho môžeme označiť t_0^{SUR}. V tomto čase sa referenčné hodiny nachádzajú na obrázku vo svetobode B a hodiny na vedľajšej svetočiare, ktoré chceme podľa nich nastaviť, vo svetobode B'. Zavedieme tiež infinitezimálny [5] vektor $v = \varepsilon^i \partial_i$, ktorý spája svetobody B a B'. Potom hodiny na vedľajšej svetočiare posunieme späť o čas $-\Delta t^{SUR}$, ktorý im trvá dostať sa do svetobodu, ktorý je po synchronizácii súčasný svetobodu, v ktorom sa v čase t_0^{SUR} nachádzajú referenčné hodiny. Tento svetobod je na obrázku označený ako C. Takže:

$$t_0^{SYN} = t_0^{SUR} + \Delta t^{SUR} \tag{1.5}$$

1.3 Horizontálna a vertikálna časť vektora

Teraz zavedieme horizontálnu a vertikálnu časť vektora v [4]. Horizontálna časť vektora hor v spája po synchronizácii súčasné svetobody ležiace na svetočiarach, ktoré predtým spájal vektor v. Takto definovaný vektor hor v má teda dobre definovanú aj veľkosť. Čo sa týka jeho smeru, určuje ho vzťah:

$$g(\partial_t, \mathrm{hor}\ v) = 0 \tag{1.6}$$

Kde vektor ∂_t je dotykový vektor k svetočiare. Predstavuje teda smer, ktorým plynie čas hodinám spojeným so sústavou S. Na jeho veľkosti, ako uvidíme neskôr, nezáleží. Jedinou

[3] Pomocou svetelných lúčov sa takto definuje priestorový smer v knihe od B. Schutza [3] v kapitole 1.5.
[4] Metrický tenzor sa prispôsobil
[5] Inak by sme nemohli hovoriť o tom, že vektor spája body.

podmienkou je, aby sa táto veľkosť menila spojite od svetobodu k svetobodu. Rovnosť (1.6) tiež vyjadruje skutočnosť, že vektor $v = \varepsilon^i \partial_i$ nemusí byť v zmysle metrického tenzora g kolmý na časový vektor ∂_t. Je kolmý len na ∂_t'.

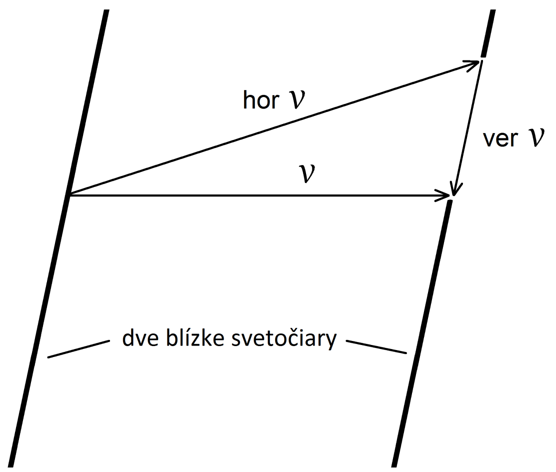
Vertikálna časť ver v spája svetobody, ktoré prislúchajú tým istým hodinám v infinitezimálne blízkych časoch. Takže:

$$\text{ver } v = \lambda \partial_t \tag{1.7}$$

Keďže obe hodiny majú blízke svetočiary, je jedno, ktoré z týchto hodín použijeme pri tejto definícii, keďže rozdiel medzi ver v pri jednej a pri druhej definícii je nekonečne malý vyššieho rádu ako typická vzdialenosť svetočiar. Veľkosť vertikálnej časti vektora v už nie je definovaná tak priamočiaro, ako u horizontálnej časti. Tu je veľkosť definovaná až vzťahom:

$$v = \text{ver } v + \text{hor } v \tag{1.8}$$

Z obrázka 1.2 vidno, že tento vzťah je v súlade s definíciou veľkosti aj horizontálnej časti vektora v.



Obr. 1.2: horizontálna a vertikálna časť metrického tenzora

Zatiaľ máme zadefinované vektory hor v a ver v, kde vektor $v = \varepsilon^i \partial_i$ má len priestorové zložky. Keď chceme zadefinovať len samotné hor a ver ako operátory, ktoré ľubovoľnému vektoru jednoznačne priradia iný vektor, musíme túto definíciu rozšíriť tak, aby sme vedeli, čo máme priradiť vektorom, ktoré majú aj časovú zložku. Keďže tieto operátory, ako uvidíme neskôr, budeme používať len pre čisto priestorové vektory, máme veľkú ľubovôľu pri doplnení ich definície. Preto môžeme položiť:

$$\begin{aligned} \text{hor } \partial_t &= 0 \\ \text{ver } \partial_t &= \partial_t \end{aligned} \tag{1.9}$$

Navyše vzťah (1.8) zostáva v platnosti teraz už pre všetky vektory.

Teraz, keď už máme operátory hor a ver dostatočne zadefinované, vieme vypočítať časovú odchýlku Δt^{SUR} zo vzťahu (1.4) o ktorú chceme hodiny na susednej svetočiare posunúť. Z definície horizontálnej časti vektora v a zo vzťahu (1.8) vyplýva, že:

$$\Delta t^{SUR} = \pm \|\text{ver } v\| \tag{1.10}$$

pričom ak má vektor ver v rovnaký smer ako ∂_t ,tak znamienko je plus a ak opačný, tak mínus. A tiež $\|...\|$ nie je norma vektora v zmysle metrického tenzora g, ale v zmysle Euklidovského metrického tenzora $\delta_{\mu\nu} dx^{SUR\ \mu} \otimes dx^{SUR\ \nu}$, pretože neposúvame skutočný - fyzikálny, ale len súradnicový čas. Teraz nám zostáva už len odvodiť konkrétny tvar operátorov hor a ver.

Vypočítame ich komponenty na báze vektorov ∂_μ. Najprv vektory hor ∂_i a ver ∂_i zapíšeme v komponentnom tvare:

$$\begin{aligned} \text{hor } \partial_i &= \text{hor}^\mu{}_i \partial_\mu = \text{hor}^j{}_i \partial_j + \text{hor}^0{}_i \partial_0 \\ \text{ver } \partial_i &= \lambda_i \partial_t \end{aligned}$$

Potom využijeme vzťah (1.8):

$$\partial_i = \text{hor } \partial_i + \text{ver } \partial_i = \text{hor}^j{}_i \partial_j + \left(\text{hor}^0{}_i + \lambda_i\right) \partial_t$$

Táto rovnosť je splnená, keď:

$$\begin{aligned} \text{hor}^j{}_i &= \delta^j_i \\ \text{hor}^0{}_i &= -\lambda_i \end{aligned}$$

takže:

$$\text{hor } \partial_i = \partial_i - \lambda_i \partial_t$$

Na výpočet funkcií λ_i využijeme vzťah (1.6):

$$0 = g(\partial_t, \text{hor } \partial_i) = g(\partial_t, \partial_i) - \lambda_i g(\partial_t, \partial_t)$$

odkiaľ sa ľahko vyjadrí:

$$\lambda_i = \frac{g(\partial_t, \partial_i)}{g(\partial_t, \partial_t)} \equiv \frac{g_{0i}}{g_{00}} \tag{1.11}$$

Teraz už máme vektory hor ∂_i vyjadrené len pomocou komponent metrického tenzora a spolu s definíciou (1.9) už máme všetko, čo potrebujeme na výpočet horizontálnej časti akéhokoľvek vektora:

$$\begin{aligned} \text{hor } \partial_i &= \partial_i - \frac{g_{0i}}{g_{00}} \partial_t \\ \text{hor } \partial_t &= 0 \end{aligned}$$

Samotný operátor hor [6], ako tenzor typu $\binom{1}{1}$ má tvar:

$$\text{hor} = dx^j \otimes \left(\partial_j - \frac{g_{0j}}{g_{00}} \partial_t\right) \tag{1.12}$$

Keď zložkám vektorových polí priradíme usporiadané štvorice funkcií - stĺpce a kovektorovým poliam riadky, tak operátoru - tenzoru hor vieme priradiť maticu:

$$\text{hor} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{g_{01}}{g_{00}} & -\frac{g_{02}}{g_{00}} & -\frac{g_{03}}{g_{00}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zo vzťahu (1.9) a (1.11) vieme určiť aj vertikálnu časť bázových vektorov:

$$\begin{aligned} \text{ver } \partial_i &= \lambda_i \partial_t = \frac{g_{0i}}{g_{00}} \partial_t \\ \text{ver } \partial_t &= \partial_t \end{aligned}$$

Samotný operátor ver , ako tenzor typu $\binom{1}{1}$ má tvar:

$$\text{ver} = dt \otimes \partial_t + dx^j \otimes \frac{g_{0j}}{g_{00}} \partial_t \tag{1.13}$$

[6] Doteraz sme používali hor ∂_i namiesto hor $(\partial_i, \cdot)$.

a v maticovom tvare:

$$\text{ver} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{g_{01}}{g_{00}} & \frac{g_{02}}{g_{00}} & \frac{g_{03}}{g_{00}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ak máme sústavu opísanú súradnicovým systémom a metrickým tenzorom, vieme vypočítať časopriestorový interval medzi ľubovoľnými dvomi bodmi tejto sústavy. Tento časopriestorový interval však predstavuje len jedno číslo a strácame tak informáciu o samotnej časovej a priestorovej odľahlosti. Teraz však máme už aj operátory hor a ver , pomocou ktorých vieme určovať osobitne časové a priestorové odľahlosti svetobodov. Pre tieto účely zadefinujeme horizontálnu a vertikálnu časť metrického tenzora nasledovným spôsobom:

$$\begin{aligned} \text{hor } g &= g(\text{hor } \cdot\, , \text{hor } \cdot) \\ \text{ver } g &= g(\text{ver } \cdot\, , \text{ver } \cdot) \end{aligned} \tag{1.14}$$

Pre horizontálnu časť metrického tenzora nám na bázových vektoroch vyjde:

$$\begin{aligned} (\text{hor } g)(\partial_t, \partial_t) &= g(0,0) = 0 \\ (\text{hor } g)(\partial_t, \partial_i) &= (\text{hor } g)(\partial_i, \partial_t) = g(\text{hor } \partial_i, 0) = 0 \\ (\text{hor } g)(\partial_j, \partial_i) &= (\text{hor } g)(\partial_i, \partial_j) = g\left(\partial_i - \frac{g_{0i}}{g_{00}}\partial_t, \partial_j - \frac{g_{0j}}{g_{00}}\partial_t\right) = \\ &= g_{ij} + \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}g_{00}}g_{00} - \frac{g_{0j}g_{i0}}{g_{00}} - \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} = \\ &= g_{ij} - \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} \end{aligned}$$

takže:

$$\text{hor } g = \left(g_{ij} - \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}}\right) dx^i \otimes dx^j \tag{1.15}$$

Podobne aj pre vertikálnu časť:

$$\begin{aligned} (\text{ver } g)(\partial_t, \partial_t) &= g(\partial_t, \partial_t) = g_{00} \\ (\text{ver } g)(\partial_t, \partial_i) &= (\text{ver } g)(\partial_i, \partial_t) = g(\frac{g_{0i}}{g_{00}}\partial_t, \partial_t) = \frac{g_{0i}}{g_{00}}g_{00} = g_{0i} \\ (\text{ver } g)(\partial_j, \partial_i) &= (\text{ver } g)(\partial_i, \partial_j) = g\left(\frac{g_{0i}}{g_{00}}\partial_t, \frac{g_{0j}}{g_{00}}\partial_t\right) = \\ &= \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}g_{00}}g_{00} = \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} \end{aligned}$$

$$\text{ver } g = g_{00}dt \otimes dt + g_{0i}(dx^i \otimes dt + dt \otimes dx^i) + \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}}dx^i \otimes dx^j \tag{1.16}$$

Ľahko nahliadneme, že tiež platí:

$$g = \text{hor } g + \text{ver } g$$

Tenzor hor g slúži na meranie priestorových odľahlostí svetobodov a ver g na meranie časových odľahlostí. Funguje to nasledovným spôsobom: Predstavme si dve blízke svetočiary. Zvolíme si na nich dva svetobody X a Y, ktorým prislúchajú blízke časy. Nech tieto svetobody spája vektor w. Priestorovú odľahlosť svetobodov X a Y vypočítame ako:

$$\Delta r = \sqrt{\left|(\text{hor } g)\big|_{X\approx Y}(w,w)\right|} \tag{1.17}$$

Podobne pre časovú odľahlosť:

$$\Delta t = \sqrt{\left|(\text{ver } g)\big|_{X\approx Y}(w,w)\right|} \tag{1.18}$$

Na prvý pohľad by sa teda mohlo zdať, že posledný vzťah (1.18) by mohol slúžiť aj na synchronizovanie hodín na blízkych svetočiarach. V skutočnosti ale neplatí $|\Delta t| = |\Delta t^{SUR}|$, pretože Δt je skutočný - fyzikálny čas, kým Δt^{SUR} predstavuje len súradnicový čas, ktorý môže "bežať" inak rýchlo, ako skutočný čas, čo sa prejaví tak, že $g_{00} \neq 1$. Nie je však ťažké nájsť vzťah medzi týmito časmi. Stačí sa len lepšie pozrieť na komponenty metrického tenzora.

$$\begin{aligned} g &= g_{00} dt^{SUR} \otimes dt^{SUR} + \underbrace{\sum_{(\mu,\nu)\neq(0,0)} g_{\mu\nu} dx^{SUR\ \mu} \otimes dx^{SUR\ \nu}}_{\tilde{g}} = \\ &= \sqrt{g_{00}} dt^{SUR} \otimes \sqrt{g_{00}} dt^{SUR} + \tilde{g} \equiv dt \otimes dt + \tilde{g} \end{aligned}$$

Pričom funkciu g_{00} sme mohli bezstarostne odmocniť, pretože predpokladáme, že časy v inerciálnej sústave S' a v neinerciálnej sústave S bežia rovnakým smerom. Takže platí:

$$dt = \sqrt{g_{00}} dt^{SUR}$$

a preto aj:

$$|\Delta t^{SUR}| = \frac{|\Delta t|}{\sqrt{g_{00}}}$$

Teraz máme už dva spôsoby ako vypočítať časovú odchýlku, o ktorú chceme posunúť hodiny na vedľajšej svetočiare, aby boli s referenčnými hodinami na prvej svetočiare správne synchronizované:

$$\Delta t^{SUR} = \pm \|\text{ver } v\| = \pm \frac{\sqrt{|(\text{ver } g)(v,v)|}}{\sqrt{g_{00}}} \tag{1.19}$$

To, že pri oboch spôsoboch získame rovnaké výsledky, overíme ľahko.

$$\begin{aligned} \text{ver } v &= \varepsilon^i \text{ver } \partial_i = \varepsilon^i \frac{g_{0i}}{g_{00}} \partial_t \\ \frac{(\text{ver } g)(\varepsilon^i \partial_i, \varepsilon^j \partial_j)}{g_{00}} &= \frac{\varepsilon^i \varepsilon^j g_{0i} g_{0j}}{g_{00} g_{00}} = \left(\frac{\varepsilon^i g_{0i}}{g_{00}} \right)^2 \end{aligned}$$

Keď si spomenieme, že normu vektora $\|...\|$ sme definovali v zmysle Euklidovského metrického tenzora [7], vidíme, že oba spôsoby dávajú naozaj rovnaké výsledky.

$$\begin{aligned} \Delta t^{SUR} &= \pm \left| \varepsilon^i \frac{g_{0i}}{g_{00}} \right| = \varepsilon^i \frac{g_{0i}}{g_{00}} = \\ &= \varepsilon^i \frac{g_{0i}}{g_{00}} \partial_t t^{SUR} = (\varepsilon^i \text{ver } \partial_i) t^{SUR} = (\text{ver } v) t^{SUR} \\ &= -\varepsilon^i \left(\partial_i - \frac{g_{0i}}{g_{00}} \partial_t \right) t^{SUR} = -(\varepsilon^i \text{hor } \partial_i) t^{SUR} = -(\text{hor } v) t^{SUR} \end{aligned} \tag{1.20}$$

Neurčitosť znamienka sa tu odstránila nasledovne: Ak je výraz $\varepsilon^i g_{0i}/g_{00}$ v absolútnej hodnote kladný, vektor ver v má rovnaký smer ako ∂_t a hodiny posúvame dopredu, takže pre časovú odchýlku platí: $\Delta t^{SUR} > 0$. Ak je záporný, tak naopak, takže znamienka časovej odchýlky a výrazu v absolútnej hodnote sú rovnaké.

1.4 Synchronizácia po krivke

Aby sme zosynchronizovali hodiny, ktoré nie sú blízke, budeme musieť počítať integrál po krivke Γ, ktorá ich spája [4]. Táto krivka bude ležať v nadrovine $t^{SUR} = t_0^{SUR}$

$$\Gamma : \tau \mapsto \left(t_0^{SUR}, x^{SUR}(\tau), y^{SUR}(\tau), z^{SUR}(\tau) \right) \tag{1.21}$$

[7] $\|\partial_t\| = 1$

Je to preto, lebo sa môže stať, že konkrétne hodiny budeme musieť nastaviť v každom čase t^{SUR} inak. Ak by integračná krivka prechádzala cez oblasti s rôznym súradnicovým časom, pri integrovaní by sa mohli nazbierať iné časové odchýlky ako naozaj potrebujeme a nezískali by sme dobrý výsledok. Takže najistejší spôsob, akým by sa dala zosynchronizovať celá sústava S je ten, že v nej zafixujeme súradnicový čas $t^{SUR} = t_0^{SUR}$ a potom hodiny v každom jej bode posunieme o príslušný časový rozdiel Δt^{SUR}, ktorý vypočítame pomocou integrovania po príslušnej krivke. Môže sa však stať, že túto sústavu vôbec nie je možné zosynchronizovať. To sa stane vtedy, keď integrál nezávisí len od koncových bodov ale aj od výberu integračnej cesty.

Predstavme si dva blízke svetobody $\Gamma(\tau)$ a $\Gamma(\tau + \Delta\tau)$, kde $\Gamma(\tau)$ leží na referenčnej svetočiare. Tieto body spája vektor:

$$\Gamma(\tau + \Delta\tau) - \Gamma(\tau) \approx \Delta\tau\dot{\Gamma}(\tau) = \Delta\tau\dot{x}^i\partial_i$$

Hodiny na vedľajšej svetočiare vo svetobode $\Gamma(\tau + \Delta\tau)$ treba podľa vzťahu (1.20) posunúť o čas:

$$\Delta t^{SUR} = (\text{ver }(\Delta\tau\dot{\Gamma}(\tau)))t^{SUR} = -(\text{hor }(\Delta\tau\dot{\Gamma}(\tau)))t^{SUR}$$

takže ak synchronizujeme hodiny vo svetobodoch $\Gamma(a)$ a $\Gamma(b)$ časový rozdiel vypočítame ako:

$$\Delta t^{SUR} = \int\limits_a^b d\tau(\text{ver }\dot{\Gamma}(\tau))t^{SUR} = -\int\limits_a^b d\tau(\text{hor }\dot{\Gamma}(\tau))t^{SUR}$$

Tieto integrály vyjadríme ako integrály 1-formy po krivke Γ. Najprv urobíme nasledujúcu úpravu:

$$\begin{aligned}(\text{ver }\dot{\Gamma})t^{SUR} &= \left\langle dt^{SUR}, \text{ver }\dot{\Gamma}\right\rangle = t^{SUR}_{,\mu}\text{ver}^\mu{}_\nu\dot{x}^{SUR\ \nu} = \\ &= \text{ver}^\mu{}_\nu t^{SUR}_{,\mu}\dot{x}^{SUR\ \nu} = (\text{ver }dt^{SUR})_\nu\dot{x}^{SUR\ \nu}\end{aligned}$$

Prvá rovnosť je len definíciou gradientu ako kovektora. Zátvorky $<\ ,\ >$ znamenajú, že kovektor naľavo pustíme na vektor napravo, prípadne naopak. Ďalej:

$$\begin{aligned}\Delta t^{SUR} &= \int\limits_a^b(\text{ver }dt^{SUR})_\mu\dot{x}^{SUR\ \mu} = \int\limits_a^b(\text{ver }dt^{SUR})_\mu J^\mu_\nu d\tau^\nu = \\ &= \int\limits_a^b(\text{ver }dt^{SUR})_\mu\Gamma^* dx^{SUR\ \mu}\end{aligned}$$

kde J^μ_ν je jakobián zámeny súradníc $\tau \leftrightarrow \Gamma(\tau)$ a $d\tau^\nu = d\tau\ \nu = 1$ má len jednu zložku. Nakoniec urobíme posledné dve úpravy:

$$\begin{aligned}\Delta t^{SUR} &= \int\limits_a^b(\text{ver }dt^{SUR})_\mu\Gamma^* dx^{SUR\ \mu} = \int\limits_{\Gamma(<a,b>)}(\text{ver }dt^{SUR})_\mu dx^{SUR\ \mu} = \\ &= \int\limits_\Gamma \text{ver }dt^{SUR}\end{aligned}$$

Úplne rovnakým spôsobom vieme tento integrál vyjadriť aj pomocou operátora hor. Takže časová odchýlka je:

$$\Delta t^{SUR} = \int\limits_\Gamma \text{ver }dt^{SUR} = -\int\limits_\Gamma \text{hor }dt^{SUR} = \int\limits_\Gamma \frac{g_{0i}}{g_{00}}dx^{SUR\ i} \tag{1.22}$$

Celú sústavu je možné zosynchronizovať, ak tento integrál nezávisí od cesty, ale len od koncových bodov. Táto podmienka sa dá vyjadriť ako:

$$\oint_{\Gamma} \frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^{SUR\ i} = 0$$

Pre každú uzavretú krivku Γ ležiacu v nadrovine $t^{SUR} =$ konšt. Ak je táto podmienka splnená, tak transformácia

$$(t^{SUR}, x^{SUR}, y^{SUR}, z^{SUR}) \leftrightarrow (t^{SYN}, x^{SUR}, y^{SUR}, z^{SUR})$$

daná zámenou časových súradníc:

$$t^{SYN} = t^{SUR} + \Delta t^{SUR} = t^{SUR} + \int_{(x^{REF}, y^{REF}, z^{REF})}^{(x^{SUR}, y^{SUR}, z^{SUR})} \text{ver } dt^{SUR}$$

je dobre definovaná. Keďže v súradniciach $(t^{SYN}, x^{SUR}, y^{SUR}, z^{SUR})$ je sústava synchronizovaná, musí platiť:

$$\int_{\Gamma} \text{ver } dt^{SYN} = \int_{\Gamma} \frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^{SUR\ i} = 0$$

a to pre každú krivku Γ ležiacu v nadrovine s konštantným súradnicovým časom t_0^{SUR}. V čase $t_0^{SYN} = t_0^{SUR}$ preto platí:

$$\frac{g_{0i}}{g_{00}} = 0 \quad \Rightarrow \quad g_{0i} = 0$$

Takže v synchronizovaných súradniciach má v čase t_0^{SYN} matica komponent metrického tenzora blokovo diagonálny tvar:

$$\left(\begin{array}{c|c} g_{00} & 0 \\ \hline 0 & g_{ij} \end{array} \right)$$

čiže synchronizácia, ktorú sme tu odvodili, je vlastne diagonalizáciou metrického tenzora.

Kapitola 2

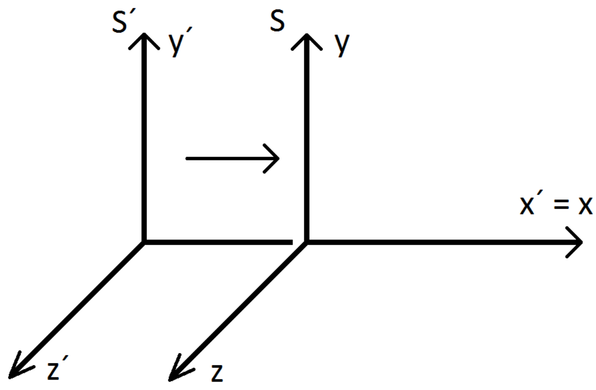
Odvodenie špeciálnych Lorentzových transformácií pomocou normovania metrického tenzora

V úvodnej kapitole sme odvodili postup na synchronizovanie neinerciálnych vzťažných sústav. Tento postup bude prirodzene fungovať aj pri synchronizácii inerciálnych sústav. V tejto krátkej kapitole ho využijeme na nájdenie transformácií súradníc medzi dvomi inerciálnymi sústavami, ktoré zachovávajú tvar metrického tenzora.

2.1 Metrický tenzor

Uvažujme inerciálnu vzťažnú sústavu S', v ktorej sú zavedené súradnice (t', x', y', z') tak, aby príslušný metrický tenzor mal kanonický tvar:

$$g = dt' \otimes dt' - dx' \otimes dx' - dy' \otimes dy' - dz' \otimes dz' \tag{2.1}$$



Obr. 2.1: Inerciálne sústavy S' a S

Ide teda o Minkowského metrický tenzor. Ak by sme však uvažovali ďalšiu inerciálnu sústavu S, ktorá sa voči S' pohybuje konštantnou rýchlosťou v v kladnom smere osi x' (obrázok 2.1), zistili by sme, že náš pôvodný súradnicový systém nie je vhodný na opis tejto sústavy. To preto, lebo súradnice bodov, ktoré v S stoja, sa s časom menia. Aby sa tento nedostatok odstránil, zavádzajú sa Galileiho transformácie:

$$t' = t^{SUR} \qquad x' = x^{SUR} + vt^{SUR} \qquad y' = y^{SUR} \qquad z' = z^{SUR} \tag{2.2}$$

Horný index SUR vyjadruje fakt, že nové súradnice nemusia byť "fyzikálne správne", tj. metrický tenzor vyjadrený pomocou nich nemusí mať kanonický tvar. V skutočnosti vyzerá takto:

$$\begin{aligned} g &= (1-v^2)dt^{SUR}\otimes dt^{SUR} - dx^{SUR}\otimes dx^{SUR} - dy^{SUR}\otimes dy^{SUR} - \\ &\quad -dz^{SUR}\otimes dz^{SUR} - v(dx^{SUR}\otimes dt^{SUR} + dt^{SUR}\otimes dx^{SUR}) \end{aligned}$$

čo sme získali dosadením (2.2) do (2.1). Za pozornosť tu stojí najmä existencia nediagonálneho člena. Znamená to, že vektory $\partial_{t^{SUR}}$ a $\partial_{x^{SUR}}$ nie sú v zmysle g na seba kolmé. Dva blízke svetobody $(t_0^{SUR}, x^{SUR}, y^{SUR}, z^{SUR})$ a $(t_0^{SUR}, x^{SUR}+\delta x, y^{SUR}, z^{SUR})$ sú spojené infinitezimálnym[1] vektorom, ktorý je preto súčtom nielen čisto priestorových[2] vektorov, ale aj časového vektora. Takže tieto dva body nepredstavujú udalosti, ktoré sa stali v rovnakom čase, hoci majú rovnakú časovú súradnicu. To sa môže stať len vtedy, keď hodiny v tejto vzťažnej sústave merajúce súradnicový čas nie sú synchronizované. Aby sme tento problém odstránili, musíme nájsť súradnicový systém, v ktorom sú všetky hodiny synchronizované.

2.2 Synchronizácia (diagonalizácia)

Na synchronizovanie hodín v bode $(t_0^{SUR}, x^{SUR}, y^{SUR}, z^{SUR})$ potrebujeme integrovať synchronizačnú 1-formu po krivke spájajúcej tento bod s nejakým referenčným bodom. Synchronizačná 1-forma má v tomto prípade tvar:

$$\text{hor } dt = -\frac{g_{0i}}{g_{00}}dx^i = \frac{v}{1-v^2}dx^{SUR}$$

Ľubovoľné dva body v rovnakom súradnicovom čase sa dajú spojiť trojicou úsečiek, z ktorých každá je rovnobežná s jednou z priestorových osí. Formu hor dt budeme teda integrovať pozdĺž kriviek z troch (disjunktných) množín:

$$\gamma_x : \tau \mapsto (t_0^{SUR}, \tau, y^{SUR}, z^{SUR})$$

$$\gamma_y : \tau \mapsto (t_0^{SUR}, x^{SUR}, \tau, z^{SUR})$$

$$\gamma_x : \tau \mapsto (t_0^{SUR}, x^{SUR}, y^{SUR}, \tau)$$

Keď si za referenčný bod zvolíme počiatok Sústavy S, časová odchýlka v bode so súradnicami $(t_0^{SUR}, x^{SUR}, y^{SUR}, z^{SUR})$ bude:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \Delta t_x + \Delta t_y + \Delta t_z = -\int\limits_{\gamma_x} \text{hor } dt - \int\limits_{\gamma_y} \text{hor } dt - \int\limits_{\gamma_z} \text{hor } dt \\ &= -\int\limits_0^{x^{SUR}} \frac{v}{1-v^2}\, dx^{SUR} = -\frac{v\, x^{SUR}}{1-v^2} \end{aligned}$$

[1] To preto, aby sa neprejavili globálne vlastnosti variety - našej vzťažnej sústavy (súradnicový systém tu predstavuje mapu do $\mathbb{R}^4$) tj. aby mala štruktúru plochého Minkowského časopriestoru, v ktorom by sa pre vektor už dal definovať pojem "spájať body".

[2] V zmysle "fyzikálnych"súradníc!

Synchronizačná odchýlka závisí od polohy, preto musíme v každom bode s fixovanou časovou zložkou posunúť hodiny inak.[3] Synchronizovaný čas získame takto:

$$\begin{aligned} t^{SYN} &= t^{SUR} + \Delta t \\ t^{SUR} &= t^{SYN} + \frac{v\ x^{SUR}}{1-v^2} \end{aligned}$$

Tento vzťah už len stačí dosadiť do (2.2) (viď. doplňujúce výpočty na konci) a získame transformácie medzi pôvodným - "dobrým fyzikálnym" súradnicovým systémom sústavy S' a synchronizovaným súradnicovým systémom sústavy S:

$$\begin{aligned} t' &= t^{SYN} + \frac{v\ x^{SUR}}{1-v^2} \qquad x' = \frac{1}{1-v^2}\ x^{SUR} + vt^{SYN} \\ y' &= y^{SUR} \qquad z' = z^{SUR} \end{aligned} \tag{2.3}$$

V týchto súradniciach bude mať metrický tenzor tvar:

$$\begin{aligned} g &= (1-v^2)dt^{SYN} \otimes dt^{SYN} - \frac{1}{1-v^2}\ dx^{SUR} \otimes dx^{SUR} - \\ &\quad -dy^{SUR} \otimes dy^{SUR} - dz^{SUR} \otimes dz^{SUR} \end{aligned}$$

čo sme získali dosadením (2.3) do (2.1) (viď doplňujúce výpočty na konci).

2.3 Normovanie

Teraz už máme metrický tenzor v diagonálnom tvare, nebude teda ťažké spraviť transformácie, po ktorých nadobudne kanonický tvar. Podmienky pre tieto transformácie vyzerajú takto:

$$\begin{aligned} \eta\sqrt{1-v^2}\ dt^{SYN} &= dt \\ \frac{\xi}{\sqrt{1-v^2}}\ dx^{SUR} &= dx \\ \text{kde} \qquad \eta^2 = \xi^2 &= 1 \end{aligned}$$

pričom ostatné súradnice sa zachovávajú. Konštanty η a ξ sa tu vyskytli kvôli nejednoznačnosti riešenia kvadratickej rovnice typu "$x^2 = C$ ". Môžu teda nadobúdať hodnoty ± 1. Ďalej dostávame:

$$\begin{aligned} t^{SYN} &= \frac{\eta}{\sqrt{1-v^2}}\ t + K \\ x^{SUR} &= \xi\sqrt{1-v^2}\ x + L \end{aligned}$$

kde K a L sú ľubovoľné reálne konštanty. Po dosadení týchto vzťahov do (2.3) (viď. doplňujúce výpočty na konci) transformácie nadobudnú tvar:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(\eta_1 t + \xi_1 vx) + M \\ x' &= \gamma(\xi_2 x + \eta_2 vt) + N \\ \text{kde} \qquad & \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \qquad M = K + \frac{vL}{1-v^2} \quad N = \frac{L}{1-v^2} + Kv \end{aligned} \tag{2.4}$$

Zmnoženie konštánt η a ξ nastalo opäť z podobného dôvodu, teraz však z "inej strany". Kým predtým bola ich zdrojom nejednoznačnosti rovnosť $dt^{SYN} \otimes dt^{SYN} = (-dt^{SYN}) \otimes (-dt^{SYN})$ a rovnako aj pre dx^{SUR}, teraz je to $dt' \otimes dt' = (-dt') \otimes (-dt')$ (tiež dx'). Navyše, sú zviazané podmienkou:

[3] Ak by časová odchýlka závisela aj od času, museli by sme hodiny posúvať každú chvíľu.

$$\eta_1 = \eta_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \xi_1 = \xi_2$$

Vzťahy (2.4) predstavujú transformácie, ktoré zachovávajú Minkowského metrický tenzor. Inými slovami, našli sme transformácie medzi dvomi inerciálnymi vzťažnými sústavami, ktoré transformujú skutočné fyzikálne dĺžky a časy[4]. Teraz už len zostáva upresniť neznáme parametre.

Povedzme, že existuje svetobod, ktorý má v oboch sústavách všetky súradnice nulové. Táto udalosť zodpovedá okamihu, keď sa stredy týchto sústav míňali a hodiny v jednej aj druhej ukazovali čas $t' = t = 0$. Aby bola táto podmienka splnená, musí platiť $M = N = 0$.

Teraz uvažujme bod, ktorý v sústave S stojí na mieste, tj. pohybuje sa len v čisto časovom smere. Ak t' rastie, musí rásť aj t, keďže časy v oboch sústavách by nemali plynúť opačnými smermi. Zo vzťahu (2.4, 1.) preto vyplýva, že $\eta_1 = +1$. Podobne, ak t rastie, musí rásť aj x'. Preto (vzťah (2.4, 2.)) aj $\eta_2 = +1$. Keďže $\eta_1 = \eta_2$, tak aj $\xi_1 = \xi_2 \overset{ozn}{=} \xi$. Naše transformácie sa teda zjednodušili na tvar:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t + \xi v x) \\ x' &= \gamma(\xi x + vt) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Teraz uvažujme svetobod, ktorý má podľa sústavy S súradnice$(t = 0, x > 0, ...)$. Dosadením do (2.5, 2.) získavame: $x' = \xi\gamma x$. Keďže sú však osi x a x' rovnako orientované, musí platiť: $\xi = +1$. Poslednou podmienokou je rovnaká orientácia osí y a y', resp. z a z'.

Získali sme teda špeciálne Lorentzove transformácie:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t + vx) \\ x' &= \gamma(x + vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{2.6}$$

Inverzné vzťahy sú:

$$\begin{aligned} t &= \gamma(t' - vx') \\ x &= \gamma(x' - vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned} \tag{2.7}$$

Toto odvodenie je korektné, len ak integrál zo synchronizačnej 1-formy nezávisí od integračnej cesty, pretože pri synchronizovaní sme integrovali len po špeciálnych krivkách. Nebolo by ťažké už teraz nahliadnuť, že integrál naozaj nezávisí od cesty, ale synchronizovateľnosti sústav sa budeme venovať neskôr až v posledných dvoch kapitolách.

Doplňujúce výpočty

(2.3) $\to$ (2.2) $\mapsto$ (2.3) :

$$x^{SUR} + vt^{SUR} = \left(1 + \frac{v^2}{1 - v^2}\right) x^{SUR} + vt^{SYN} = \frac{1}{1 - v^2} x^{SUR} + vt^{SYN}$$

(2.3) $\to$ (2.1) $\mapsto$ (2.4) :

[4]Z ekvivalentnosti inerciálnych sústav vyplýva existencia takých súradnicových systémov, v ktorých má metrický tenzor rovnaký tvar.

Využije sa zápis starých bázových kovektorov pomocou nových a spravia sa príslušné tenzorové súčiny:

$$\begin{aligned} dt' \otimes dt' &= dt^{SYN} \otimes dt^{SYN} + \frac{v}{1-v^2}(dt^{SYN} \otimes dx^{SUR} + dx^{SUR} \otimes dt^{SYN}) + \\ &+ \frac{v^2}{(1-v^2)^2} dx^{SUR} \otimes dx^{SUR} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dx' \otimes dx' &= v^2 dt^{SYN} \otimes dt^{SYN} + \frac{v}{1-v^2}(dt^{SYN} \otimes dx^{SUR} + dx^{SUR} \otimes dt^{SYN}) + \\ &+ \frac{1}{(1-v^2)^2} dx^{SUR} \otimes dx^{SUR} \end{aligned}$$

ktoré stačí už len sčitovať a odčitovať.
$(2.4) \rightarrow (2.3) \mapsto (2.4)$:

$$\begin{aligned} t' &= t^{SYN} + \frac{v}{1-v^2} x^{SUR} = \frac{\eta}{\sqrt{1-v^2}} t + K + \frac{v}{1-v^2}\left(\xi\sqrt{1-v^2}x + L\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\eta t + \xi v x\right) + K + \frac{vL}{1-v^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{1-v^2} x^{SUR} + v t^{SYN} = \frac{1}{1-v^2}\left(\xi\sqrt{1-v^2}x + L\right) + v\left(\frac{\eta}{\sqrt{1-v^2}} t + K\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\xi x + \eta v t\right) + \frac{L}{1-v^2} + K v \end{aligned}$$

Kapitola 3

Rotácia okolo premennej osi a sústva spojená s bodom na povrchu rotujúcej gule

V tejto kapitole preskúmame rotujúcu sústavu, v ktorej rýchlosť a aj os rotácie sú funkciami času. Keďže rozdiel medzi tzv. súradnicovými a fyzikálnymi súradnicami bol na predchádzajúcom príklade už dostatočne dobre objasnený, nebudeme už ďalej vypisovať ťažkopádne horné indexy SUR a SYN a budeme písať už len t, x, y, z resp. t, r, ψ, h, pričom budeme mať na pamäti, že tieto súradnice časopriestorové intervaly neurčujú priamo, ale len skrz metrický tenzor.

Cieľom je odvodiť príslušnú synchronizačnú 1-formu, pomocou ktorej vypočítame časovú odchýlku pre synchronizáciu po uzavretej krivke. Ak bude výsledok nenulový, budeme vedieť, že vzťažnú sústavu nie je možné zosynchronizovať. [1]

V druhej časti preskúmame sústavu spojenú s povrchom rotujúcej gule, pričom využijeme čiastkové výsledky z prvej časti. Bude to model sústavy spojenej s povrchom Zeme, pričom nezapočítame gravitačné pole a ani žiadne iné javy okrem dennej rotácie Zeme. Možno to teda chápať ako výpočet prvej poruchy pri skúmaní synchronizovateľnosti sústavy na povrchu Zeme, ak sme v nultom ráde započítali iba jej gravitačné pole.

3.1 Sústava rotujúca okolo premennej osi

3.1.1 Transformácia do nových súradníc

Na popis sústavy rotujúcej okolo osi sa nám bude hodiť cylindrický súradnicový systém. Budeme chcieť, aby sa s časom mohla meniť os rotácie. Preto potrebujeme cylindrické súradnice vhľadom na ľubovoľnú os danú dvomi uhlovými parametrami (θ, φ), kde nové súradnice budú (r, ψ, h).

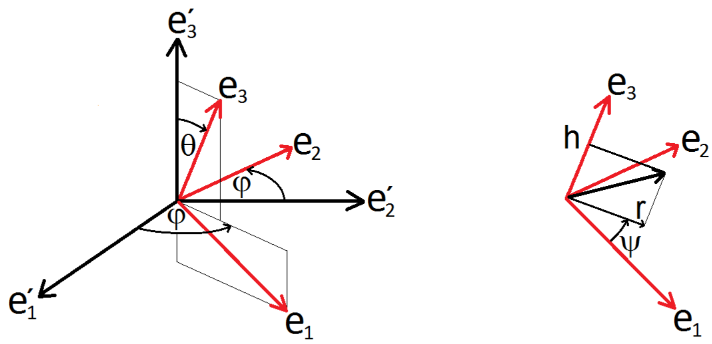
Najprv spravíme prechod od jednej kartézskej sústavy danej bázou e'_i do inej, pootočenej sústavy s bázou e_i, obrázok (3.1).

$$\begin{aligned}
e_1 &= e'_1 \cos\theta \cos\varphi + e'_2 \cos\theta \sin\varphi - e'_3 \sin\theta \\
e_2 &= -e'_1 \sin\varphi + e'_2 \cos\varphi \\
e_1 &= e'_1 \sin\theta \cos\varphi + e'_2 \sin\theta \sin\varphi - e'_3 \cos\theta
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Súradnice vektora $\mathbf{u}$ v novej - pootočenej kartézskej sústave sa dajú zapísať pomocou cylindrických súradníc. Samotný vektor potom v báze e_i vyzerá takto:

$$\mathbf{u} = e_1 r \cos\psi + e_2 r \sin\psi + e_3 h$$

[1] Naopak to neplatí.



Obr. 3.1: pootočené kartézske a cylindrické súradnice

Pomocou vzťahov (3.1) vieme tento vektor zapísať aj v pôvodnej kartézskej sústave e'_j:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= e'_1(r\cos\theta\cos\varphi\cos\psi - r\sin\varphi\sin\psi + h\sin\theta\cos\varphi) + \\ &\quad + e'_2(r\cos\theta\sin\varphi\cos\psi + r\cos\varphi\sin\psi + h\sin\theta\sin\varphi) + \\ &\quad + e'_3(-r\sin\theta\cos\psi + h\cos\theta) = \\ &= xe'_1 + ye'_2 + ze'_3\end{aligned}$$

Posledná rovnosť predstavuje zápis v pôvodných súradniciach (x, y, z), odkiaľ hneď vidno transformáciu $(r, \psi, h) \mapsto (x, y, z)$, ktorú budeme potrebovať:

$$\begin{aligned}x &= r\cos\theta\cos\varphi\cos\psi - r\sin\varphi\sin\psi + h\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\cos\theta\sin\varphi\cos\psi + r\cos\varphi\sin\psi + h\sin\theta\sin\varphi \\ z &= -r\sin\theta\cos\psi + h\cos\theta\end{aligned} \tag{3.2}$$

Teraz nám už nič nebráni napísať Minkowského metrický tenzor v nových súradniciach (viď. doplňujúce výpočty na konci), majúc pri tom na pamäti, že $\theta(t)$ a $\varphi(t)$ sú funkcie závislé od času.

$$\begin{aligned}&dt' \otimes dt' - dx' \otimes dx' - dy' \otimes dy' - dz' \otimes dz' = \\ = &\{\, 1 - ({r'}^2\cos^2\psi' + {h'}^2)\,\dot\theta^2 - [(r'\cos\theta\cos\psi' + h'\sin\theta)^2 + {r'}^2\sin^2\psi']\,\dot\varphi^2 - \\ &-2r'\sin\psi'(r'\sin\theta\cos\psi' - h'\cos\theta)\,\dot\theta\dot\varphi \,\}\; dt' \otimes dt' - \\ &-dr' \otimes dr' - {r'}^2 d\psi' \otimes d\psi' - dh' \otimes dh' - \\ &-(h'\sin\theta\sin\psi'\,\dot\varphi + h'\cos\psi'\,\dot\theta)(dt' \otimes dr' + dr' \otimes dt') + \\ &+[r'h'\sin\psi'\,\dot\theta - r'(r'\cos\theta + h'\sin\theta\cos\psi')\,\dot\varphi](dt' \otimes d\psi' + d\psi' \otimes dt') + \\ &+(r'\cos\psi'\,\dot\theta + r'\sin\theta\sin\psi'\,\dot\varphi)(dt' \otimes dh' + dh' \otimes dt')\end{aligned} \tag{3.3}$$

Takto vyzerá metrický tenzor v sústave, ktorej os sa v sférických súradniciach mení podľa predpisu daného funkciami $\theta(t)$ a $\varphi(t)$. Chceme však, aby naša sústava okolo tejto osi zároveň rotovala. Preto spravíme ešte jednu transformáciu

$$\psi' = \psi + \chi(t) \quad r' = r \quad h' = h' \quad t' = t \tag{3.4}$$

Po týchto transformáciách nadobudne mertický tenzor z (3.3) tvar (viď. doplňujúce výpočty na konci):

$$\begin{aligned}g &= [1 - r^2\dot\chi^2 + 2\dot\chi(\varepsilon\dot\theta - \mu\dot\varphi) - \gamma\dot\theta\dot\varphi - \alpha\dot\theta^2 - \beta\dot\varphi^2]dt \otimes dt - \\ &\quad -dr \otimes dr - r^2 d\psi \otimes d\psi - dh \otimes dh - \\ &\quad -(\rho\dot\theta + \nu\dot\varphi)(dt \otimes dr + dr \otimes dt) + \\ &\quad +(\varepsilon\dot\theta - \mu\dot\varphi - r^2\dot\chi)(dt \otimes d\psi + d\psi \otimes dt) + \\ &\quad +(\tau\dot\theta + \sigma\dot\varphi)(dt \otimes dh + dh \otimes dt)\end{aligned} \tag{3.5}$$

kde sme pre stručnosť zaviedli nasledujúce označenia:

$$\begin{aligned}
\alpha(r,\psi,h,t) &= r^2\cos^2(\psi+\chi)+h^2 \\
\beta(r,\psi,h,t) &= (r\cos\theta\cos(\psi+\chi)+h\sin\theta)^2+r^2\sin^2(\psi+\chi) \\
\gamma(r,\psi,h,t) &= 2r\sin(\psi+\chi)(r\sin\theta\cos(\psi+\chi)-h\cos\theta) \\
\varepsilon(r,\psi,h,t) &= rh\sin(\psi+\chi) \\
\mu(r,\psi,h,t) &= r(r\cos\theta+h\sin\theta\cos(\psi+\chi)) \\
\nu(r,\psi,h,t) &= h\sin\theta\sin(\psi+\chi) \\
\rho(r,\psi,h,t) &= h\cos(\psi+\chi) \\
\tau(r,\psi,h,t) &= r\cos(\psi+\chi) \\
\sigma(r,\psi,h,t) &= r\sin\theta\sin(\psi+\chi)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

3.1.2 Synchronizácia po kružnici pre jednoduchý precesný pohyb

Na synchronizáciu po uzavretej slučke budeme potrebovať synchronizačnú 1-formu:

$$\begin{aligned}
-\mathrm{hor}\ dt &= \frac{g_{0i}}{g_{00}}dx^i = \\
&= \frac{-(\rho\dot\theta+\nu\dot\varphi)dr+(\varepsilon\dot\theta-\mu\dot\varphi-r^2\dot\chi)d\psi+(\tau\dot\theta+\sigma\dot\varphi)dh}{1-r^2\dot\chi^2+2\dot\chi(\varepsilon\dot\theta-\mu\dot\varphi)-\gamma\dot\theta\dot\varphi-\alpha\dot\theta^2-\beta\dot\varphi^2}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Keď budeme uvažovať len jednoduchý precesný pohyb, tj.

$$\dot\theta=0 \qquad \dot\varphi=\Omega=\text{konšt.} \qquad \dot\chi=\omega=\text{konšt.} \tag{3.8}$$

synchronizačná 1-forma sa zjednoduší na tvar:

$$\begin{aligned}
-\mathrm{hor}\ dt &= \frac{-\nu\Omega dr-(\mu\Omega+r^2\omega)d\psi+\sigma\Omega dh}{1-r^2\omega^2-2\omega\mu\Omega-\beta\Omega^2} \\
&= \{-\Omega h\sin\theta\sin(\psi+\chi)dr- \\
&\quad -[\Omega r(r\cos\theta+h\sin\theta\cos(\psi+\chi))+r^2\omega]d\psi+ \\
&\quad +\Omega r\sin\theta\sin(\psi+\chi)dh\}\ \backslash \\
&\quad \backslash\{1-r^2\omega^2-2\Omega\omega r(r\cos\theta+h\sin\theta\cos(\psi+\chi))- \\
&\quad -\Omega^2[(r\cos\theta\cos(\psi+\chi)+h\sin\theta)^2+r^2\sin^2(\psi+\chi)]\}
\end{aligned}$$

Túto 1-formu bedeme integrovať po kružnici $\Gamma(\varsigma)$.

$$\varsigma\mapsto(t,r=R,\psi=\varsigma,h=0) \qquad \varsigma\in\langle 0,2\pi)$$

Časová odchýlka vyjde (viď. doplňujúce výpočty na konci):

$$\Delta t = -\oint_\Gamma \mathrm{hor}\ dt = \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_0^{2\pi}\frac{(\Omega R^2\cos\theta+\omega R^2)\,d\psi}{1-\omega^2R^2-2\Omega\omega R^2\cos\theta-\Omega^2R^2\cos^2\theta\cos^2\psi-\Omega^2R^2\sin^2\psi} = \\
&= \frac{-2\pi(\Omega R^2\cos\theta+\omega R^2)\mathrm{sign}(1-\omega^2R^2-\Omega^2R^2\cos^2\theta-2\Omega\omega R^2\cos\theta)}{\sqrt{|(1-\omega^2R^2-\Omega^2R^2\cos^2\theta-2\Omega\omega R^2\cos\theta)(1-\omega^2R^2-\Omega^2R^2-2\Omega\omega R^2\cos\theta)|}}
\end{aligned}$$

Špeciálnym prípadom precesného pohybu je rovnomerné otáčanie okolo osi $[e_3']$. Vtedy je $\theta=0$ a dostávame:

$$\Delta t = -\frac{2\pi(\Omega+\omega)R^2}{1-R^2(\Omega+\omega)^2} \tag{3.10}$$

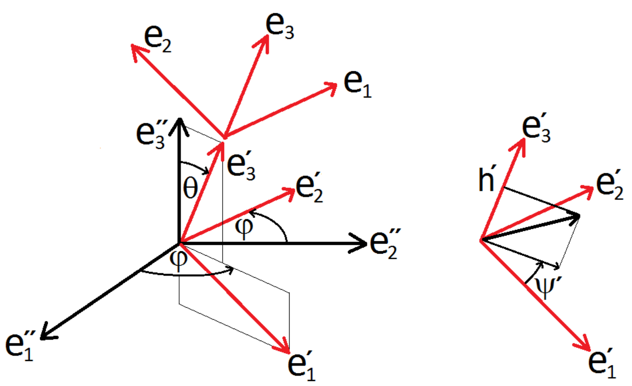
Vidíme teda, že už sústavu rotujúcu rovnomerne okolo pevnej osi nie je možné zosynchronizovať.

3.2 Sústava na povrchu rotujúcej gule (bez gravitácie)

Teraz preskúmame sústavu pevne spojenú s rotujúcou guľou. Jej počiatok však teraz nebude ležať v jej strede, ale posunieme ho na jej povrch. Táto dodatočná transformácia samozrejme nebude mať žiaden vplyv na samotnú synchronizáciu, keďže stred gule a jej povrch sú voči sebe v pokoji. Získame však súradnicový systém, ktorý bude pri skúmaní takejto sústavy prirodzenejší. Jediným jeho nedostatkom bude, že krivky ležiace na rovine $h = 0$, teda na dotykovej rovine ku povrchu gule, neležia na povrchu tejto gule. Ak by sme preto vyžadovali, aby krivka ležala na povrchu gule, tak súradnica h ako funkcia parametra krivky by nebola konštantná.

3.2.1 Dodatočná transformácia

V prvej časti sme skúmali sústavu, ktorá rotuje okolo premenlivej osi. Teraz túto sústavu označíme ako S'. Sústava S'' je referenčná, tj. metrický tenzor v nej má kanonický tvar a sústava S je sústava, s ktorou sa budeme zaoberať v tejto časti. Obrázok znázorňuje všetky transformácie, ktoré potrebujeme a je v súlade so spomínaným označením.



Obr. 3.2: zloženie dvoch transformácií súradníc

S' vznikne pootočením sústavy S'' daným uhlami θ a φ. S vzniká posunutím sútavy S' pozdĺž osi e_3' o R_z a potom otočením o uhol $\pi/2$ okolo osi e_3. Vznikne tak súradnicový systém s počiatkom na povrchu gule, kde os e_1 smeruje na východ, os e_2 na sever a os e_3 smerom hore, kolmo na povrch. Potom sa zavedú cylindrické súradnice, kde sa uhol ψ meria od osi e_1 v kladnom smere. Ďalšie súradnice sú r - vzdialenosť od počiatku a h - výška nad dotykovou rovinou k povrchu gule v počiatku našej sústavy. Dodatočné transformácie medzi S a S' možno v cylindrických súradniciach vyjadriť ako:

$$\psi' = \psi + \pi/2 \qquad h' = h + R_z \qquad r' = r \tag{3.11}$$

Použijeme ešte jednu substitúciu, kde uhol θ vyjadríme pomocou zemepisnej šírky θ_z:

$$\theta = \pi/2 - \theta_z \tag{3.12}$$

3.2.2 Synchronizačná 1-forma

Synchronizačnú 1-formu v rotujúcej sústave sme už raz odvodili a vyšlo:

$$-\mathrm{hor}\ dt = \frac{-(\rho\dot{\theta} + \nu\dot{\varphi})dr' + (\varepsilon\dot{\theta} - \mu\dot{\varphi} - r^2\dot{\chi})d\psi' + (\tau\dot{\theta} + \sigma\dot{\varphi})dh'}{1 - r^2\dot{\chi}^2 + 2\dot{\chi}(\varepsilon\dot{\theta} - \mu\dot{\varphi}) - \gamma\dot{\theta}\dot{\varphi} - \alpha\dot{\theta}^2 - \beta\dot{\varphi}^2}$$

V zmysle vtedy zavedených označení. Keď chceme synchronizačnú 1-formu v sústave S, stačí túto formu zjednodušiť a potom použiť dodatočnú transformáciu. Po zjednodušeniach $\dot{\theta}_z = \dot{\theta} = \dot{\chi} = 0 \quad \dot{\varphi} = \omega$ sa 1-forma zredukuje na tvar:

$$-\text{hor } dt = \frac{-\nu\omega dr' - \mu\omega d\psi' + \sigma\omega dh'}{1 - \beta\omega^2}$$

Teraz použijeme dodatočnú transformáciu na výpočet ν,μ,σ,β:

$$\begin{aligned}
\nu &= h' \sin\theta \sin(\psi' + \chi) = (h + R_z)\cos(\pi/2 - \theta_z)\cos(\psi + \pi/2 + \chi) \\
&= (h + R_z)\cos\theta_z \cos(\psi + \chi) \\
\mu &= r'(r'\cos\theta + h'\sin\theta\cos(\psi' + \chi)) = \\
&= r(r\cos(\pi/2 - \theta_z) + (h + R_z)\sin(\pi/2 - \theta_z)\cos(\psi + \pi/2 + \chi)) = \\
&= r(r\sin\theta_z - (h + R_z)\cos\theta_z \sin(\psi + \chi)) \\
\sigma &= r'\sin\theta\sin(\psi' + \chi) = r\cos(\pi/2 - \theta_z)\cos(\psi + \pi/2 + \chi) \\
\beta &= (r'\cos\theta\cos(\psi' + \chi) + h'\sin\theta)^2 + {r'}^2\sin^2(\psi' + \chi) = \\
&= (r\cos(\pi/2 - \theta_z)\cos(\psi + \pi/2 + \chi) + (h + R_z)\sin(\pi/2 - \theta_z))^2 + \\
&\quad + r^2\sin^2(\psi + \pi/2 + \chi) = \\
&= (-r\sin\theta_z\sin(\psi + \chi) + (h + R_z)\cos\theta_z)^2 + r^2\cos^2(\psi + \chi)
\end{aligned}$$

a hľadaná synchronizačná 1-forma potom bude:

$$-\text{hor } dt = \frac{\begin{array}{l} -\omega(h + R_z)\cos\theta_z\cos(\psi + \chi)dr - \\ -\omega r(r\sin\theta_z - (h + R_z)\cos\theta_z\sin(\psi + \chi))d\psi + \\ \omega r\cos\theta_z\cos(\psi + \chi)dh \end{array}}{1 - \omega^2\left[\begin{array}{r} (r\sin\theta_z\sin(\psi + \chi) - (h + R_z)\cos\theta_z)^2 + \\ + r^2\cos^2(\psi + \chi) \end{array}\right]} \tag{3.13}$$

3.2.3 Synchronizácia

Budeme synchronizovať po uzavretej krivke Γ:

$$\Gamma : \xi \mapsto (r = R, \psi = \xi, h = 0) \qquad \xi \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

Časová odchýlka sa potom vypočíta ako:

$$\Delta t = -\oint_\Gamma \text{hor } dt = \int_0^{2\pi} \frac{-\omega R(R\sin\theta_z - R_z\cos\theta_z\sin\xi)}{1 - \omega^2\left[(R\sin\theta_z\sin\xi - R_z\cos\theta_z)^2 + R^2\cos^2\xi\right]} d\xi$$

Tento integrál vypočítame pre dva špeciálne prípady. V prvom prípade sa presunieme na severný pól rotujúcej gule: $\theta_z = \pi/2 \quad \sin\theta_z = 1 \quad \cos\theta_z = 0$. Potom:

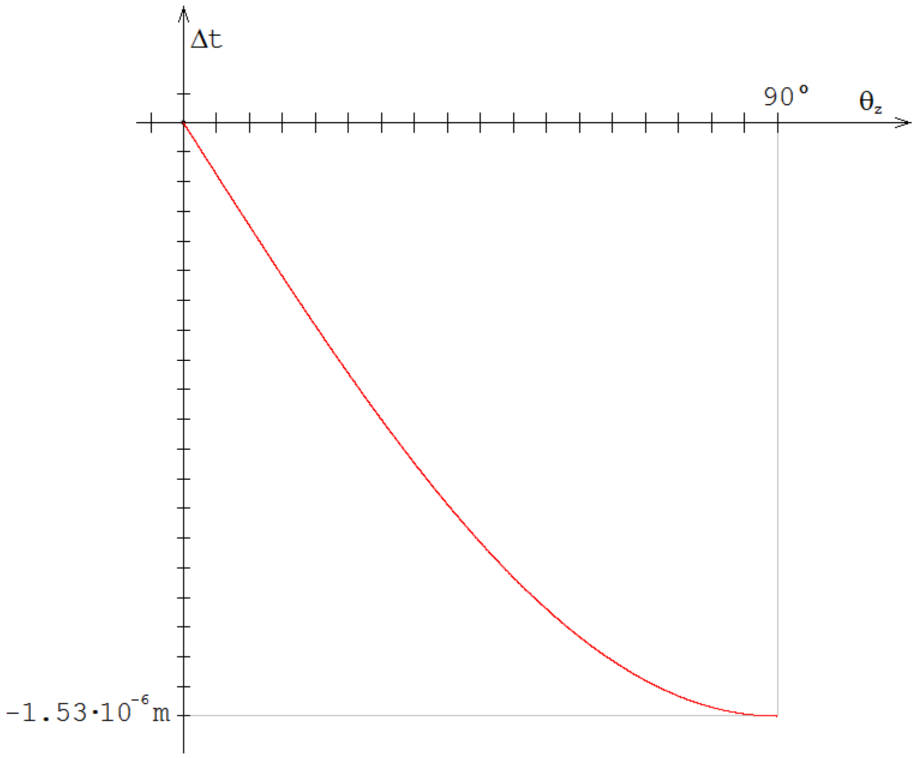
$$\Delta t = -\frac{\omega R^2}{1 - \omega^2 R^2}\int_0^{2\pi} d\xi = -\frac{2\pi\omega R^2}{1 - \omega^2 R^2}$$

čo je v zhode s predchádzajúcimi výsledkami. Teraz sa presunieme na rovník: $\theta_z = 0 \quad \sin\theta_z = 0 \quad \cos\theta_z = 1$.

$$\Delta t = \int_0^{2\pi} \frac{\omega R R_z \sin\xi}{-\omega^2 R^2\cos^2\xi + 1 - \omega^2 R_z^2} d\xi = 0$$

Takže sústavu umiestnenú na rovníku je možné synchronizovať. [2] Pre ostatné θ_z - zemepisné šírky sa integrál (3.14) dá vypočítatať numericky.

[2] V neskoršom čase však prestáva byť synchronizovaná.



Obr. 3.3: Závislosť časovej odchýlky od zemepisnej šírky

Na obrázku 3.3 je znázornený priebeh závislosti časovej odchýlky od zemepisnej šírky na intervale $\langle 0, \pi \rangle$, teda len pre severnú pologuľu. Pre južnú pologuľu vyjde to isté, len s opačným znamienkom, keďže počítať integrál zo synchronizačnej 1-formy po kladne orientovanej kružnici na južnej pologuli je to isté, ako počítať ten istý integrál po opačne orientovanej kružnici na protiľahlom mieste na severnej pologuli. Funkcia $\theta_z \mapsto \Delta t \quad \theta_z \in \langle -\pi, \pi \rangle$ je teda nepárna. Keď navyše predpokladáme, že je aj spojitá, tak v nule (na rovníku) musí byť jej funkčná hodnota nulová, čo sme overili aj priamym výpočtom. Časová odchýlka Δt vyšla v metroch, keďže sme počítali v jednotkách, kde je rýchlosť bezrozmerná veličina a $c = 1$. Nie je však žiaden problém prepočítať to na sekundy. [3] Numerický výpočet sme spravili pre prípad rotujúcej Zeme s polomerom synchronizačnej kružnice $1km$ a je v zhode s dvomi špeciálnymi prípadmi, ktoré sme vypočítali analyticky. Číselné výsledky sú zhrnuté v tabuľke:

θ_z	Δt	
$0°$	$0\ m$	$0\ s$
$48°\ 09'\ 04,26''$ (FMFI)	$-1,136 \cdot 10^{-6}\ m$	$-3,789 \cdot 10^{-15}\ s$
$90°$	$-1,528 \cdot 10^{-6}\ m$	$-5,098 \cdot 10^{-15}\ s$

Nezabúdajme, že tieto numericky vypočítané časové hodnoty sú iba súradnicové časy. Sú však veľmi blízke skutočným časom, keďže odmocnina z komponenty metrického tenzora g_{00} je v tomto prípade veľmi blízka číslu 1:

$$\begin{aligned}
\sqrt{g_{00}} &= \sqrt{1 - \beta\omega^2} \approx 1 - \frac{1}{2}\beta\omega^2 = \\
&= 1 - \frac{1}{2}[(-r\sin\theta_z \sin(\psi + \chi) + (h + R_z)\cos\theta_z)^2 + r^2\cos^2(\psi + \chi)]\beta\omega^2 \approx \\
&\approx 1 - \frac{1}{2}R_z^2\cos^2\theta_z\omega^2 = 1 - 1,2 \cdot 10^{-12}\cos^2\theta_z
\end{aligned}$$

[3] $1s = 299792458m$

Poznámky k numerickým výpočtom

Pri výpočte integrálu (3.14) sa použili tieto numerické údaje:

$T = 23^h\ 56^{min}\ 4,01^s$

$\omega = 2\pi/(T \cdot 299792458\ m\ s^{-1}) \doteq 2,43 \cdot 10^{-13}\ m^{-1}$

$Rz = 6378400\ m$

$R = 1000\ m$

Použilo sa Simpsonovo 1/3 pravidlo [4] pre 800 podintervalov integračného intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Na vykreslenie grafu 3.3 sa integrál počítal pre $\theta_z = 0°;\ 0,05°;\ 0,1°;\ ...\ 90°$

Doplňujúce výpočty

(3.2) → (3.3):
Zápis starých bázových kovektorov pomocou nových:

$$\begin{aligned}
dx &= (-r\sin\theta\cos\varphi\cos\psi + h\cos\theta\cos\varphi)\dot{\theta}dt + \\
&+ (-r\cos\theta\sin\varphi\cos\psi - r\cos\varphi\sin\psi - h\sin\theta\sin\varphi)\dot{\varphi}dt + \\
&+ (\cos\theta\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi)dr + \\
&+ (-r\cos\theta\cos\varphi\sin\psi - r\sin\varphi\cos\psi)d\psi + \\
&+ \sin\theta\cos\varphi dh
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dy &= (-r\sin\theta\sin\varphi\cos\psi + h\cos\theta\sin\psi)\dot{\theta}dt + \\
&+ (r\cos\theta\cos\varphi\cos\psi - r\sin\varphi\sin\psi + h\sin\theta\cos\varphi)\dot{\varphi}dt + \\
&+ (\cos\theta\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi)dr + \\
&+ (-r\cos\theta\sin\varphi\sin\psi + r\cos\varphi\cos\psi)d\psi + \\
&+ \sin\theta\sin\varphi dh
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dz &= (-r\cos\theta\cos\psi - h\sin\theta)\dot{\theta}dt + \\
&+ 0\dot{\varphi}dt - \\
&- \sin\theta\cos\psi dr + \\
&+ r\sin\theta\sin\psi d\psi + \\
&+ \cos\theta dh
\end{aligned}$$

Potom sa spravia príslušné tenzorové súčiny:

$$dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz =$$

$$= [(-r\sin\theta\cos\psi + h\cos\theta)^2 + (-r\cos\theta\cos\psi - h\sin\theta)^2]\dot{\theta}^2 dt \otimes dt +$$

[4] funkcia sa na danom intervale nahrádza parabolou prechádzajúcou cez dva okrajové body a jeden bod v strede intervalu (tu to bolo pri každom z 800 intervalov osobitne)

$$+(r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi\cos^2\psi + r^2\cos^2\varphi\sin^2\psi + h^2\sin^2\theta\sin^2\varphi +$$
$$+2r^2\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi + 2rh\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi +$$
$$+2rh\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi\cos\psi +$$
$$+r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi\cos^2\psi + r^2\sin^2\varphi\sin^2\psi + h^2\sin^2\theta\cos^2\varphi -$$
$$-2r^2\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi - 2rh\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi +$$
$$+2rh\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\cos\psi)\dot{\varphi}^2 dt\otimes dt +$$

$$+(\cos^2\theta\cos^2\varphi\cos^2\psi + \sin^2\varphi\sin^2\psi - 2\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi +$$
$$+\cos^2\theta\sin^2\varphi\cos^2\psi + \cos^2\varphi\sin^2\psi + 2\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi +$$
$$+\sin^2\theta\cos^2\psi)dr\otimes dr +$$

$$+(r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi\sin r^2\psi +^2\sin^2\varphi\cos\psi + 2r^2\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi +$$
$$+r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi\sin^2\psi + r^2\cos^2\varphi\cos^2\psi - 2r^2\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi +$$
$$+r^2\sin^2\theta\sin^2\psi)d\psi\otimes d\psi +$$

$$+dh\otimes dh +$$

$$+(r^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\psi + r^2\sin\theta\cos^2\varphi\sin\psi\cos\psi +$$
$$+rh\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi - rh\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi -$$
$$-rh\cos\theta\cos^2\varphi\sin\psi - h^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi -$$
$$-r^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\psi + r^2\sin\theta\sin^2\varphi\sin\psi\cos\psi -$$
$$-rh\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi + rh\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi -$$
$$-rh\cos\theta\sin^2\varphi\sin\psi + h^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi)\dot{\theta}\dot{\varphi}(dt\otimes dt + dt\otimes dt) +$$

$$+(-r\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\psi + r\cos\theta\sin^2\varphi\sin\psi\cos\psi -$$
$$-r\cos\theta\cos^2\varphi\sin\psi\cos\psi + r\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\psi -$$
$$-h\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi + h\sin\theta\sin^2\varphi\sin\psi +$$
$$+r\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\psi + r\cos\theta\cos^2\varphi\sin\psi\cos\psi -$$
$$-r\cos\theta\sin^2\varphi\sin\psi\cos\psi - r\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\psi +$$
$$+h\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi + h\sin\theta\cos^2\varphi\sin\psi)\dot{\varphi}(dt\otimes dr + dr\otimes dt) +$$

$$+(-r\cos^2\theta\cos^2\varphi\sin\psi\cos\psi - r\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\psi +$$
$$+r\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\psi + r\sin^2\varphi\sin\psi\cos\psi -$$
$$-r\cos^2\theta\sin^2\varphi\sin\psi\cos\psi + r\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\psi -$$
$$-r\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\psi + r\cos^2\varphi\sin\psi\cos\psi -$$
$$-r\sin^2\theta\sin\psi\cos\psi)(dr\otimes d\psi + d\psi\otimes dr) +$$

$$+(-r\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\sin\psi - r\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi -$$
$$-r\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi\sin\psi + r\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi +$$
$$+r\sin\theta\cos\theta\sin\psi)(d\psi\otimes dh + dh\otimes d\psi) +$$

$$(-r\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\cos^2\psi + r\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi +$$

$$+h\cos^2\theta\cos^2\varphi\cos\psi - h\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi -$$
$$-r\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi\cos^2\psi - r\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi +$$
$$+h\cos^2\theta\sin^2\varphi\cos\psi + h\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi +$$
$$+r\sin\theta\cos\theta\cos^2\psi + h\sin^2\theta\cos\psi)\dot{\theta}(dt\otimes dr + dr\otimes dt) +$$

$$+(r^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\sin\psi\cos\psi + r^2\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\psi -$$
$$-rh\cos^2\theta\cos^2\varphi\sin\psi - rh\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi +$$
$$+r^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi\sin\psi\cos\psi - r^2\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\psi -$$
$$-rh\cos^2\theta\sin^2\varphi\sin\psi + rh\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi -$$
$$-r^2\sin\theta\cos\theta\sin\psi\cos\psi - rh\sin^2\theta\sin\psi)\dot{\theta}(dt\otimes d\psi + d\psi\otimes dt) +$$

$$+(-r\sin^2\theta\cos^2\varphi\cos\psi + h\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi -$$
$$-r\cos^2\theta\cos\psi - h\sin\theta\cos\theta)\dot{\theta}(dt\otimes dh + dh\otimes dt) +$$

$$+(r^2\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi + r^2\cos\theta\sin^2\varphi\cos^2\psi +$$
$$+r^2\cos\theta\cos^2\varphi\sin^2\psi + r^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi +$$
$$+rh\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi + rh\sin\theta\sin^2\varphi\cos\psi -$$
$$-r^2\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi + r^2\cos\theta\cos^2\varphi\cos^2\psi +$$
$$+r^2\cos\theta\sin^2\varphi\sin^2\psi - r^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi -$$
$$-rh\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi + rh\sin\theta\cos^2\varphi\cos\psi)\dot{\varphi}(dt\otimes d\psi + s\psi dt) +$$

$$+(-r\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi - r\sin\theta\cos^2\varphi\sin\psi -$$
$$-h\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi + r\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi -$$
$$-r\sin\theta\sin^2\varphi\sin\psi + h\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi)\dot{\varphi}(dt\otimes dh + dh\otimes dt) +$$

$$+(\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\cos\psi - \sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi +$$
$$+\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi\cos\psi + \sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi -$$
$$-\sin\theta\cos\theta\cos\psi)(dr\otimes dh + dh\otimes dr) =$$

$$= (r^2\cos^2\psi + h^2)\dot{\theta}^2 dt\otimes dt +$$
$$+[(r\cos\theta\cos\psi + h\sin\theta)^2 + r^2\sin^2\psi]\dot{\varphi}^2 dt\otimes dt +$$
$$+dr\otimes dr +$$
$$+r^2 d\psi\otimes d\psi +$$
$$+dh\otimes dh +$$
$$r\sin\psi(r\sin\theta\cos\psi - h\cos\theta)\dot{\theta}(dt\otimes d\varphi + d\varphi\otimes dt) +$$
$$+h\sin\theta\sin\psi\dot{\varphi}(dt\otimes dr + dr\otimes dt) +$$
$$+0(dr\otimes d\psi + d\psi\otimes dr) +$$
$$+0(d\psi\otimes dh + dh\otimes d\psi) +$$
$$+h\cos\psi\dot{\theta}(dt\otimes dr + dr\otimes dt) -$$
$$-rh\sin\psi\dot{\theta}(dt\otimes d\psi + d\psi\otimes dt) -$$
$$-r\cos\psi\dot{\theta}(dt\otimes dh + dh\otimes dt) +$$
$$+r(r\cos\theta + h\sin\theta\cos\psi)\dot{\varphi}(dt\otimes d\psi + d\psi\otimes dt) -$$
$$-r\sin\theta\sin\psi\dot{\varphi}(dt\otimes dh + dh\otimes dt) +$$

$$
\begin{aligned}
&+0(dr \otimes dh + dh \otimes dr) = \\
&= \{(r^2 \cos^2\psi + h^2)\dot\theta^2 + 2r\sin\psi(r\sin\theta\cos\psi - h\cos\theta)\dot\theta\dot\varphi + \\
&+[(r\cos\theta\cos\psi + h\sin\theta)^2 + r^2\sin^2\psi]\dot\varphi^2\} dt\otimes dt + \\
&+dr\otimes dr + r^2 d\psi\otimes d\psi + dh\otimes dh + \\
&+(h\cos\psi\dot\theta + h\sin\theta\sin\psi\dot\varphi)(dt\otimes dr + dr\otimes dt) + \\
&+(-rh\sin\psi\dot\theta + r(r\cos\theta + h\sin\theta\cos\psi)\dot\varphi)(dt\otimes d\psi + d\psi dt) + \\
&+(-r\cos\psi\dot\theta - r\sin\theta\sin\psi\dot\varphi)(dt\otimes dh + dh\otimes dt)
\end{aligned}
$$

Potom:

$$
\begin{aligned}
&dt\otimes dt - dx\otimes dx - dy\otimes dy - dz\otimes dz = \\
&= \{1 - (r^2\cos^2\psi + h^2)\dot\theta^2 - 2r\sin\psi(r\sin\theta\cos\psi - h\cos\theta)\dot\theta\dot\varphi - \\
&-[(r\cos\theta\cos\psi + h\sin\theta)^2 + r^2\sin^2\psi]\dot\varphi^2\} dt\otimes dt - \\
&-dr\otimes dr - r^2 d\psi\otimes d\psi - dh\otimes dh - \\
&-(h\cos\psi\dot\theta + h\sin\theta\sin\psi\dot\varphi)(dt\otimes dr + dr\otimes dt) + \\
&+(rh\sin\psi\dot\theta - r(r\cos\theta + h\sin\theta\cos\psi)\dot\varphi)(dt\otimes d\psi + d\psi dt) + \\
&+(r\cos\psi\dot\theta + r\sin\theta\sin\psi\dot\varphi)(dt\otimes dh + dh\otimes dt)
\end{aligned}
$$

$(3.4) \to (3.3) \mapsto (3.5)$:
Ďalšie transformácie:

$$
\begin{aligned}
&dt' = dt \qquad dr' = dr \qquad d\psi' = d\psi + \dot\chi dt \qquad dh' = dh \\
&d\psi'\otimes d\psi' = d\psi\otimes d\psi + \dot\chi^2 dt\otimes dt + \dot\chi(dt\otimes d\psi + d\psi\otimes dt) \\
&dt'\otimes d\psi' + d\psi'\otimes dt' = (d\psi\otimes dt + dt\otimes d\psi) + 2\dot\chi dt\otimes dt
\end{aligned}
$$

Konečný tvar metrického tenzora:

$$
\begin{aligned}
g \quad = \quad &\{1 - (\underbrace{r^2\cos^2(\psi+\chi) + h^2}_{\alpha})\dot\theta^2 - \\
&-[\underbrace{(r\cos\theta\cos(\psi+\chi) + h\sin\theta)^2 + r^2\sin^2(\psi+\chi)}_{\beta}]\dot\varphi^2 - \\
&-\underbrace{2r\sin(\psi+\chi)(r\sin\theta\cos(\psi+\chi) - h\cos\theta)}_{\gamma}\dot\theta\dot\varphi - \\
&-r^2\dot\chi^2 + 2\dot\chi[\underbrace{rh\sin(\psi+\chi)}_{\varepsilon}\dot\theta - \\
&-\underbrace{r(r\cos\theta + h\sin\theta\cos(\psi+\chi))}_{\mu}\dot\varphi]\} dt\otimes dt - \\
&-dr\otimes dr - r^2 d\psi\otimes d\psi - dh\otimes dh - \\
&-(\underbrace{h\sin\theta\sin(\psi+\chi)}_{\nu}\dot\varphi + \underbrace{h\cos(\psi+\chi)}_{\rho}\dot\vartheta)(dt\otimes dr + dr\otimes dt) + \\
&+(\underbrace{rh\sin(\psi+\chi)}_{\varepsilon}\dot\theta - \underbrace{r(r\cos\theta + h\sin\theta\cos(\psi+\chi))}_{\mu}\dot\varphi - \\
&-r^2\dot\chi)(dt\otimes d\psi + d\psi\otimes dt) +
\end{aligned}
$$

$$+(\underbrace{r\cos(\psi+\chi)}_{\tau}\,\dot{\theta}+\underbrace{r\sin\theta\sin(\psi+\chi)}_{\sigma}\,\dot{\varphi})(dt\otimes dh+dh\otimes dt)$$

Výpočet integrálu:
(3.9):

$$-\int\limits_0^{2\pi}\frac{(\Omega R^2\cos\theta+\omega R^2)\,d\psi}{1-\omega^2R^2-2\Omega\omega R^2\cos\theta-\Omega^2R^2\cos^2\theta\cos^2\psi-\Omega^2R^2\sin^2\psi}=$$

$$=\left[\begin{array}{l} A=\Omega R^2\cos\theta+\omega R^2\\ B=1-\omega^2R^2-2\Omega\omega R^2\cos\theta\\ C=\Omega^2R^2\cos^2\theta\\ D=\Omega^2R^2\end{array}\right]=-\int\limits_0^{2\pi}\frac{A}{B-C\cos^2\psi-D\sin^2\psi}d\psi=$$

$$=\left[\begin{array}{llll} t=\tan\psi & dt=\frac{d\psi}{\cos^2\psi} & \cos^2\psi=\frac{1}{1+t^2} & \sin^2\psi=\frac{t^2}{1+t^2}\\ \int\limits_0^{2\pi}\mapsto 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} & d\psi=\frac{dt}{1+t^2} & & \end{array}\right]=$$

$$=-2A\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{B-C\frac{1}{1+t^2}-D\frac{t^2}{1+t^2}}=-4A\int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{B+Bt^2-C-Dt^2}=$$

$$=-4A\int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{(\underbrace{B-D}_{E})t^2+(\underbrace{B-C}_{F})}=-4A\int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{Et^2+F}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\sqrt{|F|}\mu=\sqrt{|E|}t\\ dt=\frac{\sqrt{|F|}}{\sqrt{|E|}}d\mu\end{array}\right]=-4A\int\limits_0^{\infty}\frac{\sqrt{|F|}/\sqrt{|E|}}{F(\mu^2+1)}d\mu=-\frac{4A\sqrt{|F|}}{F\sqrt{|E|}}\frac{\pi}{2}=$$

$$=-\frac{2\pi\mathrm{sign}F}{\sqrt{|FE|}}=-\frac{2\pi\mathrm{sign}(B-C)}{\sqrt{|(B-C)(B-D)|}}=$$

$$=\frac{-2\pi(\Omega R^2\cos\theta+\omega R^2)\mathrm{sign}(1-\omega^2R^2-\Omega^2R^2\cos^2\theta-2\Omega\omega R^2\cos\theta)}{\sqrt{|(1-\omega^2R^2-\Omega^2R^2\cos^2\theta-2\Omega\omega R^2\cos\theta)(1-\omega^2R^2-\Omega^2R^2-2\Omega\omega R^2\cos\theta)|}}$$

Kapitola 4

Sústava s pohyblivým stredom a so stálou osou rotácie a nerovnomerný pohyb po priamke

Budeme skúmať sústavu, ktorá rotuje okolo pevnej osi, pričom poloha jej počiatku ako aj rýchlosť rotácie sú funkciami času. Pobrobnejšie preskúmame dva špeciálne prípady. Prvý prípad sa týka sústavy rotujúcej rovnomerne okolo pevnej osi, pričom jej stred sa pohybuje rovnomerne priamočiaro kolmo na os rotácie. Druhým špeciálnym prípadom bude sústava, ktorá nevykonáva žiaden rotačný pohyb, ale jej stred vykonáva ľubovoľne nerovnomerný priamočiary pohyb.

4.1 Sústava s pohyblivým stredom a so stálou osou rotácie

4.1.1 Transformácia metrického tenzora

Metrický tenzor:

$$g = dt' \otimes dt' - dx' \otimes dx' - dy' \otimes dy' - dz' \otimes dz'$$

Budeme trasformavať pri zámene súradníc:

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x\cos\psi(t) - y\sin\psi(t) + \mu(t) \\ y' &= x\sin\psi(t) + y\cos\psi(t) + \nu(t) \\ z' &= z + \rho(t) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ide teda o sústavu, ktorá rotuje okolo osi z' a polohu jej stredu opisujú funkcie μ, ν a ρ. V týchto nových súradniciach metrický tenzor nadobudne tvar (viď. doplňujúce výpočty na konci):

$$\begin{aligned} g = {} & [1 - (x^2+y^2)\dot\psi^2 - \dot\mu^2 - \dot\nu^2 - \dot\rho^2 + \\ & +2x\dot\psi(\dot\mu\sin\psi - \dot\nu\cos\psi) + 2y\dot\psi(\dot\mu\cos\psi + \dot\nu\sin\psi)]dt\otimes dt - \\ & -dx\otimes dx - dy\otimes dy - dz\otimes dz + \\ & +(y\dot\psi - \dot\mu\cos\psi - \dot\nu\sin\psi)(dt\otimes dx + dx\otimes dt) + \\ & +(-x\dot\psi + \dot\mu\sin\psi - \dot\nu\cos\psi)(dt\otimes dy + dy\otimes dt) - \\ & -\dot\rho(dt\otimes dz + dz\otimes dt) \end{aligned}$$

4.1.2 Integrovanie synchronizačnje 1-formy po slučke

Synchronizačná 1-forma má tvar:

$$-\mathrm{hor}\ dt = \frac{(y\dot{\psi} - \dot{\mu}\cos\psi - \dot{\nu}\sin\psi)dx + (-x\dot{\psi} + \dot{\mu}\sin\psi - \dot{\nu}\cos\psi)dy - \dot{\rho}dz}{\begin{array}{l} 1 - (x^2+y^2)\dot{\psi}^2 - \dot{\mu}^2 - \dot{\nu}^2 - \dot{\rho}^2 + \\ +2x\dot{\psi}(\dot{\mu}\sin\psi - \dot{\nu}\cos\psi) + 2y\dot{\psi}(\dot{\mu}\cos\psi + \dot{\nu}\sin\psi) \end{array}}$$

Budeme skúmať takýto špeciálny prípad:

$$\psi = \omega t \qquad \mu = vt \qquad \nu = 0 \qquad \rho = 0$$

kde ω a v sú konštanty. Ide teda o rovnomerne rotujúcu sústavu, ktorá zároveň koná rovnomerný priamočiary pohyb kolmý na os rotácie. Synchronizačná 1-forma sa potom zjednoduší na tvar:

$$-\mathrm{hor}\ dt = \frac{(y\omega - v\cos\omega t)dx + (-x\omega + v\sin\omega t)dy}{1 - (x^2+y^2)\omega^2 - v^2 + 2v\omega(x\sin\omega t + y\cos\omega t)}$$

Budeme ju integrovať po uzavretej krivke γ:

$$\begin{array}{ll} \gamma: & \tau \mapsto (t = \text{konšt.}\ , R\cos\tau, R\sin\tau, \zeta(\tau)) \\ & \tau \in \langle 0, 2\pi\rangle \qquad \zeta(0) = \zeta(2\pi) \end{array}$$

pričom funkcia $\tau \mapsto \zeta(\tau)$ je navyše aj spojitá a ohraničená. Časová odchýlka vyjde (viď. doplňujúce výpočty na konci):

$$\begin{aligned} \Delta t &= -\oint_\gamma \mathrm{hor}\ dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(R\omega\sin\tau - v\cos\omega t)(-R\sin\tau) + (-R\omega\cos\tau + v\sin\omega t)R\cos\tau}{1 - R^2\omega^2 - v^2 + 2v\omega R(\cos\tau\sin\omega t + \sin\tau\cos\omega t)} d\tau = \\ &= \frac{\pi}{\omega}\left(1 - \frac{1 + R^2\omega^2 - v^2}{\sqrt{(1 - R^2\omega^2 - v^2)^2 - 4R^2\omega^2 v^2}}\right) \end{aligned}$$

Špeciálnym prípadom je rovnomerná rotácia bez translačného pohybu, tj. $v = 0$.

$$\Delta t = -\frac{\pi}{\omega}\frac{1 + R^2\omega^2 - 1 + R^2\omega^2}{1 - R^2\omega^2} = -\frac{2\pi R^2\omega}{1 - R^2\omega^2} \tag{4.2}$$

Túto sústavu preto nie je možné zosynchronizovať.

4.2 Nerovnomerný pohyb po priamke

Preskúmame vzťažnú sústavu S, ktorej počiatok sa voči referenčnej sústave S' pohybuje na osi z' [1] podľa predpisu z'(počiatok sústavy S) $= z'(t') \equiv \rho(t')$. Nedochádza pritom k žiadnym rotačným pohybom, tj. uhly medzi osami x, y, z a x', y', z' zostávajú stále rovnaké.

Ide teda o špeciálny prípad doterajšieho príkladu pre

$$\dot{\psi} = 0 \qquad \dot{\mu} = \dot{\nu} = 0$$

takže synchronizačná 1-forma má v tomto prípade tvar:

$$-\mathrm{hor}\ dt = -\frac{\dot{\rho}}{1 - \dot{\rho}^2} dz$$

Pomocou tejto synchronizačnej 1-formy preskúmame synchronizovateľnosť takejto sústavy. V čase t_0 [2] budeme synchronizovať dvojo rôznych hodín tak, že vypočítame integrál synchronizačnej 1-formy po krivke Γ, ktorá ich spája a pritom zostáva v nadploche $t = t_0$.

[1] Voľba konkrétnej osi zjednoduší výpočty, pričom sa nič nezmení na všeobecnosti.
[2] Ide o súradnicový - nezosynchronizovaný čas

$$\Gamma : \tau \mapsto (t_0, x(\tau), y(\tau), z(\tau))$$

Tieto hodiny, ktoré pred synchronizáciou ukazovali rovnaké časy, po nej rovnaké časy ukazovať nemusia. Tento časový rozdiel bude:

$$\Delta T = -\int\limits_{\Gamma} \text{hor } dt = -\int\limits_{\Gamma} \frac{\dot\rho(t)}{1-\dot\rho^2(t)} dz = -\frac{\dot\rho(t_0)}{1-\dot\rho^2(t_0)} \int\limits_{\Gamma} dz = \Delta T(t_0)$$

Za pozornosť tu stoja dve vlastnosti časového rozdielu ΔT. Prvou vlastnosťou je to, že nezávisí od synchronizačnej cesty a môžeme použiť zápis:

$$\Delta T(t) = -\int\limits_{\Gamma} \text{hor } dt = -\int\limits_{A}^{B} \text{hor } dt \tag{4.3}$$

$$A = (t, \text{priestorové súradnice prvých hodín})$$
$$B = (t, \text{priestorové súradnice druhých hodín})$$

Takže je možné [3] celú sústavu S zosynchronizovať. Druhou dôležitou vlastnosťou časového rozdielu je to, že závisí od času. To znamená, že hodiny v sústave S musíme neustále znova nastavovať, prípadne im dodať predpis ako majú bežať, aby sústava zostala synchronizovaná.

Ako je opísané vyššie, z rovnosti (4.3) vyplýva, že synchronizovanie nezávisí od cesty. Rovnosť (4.3) však platí vtedy, keď funkcia ρ závisí len od času. Ak by závisela aj od priestorových súradníc, mohlo by sa stať, že sústavu S nie je možné žiadnym spôsobom zosynchronizovať. Ukazuje sa teda, že medzi týmito dvomi typmi sústav existuje zásadný rozdiel. Sústavy v ktorých funkcia ρ závisí len od času si môžeme predstaviť ako sústavy, ktoré sa vo veľmi malom časovom intervale pohybujú konštantnou rýchlosťou voči referenčnej sústave S' a platia pre ne Lorentzove transformácie. Tieto sústavy sú teda na krátky okamih inerciálne. Niet divu, že v takýchto sústavách sa na krátky okamih dajú všetky hodiny zosynchronizovať. V neskoršom čase však už neplatia tie isté Lorentzove transformácie ako predtým, keďže sa zmenila rýchlosť, ktorá je parametrom týchto transformácií. [4] Pripomeňme, že na synchronizáciu inerciálnej sústavy, keď sme pomocou synchronizácie odvodili špeciálne Lorentzove transformácie, sme použili synchronizačnú 1-formu:

$$-\text{hor } dt = -\frac{v}{1-v^2} dz$$

ktorá závisí od rýchlosti v. Ak sa teda zmení rýchlosť, zmení sa aj synchronizácia. Takže keď sústavu zosynchronizujeme v jednom vybranom okamihu [5], po nejakom čase prestane byť synchronizovaná.

Sústavy, pre ktoré funkcia ρ závisí aj od priestorových súradníc, už nemožno považovať za také, ktoré sú v malom časovom intervale inerciálne. Je to preto, lebo v takýchto sústavách sa na rozdiel od tých predošlých nepohybujú všetky hodiny rovnakým smerom a rovnakou rýchlosťou, tj. tieto sústavy sa voči referenčnej sústave buď otáčajú, alebo sa "deformujú".

Doplňujúce výpočty

$(4.1) \mapsto (4.1) \to (4.2)$:

Najprv sa staré bázové kovektory zapíšu pomocou nových:

[3] Aspoň na jeden okamih (okamih v zmysle nesynchronizovaného času)

[4] Takže sa s časom mení spôsob, ktorým v takýchto sústavách meriame čas a priestor, čo sa zrejme prejavuje tým, že v neinerciálnych sústavách pôsobia zotrvačné sily.

[5] Stále sa myslí okamih v zmysle nezosynchronizovaného času.

$$\begin{aligned}
dx' &= cos\psi dx - \sin\psi dy + (-x\dot{\psi}\sin\psi - y\dot{\psi}\cos\psi + \dot{\mu})dt \\
dy' &= \sin\psi dx + \cos\psi dy + (x\dot{\psi}\cos\psi - y\dot{\psi}\sin\psi + \dot{\nu})dt \\
dz' &= dz + \dot{\rho}dt
\end{aligned}$$

Tenzorové súčiny, ktoré budeme potrebovať:

$$\begin{aligned}
dx' \otimes dx' &= \cos^2\psi dx \otimes dx + \sin^2\psi dy \otimes dy - \\
&- \sin\psi\cos\psi(dx \otimes dy + dy \otimes dx) + \\
&+(-x\dot{\psi}\sin\psi\cos\psi - y\dot{\psi}\cos^2\psi + \dot{\mu}\cos\psi)(dt \otimes dx + dx \otimes dt) + \\
&+(x\dot{\psi}\sin^2\psi + y\dot{\psi}\sin\psi\cos\psi - \dot{\mu}\sin\psi)(dt \otimes dy + dy \otimes dt) + \\
&+(x^2\dot{\psi}^2\sin^2\psi + y^2\dot{\psi}^2\cos^2\psi + \dot{\mu}^2 + \\
&+2xy\dot{\psi}^2\sin\psi\cos\psi - 2x\dot{\mu}\dot{\psi}\sin\psi - 2y\dot{\mu}\dot{\psi}\cos\psi)dt \otimes dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dy' \otimes dy' &= \sin^2\psi dx \otimes dx + \cos^2\psi dy \otimes dy + \\
&+ \sin\psi\cos\psi(dx \otimes dy + dy \otimes dx) + \\
&+(x\dot{\psi}\sin\psi\cos\psi - y\dot{\psi}\sin^2\psi - \dot{\nu}\sin\psi)(dt \otimes dx + dx \otimes dt) + \\
&+(x\dot{\psi}\cos^2\psi - y\dot{\psi}\sin\psi\cos\psi + \dot{\nu}\cos\psi)(dt \otimes dy + dy \otimes dt) + \\
&+(x^2\dot{\psi}^2\cos^2\psi + y^2\dot{\psi}^2\sin^2\psi + \dot{\nu}^2 - \\
&-2xy\dot{\psi}^2\sin\psi\cos\psi + 2x\dot{\nu}\dot{\psi}\cos\psi - 2y\dot{\nu}\dot{\psi}\sin\psi)dt \otimes dt
\end{aligned}$$

$$dz' \otimes dz' = dz \otimes dz + \dot{\rho}(dt \otimes dz + dz \otimes dt) + \dot{\rho}^2 dt \otimes dt$$

Ďalej už nie je ťažké spočítať výraz, ktorý potrebujeme:

$$dt' \otimes dt' - dx' \otimes dx' - dy' \otimes dy' - dz' \otimes dz' = ...(4.2)$$

Výpočet integrálu (4.2):

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^{2\pi} \frac{(R\omega\sin\tau - v\cos\omega t)(-R\sin\tau) + (-R\omega\cos\tau + v\sin\omega t)R\cos\tau}{1 - R^2\omega^2 - v^2 + 2v\omega R(\cos\tau\sin\omega t + \sin\tau\cos\omega t)} d\tau = \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \frac{-R^2\omega(\sin^2\tau + \cos^2\tau) + vR(\sin\tau\cos\omega t + \cos\tau\sin\omega t)}{1 - R^2\omega^2 - v^2 + 2v\omega R(\cos\tau\sin\omega t + \sin\tau\cos\omega t)} d\tau = \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \frac{-R^2\omega + vR\sin(\tau + \omega t)}{1 - R^2\omega^2 - v^2 + 2v\omega R\sin(\tau + \omega t)} d\tau = \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \frac{-R^2\omega + vR\sin\tau}{1 - R^2\omega^2 - v^2 + 2v\omega R\sin\tau} d\tau \\
&= -\frac{vR}{2v\omega R} \int\limits_0^{2\pi} \frac{-\frac{R\omega}{v} + \sin\tau}{\frac{1 - R^2\omega^2 - v^2}{-2v\omega R} - \sin\tau} d\tau = \\
&= -\frac{1}{2\omega} \int\limits_0^{2\pi} \frac{a + \sin\tau}{b - \sin\tau} d\tau
\end{aligned}$$

kde:

$$\begin{aligned} a &= -\frac{R\omega}{v} \\ b &= \frac{1 - R^2\omega^2 - v^2}{-2v\omega R} > 1 \\ & 1 > R^2\omega^2 + v^2 + 2v\omega R = (R\omega + v)^2 \end{aligned}$$

Posledná nerovnosť platí preto, lebo celková rýchlosť $R\omega+v$ musí byť menšia ako rýchlosť svetla $c = 1$ Pokračujeme výpočtom pomocného integrálu:

$$\int_0^{2\pi} \frac{a + \sin x}{b - \sin x} dx = \left[\begin{array}{l} y = \sin x \quad dy = \cos x dx \\ dx = \begin{cases} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right) \\ -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \mapsto \int_0^1 - \int_1^{-1} + \int_{-1}^0 = 2\int_{-1}^1 \end{array} \right] =$$

$$= 2\int_{-1}^{1} \frac{a+y}{b-y} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{(1+y)(1-y)} = t(1-y) \\ t^2 = \frac{1+y}{1-y} \quad \int_{-1}^{1} \mapsto \int_0^{\infty} \\ t^2 - t^2 y = 1 + y \\ t^2 - 1 = (t^2+1)y \\ y = \frac{t^2-1}{t^2+1} \\ dy = \frac{2t(t^2+1) - 2t(t^2-1)}{(t^2+1)^2} dt = \frac{4t}{(t^2+1)^2} dt \\ 1 - y^2 = \frac{(t^2+1)^2 - (t^2-1)^2}{(t^2+1)^2} = \\ = \frac{4t^2}{(t^2+1)^2} \\ \sqrt{1-y^2} = \frac{2|t|}{t^2+1} \overset{t \geq 0}{=} \frac{2t}{t^2+1} \end{array} \right] =$$

$$= 2\int_0^{\infty} \frac{a + \frac{t^2-1}{t^2+1}}{b - \frac{t^2-1}{t^2+1}} \frac{\frac{4t}{(t^2+1)^2} dt}{\frac{2t}{t^2+1}} =$$

$$= 4\int_0^{\infty} \frac{(a+1)t^2 + (a-1)}{(b-1)t^2 + (b+1)} \frac{dt}{t^2+1} \overset{\substack{b>1 \\ \text{a párnosť}}}{=}$$

$$\overset{\substack{b>1 \\ \text{a párnosť}}}{=} \quad 4\int_0^{\infty} \left[\frac{A}{(b-1)t^2 + (b+1)} + \frac{B}{t^2+1} \right] dt =$$

$$= 4\int_0^{\infty} \frac{(a+b)dt}{(b-1)t^2 + (b+1)} - 4\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= 4\left[\frac{a+b}{\sqrt{b^2-1}} - 1 \right] \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \left[\frac{a+b}{\sqrt{b^2-1}} - 1 \right] 2\pi$$

takže:

$$-\oint_{\gamma} \text{hor } dt = -\frac{1}{2\omega} 2\pi \left[\frac{-\frac{R\omega}{v} + \frac{1-R^2\omega^2-v^2}{-2v\omega R}}{\sqrt{(\frac{1-R^2\omega^2-v^2}{-2v\omega R})^2 - 1}} - 1 \right] =$$

$$= \frac{\pi}{\omega}\left(1 - \frac{2R^2\omega^2 + 1 - R^2\omega^2 - v^2}{\sqrt{(1 - R^2\omega^2 - v^2)^2 - 4R^2\omega^2 v^2}}\right) = \frac{\pi}{\omega}\left(1 - \frac{1 + R^2\omega^2 - v^2}{\sqrt{(1 - R^2\omega^2 - v^2)^2 - 4R^2\omega^2 v^2}}\right)$$

Kapitola 5

Kritérium synchronizovateľnosti

5.1 Distribúcia

Na príkladoch sme sa presvedčili, že existujú sústavy, ktoré sa nedajú zosynchronizovať. V tejto časti budeme skúmať podmienky synchronizovateľnosti sústav. Keďže rozdiel medzi nezosynchronizovanými a zosynchronizovanými súradnicami je už zrejmý, nemá význam ďalej vypisovať ťažkopádne horné indexy ^{SUR} a ^{SYN}. Preto v tejto časti budeme používať označenia súradníc rovnako ako v príkladoch, kde sme pôvodné súradnice v plochom Minkowského priestore predstavujúcom inerciálnu vzťažnú sústavu označovali (t', x', y', z') a nezosynchronizované súradnice, ktoré sme získali transformáciou súradníc medzi inerciálnou sústavou a skúmanou vzťažnou sústavou, sme označovali (t, x, y, z). Takže odteraz $(t^{SUR}, x^{SUR}, y^{SUR}, z^{SUR}) \overset{ozn}{=} (t, x, y, z)$.

Budú nás zaujímať také sústavy, ktoré sa nielenže dajú zosynchronizovať, ale platí pre ne navyše aj to, že keď ich zosynchronizujeme v jednom čase, budú zosynchronizované aj v ľubovoľnom inom čase. V takýchto sústavách je dobre definovaný pojem súčasnosti, takže trojrozmerné nadplochy $t =$ konšt. v časopriestore sú definované tiež dobre. Tieto nadplochy sú množiny svetobodov, ktoré predstavujú momentálny fyzikálny obraz sústavy v danom čase. Môžeme si ich názorne predstaviť takým spôsobom, že nadplochu $t = t_0$ deformujeme tak, že každý jej bod posunieme o $-\Delta t$ v smere vektorového poľa ∂_t, kde Δt je čas, o ktorý treba posunúť hodiny v danom svetobode pôvodnej nadplochy, aby boli synchronizované s referenčnými hodinami v čase t_0. Ku každému času je jednoznačne priradená takáto trojrozmerná nadplocha a zjednotenie týchto nadplôch cez všetky časy tvorí celý časopriestor. Tieto nadplochy sa navyše nikde nepretínajú, keďže časová odchýlka Δt nezávisí od časovej súradnice t, ale len od priestorových súradníc. Ak by totiž Δt závisela aj od času, mohlo by sa napríklad stať, že v jednej priestorovej oblasti by s časom rástla a v druhej susednej oblasti by rýchlo klesala. Vtedy by sa mohlo stať, že nadplocha prislúchajúca menšiemu času by v druhej oblasti ležala pod nadplochou prislúchajúcej väčšiemu času, kým v prvej oblasti by to bolo naopak. Tieto trojrozmerné nadplochy by sa teda niekde nutne museli pretínať. Pojem súčasnosti teda definuje trojrozmernú distribúciu - "rozvrstvenosť" na časopriestore, ktorá je navyše integrovateľná. To znamená, že "spája" - integruje susedné [1]nadplochy do jedného celku.

Vo všeobecnosti sa k rozmerná distribúcia na n rozmernej variete definuje tak [6], že v každom bode variety z jednoznačne daného n rozmerného dotykového lineárneho priestoru vyberieme k rozmerný podpriestor. Nás budú zaujímať len hladké distribúcie. To sú také, u ktorých je závislosť k rozmerného podpriestoru od bodu variety hladká.

V sústavách ktoré sa nedajú zosynchronizovať sa distribúcia nedá zadefinovať pomocou pojmu súčasnosti, keďže tento pojem u nich nemusí mať zmysel [2]. Trojrozmernú distribúciu je však možné zadefinovať aj pomocou troch lineárne nezávislých vektorových polí. Sú to

[1] infinitezimálne blízke

[2] Pojem súčasnosti má vždy zmysel len lokálne, globálne ho mať nemusí.

také vektorové polia, ktoré sa v každom svetobode dotýkajú nejakej nadplochy z distribúcie. Vieme ich nájsť pomocou operátora hor , ktorý sme definovali ako tenzor typu $\binom{1}{1}$, ktorý vektoru v priradí vektor hor v spájajúci súčasné svetobody. Takže vektorové polia, ktoré definujú distribúciu súvisiacu s pojmom súčasnosti musia byť vlastnými vektormi operátora hor. Najprv nájdeme jeho vlastné čísla. [3] Využijeme maticový tvar operátora hor:

$$\det(\text{hor} - \lambda\hat{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{g_{01}}{g_{00}} & -\frac{g_{02}}{g_{00}} & -\frac{g_{03}}{g_{00}} \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^3 = 0$$

Máme teda dve vlastné čísla $\lambda = 0$ a $\lambda = 1$. K vlastnému číslu $\lambda = 0$ prislúcha vlastný vektor $\varphi\partial_t$ kde φ je ľubovoľná funkcia na časopriestore. Tento vektor ale očividne nepatrí do distribúcie, keďže jeho horizontálna časť je nulová, čo vidno aj z toho, že má nulové vlastné číslo, takže ho vylúčime. K vlastnému číslu $\lambda = 1$ prislúchajú vlastné vektory:

$$-\frac{g_{0i}}{g_{00}}\alpha^i\partial_t + \alpha^j\partial_j \tag{5.1}$$

Kde α^i sú tri lineárne nezávislé funkcie. Máme teda tri vektorové polia, ktoré definujú distribúciu. Týmto spôsobom možno definovať distribúcie aj v sústavách, ktoré nie sú synchronizovateľné. Vieme tiež, že ak je sústava synchronizovateľná, tak táto distribúcia je integrovateľná. Integorvateľnosť distribúcie danej vektorovými poľami (5.1) je teda nutnou podmienkou synchronizovateľnosti sústavy.

5.2 Frobeniovo kritérium

Na určovanie integrovateľnosti distribúcií existuje Frobeniovo kritérium [6]. Jedna z jeho variant hovorí, že hladká [4] distribúcia je integrovateľná práve vtedy, keď pre každú dvojicu vektorových polí U a V platí:

$$U \text{ a } V \text{ patria do distribúcie} \quad \Rightarrow \quad [U,V] \text{ patrí do distribúcie}$$

Táto varianta sa hodí na prípad, ktorý skúmame - distribúciu v štvorrozmernom časopriestore danú trojicou vektorových polí (5.1). Najprv vypočítame komutátor:

$$[U,V] \equiv \left[-\frac{g_{0i}}{g_{00}}\alpha^i\partial_t + \alpha^i\partial_i, -\frac{g_{0i}}{g_{00}}\beta^i\partial_t + \beta^i\partial_i\right]$$

Vypočítame ho v komponentnom tvare:

$$[U,V]^\mu = U^\nu V^\mu{}_{,\nu} - V^\nu U^\mu{}_{,\nu}$$

Pre konkrétne zložky vyjde:

$$\begin{aligned} [U,V]^t &= \frac{g_{0i}}{g_{00}}\alpha^i\left(\frac{g_{0j}}{g_{00}}\beta^j\right)_{,t} + \alpha^i\left(-\frac{g_{0j}}{g_{00}}\beta^j\right)_{,i} - \\ &\quad -\frac{g_{0i}}{g_{00}}\beta^i\left(\frac{g_{0j}}{g_{00}}\alpha^j\right)_{,t} - \beta^i\left(-\frac{g_{0j}}{g_{00}}\alpha^j\right)_{,i} = \\ &= \frac{g_{0i}}{g_{00}}\alpha^i\left(\frac{g_{0j}}{g_{00}}\right)_{,t}\beta^j + \frac{g_{0j}}{g_{00}}\alpha^j\frac{g_{0i}}{g_{00}}\beta^i{}_{,t} - \\ &\quad -\alpha^i\left(\frac{g_{0j}}{g_{00}}\right)_{,i}\beta^j - \alpha^j\frac{g_{0i}}{g_{00}}\beta^i{}_{,j} - \end{aligned}$$

[3] V skutočnosti sú to funkcie

[4] Celý čas hovoríme len o hladkých distribúciách, tj. daných hladkými vektorovými poľami.

$$-\frac{g_{0i}}{g_{00}}\beta^i\left(\frac{g_{0j}}{g_{00}}\right)_{,t}\alpha^j-\frac{g_{0j}}{g_{00}}\beta^j\frac{g_{0i}}{g_{00}}\alpha^i{}_{,t}+$$
$$+\beta^i\left(\frac{g_{0j}}{g_{00}}\right)_{,i}\alpha^j+\beta^j\frac{g_{0i}}{g_{00}}\alpha^i{}_{,j}$$

$$\begin{aligned}[U,V]^i &= -\frac{g_{0j}}{g_{00}}\alpha^j\beta^i{}_{,t}+\alpha^j\beta^i{}_{,j}+\\ &\quad+\frac{g_{0j}}{g_{00}}\beta^j\alpha^i{}_{,t}-\beta^j\alpha^i{}_{,j}\end{aligned}$$

Vektor $[U,V]$ patrí do distribúcie, ak existuje taká trojica funkcií γ^i, že platí:

$$[U,V]=-\frac{g_{0i}}{g_{00}}\gamma^i\partial_t+\gamma^i\partial_i$$

teda:

$$[U,V]^i=\gamma^i \quad \text{a} \quad [U,V]^t=-\frac{g_{0i}}{g_{00}}\gamma^i=-\frac{g_{0i}}{g_{00}}[U,V]^i$$

Keď do poslednej rovnosti dosadíme zložky vektora $[U,V]$, ktoré sme vypočítali, získame podmienku:

$$\frac{g_{0j}}{g_{00}}\alpha^j\left(\frac{g_{0i}}{g_{00}}\right)_{,t}\beta^i-\alpha^j\left(\frac{g_{0i}}{g_{00}}\right)_{,j}\beta^i-$$
$$-\frac{g_{0j}}{g_{00}}\beta^j\left(\frac{g_{0i}}{g_{00}}\right)_{,t}\alpha^i+\beta^j\left(\frac{g_{0i}}{g_{00}}\right)_{,j}\alpha^i=0$$

Táto rovnosť musí platiť pre každú šesticu funkcií α^i,β^i, takže je ekvivalentná podmienke:

$$\left(\frac{g_{0i}}{g_{00}}\right)_{,\mu}=0 \tag{5.2}$$

takže ak je splnené Frobeniovo kritérium, tak je splnená táto podmienka. Taktiež ak je sústava synchronizovateľná a po synchronizácii v jednom čase zostáva synchronizovaná aj v ľubovoľnom inom čase, tak je distribúcia definovaná pomocou súčasnosti udalostí v časopriestore integrovateľná a platí Frobeniovo kritérium. Podmienka (5.2) je teda nutnou podmienkou na to, aby bola sústava synchronizovateľná a aby po synchronizácii zostávala synchronizovaná aj v ľubovoľnom inom čase.

5.3 Priamy prístup

Podmienka (5.2) sa dá získať aj iným spôsobom. Sústava je synchronizovateľná práve vtedy, keď pre každú uzavretú krivku Γ, ktorá leží v nadploche $t=$ konšt. platí:

$$\oint_\Gamma \frac{g_{0i}}{g_{00}}dx^i=0 \tag{5.3}$$

Túto formuláciu pojmu synchronizovateľnosti by bolo vhodné trochu upraviť. Preskúmame preto, čo sa stane, keď krivku Γ ležiacu v nadploche $t=$ konšt. nahradíme úplne ľubovoľnou uzavretou krivkou Λ:

$$\Lambda:\tau\mapsto(t(\tau),x(\tau),y(\tau),z(\tau))$$

Integrovať synchronizačnú 1-formu po tejto krivke znamená spočítavať časové odchýlky $\Delta t(\tau)$, o ktoré treba posúvať hodiny s priestorovými súradnicami $(x(\tau+\Delta\tau),y(\tau+\Delta\tau),z(\tau+\Delta\tau))$

, aby boli synchronizované s hodinami s priestorovými súradnicami $(x(\tau), y(\tau), z(\tau))$ a to vždy v čase $t(\tau)$, ktorý v tomto prípade závisí od integračného parametra τ. V sústavách, ktoré po synchronizácii v jednom čase zostanú synchronizované aj v ľubovoľnom inom čase, časová odchýlka Δt nezávisí od času, takže pri integrovaní synchronizačnej 1-formy po krivke Λ nezávisí ani od integračného parametra τ. V týchto sústavách preto platí:

$$\oint_{\Lambda} \frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i = \oint_{\Lambda_0} \frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i$$

kde Λ_0 je krivka, ktorá vznikne z krivky Λ tak, že zafixujeme časovú súradnicu.

$$\Lambda_0 : \tau \mapsto (t_0, x(\tau), y(\tau), z(\tau))$$

Na základe (5.3) teda môžeme sformulovať nasledujúce tvrdenie:

Nutnou a postačujúcou podmienkou na to, aby bola sústava synchronizovateľná a navyše ak ju synchronizujeme v jednom čase, zostane zosynchronizovaná aj v ľubovoľnom inom čase, je:

$$\oint_{\Lambda} \frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i = 0 \tag{5.4}$$

Pre ľubovoľnú uzavretú krivku Λ v časopriestore.

Nech Σ je dvojrozmerná oblasť s hranicou $\partial\Sigma = \Lambda$. Potom platí Stokesova veta:

$$\oint_{\Lambda} \frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i = \int_{\Sigma} d\left(\frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i\right) = 0 \tag{5.5}$$

Pre každú dvojrozmernú oblasť Σ v časopriestore, takže integrál je rovný nule, len keď je podintegrálna 2-forma rovná nule:

$$d\left(\frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i\right) = 0$$

Inak povedané, sústava je synchronizovateľná a po synchronizácii v jednom čase zostáva synchronizovaná aj v ľubovoľnom inom čase práve vtedy, keď príslušná synchronizačná 1-forma je uzavretá, tj. jej vonkajšia derivácia je rovná nule. Vonkajšiu deriváciu synchronizačnej 1-formy upravíme pomocou Leibnitzovho pravidla na tvar:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i\right) &= d\left(\frac{g_{0i}}{g_{00}}\right) \wedge dx^i + \frac{g_{0i}}{g_{00}} \wedge \underbrace{ddx^i}_{0} = \\ &= \left(\frac{g_{0i}}{g_{00}}\right)_{,\mu} dx^\mu \wedge dx^i \end{aligned}$$

Táto 2-forma je rovná nule, keď sú nulové jej komponenty v súradniciach x^μ, takže:

$$\left(\frac{g_{0i}}{g_{00}}\right)_{,\mu} = 0 \tag{5.6}$$

čo je tá istá podmienka, akú sme odvodili predtým pomocou Frobeniovho kritéria, až na to, že tu je táto podmienka nielen nutná, ale aj postačujúca. Frobeniovo kritérium sme teda na odvodenie nutnej podmienky synchronizovateľnosti sústav vlastne ani nepotrebovali. V tomto kontexte ho však môžeme chápať ako nástroj, pomocou ktorého sme overili správnosť geometrickej interpretácie fyzikálneho pojmu súčasnosti pomocou distribúcií a súvis ich integrovateľnosti so synchronizovateľnosťou sústav.

Doteraz sme skúmali len také sústavy, ktoré sa nielenže dajú zosynchronizovať, ale po synchronizácii v jednom čase zostanú zosynchronizované aj v ľubovoľnom inom čase. Na tomto mieste je vhodné ešte v krátkosti odvodiť podmienku na to, aby bola sústava synchronizovateľná a pritom pre ňu nemuselo platiť, aby po synchronizácii v jednom čase zostala zosynchronizovaná aj iných časoch. V takejto sústave pre každú uzavretú krivku ležiacu v nadploche $t =$ konšt. platí vzťah (5.3). Rovnako ako predtým (5.5) možno použiť Stokesovu vetu. V tomto prípade je však vhodnejšie uzavretej integračnej krivke priradiť takú dvojrozmernú plochu, ktorá leží taktiež celá v trojrozmernej nadploche $t =$ konšt. Synchronizačná 1-forma vtedy musí byť uzavretá len na tejto trojrozmernej nadploche, takže vonkajšiu deriváciu d môžeme nadradiť čisto priestorovou [5] vonkajšou deriváciou, ktorá so súradnicovým časom t nepracuje ako so súradnicou, ale len ako s parametrom. Podmienka (5.6) sa tak zredukuje na:

$$\left(\frac{g_{0i}}{g_{00}}\right)_{,j} = 0 \tag{5.7}$$

Takže na to, aby bola sústava synchronizovateľná, musí byť splnených 9 rovností (5.7) a aby po synchronizácii v jednom čase zostala synchronizovaná aj v ľubovoľnom inom čase, musí platiť 12 rovností (5.6). V oboch prípadoch ide o nutnú aj postačujúcu podmienku.

V ďalších častiach sa budeme zaoberať opäť len takými sústavami, ktoré po synchronizácii v jednom čase zostanú zosynchronizované aj v iných časoch.

5.4 Ďalší prístup

Hoci sme už podmienku synchronizovateľnosti odvodili dvomi rôznymi spôsobmi, nebude na škodu preskúmať aj tretí spôsob. Kým prvé dva spôsoby dávali tú istú nutnú podmienku a použitie oboch vlastne len overovalo správnosť geometrickej predstavy pojmu fyzikálnej súčasnosti ako trojrozmernej distribúcie v časopriestore a súvis jej integrovateľnosti so synchronizovateľnosťou sústav, tretí spôsob prinesie o čosi prísnejšiu podmienku synchronizovateľnosti, ktorá však nebude v rozpore s doposiaľ odvodenou podmienkou.

V úvodnej kapitole sme súradnicový systém vo vzťažnej sústave zavádzali pomocou systému svetočiar vykresľovaných priestorovými bodmi spojenými s touto sústavou. Pre naše potreby teraz zavedieme vektorové pole V, ktorého integrálne krivky budú práve tieto svetočiary [5]. V súradniciach spojených s touto sústavou sa dá zapísať ako:

$$V = \chi \partial_t$$

kde χ je funkcia na časopriestore. Nám sa bude hodiť také vektorové pole V, ktoré bude navyše správne merať fyzikálny čas. To znamená, že ak pozorovateľovi stojacemu v sústave, ktorú skúmame, ubehne čas t_*, tak sa za tento čas posunie v smere vektorového poľa V o parameter t_*, čo sa dá vyjadriť ako:

$$g(V, V) = 1 \tag{5.8}$$

A ešte aby V bolo v smere, v ktorom čas rastie. Pomocou podmienky (5.8) vieme ľahko určiť funkciu χ

$$1 = g(V, V) = \chi^2 g(\partial_t, \partial_t) \qquad \chi = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}$$

Takže vektorové pole V, ktoré predstavuje smer plynutia času vo vzťažnej sústave má tvar:

$$V = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \partial_t \tag{5.9}$$

Toto vektorové pole je vhodné na ďalší opis distribúcií definovaných pomocou pojmu súčasnosti vo vzťažnej sústave. Pre každé vektorové pole W, ktoré patrí do distribúcie musí totiž platiť:

$$g(V, W) = 0$$

[5] V súradnicovom zmysle. Nie fyzikálnom.

čo len vyjadruje fakt, že priestorový smer musí byť v zmysle metrického tenzora g kolmý na časový smer. Keď vektorovému poľu V priradíme 1-formu $\tilde{V} = g(V,\cdot)$, tak platí $\left\langle \tilde{V}, W \right\rangle = 0$. Takže distribúcia je daná 1-formou $\tilde{V}$ takým spôsobom, že do distribúcie patrí každé vektorové pole, ktoré túto 1-formu vynuluje. Všeobecne sa dá každá k rozmerná distribúcia na n rozmernej variete zadať pomocou $(n-k)$ lineárne nezávislých 1-foriem, pričom do distribúcie patria len tie vektory, ktoré nulujú všetky tieto 1-formy.

Na prácu s vektorovým poľom V a príslušnou 1-formou $\tilde{V}$ budeme potrebovať tieto zobrazenia foriem [6]:

$$\begin{aligned} i_v \quad &: \quad \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M) \\ & \quad\; (i_v\alpha)(u,...,w) = \alpha(v,...,w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j_v \quad &: \quad \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M) \\ & \quad\; j_v\alpha = \tilde{v} \wedge \alpha \equiv g(v,\cdot) \wedge \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\eta} \quad &: \quad \Omega^p(M) \to \Omega^{p}(M) \\ & \quad\; \hat{\eta}\alpha = (-1)^p \alpha \end{aligned}$$

kde v je vektorové pole na variete M, čo je v našom prípade štvorrozmerný časopriestor s metrickým tenzorom g a $\Omega^p(M)$ je množina všetkých p-foriem na M. Pre vnútorný súčin i_v na vonkajšom súčine $\wedge$ dvoch foriem platí graduované Leibnitzovo pravidlo [6]:

$$i_v(\alpha \wedge \beta) = (i_v\alpha) \wedge \beta + (\hat{\eta}\alpha) \wedge (i_v\beta)$$

Jednoduchým výpočtom:

$$\begin{aligned} i_v j_w \alpha \quad &\equiv \quad i_v(\tilde{w} \wedge \alpha) = (i_v\tilde{w}) \wedge \alpha + (\hat{\eta}\tilde{w}) \wedge (i_v\alpha) = \\ &= \quad g(w,v)\alpha - j_w i_v \alpha \end{aligned}$$

sa ľahko ukáže, že platí:

$$i_v j_w + j_w i_v = g(v,w)\hat{1}$$

čo pre naše vektorové pole V dáva:

$$i_V j_V + j_V i_V = \hat{1}$$

To znamená, že ľubovoľná p-forma α sa dá zapísať ako:

$$\alpha = \tilde{V} \wedge i_V\alpha + i_V j_V \alpha$$

V plochom Minkowského priestore, kde $g = \eta = dt \otimes dt - \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j$, sa dá každá p-forma α zapísať v tvare [5]:

$$\alpha = dt \wedge \hat{s}_0 + \hat{r}_0$$

kde $(p-1)$-forma $\hat{s}_0$ a p-forma $\hat{r}_0$ už neobsahujú dt, ide teda o čisto priestorové formy, ktoré sú navyše jednoznačne dané p-formou α. V našom prípade, keď máme všeobecný metrický tenzor g, úlohu $\partial_t \overset{ozn}{=} \partial_0$ a $dt \overset{ozn}{=} dx^0$ z plochého Minkowského priestoru nahrádzajú $V \overset{ozn}{=} D_0$ a $\tilde{V} \overset{ozn}{=} \tilde{D}^0$ a úlohu ostatných bázových vektorov ∂_i a kovektorov dx^i nahrádzajú nové bázové vektory D_i a kovektory $\tilde{D}^i$ tak, že pre ne platia formálne tie isté vzťahy ako pre tie pôvodné:

$$\begin{array}{lcl} \langle dx^\mu, \partial_\nu \rangle = \delta^\mu_\nu & ... & \left\langle \tilde{D}^\mu, D_\nu \right\rangle = \delta^\mu_\nu \\ \eta(\partial_t, \partial_t) = 1 & ... & g(V,V) = 1 \\ \eta(\partial_t, \partial_i) = 0 & ... & g(V, D_i) = 0 \\ \eta(\partial_i, \partial_j) = -\delta_{ij} & ... & g(D_i, D_j) = -\delta_{ij} \end{array}$$

Na základe tejto podobnosti [6] môžeme prehlásiť, že zápis:

$$\alpha = \tilde{V} \wedge \hat{s} + \hat{r}$$

je daný tiež jednoznačne p-formou α a $(p-1)$-forma $\hat{s}$ a p-forma $\hat{r}$ taktiež neobsahujú $\tilde{V}$ a môžeme ich prehlásiť za čisto priestorové formy. Takýmto spôsobom sa dá zapísať aj 2-forma $d\tilde{V}$

$$\begin{aligned} d\tilde{V} &= \tilde{V} \wedge \hat{a} + \hat{y} \\ \text{kde} & \\ \hat{a} &= i_V d\tilde{V} \\ \hat{y} &= i_V j_V d\tilde{V} \end{aligned} \tag{5.10}$$

V tejto chvíli je vhodné zaviesť ďalšiu formuláciu Frobeniovho kritéria [6], ktorá hovorí, že na n rozmernej variete je k rozmerná distribúcia [7] daná $(n-k)$ lineárne nezávislými 1-formami θ^i integrovateľná práve vtedy, keď platí:

$$\exists\ (n-k)^2 \text{ 1-foriem } \sigma^i_j, \text{ takých že } d\theta^i = \sigma^i_j \wedge \theta^j$$

V našom prípade je trojrozmerná distribúcia definovaná pomocou jednej 1-formy $\tilde{V}$, takže nám stačí overiť existenciu len jedinej [8] 1-formy σ. Na základe Frobeniovho kritéria a vzťahu (5.10) je teda zrejmé, že naša distribúcia je integrovateľná práve vtedy, keď platí:

$$\hat{y} = i_V j_V d\tilde{V} = 0$$

Priamy výpočet dáva:

$$\begin{aligned} i_V j_V d\tilde{V} &= i_V j_V dg\left(\frac{\partial_t}{\sqrt{g_{00}}}, \cdot\right) = i_V j_V d\left(\frac{g_{0\mu}}{\sqrt{g_{00}}} dx^\mu\right) = \\ &= i_V j_V \left[\left(\frac{g_{0\mu}}{\sqrt{g_{00}}}\right)_{,\nu} dx^\nu \wedge dx^\mu\right] = \\ &= i_V \left[\frac{g_{0\rho}}{\sqrt{g_{00}}}\left(\frac{g_{0\mu}}{\sqrt{g_{00}}}\right)_{,\nu} dx^\rho \wedge dx^\nu \wedge dx^\mu\right] = \\ &= \frac{g_{00}}{\sqrt{g_{00}}}\left(\frac{g_{0\mu}}{\sqrt{g_{00}}}\right)_{,\nu} \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} dx^\nu \wedge dx^\mu = \\ &= \left(\frac{g_{0\mu}}{\sqrt{g_{00}}}\right)_{,\nu} dx^\nu \wedge dx^\mu \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

čo je splnené práve vtedy, keď platí:

$$\left(\frac{g_{0\nu}}{\sqrt{g_{00}}}\right)_{,\mu} = 0$$

Pre $\nu = 0$ vyjde:

$$\left(\frac{g_{00}}{\sqrt{g_{00}}}\right)_{,\mu} = \left(\sqrt{g_{00}}\right)_{,\mu} = \frac{g_{00,\mu}}{2\sqrt{g_{00}}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad g_{00,\mu} = 0 \tag{5.11}$$

a pre $\nu = i$:

$$\left(\frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}\right)_{,\mu} = \frac{g_{0i,\mu}\sqrt{g_{00}} - g_{0i}\left(\sqrt{g_{00}}\right)_{,\mu}}{g_{00}} \stackrel{(5.11)}{\Longrightarrow} g_{0i,\mu} = 0 \tag{5.12}$$

[6] dokonca rovnakosti
[7] Opäť máme na mysli len hladké distribúcie. V tomto prípade sú to distribúcie dané hladkými formami.
[8] $(4-3)^2 = 1$

Podmienky (5.11) a (5.12) sa dajú zhrnúť do jedinej podmienky:

$$g_{0\nu,\mu} = 0 \tag{5.13}$$

a je to nutná podmienka na to, aby vzťažná sústava bola synchronizovateľná a aby po synchronizácii v jednom čase zostala synchronizovaná aj v ľubovoľnom inom čase. Navyše, ak platí táto podmienka, tak očividne platí aj podmienka (5.2), ktorú sme odvodili inými spôsobmi v predchádzajúcich dvoch častiach. A keďže je podmienka (5.2) aj postačujúcou podmienkou, tak aj podmienka (5.13) je nielen nutná, ale aj postačujúca. Takže hoci sme rôznymi spôsobmi neodvodili presne tú istú podmienku, nedošlo k žiadnemu rozporu. Navyše podmienka (5.13) je silnejšia a poskytuje nám viac možností, ak ju chceme použiť na vyvrátenie synchronizovateľnosti vzťažnej sústavy.

5.5 Zhrnutie

Logická štruktúra odvodení podmienok (5.2) a (5.13) sa dá stručne zhrnúť nasledovne:

- Vzťažnú sústavu je možné zosynchronizovať. $\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow$ Integrál zo synchronizačnej 1-formy po uzavretej krivke
  ležiacej v trojrozmernej nadploche $t =$ konšt. je rovný nule. $\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow$ Synchronizačná 1-forma je uzavretá všade v nadploche $t =$ konšt. $\Leftrightarrow$

  $$\Leftrightarrow \qquad \left(\frac{g_{0i}}{g_{00}}\right)_{,j} = 0$$

- Vzťažnú sústavu je možné zosynchronizovať a po synchronizácii
  v jednom čase zostáva synchronizovaná aj v ľubovoľnom inom čase:

  1. $\Leftrightarrow$ Integrál zo synchronizačnej 1-formy po
     ľubovoľnej uzavretej krivke je rovný nule. $\Leftrightarrow$
     $\Leftrightarrow$ Synchronizačná 1-forma je uzavretá. $\Leftrightarrow$

     $$\Leftrightarrow \qquad \left(\frac{g_{0i}}{g_{00}}\right)_{,\mu} = 0$$

  2. $\Rightarrow$ [9]
     Trojrozmerná distribúcia v časopriestore definovaná
     pomocou pojmu súčasnosti je integrovateľná:

     (a) $\Leftrightarrow$ Frobeniovo kritérium:

     $$U \text{ a } V \text{ patria do distribúcie} \Rightarrow [U, V] \text{ patrí do distribúcie}$$

     $$\Leftrightarrow \qquad \left(\frac{g_{0i}}{g_{00}}\right)_{,\mu} = 0$$

     (b) $\Leftrightarrow$ Frobeniovo kritérium:

     $$\exists\ (n-k)^2 \text{ 1-foriem } \sigma^i_j, \text{ takých že } d\theta^i = \sigma^i_j \wedge \theta^j$$

     $$\Leftrightarrow \qquad g_{0\nu,\mu} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{g_{0i}}{g_{00}}\right)_{,\mu} = 0$$

Sústava je synchronizovateľná práve vtedy, keď je splnená podmienka $(g_{0i}/g_{00})_{,j} = 0$ pre všetky $i, j = 1, 2, 3$ a navyše po synchronizácii v jednom čase zostáva synchronizovaná aj v ľubovoľnom inom čase práve vtedy, keď podmienka $g_{0\nu,\mu} = 0$ platí pre všetky $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

[9] Implikácia bola zdvôvodnená len týmto smerom. Opačná implikácia nie potrebná, lebo postačujúca podmienka je odvodená iným spôsobom.

Kapitola 6

Aplikácia kritéria synchronizovateľnosti na príklady

Nutnú a postačujúcu podmienku synchronizovateľnosti, ktorú sme odvodili v predchádzajúcej časti, najprv upravíme na praktickejší tvar:

$$\left(\frac{g_{0i}}{g_{00}}\right)_{,j} = \frac{g_{0i,j}g_{00} - g_{0i}g_{00,j}}{g_{00}^2} = 0$$

$$g_{0i,j}g_{00} - g_{0i}g_{00,j} = 0 \tag{6.1}$$

Pripomeňme tiež, že nutná a postačujúca podmienka na to, aby sústava po synchronizovaní v jednom čase zostala navyše synchronizovaná aj v iných časoch je:

$$g_{0\nu,\mu} = 0 \tag{6.2}$$

6.1 Rotácia okolo premennej osi

V prípade sústavy rotujúcej okolo premennej osi použijeme kritérium (6.1). Keby sme chceli ukázať, že túto sústavu je možné zosynchronizovať a po synchronizácii v jednom čase zostáva synchronizovaná aj v ľubovoľnom inom čase, museli by sme overovať všetkých 16 rovností z podmienky (6.2). Keďže však už vieme, že túto sústavu už pre špeciálny prípad - jednoduchý precesný pohyb nie je možné synchronizovať, tak na to aby sme to potvrdili aj pre všeobecný prípad, stačí overiť, že neplatí aspoň jedna z rovností kritéria (6.1) Vyberieme si možnosť $i = j = r$.

$$\begin{aligned}
g_{00} &= 1 - r^2\dot{\chi}^2 + 2\dot{\chi}[rh\sin(\psi+\chi)\dot{\theta} - r(r\cos\theta + h\sin\theta\cos(\psi+\chi))\dot{\varphi}] - \\
&\quad -2r\sin(\psi+\chi)(r\sin\theta\cos(\psi+\chi) - h\cos\theta)\dot{\theta}\dot{\varphi} - \\
&\quad -(r^2\cos^2(\psi+\chi) + h^2)\dot{\theta}^2 - \\
&\quad -[(r\cos\theta\cos(\psi+\chi) + h\sin\theta)^2 + r^2\sin^2(\psi+\chi)]\dot{\varphi}^2 \\
g_{0r} &= -h\cos(\psi+\chi)\dot{\theta} - h\sin\theta\sin(\psi+\chi)\dot{\varphi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&g_{0r,r}g_{00} - g_{0r}g_{00,r} = \\
&= (h\cos(\psi+\chi)\dot{\theta} + h\sin\theta\sin(\psi+\chi)\dot{\varphi}) \\
&[-2r\dot{\chi}^2 + 2h\sin(\psi+\chi)\dot{\chi}\dot{\theta} - 4r\cos\theta\dot{\chi}\dot{\varphi} - \\
&-2h\sin\theta\cos(\psi+\chi)\dot{\chi}\dot{\varphi} - 4r\sin\theta\sin(\psi+\chi)\cos(\psi+\chi)\dot{\theta}\dot{\varphi} + \\
&+2h\cos\theta\sin(\psi+\chi)\dot{\theta}\dot{\varphi} - 2r\cos^2(\psi+\chi)\dot{\theta}^2 - \\
&-2r\cos^2\theta\cos^2(\psi+\chi)\dot{\varphi}^2 - 2h\sin\theta\cos\theta\cos(\psi+\chi)\dot{\varphi}^2 -
\end{aligned}$$

$$-2r\sin^2(\psi+\chi)\dot{\varphi}^2] =$$

$$\begin{aligned}
&= -2rh\cos(\psi+\chi)\dot{\chi}^2\dot{\theta} - \\
&-2rh\sin\theta\sin(\psi+\chi)\dot{\chi}^2\dot{\varphi} + \\
&+2h^2\sin(\psi+\chi)\cos(\psi+\chi)\dot{\chi}\dot{\theta}^2 + \\
&[-4rh\cos\theta\cos(\psi+\chi) + 2h^2\sin\theta(\sin^2(\psi+\chi) - \cos^2(\psi+\chi))]\dot{\chi}\dot{\theta}\dot{\varphi} + \\
&[-4rh\sin\theta\cos\theta\sin(\psi+\chi) - 2h^2\sin^2\theta\sin(\psi+\chi)\cos(\psi+\chi)]\dot{\chi}\dot{\varphi}^2 - \\
&-2rh\cos^3(\psi+\chi)\dot{\theta}^3 + \\
&+[-6rh\sin\theta\sin(\psi+\chi)\cos^2(\psi+\chi) + 2h^2\cos\theta\sin(\psi+\chi)\cos(\psi+\chi)]\dot{\theta}^2\dot{\varphi} + \\
&+[2h^2\sin\theta\cos\theta(\sin^2(\psi+\chi) - \cos^2(\psi+\chi)) - 2rh\cos^2\theta\cos^3(\psi+\chi) - \\
&-2rh(1+2\sin^2\theta)\sin^2(\psi+\chi)\cos(\psi+\chi)]\dot{\theta}\dot{\varphi}^2 + \\
&+[-2rh\sin\theta\cos^2\theta\sin(\psi+\chi)\cos^2(\psi+\chi) - 2rh\sin\theta\sin^3(\psi+\chi) - \\
&-2h^2\sin^2\theta\cos\theta\sin(\psi+\chi)\cos(\psi+\chi)]\dot{\varphi}^3 \neq 0
\end{aligned}$$

Zistili sme teda, že aspoň jedna z deviatich podmienok synchronizovateľnosti sústavy nie je splnená. Bola by splnená, len ak by $\dot{\chi} = \dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0$, čo zodpovedá statickej sústave. Vieme teda povedať, že sústavu nie je možné synchronizovať, keď vykonáva akýkoľvek rotačný pohyb, napríklad rotuje rovnomerne okolo pevnej osi.

6.2 Sústava s pohyblivým stredom a so stálou osou rotácie

Teraz použijeme podmienku (6.1) na sústavu, ktorá rotuje okolo osi z, pričom jej stred vykonáva ľubovoľný pohyb. Vieme, že v špeciálnom prípade - rovnomerná rotácia a zároveň rovnomerný pohyb pozdĺž osi x, sústavu nie je možné synchronizovať. Podobne ako v predchádzajúcom prípade, preskúmame len jednu z deviatich podmienok. Vyberieme prípad $i = z$ a $j = x$.

$$\begin{aligned}
g_{00} &= 1 - (x^2+y^2)\dot{\psi}^2 - \dot{\mu}^2 - \dot{\nu}^2 - \dot{\rho}^2 + \\
&\quad +2\dot{\psi}[x(\dot{\mu}\sin\psi - \dot{\nu}\cos\psi) + y(\dot{\mu}\cos\psi + \dot{\nu}\sin\psi)] \\
g_{0z} &= -\dot{\rho}
\end{aligned}$$

$$g_{0z,x}g_{00} - g_{0z}g_{00,x} = \dot{\rho}[1 - 2x\dot{\psi}^2 + 2\dot{\psi}(\dot{\mu}\sin\psi - \dot{\nu}\cos\psi)] \neq 0$$

Čo potvrdzuje, že aj vo všeobecnom prípade takúto sústavu nie je možné synchronizovať.

6.3 Rovnomerný a nerovnomerný pohyb po priamke

Ide o špeciálny prípad predchádzajúceho príkladu, kde $\dot{\psi} = 0, \dot{\mu} = \dot{\nu} = 0$, takže potom:

$$\begin{aligned}
g_{00} &= 1 - \dot{\rho}^2 \\
g_{0x} &= 0 \\
g_{0y} &= 0 \\
g_{0z} &= -\dot{\rho}
\end{aligned}$$

Keďže g_{0i} nazávisia od priestorových súradníc, všetkých deväť rovností z podmienky (6.1) je splnených a sústavu vykonávajúcu ľubovoľne zrýchlenú transláciu konštantým smerom je možné zosynchronizovať. Lenže o tom, či po synchronizácii v jenom čase zostane zosynchronizovaná aj v iných časoch, rozhodne až podmienka (6.2). Hneď vidno, že 14 zo 16-tich rovností tejto podmienky je splnených a stačí preskúmať už len dve možnosti:

$$\begin{aligned} g_{00,t} &= (1-\dot{\rho}^2)_{,t} = -2\dot{\rho}\ddot{\rho} = 0 \\ g_{0z,t} &= -\ddot{\rho} = 0 \end{aligned}$$

Takže podmienka (6.2) je splnená práve vtedy, keď:

$$\ddot{\rho} = 0$$

Čo predstavuje rovnomerný priamočiary pohyb, takže ide o inerciálnu sústavu. Overili sme teda, že inerciálne sústavy je možné synchronizovať tak, aby zostali synchronizované už stále. Takže až teraz si môžeme byť istí, že odvodenie špeciálnych Lorentzových transformácií v časti **2** bolo naozaj korektné. Sústavu vykonávajúcu akýkoľvek nerovnomerný pohyb po priamke už ale nie je možné synchronizovať tak, aby zostala synchronizovaná v každom čase. Vo vybranom časovom okamihu sa však zosynchronizovať dá, čo bolo rozdiskutované aj v časti **4.2**.

Záver

Na príkladoch sme sa presvedčili, že existuje množstvo neinerciálnych vzťažných sústav, ktoré nie je možné zosynchronizovať. Stačí, aby sústava vykonávala akúkoľvek formu rotačného pohybu, teda aby rýchlosť dvoch rôznych bodov sústavy bola z pohľadu inej inerciálnej vzťažnej sústavy rozličná.

Zosynchronizovať sa dajú len také sústavy, ktoré vzhľadom na inerciálnu sústavu vykonávajú len translačný pohyb, tj. všetky priestorové body tejto sústavy sa z pohľadu inerciálnej vzťažnej sústavy pohybujú po priamkach. Ak tento pohyb nie je rovnomerný, tak sústavu je možné zosynchronizovať len na jeden vybraný okamih. To znamená, že hodiny v tejto sústave musíme posúvať v každom čase inak, prípadne im dodať netriviálny predpis, ako rýchlo majú bežať v závislosti od súradnicového času.

Ukázali sme, že jediná sústava, ktorá sa dá zosynchronizovať tak, aby po synchronizácii v jednom čase zostala zosynchronizovaná aj v ostatných časoch je sústava, ktorá vzhľadom na inú inerciálnu sústavu vykonáva rovnomerný priamočiary pohyb. Takže dobre zosynchronizovať sa dajú iba inerciálne sústavy.

Literatúra

[1] V. Balek: *Vzdialenosti a časové intervaly*, nepublikované

dostupné na stránke: `http://sophia.dtp.fmph.uniba.sk/ balek/intervaly1.pdf`

[2] L.D. Landau, E.M. Lifshitz: *The Classical Theory of Fields* (4th ed.)Butterworth-Heinemann, Oxford (1975)

[3] B. Schutz: *A first course in General Relativity*, Cambridge University Press. 2nd ed. (2009)

[4] M. Fecko: *Ako sa počítajú priestorové a časové intervaly z metrického tenzora* $g_{\mu\nu}(x)$*. Synchronizácia hodín v priestoročase.* nepublikované

dostupné na stránke: `http://sophia.dtp.fmph.uniba.sk/ fecko/referaty/rozklad.pdf`

[5] M. Fecko: *On 3+1 decompositions with respect to an observer field via differential forms*, J.Math.Phys. 38 (1997) 4542-4560

dostupné na stránke: `http://arxiv.org/pdf/gr-qc/9701066v2.pdf`

[6] M. Fecko: *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov*, Bratislava, Iris - 2. vydanie, (2008)