

UNIVERZITA KOMENSKÉHO, BRATISLAVA
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

SYMETRIE KEPLEROVEJ ÚLOHY A
RUNGEHO-LENZOV VEKTOR
(BAKALÁRSKA PRÁCA)



KATEDRA TEORETICKEJ FYZIKY A DIDAKTIKY FYZIKY

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

UNIVERZITA KOMENSKÉHO, BRATISLAVA

SYMETRIE KEPLEROVEJ ÚLOHY A RUNGEHO-LENZOV VEKTOR

(Bakalárska práca)

1160 FYZIKA

MARCEL SERINA

Vedúci: Doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.

Bratislava, 2012

Kód práce: b8e1d364-407a-4145-a01f-42420734ee2e



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Marcel Serina
Študijný program: fyzika (Jednooborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 4.1.1. fyzika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský


Názov: Symetrie Keplerovej úlohy a Rungeho-Lenzov vektor


Cieľ: Popis zadania: Keplerova úloha je úloha o pohybe hmotného bodu v silovom poli s potenciálnou energiou $U(r)=\text{košt.}/r$. Keďže táto potenciálna energia má zjavnú rotačnú symetriu, zachováva sa moment hybnosti. A keďže nezávisí explicitne od času, zachováva sa aj celková energia. Apriori však nie je jasné, či pre túto úlohu nemožno nájsť aj nejaké ďalšie symetrie a im príslušné ďalšie zákony zachovania. Ak by nejaké dodatočné zachovávajúce sa veličiny naozaj existovali, ďalej by zjednodušili explicitné riešenie úlohy. Ukazuje sa, že symetrie štandardných mechanických sústav možno rozdeliť na jednoduchšie, ktoré sa prejavujú už v konfiguračnom priestore a do fázového priestoru sú len umelo „dvihnuté“ a zložitejšie, ktoré vznikajú „priamo“ vo fázovom priestore a nie sú zdvihmi symetrií z konfiguračného priestoru. No a z učebníc teoretickej mechaniky je dobre známe, že Keplerova úloha má dodatočnú zachovávajúcu sa veličinu, a to tzv. Rungeho-Lenzov vektor. Tento vektor je dôsledkom symetrie, ktorá nie je dvihnutá z bázy, a ktorú teda „voľným okom nevidno“. (Historicky je zaujímavé, že Pauli využil existenciu tohoto zákona zachovania v kontexte „kvantovej Keplerovej úlohy“ - t.j. na nájdenie hladín atómu vodíka - hneď po vzniku Heisenbergovej kvantovej mechaniky.) Cieľ úlohy: V bakalárskej práci by sa systematicky hľadali všetky symetrie Keplerovej úlohy. Na to treba pochopiť geometrický aparát, ktorý sa používa na opis Hamiltonovej mechaniky vo fázovom priestore typu T^*M a aplikovať ho na tento problém. Vhodné pre záujemcu s veľkou chuťou naučiť sa niektoré moderné diferenciálno-geometrické prístupy ku klasickej hamiltonovskej mechanike (ktoré nie je na škodu poznať aj inde) a vyskúšať si, ako fungujú vo vyššie spomínanej úlohe.

Vedúci: doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.

Dátum zadania: 13.05.2011

Dátum schválenia: 20.10.2011


prof. RNDr. Jozef Masarik, DrSc.
garant študijného programu


.....
študent


.....
vedúci

Čestne prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne s použitím uvedených zdrojov

Bratislava, 1.6.2012

.....

Marcel Serina

Pod'akovanie

V prvom rade sa chcem pod'akovať vedúcemu práce Doc. RNDr. Mariánovi Feckovi, PhD. za zadanie takejto zaujímavej témy a za to, že mi vždy ochotne odpovedal na všetky otázky spojené s jej písaním.

Ďalej by som sa chcel pod'akovať svojim rodičom, ktorí ma vždy podporovali vo veciach, ktoré ma zaujímali a zásadnou mierou tak umožnili vznik tejto práce a štúdium na tejto fakulte.

V neposlednom rade sa chcem pod'akovať niekoľkým ďalším ľuďom, vďaka ktorým táto práca vznikla. Mojim stredoškolským učiteľkám RNDr. Jarmile Panovovej a RNDr. Jane Martinkovičovej za vzbudenie môjho záujmu o matematiku a fyziku. V rovnakej veci ďakujem tvorcom a účastníkom relácie Pod lampou, konkrétne dielu s názvom Matematika postrach či poézia?, po ktorého zhliadnutí som sa rozhodol miesto štúdia u susedov na prírodovedeckej fakulte pre štúdium fyziky na tejto fakulte.

Napokon sa chcem pod'akovať Prof. RNDr. Pavlovi Zlatošovi, Csc. za famózne prednášky z lineárnej algebry, ktoré ma veľmi zaujali a prispeli tiež k voľbe tejto témy. Rovnako ďakujem všetkým vyučujúcim na fakulte, ktorí sú dôkazom toho, že dobre učiť je umenie a záleží im na tom.

Abstract

Author: Marcel Serina
Title: Symmetries of Kepler problem and Runge-Lenz vector
University: Comenius University in Bratislava
Faculty: Faculty of Mathematics, Physics and Informatics
Department: Department of Theoretical Physics and Didactics of Physics
Advisor: Doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.
City: Bratislava
Date: 1.06.2012
Number of pages: 61
Type of thesis: Bachelor thesis

Abstract: In this thesis we deal, first, with basics of differential and symplectic geometry, which are needed to formulate Hamiltonian and Lagrangian mechanics. Next we formulate the concept of symmetry of Hamiltonian system and show, how can be such symmetries searched directly from Hamiltonian. Subsequently, we classify symmetries depending on whether they are just a lift of symmetries from configuration space or emerging directly in phase space and introduce basic ideas of differential geometry on fiber bundles. Then we look at symmetries of specific mechanical system, namely Kepler problem and find expected conservations of energy and angular momentum as lifted symmetries from configuration space. Next we find less trivial conservation of Runge-Lenz vector as a result of symmetry in phase space. Finally, we show the use of discovered symmetry in quantum mechanics.

Keywords: Runge-Lenz vector, symmetries of Kepler problem, symmetries of Hamiltonian system

Abstrakt

<i>Autor:</i>	Marcel Serina
<i>Názov práce:</i>	Symetrie Keplerovej úlohy a Rungeho-Lenzov vektor
<i>Škola:</i>	Univerzita Komenského v Bratislava
<i>Fakulta:</i>	Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
<i>Katedra:</i>	Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky
<i>Vedúci práce:</i>	Doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.
<i>Miesto:</i>	Bratislava
<i>Dátum:</i>	1.06.2012
<i>Počet strán:</i>	61
<i>Druh záverečnej práce:</i>	Bakalárska práca

Abstrakt: V práci sa najprv zaoberáme základmi diferenciálnej a symplektickej geometrie, ktoré sú potrebné na formuláciu hamiltonovskej a lagrangeovskej mechaniky. Následne formulujeme pojem symetrie hamiltonovskej sústavy a ukážeme, ako sa také symetrie hľadajú priamo z hamiltoniánu. Ďalej klasifikujeme symetrie podľa toho, či sú iba zdvihom symetrie z konfiguračného priestoru alebo vznikajú priamo vo fázovom priestore a zavádzame základné pojmy diferenciálnej geometrie fibrovaných variet. Potom sa pozrieme na symetrie konkrétnej mechanickej sústavy, menovite Keplerovej úlohy, a nájdeme očakávané zachovania energie a momentu hybnosti ako symetrie zdvihnuté z konfiguračného priestoru. Potom nájdeme aj menej triviálne zachovanie Rungeho-Lenzovho vektora, ako dôsledok symetrie priamo vo fázovom priestore. Na záver ukážeme využitie nájdenej symetrie v kvantovej mechanike.

Kľúčové slová: Rungeho-Lenzov vektor, symetrie Keplerovej úlohy, symetrie hamiltonovskej sústavy

Zoznam obrázkov

1.1	Dotýkajúce sa krivky	5
1.2	Vektorové pole a jeho integrálne krivky	7
1.3	Štruktúra TM	24
1.4	Komutatívny diagram T^*f	26

Úvod	1
1 Čo na to treba z diferenciálnej geometrie	3
1.1 Pojem variety	3
1.2 Vektorové a tenzorové polia	4
1.3 Svet p-foriem	10
1.4 Lieova derivácia	13
1.5 Vonkajšia derivácia - diferenciálna špecialita na formách	17
1.6 Symplektická geometria a hamiltonovská mechanika	19
1.7 Diferenciálna geometria na fibrovaných varietách	23
2 Symetrie Keplerovej úlohy	30
2.1 Keplerova úloha a Rungeho-Lenzov vektor	30
2.2 Pátranie po momente hybnosti	34
2.3 Cesta k Rungeho-Lenzovmu vektoru	41
2.4 Čo nám dáva nová symetria	48
3 Dodatky	53
3.1 Parciálne diferenciálne rovnice prvého rádu	53
3.2 Symplektická štruktúra na TM	56
Záver	59
Literatúra	61

Úvod

Na začiatok by sme mali čitateľa oboznámiť s tým, čo v práci nájde. Ako hovorí názov, budeme sa zaoberať hľadaním symetrií Keplerovej úlohy, pretože vieme, že niektoré jej symetrie sú veľmi špecifické a zaujímavé. Cieľom práce je teda najskôr ukázať aparát diferenciálnej geometrie, ktorý na to potrebujeme a oboznámiť s ním čitateľa a potom aparát aplikovať na Keplerovu úlohu.

Zámerom autora bolo koncipovať text tak, akoby budúci čitateľ bol na úrovni absolventa bakárskeho štúdia fyziky, teda predpokladáme znalosť základov teoretickej mechaniky, lineárnej algebry a analýzy. Preto je aj podstatná časť práce venovaná vysvetleniu partií diferenciálnej geometrie, ktoré sú potrebné na primerané porozumenie tomu, čo sa autor snažil predvádzať. Prirodzene, výklad je vedený tak, že podstatné myšlienky sú vysvetlené veľmi detailne a tie menej podstatné alebo príliš zložité sú iba spomenuté, respektíve niekedy aj úplne vynechané. Napriek tomu sme sa snažili v texte upozorniť, ak sa vyskytne tvrdenie, ktoré čitateľ zrejme nepozná a nebude následne dokázané.

Celú prvú kapitolu treba brať ako zasvätenie do aparátu nevyhnutného na pochopenie myšlienky celej práce, teda nielen jej aplikácie na Keplerovu úlohu, ale myšlienky hľadania symetrie hamiltonovskej sústavy priamo z hamiltoniánu ako takej. Rovnako chceme na tomto mieste upozorniť na to, že celá prvá kapitola vznikla podľa [1] a teda prínos autora je iba v tom, že vybral tie miesta, ktoré sú pre myšlienku práce dôležité, prípadne sem - tam pridal svoj postreh alebo myšlienku k ideám, ktoré sa snažil objasniť. Postupne sa prejdú pojmy ako varieta, tenzorové pole, Lieova derivácia, diferenciálna forma, vonkajšia derivácia, symplektická geometria a fibrované variety. Vyvrcholením prvej kapitoly je odvodenie rovníc, z ktorých je možné symetrie hľadať s dôrazom na štruktúry, ktoré hrajú dôležité úlohy v našom prístupe. Rovnako poukazujeme na zrejmý súvis symetrií a zachovávajúcich sa veličín a na rozdelenie symetrií na tie, ktoré existujú už v konfiguračnom priestore a tie, ktoré vznikajú priamo vo fázovom priestore.

V druhej kapitole skúsime vysvetlené poznatky použiť na hľadanie symetrií Keplerovej úlohy. Zoznámime čitateľa so známymi zákonmi zachovania pre túto úlohu a

poukážeme aj na ich význam a použitie. Potom skúsime nájsť očakávané zachovania z rovnice, ktorú sme objasnili v prvej kapitole a rovnako sa pokúsime identifikovať generátory symetrií.

Záverečná tretia kapitola je venovaná dodatkom. V prvom ukážeme odkiaľ presne vyplýva ohraňenie na počet nezávislých symetrií, v druhom objasníme niektoré pojmy na dotykovej fibrácii, ktoré sme použili pri dôkaze úplnosti nájdených symetrií, ktoré sú zdvihom symetrií z konfiguračného priestoru.

Napokon prajeme potenciálnemu čitateľovi príjemné čítanie a možno aj estetický zážitok z mnohých fantastických vlastností dvoch svetov, toho abstraktného matematického a toho "nášho" fyzikálneho.

1

Čo na to treba z diferenciálnej geometrie

1.1 Pojem variety

Na začiatok musíme čitateľa oboznámiť s “ihriskom”, na ktorom budeme diferenciálnu geometriu študovať a tým je hladká varieta M . Naše oboznámenie bude čisto intuitívne a preto nepodáme ani rigoróznú definíciu a sústredíme sa na to, čo bude pre nás v ďalšom dôležité.

Varietu (n -rozmernú) si môžeme predstaviť ako geometrickú štruktúru, ktorá lokálne v okolí každého bodu vyzerá ako kúsok známeho kartézskeho \mathbb{R}^n a celok je “zlepený” z takýchto kúskov. Presnejšie, každému “kúsku” (ešte presnejšie otvorenej množine) $\mathcal{O} \subset M$ priradíme jeho súradnice. Teda štruktúra variety potrebuje zobrazenie - mapu:

$$\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \varphi(\mathcal{O}) \subset \mathbb{R}^n [x^1, \dots, x^n] \quad (1.1)$$

Všeobecne môže mať okolie každého bodu svoju mapu, navyše na jednom okolí môžu “fungovať” viaceré mapy. Na prekryve sa potom indukuje zobrazenie (známe pod krycím názvom zámena súradníc):

$$\psi : \mathbb{R}^n [x^1, \dots, x^n] \rightarrow \mathbb{R}^n [x'^1, \dots, x'^n] \quad (1.2)$$

A vtedy našu varietu M obdaríme prívlastkom hladká, ak všetky takéto zobrazenia budú hladké a my sa ďalej budeme zaoberať iba takými. Poznatok, ktorý zásadne potrebujeme ďalej, je ten že všeobecne treba máp viac a nielen jednu. Typický príklad hladkej variety je sféra S^2 . Skúste na nej zaviesť súradnice iba jednou mapou a nepochodíte.¹

Neskôr sa nám zíše ešte popis istej ekvivalencie variet. Nech dve variety M, N majú rovnaký rozmer a $f : M \rightarrow N$ je hladké a je to bijekcia. Potom zobrazenie f nazývame difeomorfizmus a dve variety M, N nazývame difeomorfné.

1.2 Vektorové a tenzorové polia

Počnúc týmto paragrafom začneme dlhú cestu, ktorej cieľom bude prenesenie vecí ktoré v poznáme v euklidovskom priestore na varietu. Bude to vyžadovať nemalé upresnenie, ale navyše aj zovšeobecnenie známych pojmov, o ktorých by sme si teraz povedali “a čo je na tom”. Napríklad zistíme, že naša doterajšia predstava o vektore ako o šípke, ktorá ma začiatok a koniec na variete nefunguje a zavedieme vektor ako výlučne bodový pojem, ktorý nemá nič spoločné s nejakým iným bodom “blízko” neho. Najprv sa pozrieme na základnú geometrickú štruktúru - vektory. Zavedieme tu niektoré veľmi dôležité pojmy a operácie a preto sa na celú vec pozrieme oveľa podrobnejšie. Začneme delostreleckou prípravou a teda zavádzaním nových pojmov na M .

Krivka na variete je hladké zobrazenie:

$$\gamma : \mathbb{R} [t] \rightarrow M \quad t \mapsto \gamma(t) \in M \quad \hat{\gamma} : \mathbb{R} [t] \rightarrow \mathbb{R}^n [x^1, \dots, x^n] \quad (1.3)$$

Teda krivka priradí číslu bod variety a vďaka tomu, že na variete máme súradnice, tak v konečnom dôsledku priraduje číslu n-ticu.

Funkcia na variete je hladké zobrazenie:

¹Znalejšíemu čitateľovi hneď na um zíše Riemannova sféra a zavedenie nevlastného prvku v \mathbb{C} . Tam vidno že projekcia na \mathbb{R}^2 rovinu, ktorá by bola rada jednou mapou pre celú sféru na “severnom póle” zhavaruje.

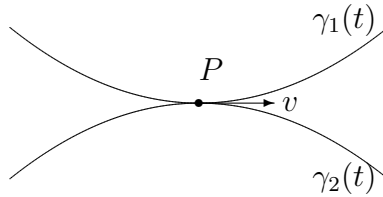
1.2. VEKTOROVÉ A TENZOROVÉ POLIA

$$f : M \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) \in \mathbb{R} \quad \hat{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \quad (1.4)$$

Teda funkcia na variete priradí bodu číslo a vďaka súradniciam na M to je klasická funkcia n -premenných. Množinu všetkých hladkých funkcií na M označíme $\mathcal{F}(M)$.

Teraz pristúpíme k definícii pojmu vektor v bode $P \in M$. Prvý prístup využíva isté zovšeobecnenie pojmu okamžitej rýchlosti. Ak si predstavíme dva hmotné body, ktoré by mohli byť v jednom bode bez toho, aby sa zrazili alebo inak na seba vplývali, tak sme ochotní súhlasiť, že dva hmotné body majú rovnakú rýchlosť (ako vektor), ak sú v danom čase v rovnakom bode a idú z neho preč “rovnakým smerom” (v infinitezimálnom zmysle). Na tejto myšlienke skúsime samotný pojem vektora vybudovať. Začneme definíciou, kedy prehlásime dve krivky za dotýkajúce sa. Krivky γ_1, γ_2 na M sa dotýkajú v bode $P \in M$, ak:

1. $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = P$
2. $\left. \frac{d}{dt} \right|_0 x^i(\gamma_1(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 x^i(\gamma_2(t))$



Obrázok 1.1: Dotýkajúce sa krivky

Po krátkom zamyslení zistíme, že dotýkať sa v bode je relácia ekvivalencie. Navyše z bodu 2. definície vidíme, že dotýkajúce sa krivky v P majú Taylorov rozvoj: $x^i(\gamma(t)) = x^i(P) + ta^i + \dots$, teda zaujímavé sú iba prvé dva členy a n -tica čísel a^i bude rozhodovať o tom, ktoré krivky padnú do jednej triedy ekvivalencie. Teda takáto n -tica nám už podozrivo pripomína vektor, ešte by sme chceli lineárnu štruktúru. Označme ako $v = [\gamma]$ množinu kriviek ktoré sa dotýkajú krivky γ (teda vlastne triedu ekvivalencie ktorej reprezentant je γ). Potom pre dve krivky máme:

$$x^i(\gamma(t)) = x^i(P) + ta^i + \dots \quad x^i(\sigma(t)) = x^i(P) + tb^i + \dots \quad (1.5)$$

Potom definícia:

$$v + \lambda w \equiv [\gamma] + \lambda [\sigma] := [\gamma + \lambda\sigma] \quad (1.6)$$

$$x^i((\gamma + \lambda\sigma)(t)) := x^i(P) + t(a^i + \lambda b^i) + \dots \quad (1.7)$$

zavádza na reprezentantoch štruktúru n-rozmerného lineárneho priestoru. Množinu vektorov v bode $P \in M$ označujeme $T_P M$ a nazývame dotykovým priestorom v M . Teraz ak v $T_P M$ zvolíme bázu e_i , tak každý $v \in T_P M$ má komponentný rozklad $v = v^i e_i$.²

Teraz ešte načrtne druhú definíciu, ktorá nám bude v budúcnosti užitočnejšia. Vektor v bode P definujeme ako diferenciálny operátor prvého rádu s konštantnými koeficientmi³:

$$v := a^i \partial_i|_P \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (1.8)$$

Z tejto definície sa nám priamo otvára cesta k pojmu vektorové pole, čo nie je nič iné, než predpis, ktorý v každom bode $P \in M$ vyberie nejaký vektor $v \in T_P M$. Vektorovému poľu V bude zodpovedať diferenciálny operátor prvého rádu s nekonztantnými koeficientmi, teda operátor (ktorý môžeme púšťať na funkcie):

$$V = V^i(x) \partial_i \equiv V^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (1.9)$$

²Ak ju čitateľ nepozná odteraz zavádzame Einsteinovu sumačnú konvenciu, cez rovnaký index hore aj dole v súčine automaticky sčítujeme.

³Ospravedľujeme sa čitateľovi, že si dovoľujeme takú trúfalosť podávať dve definície. V skutočnosti je to preto, že ich je možné podať viac, len každá má isté výhody, tak sme sa rozhodli pre najnázornejšiu a najpraktickejšiu. Snaživý čitateľ ľahko medzi nimi nájde priamy súvis cez myšlienku smerovej derivácie, prípadne nahliadne potrebné detaily v [1].

1.2. VEKTOROVÉ A TENZOROVÉ POLIA

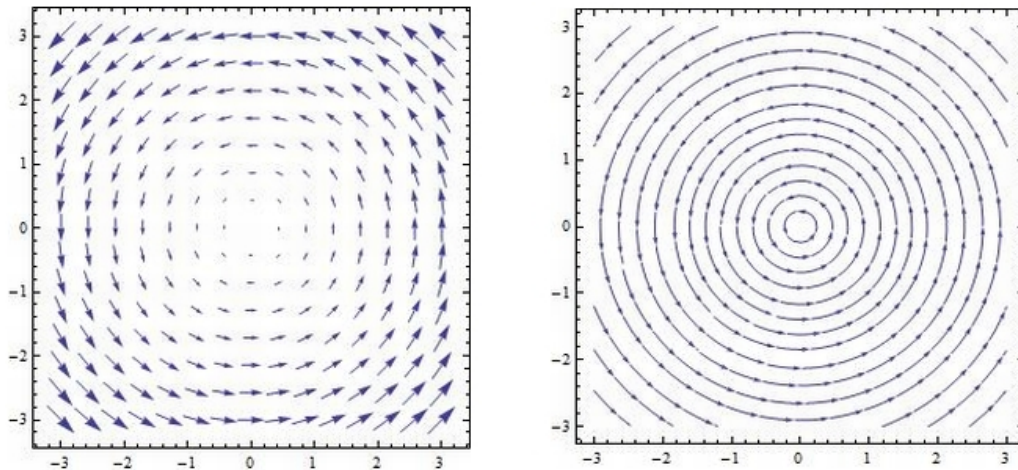
$V^i(x)$ sa nazývajú komponenty poľa V voči súradnicovej báze ∂_i (čo je ako také tiež vektorové pole). Teraz sa zamyslíme nad nasledujúcou úlohou. Sedíme v konkrétnom bode na variete, kde máme dané vektorové pole a chceme sa hýbať tak, že z každého bodu do ktorého prídeme, sa pohneme v smere vektora v danom bode. Trajektóriu po ktorej sa budeme pohybovať bude integrálna krivka poľa V . Integrálnu krivku teda nájdeme ako riešenie sústavy n kvázilineárnych diferenciálnych rovníc (n je rozmer variety na ktorej máme pole) v tvare:

$$\dot{x}^n(t) = V^n(x^1, \dots, x^n) \quad (1.10)$$

Pozrieme na dva príklady, v ktorých sa s týmto pojmom lepšie oboznámime. Vezmime za varietu \mathbb{R}^3 s kartézskymi súradnicami a nech $V = x\partial_y - y\partial_x$ ⁴. Dostaneme rovnice (pozrieme sa na krivku čo štartuje z bodu $[R, 0, 0]$):

$$\dot{x}^1(t) \equiv \dot{x}(t) = -y \quad \dot{x}^2(t) \equiv \dot{y}(t) = x \quad \dot{x}^3(t) \equiv \dot{z}(t) = 0 \quad (1.11)$$

$$x(t) = R \cos t \quad y(t) = R \sin t \quad z(t) = 0 \quad (1.12)$$



Obrázok 1.2: Vektorové pole a jeho integrálne krivky

⁴Ak čitateľovi napadne operátor \hat{L}_z , známy z kurzu kvantovej mechaniky, je na veľmi správnej stope.

1.2. VEKTOROVÉ A TENZOROVÉ POLIA

Na obrázku názorne vidíme korešpondenciu medzi vektorovým poľom a jeho tokom. Integrálne krivky teda predstavujú otáčanie okolo osi z . Druhým príkladom, ktorý bude zásadný v rámci celej práce, je pozorovanie že Hamiltonove rovnice:

$$\dot{q}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a} \quad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q^a} \quad (1.13)$$

sú v $\mathbb{R}^{2n} [q^1, \dots, q^n, p^1, \dots, p^n]$ rovnicami na hľadanie integrálnych kriviek vektorového poľa:

$$V = \frac{\partial H}{\partial p_a} \frac{\partial}{\partial q^a} - \frac{\partial H}{\partial q^a} \frac{\partial}{\partial p_a} \quad (1.14)$$

Teraz sa vrátíme do lineárnej algebry a zavedieme niekoľko dôležitých objektov multilineárnej algebry. Ak máme lineárny (vektorový) priestor L , je s ním veľmi priamočiarno spojených mnoho ďalších lineárnych priestorov. Začneme uvedením, že lineárne zobrazenia na L tvoria tiež lineárny priestor - duálny priestor L^* . Jeho prvky sa nazývajú kovektory na L . Pre $\alpha \in L^*$ a $v \in L$ budeme ďalej používať nasledovný zápis:

$$\langle \alpha, v \rangle := \alpha(v) \quad (1.15)$$

Navyše, ak v L máme bázu e_a , bude veľmi užitočné používať v L^* šikovne zvolenú bázu e^b , čo rozmenené na drobné dáva:

$$\langle e^b, e_a \rangle = \delta_a^b \quad (1.16)$$

Ďalším netriviálnym poznatkom je skutočnosť, že priestor L^{**} ktorý by nás celkom prirodzene tiež zaujímal, už nie je ničím nový, pretože je kanonicky⁵ izomorfný priestoru L . Ak chceme, vyzbrojení týmto faktom pokračovať ďalej v konštrukcii nových vektorových priestorov iba z L , zostáva nám možnosť kartézskeho súčinu. To nás priamočiarno vedie k definícii tenzora.

⁵Kanonickým izomorfizmom vektorových priestorov nazývame izomorfizmus, ktorý nezávisí od voľby báz. Detaily tohto faktu nájde čitateľ v [1] aj v [2].

1.2. VEKTOROVÉ A TENZOROVÉ POLIA

Definícia(tenzora): Nech L je n -rozmerný lineárny priestor, L^* duálny priestor. Tenzorom typu $\binom{p}{q}$ nad L nazývame polylineárne⁶ zobrazenie:

$$t : \underbrace{L \times \dots \times L}_q \times \underbrace{L^* \times \dots \times L^*}_p \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.17)$$

$$\left(\underbrace{v, \dots, w}_q; \underbrace{\alpha, \dots, \beta}_p \right) \mapsto t(v, \dots, w; \alpha, \dots, \beta) \in \mathbb{R} \quad (1.18)$$

Množinu tenzorov nad L budeme značiť $T_q^p(L)$. Komponenty tenzora majú teda $p+q$ indexov $t_{a\dots b}^{c\dots d} := t(e_a, \dots, e_b; e^c, \dots, e^d)$. Ak navyše zavedieme operáciu \otimes (tenzorový súčin), postupne máme:

$$(e^a \otimes \dots \otimes e^b \otimes e_c \otimes \dots \otimes e_d)(v, \dots, w; \alpha, \dots, \beta) := v^a \dots w^b \alpha_c \dots \beta_d \quad (1.19)$$

$$t = t_{a\dots b}^{c\dots d} e^a \otimes \dots \otimes e^b \otimes e_c \otimes \dots \otimes e_d \quad (1.20)$$

$$t(v, \dots, w; \alpha, \dots, \beta) = t_{a\dots b}^{c\dots d} v^a \dots w^b \alpha_c \dots \beta_d \quad (1.21)$$

Teraz sa znovu prenesieme na varietu. Duálny (kodotkový) priestor k dotykovému $T_P M$ budeme značiť $T_P^* M$ (teda v každom bode P variety máme kovektor). Duálnu bázu k $\partial_i|_P$ budeme značiť $dx^i|_P$. Potom sa dostávame k cieľu tohto paragrafu, teda k tenzorovému poľu na M ako predpisu, ktorý v každom bode M vyberá istý tenzor:

$$t = t_{k\dots l}^{i\dots j}(x) dx^k \otimes \dots \otimes dx^l \otimes \partial_i \otimes \dots \otimes \partial_j \quad (1.22)$$

Dôležitým faktom je ďalej to, ako sa tenzorové polia správajú pri zámene súradníc⁷. Nech teda $x^i \mapsto x'^i(x)$. Jakobiho matica zámény súradníc bude $J_j^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}$. Komponenty tenzora sa potom správajú nasledovne:

⁶Lineárne v každom argumente.

⁷Tento fakt je dokonca taký dôležitý, že sa na ňom dá postaviť ďalšia definícia tenzora.

$$t_{k\dots l}^{i\dots j}(x) \mapsto t_{k\dots l}^{i\dots j}(x') \equiv J_r^i(x)\dots J_s^j(x)(J^{-1})_k^u(x)\dots(J^{-1})_l^v(x)t_{u\dots v}^{r\dots s}(x) \quad (1.23)$$

Ďalej budeme ešte potrebovať poznať, ako sa tenzor správa voči difeomorfizmu variet. Nech teda $f : M \rightarrow N$ je difeomorfizmus. Toto zobrazenie indukuje zobrazenie tenzorov $f^* : T_s^r(N) \rightarrow T_s^r(M)$ tzv. pull-back tenzorového poľa, ktoré beží nasledovne:

$$t = t_{b\dots c}^a(y)dy^b \otimes \dots \otimes \partial_a \mapsto f^*t = t_{b\dots c}^a(y(x))J_i^b(x)\dots(J^{-1})_a^j(x)dx^i \otimes \dots \otimes \partial_j \quad (1.24)$$

Napokon uvedieme jeden príklad, kde môžeme tenzorové polia stretnúť, konkrétne ako tenzor $g \in T_2^0(M)$ (vlastne bilinéarna forma), ktorá ak má isté vlastnosti, nazve sa metrickým tenzorom na M^8 . A zrazu máme oveľa bohatšiu štruktúru (M, g) - Riemannovskú varietu. Na variete \mathbb{R}^n napríklad euklidovský metrický tenzor $g = \delta_{ij}dx^i \otimes dx^j$. Menej triviálnym príkladom je napríklad metrický tenzor na sfére S^2 (s fixným polomerom R) $g = R^2(d\vartheta \otimes d\vartheta + \sin^2 \vartheta d\varphi \otimes d\varphi)$.

1.3 Svet p-foriem

V tomto paragrafe sa pozrieme na jeden špeciálny typ tenzorov, ktoré budú pre nás ďalej obzvlášť dôležité. Spomenieme si na jedno zobrazenie, ktoré poznáme z lineárnej algebry, konkrétne determinant. Jednou motiváciou na jeho zavedenie môže byť úvaha o orientovanom objeme rovnobežnostena, ktorý sa ňaťahuje na n -ticu vektorov. Zistí sa, že je rozumné požadovať od skúmaného zobrazenia polylinearitu (nie je to náhodou vlastnosť tenzora?) a antisymetriu. Uvažovaný objekt je teda úplne antisymetrický tenzor typu $\binom{0}{n}$. Teda takéto tenzory hrajú kľúčovú úlohu pri výpočtoch objemu čohosi a prirodzene tak preniknú aj do integrálneho (spomeňme si na Jakobián) a diferenciálneho počtu. Na tomto základe podáme nasledujúcu definíciu:

Nech L je n -rozmerný lineárny priestor. Tenzor $\alpha \in T_p^0(L)$ nazývame p -forma v L , ak je úplne antisymetrický, čo rozmenené na drobné znamená:

⁸Ak čitateľ náhodou nepozná pojem metrického tenzora detaily nahliadne v [1] aj v [2], pracovne si ho môže predstaviť ako štruktúru ekvivalentnú skalárnemu súčinu.

$$\alpha(\dots, v, \dots, w, \dots) = -\alpha(\dots, w, \dots, v, \dots) \quad (1.25)$$

Množinu p -foriem v L budeme značiť $\Lambda^p L^*$. Keďže definícia je zmysluplná iba pre $p \geq 2$ tak definatoricky kladieme za 1-formy kovektory a za 0-formy reálne čísla. Rýchlou úvahou sa dá prísť na to, že rozmer $\Lambda^p L^*$ v n -rozmernom L bude $\binom{n}{p}$. Z definície je ďalej zrejmé, že aj komponenty foriem sú úplne antisymetrické teda $\alpha_{\dots a \dots b \dots} = -\alpha_{\dots b \dots a \dots}$.

Na formách vieme ďalej zaviesť ich špecifický súčin rôzny od tenzorového⁹, aby aj výsledok bola forma. Na to definujeme najskôr projekciu na priestor p -foriem, zobrazenie π^A , ktoré sa bude dať pustiť na hocijaký $t \in T_p^0(L)$ a to takto:

$$(\pi^A t)(v, \dots, w) := \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) t(\sigma(v, \dots, w)) \quad (1.26)$$

kde σ je permutácia a $\text{sgn } \sigma$ je jej parita. Potom komponentne:

$$t_{a\dots b} \mapsto (\pi^A t)_{a\dots b} = t_{[a\dots b]} := \frac{1}{p!} (t_{a\dots b} \pm \text{zvyšné permutácie indexov}) \quad (1.27)$$

kde sa znamienko udeľuje podľa parity permutácie. Teraz máme všetko potrebné na zavedenie tenzorovej operácie na formách, ktorá sa nazýva vonkajší súčin, značí sa \wedge a funguje takto: $\wedge : \Lambda^p L^* \times \Lambda^q L^* \rightarrow \Lambda^{p+q} L^*$

$$(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta \quad \alpha \wedge \beta := \frac{(p+q)!}{p!q!} \pi^A(\alpha \otimes \beta) \quad (1.28)$$

Táto operácia nám umožňuje veľmi kompaktne zapisovať p -formy komponentne, pretože môžeme použiť bázu zostrojenú pomocou vonkajších súčinov bázy, konkrétne¹⁰:

$$\alpha = \frac{1}{p!} \alpha_{a\dots b} e^a \wedge \dots \wedge e^b \quad (1.29)$$

⁹Tenzorový súčin dvoch foriem nie je nutne forma, ale iba tenzor, keďže bude antisymetrický v každej skupinke indexov zvlášť a nie vo všetkých.

¹⁰Korekcia faktoriálom je tam preto, že komponenty sú antisymetrické, teda je tam vždy $p!$ rovnakých členov. Podobné príčiny majú aj mnohé iné faktoriály, ktoré sa doteraz objavili.

Ešte budeme potrebovať jednu ďalšiu operáciu na formách algebraického charakteru a je ňou vnútorný súčin. Spočíva v tom, že vektor v sa dosadí ako prvý argument do p -formy α teda $\alpha \mapsto i_v\alpha$, čo dáva¹¹:

$$(i_v\alpha)(u, \dots, w) := \alpha(v, u, \dots, w) \quad (i_v\alpha)_{a\dots b} = v^c\alpha_{ca\dots b} \quad (1.30)$$

Z definície máme taktiež dve linearity a teda $i_{v+\lambda w} = i_v + \lambda i_w$ a ďalej $i_v(\alpha + \lambda\beta) = i_v\alpha + \lambda i_v\beta$. Napokon celú konštrukciu veľmi priamočiara preniesieme na varietu. Ľubovoľnú p -formu (teraz tenzorové pole) α na M , čo značíme $\alpha \in \Omega^p(M)$ vieme lokálne zapísať nasledovne:

$$\alpha = \frac{1}{p!}\alpha_{i\dots j}(x)dx^i \wedge \dots \wedge dx^j \quad (1.31)$$

Ukážeme ešte niekoľko elementárnych príkladov, keby bol čitateľ doterajším svižným “výkladom” zmätený. Za M vezmeme štandardnú euklidovskú rovinu \mathbb{R}^2 a pozrieme sa, ako môžu vyzerat’ najvšeobecnejšie p -formy. 0-formy budú známe funkcie dvoch premenných teda $f(x, y) \in \Omega^0(\mathbb{R}^2)$. 1-formy potom vyzerajú nasledovne $\Omega^1(\mathbb{R}^2) \ni \alpha = \alpha_1(x, y)dx + \alpha_2(x, y)dy$. Potom 2-formy $\Omega^2(\mathbb{R}^2) \ni \beta = \beta(x, y)dx \wedge dy$. Pozrieme sa ešte na jednu situáciu, ktorú poznáme z integrálneho počtu viac premenných. Spomenieme si na výpočet objemu n -rozmernej oblasti, kde nás dôsledne učili, že pri zámene premenných nesmieme zabúdať na jakobián. Detailnejší pohľad ukáže, že diferenciály v n -rozmernom integrále nie sú obyčajné diferenciály, ale sú súradnicovým vyjadrením tzv. metrickej formy objemu. Máme teda na mysli korešpondenciu:

$$\int_V \dots \int_V (\dots) dx^1 \dots dx^n \equiv \int_V \dots \int_V (\dots) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (1.32)$$

Preto ak použijeme iné premenné, podľa toho sa správa aj naša forma a jakobián je práve to, čo si za transformáciu súradníc vypýta metrická forma objemu. Napríklad použijeme miesto kartézskych súradníc v \mathbb{R}^3 sférické a získame nasledovné:

¹¹Z definície je zrejmé, že ak to skúsime s 0-formou teda číslom, máme rovno nulu, pretože nemáme ani kam dosadiť.

$$\omega_g := dx \wedge dy \wedge dz \mapsto r^2 \sin \vartheta dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi \quad (1.33)$$

Ďalšie aplikácie foriem uvidíme v paragrafe venovanom symplektickej geometrii. Teraz opustíme túto doteraz algebraickú časť a pozrieme sa na niektoré diferenciálne operácie na tenzoroch a špeciálne formách.

1.4 Lieova derivácia

Keď sa zamyslíme nad tým, ako pracuje derivácia funkcie, jedná sa o limitný prechod a algebraickú operáciu, kľúčové však je, že sa a priori pozeráme na hodnoty funkcie v dvoch rôznych bodoch. Ak by sme sa chceli o niečo podobné pokúsiť na tenzoroch resp. tenzorových poliach, narážame na obrovský problém, pretože dva tenzory v dvoch rôznych bodoch sú prvkami rôznych lineárnych priestorov a teda medzi nimi nejaká algebraická operácia nemá žiadny rozumný zmysel. Neprepadajme však depre-
siii zo straty tak silného nástroja, akým je diferenciálny počet. Túto na prvý pohľad nepríjemnú prekážku ľahko a elegantne prekonáme, ak zavedieme spôsob, akým by sa dal preniesť tenzor z bodu do bodu. Na zavedenie prenosu existuje viacero prístupov a každý je vhodný na čosi iné. My sa teraz detailne pozrieme na lieovský prenos, ktorý nám umožní zaviesť pre nás zásadný pojem Lieovej derivácie¹². Abstraktne teda potrebujeme na definíciu derivácie novú štruktúru, pomocou ktorej budeme schopní realizovať prenos tenzora z bodu do bodu. V našom prístupe, kde sa chceme pozrieť na Lieovu deriváciu, bude našou dodatočnou štruktúrou na variete vektorové pole.

Z paragrafu venovanom vektorovým poliám si spomenieme na skutočnosť, že vektorové pole nám varietu “rozvlákňuje” na integrálne krivky. Ak sa z ľubovoľného bodu $P \in M$ pohneme o parameter t po našej integrálnej krivke, dostávame zobrazenie $\Phi_t : M \rightarrow M$, ktoré $P \equiv \gamma(t_0) \mapsto \gamma(t_0 + t)$ a nazýva sa lokálny tok generovaný poľom V . Toto zobrazenie má navyše skvelú skladaciu vlastnosť $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$ a ako by toho nebolo málo, je to dokonca difeomorfizmus $M \rightarrow M$, pričom inverzným zobrazením k Φ_t je zobrazenie Φ_{-t} . Práve vďaka týmto vlastnostiam umožňuje Φ_t

¹²Druhý prístup prebieha cez kovariantnú deriváciu a nazýva sa paralelný prenos. Hojne sa používa vo všeobecnej teórii relativity.

zobrazovať tenzorové polia na M (pull-backom), teda $\Phi_t^* : T_q^p(M) \rightarrow T_q^p(M)$. A presne o takomto zobrazení, ktoré nám umožňuje prenášať tenzory po M sme od začiatku paragrafu tajne snívali. Toto zobrazenie sa volá lieovský prenos tenzorových polí. Polia sa ním prenášajú o t po integrálnych krivkách proti smeru toku. A máme presne to čo sme potebovali¹³. Teda ak sa takto pozrieme na nejaké tenzorové pole v bode $P \in M$, jasne už vidíme ako by sa dalo rozumne prenášať a potom derivovať. Na základe týchto úvah podáme nasledujúcu definíciu : Nech Φ_t^* je pull-backom lokálneho toku Φ_t poľa V . Potom výraz:

$$\mathcal{L}_V A := \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \Phi_t^* A \quad (1.34)$$

nazveme Lieovou deriváciou tenzorového poľa A v smere vektorového poľa V . Niekedy sa môže stať, že bude platiť $\Phi_t^* A = A$ pre všetky t . Tento fakt potom implikuje:

$$\mathcal{L}_V A = 0 \quad (1.35)$$

teda pole A je voči poľu V lieovsky invariantné. Názorne si význam tohto faktu možno pekne uvedomiť ak aj A bude vektorové pole. Potom to vlastne znamená, že ak pole A posúvame po integrálnych krivkách poľa V , tak sa nemení. Konkrétne napr. nech $A = K\partial_x$, $V = \partial_x$, $W = \partial_y$. Pole A (alias priamky rovnobežné s osou x orientované zľava doprava) je invariantné voči toku V (čo je očividné) aj voči toku W (priamky rovnobežné s osou y orientované zdola nahor).

Pre úplnosť si teraz uvedieme komponentný vzorec na výpočet Lieovej derivácie všeobecného tenzorového poľa. Dá sa nahliadnuť z pekných algebraických vlastností, ktoré Lieova derivácia má. Nepozrieme sa však na ne detailne, uvedieme len výsledok pre všeobecné tenzorové pole a špeciálne pre funkciu na M :

$$(\mathcal{L}_V A)_{k\dots l}^{i\dots j} = V^m A_{k\dots l, m}^{i\dots j} + V_{,k}^m A_{m\dots l}^{i\dots j} + \dots - V_{,m}^j A_{k\dots l}^{i\dots m} \quad (1.36)$$

¹³Máš dva tenzory na M v rôznych bodoch a náhodou tie dva body spája integrálna krivka poľa V a chceš ich rozumne odčítať v bode kde máš prvý? Zober teda druhý a potiahni ho späť proti integrálnym krivkám V a môžeš odčítovať.

$$\mathcal{L}_V \psi = V\psi \equiv V^i \psi_{,i} \quad (1.37)$$

kde čiarka znamená deriváciu podľa súradnice teda $\psi_{,i} := \frac{\partial \psi}{\partial x^i}$. Lieova derivácia funkcie sa preto počíta veľmi príjemne, pole V jednoducho nemilosrdne pustíme na funkciu ψ , nech si poderivuje. Pre tenzorové pole pribudnú ďalšie členy s + za každý dolný a - za každý horný index.

Tu sa prvý raz slávnostne dostávame k matematickému uchopeniu pojmu symetrie tak, ako ho budeme potrebovať. Inak povedané ak platí (1.35), potom vektorové pole V je symetriou tenzorového poľa A . Daná rovnica sa dá využiť nasledovne: tenzorové pole A mám dané a hľadám neznáme vektorové pole V , ktoré je jeho symetriou. Rozoberieme si to podrobnejšie na príklade. Môžeme mať napríklad euklidovskú rovinu $\mathbb{R}^2[x, y]$. Na nej meriame dĺžky a uhly pomocou metrického tenzora $g_{ij} = \delta_{ij}$. Spýtame sa, aké poznáme najvšeobecnejšie izometrie (zachováva sa dĺžka aj uhly kriviek) našej roviny. Odpoveď je jednoduchá, pre vektorové pole ξ , ktoré bude generovať tok hľadaných izometrií, musí platiť¹⁴:

$$\mathcal{L}_\xi g = 0 \quad (1.38)$$

$$\xi^k g_{ij,k} + \xi_{,i}^k g_{kj} + \xi_{,j}^k g_{ik} = 0 \quad (1.39)$$

Tu si treba uvedomiť, že netriviálne riešenie týchto rovníc pre všeobecnú varietu je vzácnosť (lebo vlastnosť izometrie je vzácnosť), pretože neznámych funkcií je n a rovníc je $\frac{n(n+1)}{2}$, teda sústava je preurčená. Teraz konkrétne pre našu rovinu dostávame rovnice ($\xi = \xi^x(x, y)\partial_x + \xi^y(x, y)\partial_y$):

$$\xi_{,x}^x = 0 = \xi_{,y}^y \Rightarrow \xi^x(y), \xi^y(x) \quad \xi_{,y}^x = -\xi_{,x}^y \Rightarrow \xi_{,y}^x(y) = -\xi_{,x}^y(x) = \text{const.} \quad (1.40)$$

Potom všeobecné riešenie:

¹⁴Rovnako sa môžeme spýtať na každej Riemannovskej variete. Vtedy to čo dostaneme sú Killingove rovnice a ich riešenia sa nazývajú Killingove vektory.

$$\xi = k_1 \partial_x + k_2 \partial_y + k_3 (-y \partial_x + x \partial_y) \quad (1.41)$$

Dostali sme očakávaný krásny výsledok, translácie v smere osí a rotácie okolo stredu. Ak sme doteraz čitateľa neohúrili dostatočne, vytiahneme teraz jedno eso z rukáva. Pozrieme sa v našej rovine na všeobecnejšiu záležitosť, na konformné transformácie, teda také, čo zachovávajú iba uhly kriviek. Vtedy nemusí byť metrický tenzor voči toku invariantný, stačí ak ho tok prenášobí nejakou neznámou funkciou σ . Vidno to z výrazu pre uhol dvoch vektorov v, w na M , ktorý vyzerá nasledovne¹⁵ (a má zostať rovnaký aj po konformnej transformácii f):

$$\cos \alpha := \frac{g(v, w)}{\sqrt{g(v, v)} \sqrt{g(w, w)}} \stackrel{!}{=} \frac{(f^*g)(v, w)}{\sqrt{(f^*g)(v, v)} \sqrt{(f^*g)(w, w)}} \quad (1.42)$$

Pre izometrie sme žiadali $f^*g = g$, ale vidíme že na konformné transformácie stačí $f^*g = \sigma g; \sigma : M \rightarrow \mathbb{R}^+$. Preto podmienka ako hľadať konformné ξ bude¹⁶:

$$\mathcal{L}_\xi g = \sigma g \quad (1.43)$$

$$\xi^k g_{ij,k} + \xi_{,i}^k g_{kj} + \xi_{,j}^k g_{ik} = \sigma g_{ij} \quad (1.44)$$

Rovnice sú samozrejme opäť preurčené. A teraz sľubované eso. Pozrieme sa, čo dostaneme v rovine ($\xi = u(x, y) \partial_x + v(x, y) \partial_y$)¹⁷:

$$u_{,x} = v_{,y} \quad u_{,y} = -v_{,x} \quad (1.45)$$

Teraz by mal čitateľ poskočiť nadšením a spoznať vo výsledku známe Cauchy - Riemannove vzťahy pre funkciu komplexnej premennej $\chi(z) = u(x, y) + iv(x, y); z = x +$

¹⁵Podľa stredoškolskej korešpondencie kosinus uhla vektorov=skalárny súčin/(súčin veľkostí oboch) len v učenejšom prevedení.

¹⁶Takéto ξ sa prirodzene nazývajú konformné Killingove vektory.

¹⁷Ak čitateľ neabsolvoval základný kurz komplexnej analýzy, aha pocit sa nedostaví. V tom prípade treba túto časť preskočiť skôr, než príde depresia z nepochopenia "pointy".

1.5. VONKAJŠIA DERIVÁCIA - DIFERENCIÁLNA ŠPECIALITA NA FORMÁCH

iy. Teda každá analytická funkcia $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ dáva generátor toku konformných transformácií pole $\xi = u(x, y)\partial_x + v(x, y)\partial_y$. Na týchto výsledkoch vidíme silu operácie Lieovej derivácie a vieme oceniť, ako elegantne sa nám podarilo uchopiť pojem symetrie v názornom geometrickom jazyku. Ako aj neskôr uvidíme, Lieova derivácia bude našim hlavným nástrojom na hľadanie symetrií hamiltonovských sústav.

1.5 Vonkajšia derivácia - diferenciálna špecialita na formách

V predchádzajúcom paragrafe sme sa zoznámili s diferenciálnou operáciou, ktorá sa dala robiť na ľubovoľnom tenzore poli. Teraz sa pozrieme na inú špeciálnejšiu diferenciálnu operáciu, ktorá je použiteľná iba na formách. Čo by sme tak od nej mohli chcieť? V prvom rade určite to, aby aj výsledkom bola forma (o to viac aby to bolo tenzorové pole). Intuitívne by nás najskôr napadlo čosi takéto:

$$t_{i\dots j} \mapsto t_{i\dots j,k} \equiv \partial_k t_{i\dots j} \quad (1.46)$$

Náš nápad má byť určite tenzor a teda sa musí správne transformovať pri zámene súradníc. Skúsime teda zameniť súradnice $x^i \mapsto x^{i'}$. Teda pretransformujeme aj diferenciálny operátor aj formu, na to už máme mechanizmy. Lenže derivácia potom bude pôsobiť na celú pretransformovanú formu a teda vo výsledku okrem želaných tenzorových členov dostaneme aj členy:

$$\partial_{k'} t_{i' \dots j'} = \dots + \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'} \partial x^{i'}} + \dots \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{k'} \partial x^{j'}} \right) t_{i \dots j} \quad (1.47)$$

A takto sa rozhodne objekt, ktorý by bol rád tenzorom netransformuje. Avšak štruktúra členov, ktorých by sme sa radi zbavili, nám ponúka perfektnú možnosť, ako sa ich zbaviť, pretože vidíme, že netenzorové členy sú v jednej dvojici indexov symetrické. Stačí teda našu operáciu urobiť ako antisymetrickú kombináciu derivácií komponent. Za antisymetrizáciu nám, tak ako už býva zvykom, vzniknú isté konštantné číselné faktory, závislé od stupňa formy a preto bude definícia našej operácie obsahovať konštantný faktor navyše, aby sme sa neželaného efektu zbavili. Definujeme teda zobrazenie d vonkajšiu deriváciu takto:

1.5. VONKAJŠIA DERIVÁCIA - DIFERENCIÁLNA ŠPECIALITA NA FORMÁCH

$$d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M) \quad (d\alpha)_{i\dots jk} := (-1)^p(p+1)\alpha_{[i\dots j,k]} \quad (1.48)$$

Pozrieme sa na niektoré vlastnosti vonkajšej derivácie, ktoré ďalej využijeme. Z definície vidíme, že zobrazenie je lineárne a na 0-forme teda funkcii, je totožné s gradientom. Najdôležitejšou vlastnosťou, ktorá si zaslúži aj číslo, je jej nilpotentnosť:

$$dd = 0 \quad (1.49)$$

Tá plynie z faktu: $\alpha_{[[i..j,k],l]} = \alpha_{[i..j,(kl)]} = 0$, pretože symetrizácia vnútri antisymetrizácie dáva 0. S touto vlastnosťou sa spája jedno ďalšie tvrdenie, ktoré ešte budeme potrebovať. Súvisí s otázkou, či náhodou horeuvedené tvrdenie $\alpha = d\beta \Rightarrow d\alpha = 0$ neplatí aj naopak. To je v skutočnosti pre naše účely príliš zložitá otázka, aby sme sa ňou detailne zaoberali a preto uvedieme iba výsledok tzv. Poincarého lemu: $d\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = d\beta$, keď sme na variete stiahnuteľnej do bodu.

Varieta stiahnuteľná do bodu je taká, pre ktorú existuje vektorové pole ξ , ktorého tok Φ_t ju postupne sťahuje do bodu x_0 teda: $\Phi_0 = id_M$ a $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(x) = x_0$. Pre naše potreby stačí fakt, že \mathbb{R}^n je stiahnuteľná do bodu a teda lokálne je taká dokonca každá varieta. Teraz zavedieme ešte terminológiu. Formu α nazývame exaktnou, ak platí $\alpha = d\beta$ pre nejakú formu β , ktorá sa nazýva potenciál formy α . Formu α nazveme uzavretou, ak $d\alpha = 0$. Teda každá exaktná forma je uzavretá a navyše poznáme prípad, kedy to ide aj naopak. Napokon uveďme, že tvrdenia patriace do fyzikálneho folklóru, že nulovosť krivkového integrálu sily po ľubovoľnej uzavretej krivke implikuje existenciu potenciálnej energie alebo tvrdenie, že ak má isté pole nulovú divergenciu tak je rotáciou čohosi, majú v pozadí presne využitie Poincarého lemu a teda rozhodne neplatia vždy¹⁸.

Na záver uvedieme bez dôkazu jednu identitu, ktorú neskôr využijeme na pohodlný výpočet toho, čo budeme potrebovať na formách. Platí (Cartanova identita):

$$\mathcal{L}_V \alpha = i_V d\alpha + di_V \alpha \quad (1.50)$$

¹⁸Aby si čitateľ nemyslel, že podobné matematické ťalafatky sú zbytočné a všetko je predsa jasné.

1.6. SYMPLEKTICKÁ GEOMETRIA A HAMILTONOVSKÁ MECHANIKA

Na formách vieme takto Lieovu deriváciu počítať niekedy o niečo výhodnejším spôsobom, z ktorého ako sa ukáže neskôr, uvidíme jeden z hlavných záverov práce. Doteraz sme si zavádzali základný diferenciálno-geometrický slovník. Teraz sa posunieme ďalej a začneme na to, čo máme spolu s ďalšími štruktúrami ktoré zavedieme, “našívajú” klasickú teoretickú mechaniku. Pre istú výhodnosť sa pozrieme preferenčne na Hamiltonovskú formuláciu.

1.6 Symplektická geometria a hamiltonovská mechanika

Teraz nastal čas, aby sme náš aparát využili na skúmanie klasickej mechaniky. Už z paragrafu 2.1 vieme, že Hamiltonove rovnice sa dajú interpretovať ako rovnice na hľadanie integrálnych kriviek istého vektorového poľa (1.13). Všetky naše úvahy platia pre hamiltonián nezávislý od času. Skúsime teda hamiltonove rovnice zapísať bezsúradnicovo - geometricky. Aby sme presne videli našu myšlienku, premenujeme súradnice vo fázovom priestore v klasickej mechanike:

$$z^i \equiv (z^1, \dots, z^n, z^{n+1}, \dots, z^{2n}) := (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n) \equiv (q^a, p_a) \quad (1.51)$$

Všimneme si, že hamiltonove rovnice môžeme napísať nasledovne:

$$\dot{z}^i = \zeta_H^i(z) := (\partial_j H) \mathcal{P}^{ji} \equiv (dH)_j \mathcal{P}^{ji} \quad (1.52)$$

Objekty, ktoré sú v hre sú antisymetrické bivektorové pole \mathcal{P} a gradient funkcie H . V kanonických súradniciach vieme komponenty poľa reprezentovať ako maticu:

$$\mathcal{P}^{ij}(z) = \begin{pmatrix} 0_n & -\mathbb{I}_n \\ \mathbb{I}_n & 0_n \end{pmatrix} = -\mathcal{P}^{ji}(z) \quad (1.53)$$

Pozrieme sa teraz na niektoré vlastnosti poľa \mathcal{P} . Hlavným faktom je, že horeuvedená matica je nesingulárna presnejšie $\det \mathcal{P}^{ij} = 1$ a navyše, vďaka antisymetrii, máme potom:

1.6. SYMPLEKTICKÁ GEOMETRIA A HAMILTONOVSKÁ MECHANIKA

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^{ij}(z)\partial_i \otimes \partial_j = \frac{1}{2}\mathcal{P}^{ij}(z)\partial_i \wedge \partial_j = \frac{\partial}{\partial p_a} \wedge \frac{\partial}{\partial q^a} \quad (1.54)$$

Pomocou tohto poľa vieme zachytiť kľúčovú štruktúru klasickej mechaniky - Poissonove zátvorky nasledovne:

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p_a} \frac{\partial g}{\partial q^a} - \frac{\partial f}{\partial q^a} \frac{\partial g}{\partial p_a} = \mathcal{P}^{ij}(df)_i (dg)_j \equiv \mathcal{P}(df, dg) \quad (1.55)$$

Navyše, ako sa na štruktúru ktorá si robí nárok reprezentovať Poissonove zátvorky patrí, naše pole splňa jednu diferenciálnu identitu, ktorá má na svedomí platnosť Jacobiho identity pre Poissonove zátvorky. Zavedieme teraz terminológiu. Každé bivektorové pole \mathcal{P} na M , ktoré splňa túto identitu nazývame Poissonov tenzor a dvojica (M, \mathcal{P}) sa nazýva poissonovská varieta. Vektorové pole $\zeta_f := \mathcal{P}(df, \cdot)$ nazveme hamiltonovské pole generované funkciou f . Navyše, v našom prístupe sa obmedzíme na prípad, keď je Poissonov tenzor nedegenerovaný a ten náš je. Prípadom hamiltonovskej mechaniky bude štúdium nasledujúcej bezsúradnicovej rovnice¹⁹:

$$\dot{\gamma}(t) = \zeta_H = \mathcal{P}(dH, \cdot) \quad (1.56)$$

Máme tak privilegovanú funkciu a podľa očakávania je ňou hamiltonián. Navyše sa nám ponúka nasledujúca netriviálna možnosť. Máme bivektorové antisymetrické pole a preto nás môže napadnúť definovať istým spôsobom inverzný objekt k \mathcal{P}^{ij} , ktorý bude mať dva dolné indexy a bude antisymetrický a teda by bol 2-formou a na formy máme opäť zavedenú mohutnú mašinériu, s ktorou vieme efektívne pracovať. Preto zavedieme:

$$\mathcal{P} \circ \omega = -\hat{1} \quad \mathcal{P}^{ik} \omega_{kj} := -\delta_j^i \quad \omega = dp_a \wedge dq^a \quad (1.57)$$

$$\omega_{ij}(z) = \begin{pmatrix} 0_n & -\mathbb{I}_n \\ \mathbb{I}_n & 0_n \end{pmatrix} = -\omega_{ji}(z) \quad (1.58)$$

¹⁹Parameter krivky sme sugestívne označili t , aby čitateľovi napadol čas a trajektória objektu vo fázovom priestore.

1.6. SYMPLEKTICKÁ GEOMETRIA A HAMILTONOVSKÁ MECHANIKA

Ďalej si všimneme nasledujúce príjemné vlastnosti nášho nového objektu:

$$\omega \equiv dp_a \wedge dq^a = d(p_a dq^a) \quad (1.59)$$

Naša ω je vďaka $dd = 0$ uzavretá a dokonca exaktná. Opäť si doprajeme terminológiu. Uzavretú a nedegenerovanú 2-formu ω na M nazveme symplektickou formou a dvojicu (M, ω) symplektickou varietou. Naša je dokonca exaktnou symplektickou formou. Teda symplektická forma nám dosť pripomína metrický tenzor, avšak aby nebola podobnosť dokonalá, je pre zmenu antisymetrická. Poznamenajme, že vďaka nedegenerovanosti symplektickej formy, môžeme s jej pomocou, rovnako ako metrickým tenzorom, dvíhať a spúšťať indexy a skonštruovať tak kanonický izomorfizmus vektorových a kovektorových polí. Vieme už, čo je hamiltonovské pole $\zeta_f := \mathcal{P}(df, \cdot)$, a nie to nič iné, než dvihnutie indexu na gradiente funkcie f a ekvivalentne sa dá napísať nasledovne (z čoho vidno aj uvedenú vlastnosť):

$$i_{\zeta_f} \omega = -df \quad \zeta_{f+C} = \zeta_f; C \in \mathbb{R} \quad (1.60)$$

Teraz sa dostaneme k jednému veľmi kľúčovému výsledku v rámci celej práce. Pozrieme sa, čo by tak mohlo byť $\mathcal{L}_{\zeta_f} \omega$. Cartanov vzorec (1.50) nám dáva nasledovné:

$$\mathcal{L}_{\zeta_f} \omega = di_{\zeta_f} \omega + i_{\zeta_f} d\omega \quad (1.61)$$

Ale naša ω je uzavretá a ešte aj $dd = 0$ a máme aj výsledok (1.60), teda slávnostne máme:

$$\mathcal{L}_{\zeta_f} \omega = 0 \quad (1.62)$$

Potom hamiltonovské polia ζ_f sú analógom Killingových vektorov metrického tenzora, teda zachovávajú symplektickú formu. Navyše bez dôkazu uvedieme:

$$\zeta_f + \lambda \zeta_g = \zeta_{f+\lambda g} \quad [\zeta_f, \zeta_g] = \zeta_{\{f,g\}} \quad (1.63)$$

1.6. SYMPLEKTICKÁ GEOMETRIA A HAMILTONOVSKÁ MECHANIKA

Hamiltonovské polia očividne tvoria nekonečnorozmernú Lieovu algebru²⁰, čo je voči Killingovým vektorom podstatná zmena, tam bola konečnorozmerná a relatívne chudobná, veď metrických tenzorov so symetriami je málo a aj tieto symetrie majú iba pár generátorov. Tento fakt bude nepríjemne komplikovať a nakoniec znemožní v istom zmysle úplné riešenie našej úlohy. Aspoň na úrovni symetrií zdvihnutých z M sa nám ju však, ako neskôr uvidíme, podarí obísť.

Otázkám, ktoré súvisia s formuláciou našich objektov v iných než kanonických súradniciach sa vyhneme, pretože ich naštastie nebudeme na riešenie našej úlohy potrebovať. Túto kreatívnu explóziu nových objektov ukončíme opäť definíciou. Je teda zrejmé, že na popis klasickej mechaniky potrebujeme fázový priestor, ktorým je symplektická varieta M a privilegovanú funkciu H presnejšie, od nej odvodenú exaktnú 1-formu dH na M . Trojicu objektov (M, ω, dH) nazveme hamiltonovskou sústavou.

Po tejto exkurzii do tajov symplektickej geometrie máme teraz pripravenú pôdu na to, aby sme sa s ohromnou efektivitou a eleganciou zmocnili pojmu symetrie hamiltonovskej sústavy. M je naše pevné ihrisko a teda ak by vektorové pole V ašpirovalo na titul generátora symetrie, musí jeho tok zachovávať symplektickú formu a hamiltonián, čo rozmenené na drobné dáva nasledovné:

$$\mathcal{L}_V \omega = 0 \quad \mathcal{L}_V H \equiv V H = 0 \quad (1.64)$$

Toto budú centrálné rovnice našej práce. Ak máme hamiltonián a exaktnú symplektickú formu²¹, už vieme presne ako hľadať generátory symetrie a takéto polia sa nazývajú exaktné Cartanove symetrie. Hamiltonián máme vždy daný ako súčasť formulácie úlohy, avšak nie symplektickú formu. To ako ju dostať kanonickým spôsobom a presne takú s akou teraz pracujeme, ukážeme v nasledujúcom a záverečnom paragrafe našej exkurzie do diferenciálnej geometrie. Napok ešte trochu pocvičíme s rovnicami ktoré sme dostali. Prvú vieme presne riešiť, sú to všetky hamiltonovské

²⁰A vďaka tomu, že už čosi o Lieových algebrách vieme, dokážeme podľa jej generátorov identifikovať vinníka symetrie našej sústavy, pravdepodobne istú Lieovu grupu. Ak nevieme nevadí, vlastne aj tak vieme čosi z kvantovej mechaniky o momente hybnosti, čo nám na daný náhľad bude stačiť a bude na to ešte upozornené.

²¹Zdôrazňujeme exaktnosť, práve tá nám umožňuje manipulácie ktoré budú nasledovať.

1.7. DIFERENCIÁLNA GEOMETRIA NA FIBROVANÝCH VARIETÁCH

polia generované ľubovoľnou funkciou f a teda $V = \mathcal{P}(df, \cdot)$. Z druhej podmienky dostávame potom:

$$\mathcal{P}(df, \cdot)H = \mathcal{P}(df, dH) = \{f, H\} = 0 \quad (1.65)$$

Skúsime zároveň pouvažovať, čo by sme radi nazvali zachovávajúcou sa veličinou hamiltonovskej sústavy. Taká funkcia F by prirodzene mala byť konštantná na krivkách časového vývoja, čo dáva podľa (1.56):

$$\zeta_H F = 0 \Leftrightarrow \{F, H\} = 0 \quad (1.66)$$

A to je presne v súhlase s výsledkom, ktorý sme dostali pre generátor symetrie. Teda ak nájdeme f ako zachovávajúcú sa veličinu z rovnice (1.65), v 1-1 vzťahu s ním je generátor symetrie hamiltonovskej sústavy ζ_f . Už sme skoro v cieľovej rovinke budovania aparátu na našu úlohu, zostáva nám pozrieť sa na to, ako dostaneme symplektickú formu, ktorú na fázovom priestore potrebujeme, kanonicky. Na to pozývame čitateľa na návštevu k váženým objektom diferenciálnej geometrie - fibrovaným varietám.

1.7 Diferenciálna geometria na fibrovaných varietách

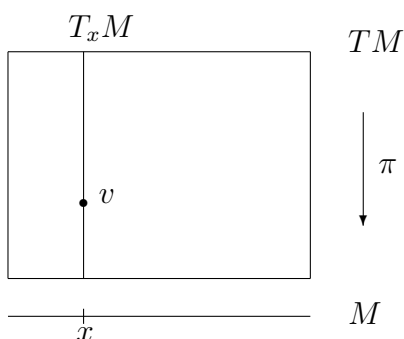
Motiváciou na zavedenie týchto štruktúr by mohla byť nasledovná úvaha. Keď vidíme prvýkrát formuláciu klasickej teoretickej mechaniky, môže nám prísť celkom oprávnene v prvom momente čudné, že súradnice a ich derivácie považujeme za vzájomne nezávislé premenné. Po malom ohmataní teórie sa už s týmto faktom zmierime a prestane nám byť čudný, aj keď možno na začiatku bol. Prístup a objekty ktoré sa teraz objavajú, však do istej miery ťažia práve z toho, že sa pozrieme na fázový priestor ako na celok a v istom zmysle využijeme “súvislosti” medzi súradnicami a hybnosťami resp. rýchlosťami a zisk z tohto pohľadu bude naozaj nezanedbateľný.

Ako modelovú situáciu si zoberieme niečo takéto: nech M je hladká varieta, $T_x M$ dotykový priestor v bode $x \in M$. Pozrieme sa na množinu:

1.7. DIFERENCIÁLNA GEOMETRIA NA FIBROVANÝCH VARIETÁCH

$$TM := \bigcup_{x \in M} T_x M \quad (1.67)$$

Teda body našej novej množiny budú všetky vektory vo všetkých bodoch našej variety. Prirodzený je potom koncept zobrazenia, ktoré vektoru priradí bod, v ktorom sa nachádza tzv. kanonická projekcia $\pi : TM \rightarrow M; T_x M \ni v \mapsto x$. Situáciu názorne vystihuje nasledujúci obrázok:



Obrázok 1.3: Štruktúra TM

Na TM by sme teraz chceli, ako sa na slušnej variete patrí, atlas a ideálne s využitím už existujúcich súradníc na M . Ľahko prideme na nasledujúci návrh mapy na $\hat{\mathcal{O}} \subset TM$:

$$\hat{\psi} : \hat{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbb{R}^{2n} [x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n] \quad (1.68)$$

Takto navrhnutý atlas je dokonca vždy hladký a orientovateľný, čo je dôležité, ale nie až tak, aby sme to na tomto mieste ukázali.

Úplne analogickým spôsobom ako sme zaviedli varietu TM sa dá zaviesť aj varietu T^*M , stačí sa miesto dotykových priestorov v každom bode pozrieť na tie kodotykové. Tu označíme príslušnú kanonickú projekciu $\tau : T^*M \rightarrow M; T_x^*M \ni p \mapsto x$. Teda kovektor p v bode x pošleme na “jeho” bod. Analogicky na T^*M vieme dostať hladký orientovateľný atlas. Pozrieme sa teraz, ako fungujú kanonické projekcie v prípade, že by sme chceli projektovať nejaké vektorové pole na TM resp. T^*M :

1.7. DIFERENCIÁLNA GEOMETRIA NA FIBROVANÝCH VARIETÁCH

$$\pi \frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{\partial}{\partial x^a} \quad \pi \frac{\partial}{\partial v^a} = 0 \quad \tau \frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{\partial}{\partial x^a} \quad \tau \frac{\partial}{\partial p_a} = 0 \quad (1.69)$$

Vlastnosti, ktoré majú naše objekty nás teda inšpirujú definovať pojem fibrovanej variety. V každom bode M máme akoby skrytú ďalšiu varietu a všetky sú difeomorfné spoločnej variete, v našom prípade pobodové dotykové a kodotykové priestory sú difeomorfné \mathbb{R}^n a sú to dokonca vektorové priestory. Zovšeobecnením tohto prípadu bude situácia, keď do každého bodu $x \in M$ akoby “vlepíme” varietu F_x a všetky tieto variety sú difeomorfné jednej spoločnej variete F . Varieta F sa nazýva typické vlákno, F_x je vlákno v bode x , M je báza a

$$\mathcal{B} := \bigcup_{x \in M} F_x \quad (1.70)$$

je totálny priestor a F_x sú podvarietami \mathcal{B} . Ďalej potrebujeme kanonickú projekciu $\pi : \mathcal{B} \rightarrow M$. Napokon sa žiada lokálna súčinová štruktúra, teda existencia pokrytia \mathcal{O}_α bázy M a sústava difeomorfizmov:

$$\psi_\alpha : \pi^{-1}(\mathcal{O}_\alpha) \rightarrow \mathcal{O}_\alpha \times F \quad (1.71)$$

tak aby platilo $\pi_1 \circ \psi_\alpha = \pi$. Naše príklady fibrácií mali dokonca lineárnu štruktúru, také nazývame vektorové fibrácie. Takto sme si splnili povinnosť aspoň definovať objekty s ktorými budeme pracovať, ďalej sa zameriame najmä na T^*M a na nej si ukážeme pár špecialít, ktoré budeme ešte potrebovať. Pozrieme sa teraz na situáciu, v ktorej máme dve kodotykové fibrácie a injektívne zobrazenie ich báz. Teda:

$$\tau_M : T^*M \rightarrow M \quad \tau_N : T^*N \rightarrow N \quad f : M \rightarrow N \quad (1.72)$$

V takejto situácii definujeme nasledovné zobrazenie:

$$T^*f : T^*N \rightarrow T^*M \quad (T^*f)(\alpha) = f^*\alpha \quad (1.73)$$

a f^* je pull-back kovektora α . Situáciu prehľadne vystihuje nasledujúci komutatívny diagram a teda platí potom:

1.7. DIFERENCIÁLNA GEOMETRIA NA FIBROVANÝCH VARIETÁCH

$$f \circ \tau_M \circ T^*f = \tau_N \quad (1.74)$$

$$\begin{array}{ccc} T^*M & \xleftarrow{T^*f} & T^*N \\ \downarrow \tau_M & & \downarrow \tau_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Obrázok 1.4: Komutatívny diagram T^*f

Ak $f : M \rightarrow N$ má súradnicové vyjadrenie $x^i \rightarrow y^a(x^1, \dots, x^m)$, potom sa vieme pozrieť na T^*f a ak je f difeomorfizmus, tak aj na T^*f^{-1} v kanonických súradniciach:

$$T^*f : (y^a(x), q_a) \mapsto (x^i, J_i^a(x)q_a) \equiv (x^i(y^a, q_a), p_i(y^a, q_a)) \quad (1.75)$$

$$T^*f^{-1} : (x^i, p_i) \mapsto (y^a(x), (J^{-1})_a^i p_i) \equiv (y^a(x^i, p_i), q_a(x^i, p_i)) \quad (1.76)$$

Teraz si uvedomíme, že v každom bode $b \in \mathcal{B}$, máme tiež dotykový priestor. Zaujímavým bude tzv. vertikálny podpriestor obsahujúci vektory $W \in T_b\mathcal{B}$, ktoré sa kanonickou projekciou dostanú do nuly. Platia však vzťahy (1.69), vieme preto ako vyzerajú najvšeobecnejšie vertikálne vektorové polia na T^*M :

$$V = V_i(x, p) \frac{\partial}{\partial p_i} \quad (1.77)$$

Skúsime sa teraz pozrieť na to, ako by sme vedeli prirodzene nejakému objektu na M , priradiť objekt na T^*M , teda ideme skúmať tzv. zdvihy. Tu nám veľmi príjemne padne definícia vektora ešte z paragrafu 2.2 pomocou kriviek. Nech $\alpha \in T_x^*M \equiv \tau^{-1}(x)$. Tomuto kovektoru priradíme krivku na vlákne $\tau^{-1}(x)$ takto:

$$\sigma(t) := p + t\alpha \quad p \in \tau^{-1}(x) \quad (1.78)$$

1.7. DIFERENCIÁLNA GEOMETRIA NA FIBROVANÝCH VARIETÁCH

Dotykovým vektorom v nule tejto krivky je nejaký vektor v bode $p \in T^*M$, ktorý nazveme vertikálnym zdvihom kovektora α do bodu $p \in T^*M$, teda zdvihom kovektora je vcelku prekvapivo vektor:

$$\alpha^\uparrow := \dot{\sigma}(0) \equiv \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (p + t\alpha) \in T_p T^*M \quad (1.79)$$

Priradenie potom beží nasledovne:

$$\alpha = \alpha_a dx^a \mapsto \alpha^\uparrow = \alpha_a \frac{\partial}{\partial p_a} \quad (1.80)$$

Rovnako to samozrejme ide zopakovať v každom bode M , teda vieme vykonať vertikálny zdvih kovektorového poľa. Teda najvšeobecnejšie vektorové pole W na T^*M , ktoré je vertikálnym zdvihom kovektorového poľa z M , vyzerá nasledovne:

$$W = B_a(x) \frac{\partial}{\partial p_a} \quad (1.81)$$

Myšlienka zdvihu sa dá však ešte rozšíriť na širšiu triedu vektorových polí na T^*M . Použijeme teraz silnejšiu ideu, doteraz sme zdvíhali pobodovo. Teraz sa pozrieme na vektorové pole cez jeho tok a skúsime zdvihnúť ten. Ak si za f v našom komutatívnom diagrame predstavíme Φ_t , teda tok generovaný poľom na M a ďalej nech $N = M$, indukuje sa nám prirodzene zobrazenie $T^*\Phi_t$, my však chceme k nemu inverzné a vďaka $\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}$, čo vieme ešte z paragrafu 2.4, máme horúceho kandidáta na zdvih konkrétne $T^*\Phi_{-t}$ a navyše platí:

$$\tau \circ T^*\Phi_{-t} = \Phi_t \circ \tau \quad (1.82)$$

teda nazývať tento proces zdvihom je rozumné. Ešte chceme odhaliť súvislosť medzi tokom $T^*\Phi_{-t}$ a jeho generátorom poľom \tilde{V} , ktoré by sme nazvali úplným zdvihom poľa V a dáva tok Φ_t na M . Infinitesimalne vyzerá tok Φ_ϵ na M prirodzene $x^a \mapsto x^a + \epsilon V^a(x)$. Potom zo vzťahu (1.76) vieme, ako vyzerá náš vygenerovaný tok $T^*\Phi_{-\epsilon}$ v súradniciach²²:

²²Derivácia v druhej komponente je za jakobián a znamienko za použitie inverzného toku.

1.7. DIFERENCIÁLNA GEOMETRIA NA FIBROVANÝCH VARIETÁCH

$$T^*\Phi_{-\varepsilon} : (x^a, p_a) \mapsto (x^a + \varepsilon V^a(x), p_a - \varepsilon V_{,a}^b(x)p_b) \quad (1.83)$$

Teda vidíme nasledujúcu korešpondenciu:

$$V = V^a(x) \frac{\partial}{\partial x^a} \mapsto \tilde{V} = V^a(x) \frac{\partial}{\partial x^a} - V_{,a}^b(x) p_b \frac{\partial}{\partial p_a} \quad (1.84)$$

Toto vyjadrenie využijeme do budúca. Ak nájdeme symetriu hamiltoniánu s generátorom v tomto tvare, budeme vedieť, že je “iba” úplným zdvihom symetrie z M .

Napokon teraz pristúpime ku kanonickej konštrukcii symplektickej štruktúry na T^*M . Pozrieme sa na kanonickú 1-formu θ , ktorú jednoducho pobodovo skonštruujeme. Nech $p \in T^*M; W \in T_p T^*M$. Definujeme potom:

$$\langle \theta, W \rangle := \langle p, \tau W \rangle \quad (1.85)$$

Vektor W sa najprv sprojektuje do bodu “kde bol” a dosadí sa tam do 1-formy resp. kovektora p . Vďaka vektorovosti našej fibrácie je θ lineárne zobrazenie, ešte si spočítame ako vyzerá v kanonických súradniciach. Nech $W = A^a \frac{\partial}{\partial x^a} + B^a \frac{\partial}{\partial p_a}; \theta = C_a dx^a + D^a dp_a$. Navyše platí $\tau W = A^a \frac{\partial}{\partial x^a}; p = p_a dx^a$. Vzťah (1.85) dáva:

$$\left\langle p_a dx^a, A^b \frac{\partial}{\partial x^b} \right\rangle \stackrel{!}{=} \left\langle C_a dx^a + D^a dp_a, A^a \frac{\partial}{\partial x^a} + B^a \frac{\partial}{\partial p_a} \right\rangle \quad (1.86)$$

Z linearity vidíme $C_a = p_a; D^a = 0$ a potom kanonická 1-forma bude:

$$\theta = p_a dx^a \quad (1.87)$$

Ak sa pozrieme na vlastnosť (1.59) exaktnej symplektickej 2-formy z predchádzajúceho paragrafu, na T^*M máme kanonicky exaktnú symplektickú 2-formu $\omega = d\theta$ v kanonických súradniciach:

$$\omega = dp_a \wedge dx^a \quad (1.88)$$

1.7. DIFERENCIÁLNA GEOMETRIA NA FIBROVANÝCH VARIETÁCH

Preto sú kanonické súradnice na T^*M vhodné úplne zázračne aj pre kanonickú symplektickú formu a to je jediné, čo ešte potrebujeme na formuláciu hamiltonovskej mechaniky okrem hamiltoniánu, ktorý dostaneme ako formuláciu úlohy. Teda T^*M je symplektickou varietou zadarmo, už “prázdna”. V dodatku uvidíme, že TM také šťastie nemá, na symplektickú štruktúru bude potrebovať najprv lagranžián. A sme šťastne na konci našej cesty po pláňach diferenciálnej geometrie. Teraz to všetko využijeme na hľadanie symetrií Keplerovej úlohy.

2

Symetrie Keplerovej úlohy

2.1 Keplerova úloha a Rungeho-Lenzov vektor

Po tom ako sme z diferenciálnogeometrického aparátu dostali výsledok, ktorý sme potrebovali, pozrieme sa na problém, ktorý chceme skúmať - na Keplerovu úlohu. Budeme hľadať symetrie nasledovného hamiltoniánu:

$$H(\vec{p}, \vec{q}) := \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{\alpha}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \equiv \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{\alpha}{r} \quad (2.1)$$

kde samozrejme používame štandardné označenie pre veľkosť polohového vektora, aj keď jeho komponenty značíme tak, ako je v Hamiltonovskom formalizme zvykom. Teda naša sústava je teleso, ktoré sa pohybuje v poli centrálnej sily. Zhrnieme si teraz niekoľko faktov, ktoré by nám mali byť o Keplerovej úlohe známe. Začali sme úlohou o dvoch telesách, ktoré na seba pôsobia silou parameterizovanou nejakým potenciálom, závislým iba od relatívnej polohy $U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$. To nám umožnilo úlohu (opäť vďaka symetrii tentoraz translačnej) redukovať na úlohu o jednom telese v potenciálovom poli $U(r)$. Ak ako potenciál zvolíme štandardný gravitačný, dostávame Keplerovu úlohu a hamiltonián (2.1). Štandardne sa potom ukáže, že zákon zachovania momentu hybnosti implikuje, že celý pohyb sa odohráva v rovine, zavedú sa polárne súradnice a úloha sa za cenu pár nepríjemných integrálov dovedie do zdarného konca a ukáže sa, že trajektórie sú kuželosečky a špeciálne pre situáciu Zem okolo Slnka a podobne

2.1. KEPLEROVA ÚLOHA A RUNGEO-LENZOV VEKTOR

dostávame finitnosť trajektórie.

Je však veľmi netriviálnym faktom, že existencia dodatočnej zachovávaajúcej sa veličiny a teda Rungeho-Lenzovho vektora, nám umožní zistiť keplerovské trajektórie úplne bez riešenia diferenciálnej rovnice, čisto algebraickou manipuláciou. V skratke naznačíme kľúčové body odvodenia, aby sme už teraz docenili význam toho, čo neskôr nájdeme a potom aj, možno rukolapnejšie, oceníme v kvantovej verzii.

Teraz ukážeme priamo, že Rungeho-Lenzov vektor je zachovávaajúcou sa veličinou pre Keplerovu úlohu. Pozrieme sa na $\dot{\vec{A}}$ podľa (2.8) a postupne máme (s využitím konštantnosti momentu hybnosti a pohybovej rovnice pre našu úlohu):

$$\dot{\vec{A}} = \dot{\vec{p}} \times \vec{L} - m\alpha \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \quad \dot{\vec{p}} = -\frac{\alpha}{r^3} \vec{r} \quad (2.2)$$

$$\dot{\vec{A}} = -\frac{m\alpha}{r^3} (\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{v}) - \vec{v}r^2) - m\alpha \left(\frac{\vec{v}}{r} - \frac{\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{v})}{r^3} \right) = 0 \quad (2.3)$$

Z vyjadrenia (2.8) je zrejmé, že Rungeho-Lenzov vektor leží stále v smere hlavnej poloosi trajektórie. Zvolíme teraz rozumne súradnicovú sústavu. Os x v smere vektora \vec{A} , os y kolmo na ňu. V tejto sústave zavedieme teraz štandardné polárne súradnice r, φ . Z dvoch ľahkých počtov máme potom:

$$\vec{r} \cdot \vec{A} = rA \cos \varphi \quad \vec{r} \cdot \vec{A} = \vec{r} \cdot (\vec{p} \times \vec{L}) - m\alpha r = \vec{L}^2 - m\alpha r \quad (2.4)$$

$$r \left(1 + \frac{A}{m\alpha} \cos \varphi \right) = \frac{\vec{L}^2}{m\alpha} \quad (2.5)$$

A po zavedení $\varepsilon = \frac{A}{m\alpha}, p = \frac{\vec{L}^2}{m\alpha}$ máme r, φ zviazané rovnicou:

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos \varphi \quad (2.6)$$

A to je rovnica kužeľosečky. Teda máme riešenie diferenciálnej rovnice druhého rádu úplne bez integrovania! Kvalitatívnu diskusiu, kedy je niečo také možné, odložíme na neskôr.

2.1. KEPLEROVA ÚLOHA A RUNGEHO-LENZOV VEKTOR

Ideme teraz explicitne hľadať zachovávajúce sa veličiny. Na začiatok by sme si mali vyjasniť, aké zákony zachovania vlastne očakávame. Keďže hamiltonián nezávisí explicitne od času a triviálne platí $\{H, H\} = 0$, tak sa prirodzene zachováva celková energia sústavy. Hybnosť ako taká sa samozrejme v centrálnom poli nezachováva, preto “najjednoduchší” netriviálny kandidát na zákon zachovania by mali byť komponenty momentu hybnosti $\vec{L} = \vec{q} \times \vec{p}$. Preto očakávame riešenia rovníc, ktoré dostaneme, v tvare všetkých komponent:

$$\vec{L} = (q_2 p_3 - q_3 p_2, -q_1 p_3 + q_3 p_1, q_1 p_2 - q_2 p_1) \quad (2.7)$$

Na úrovni základných znalostí mechaniky by sme tu aj s očakávaniami skončili. História objavu novej zachovávajúcej sa veličiny pre tento problém siaha do roku 1710 a prác švajčiarskeho matematika Jakoba Hermanna[3], neskôr bola veličina mnohými znovuobjavená a napokon sa pre ňu ustálil názov (Laplaceov-)Rungeho-Lenzov vektor, ktorý je definovaný takto:

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - m\alpha \frac{\vec{q}}{r} \quad (2.8)$$

Teraz si doprajeme ešte krátky historický exkurz, ktorý je tiež veľmi poučný. Vieme už, kto Rungeho-Lenzov vektor objavil ako prvý. Ešte v tom istom roku Johann Bernoulli[4] sformuloval tento vektor v dnešnej podobe. Na konci storočia ho potom nezávisle znovuobjavil P.S.Laplace[5], neskôr v roku 1847 W.R.Hamilton[6] a po ňom J.W.Gibbs[7]. Jeho odvodenie prevzal C.Runge[8] v učebnici vektorovej analýzy, na ktorú sa odvolal v článku o atóme vodíka W.Lenz[9]. Napokon v roku 1926 W.Pauli[10] vo svojom článku dostal pomocou neho spektrum atómu vodíka a od čias tejto publikácie sa zvykne nazývať (Laplaceov-)Rungeho-Lenzov vektor.¹

Vrátíme sa teraz už k našej hlavnej úlohe. Ako riešenia našich rovníc by sme mali nájsť aj komponenty tohto vektora. Rozmenené na komponenty by sme mali nájsť zachovávajúce sa veličiny:

$$A_1 = q_1 p_2 p_2 - q_2 p_1 p_2 + q_1 p_3 p_3 - q_3 p_1 p_3 - m\alpha \frac{q_1}{r} \quad (2.9)$$

¹Čo je svojim spôsobom dosť kuriózne, že pôvodný objaviteľ sa už do pomenovania nezmestil.

2.1. KEPLEROVA ÚLOHA A RUNGEO-LENZOV VEKTOR

$$A_2 = -q_1 p_1 p_2 + q_2 p_1 p_1 + q_2 p_3 p_3 - q_3 p_2 p_3 - m\alpha \frac{q_2}{r} \quad (2.10)$$

$$A_3 = -q_1 p_1 p_3 + q_3 p_1 p_1 - q_2 p_2 p_3 + q_3 p_2 p_2 - m\alpha \frac{q_3}{r} \quad (2.11)$$

Prirodzene by sme sa mohli pýtať, či máme hľadať ešte ďalej. Jednoducho nahliadneme, že ak má systém n stupňov voľnosti, môže mať najviac $2n - 1$ (nezávislých) zachovávajúcich sa veličín. Je to prirodzené, pretože na n stupňov voľnosti máme $2n$ počiatočných podmienok a navyše iba zo zachovávajúcich sa veličín nemôžeme byť schopný povedať, kedy sme mali $t = 0$ a preto máme hľadať najviac $2n - 1$ zachovávajúcich sa veličín, v našom prípade teda najviac 5 [11]. Systému, ktorý má takýto maximálny počet zachovávajúcich sa veličín, sa hovorí maximálne superintegrovateľný. Už z názvu vidíme, že to nebude vlastnosť, ktorú by sme vo fyzike každodenne stretávali, aj keď na prvý pohľad sa to nemusí tak javiť, lebo napríklad mnohé jednoduché kvantové sústavy, ako sú atóm vodíka alebo harmonický oscilátor, sú práve príkladmi takýchto sústav a to je aj hlavný dôvod, prečo ich vieme analyticky riešiť, pretože ich vieme riešiť aj priamo algebraicky a aj preto sa ich učíme ako prvé. Podrobnejšiu diskusiu tohto faktu (že máme najviac päť v istom zmysle nezávislých zachovaní) odsúvame do dodatku 3.1, ktorý je venovaný základom teórie parciálnych diferenciálnych rovníc prvého rádu, kde tento fakt dokážeme priamo. Táto skutočnosť sa môže nateraz javiť ako problém, lebo v očakávaniach sme uviedli dokopy 7 veličín. Našťastie po chvíli sa potešíme, lebo zistíme, že všetky očakávania nie sú nezávislé, pretože po jednom rýchlom a jednom trochu dlhšom počte zistíme:

$$\vec{A} \cdot \vec{L} = 0 \quad \vec{A}^2 = m^2 \alpha^2 + 2mH\vec{L}^2 \quad (2.12)$$

Zostalo nám 5 nezávislých veličín. Ak nájdeme moment hybnosti a Rungeho-Lenzov vektor z našich rovníc, máme všetko. To sme si ujasnili, aké fyzikálne očakávania máme na hľadané veličiny. Teraz sa pozrieme, čo by sme od našich riešení chceli matematicky. Je zrejmé, že ak $f(\vec{p}, \vec{q}), g(\vec{p}, \vec{q})$ sú zachovávajúce sa veličiny tak potom aj $\alpha f(\vec{p}, \vec{q}) + \beta g(\vec{p}, \vec{q})$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je zachovávajúca sa veličina, čo je vcelku triviálny dôsledok lineariry našej rovnice. Ďalej čakáme, ak $f(\vec{p}, \vec{q})$ je zachovávajúcou sa

2.2. PÁTRANIE PO MOMENTE HYBNOSTI

veľičinou a $g(x)$ je ľubovoľná (hladká) funkcia jednej premennej, tak potom aj $g(f(\vec{p}, \vec{q}))$ je zachovávajúcou sa veľičinou. Presnejšie sa na to, čo rozumieme pod nezávislosťou zachovávajúcich sa veľičín, pozrieme v dodatku.

Overíme teraz, či budú naše očakávania naplnené. Pozrieme sa na riešenia a vlastnosti rovnice (1.65) pre náš hamiltonián (2.1)²:

$$\frac{\alpha}{r^3} \left(q_i \frac{\partial f(\vec{p}, \vec{q})}{\partial p_i} \right) - \frac{1}{m} \left(p_i \frac{\partial f(\vec{p}, \vec{q})}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (2.13)$$

Overíme hneď našu druhú matematickú požiadavku na našu rovnicu. Nech $f(\vec{p}, \vec{q})$ je riešením rovnice (2.13) a $g(x)$ je ľubovoľná (hladká) funkcia jednej premennej. Spýtame sa rovnice, či ju rieši aj $g(f(\vec{p}, \vec{q}))$. Vďaka tomu ako sa derivuje zložená funkcia a hlavne homogenite našej rovnice sa s odpoveďou nijak nenatrápime a máme:

$$\frac{\alpha}{r^3} \left(q_i \frac{\partial g(f(\vec{p}, \vec{q}))}{\partial f(\vec{p}, \vec{q})} \frac{\partial f(\vec{p}, \vec{q})}{\partial p_i} \right) - \frac{1}{m} \left(p_i \frac{\partial g(f(\vec{p}, \vec{q}))}{\partial f(\vec{p}, \vec{q})} \frac{\partial f(\vec{p}, \vec{q})}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (2.14)$$

čo opäť implikuje platnosť rovnice (2.13) a našu vytúženú vlastnosť máme.

2.2 Pátranie po momente hybnosti

Skúsime rovnicu (2.13) rozumne systematicky riešiť. V princípe je naša rovnica lineárnou homogénnou parciálnou diferenciálnou rovnicou prvého rádu pre neznámu funkciu šiestich premenných. Jednoduchý systematický postup ako takúto rovnicu riešiť nemáme a preto budeme postupovať tak, ako je fyzikálne bežné a teda napíšeme čo najvšeobecnejší ansatz. Keďže vieme, aké riešenia čakáme a aké by mali byť vôbec rozumné (teda polynómy v komponentách hybnosti) a navyše, aké by sme vedeli ako tak systematicky riešiť (zoskupovať podľa mocnín p_i), tak budeme navrhovať ansatz v nasledovnom tvare:

$$f = a(\vec{q}) + b_i(\vec{q})p_i + c_{ij}(\vec{q})p_i p_j + d_{ijk}(\vec{q})p_i p_j p_k + \dots \quad (2.15)$$

²Odtiaľ používame sumačnú konvenciu pre opakujúci sa index aj keď sú oba indexy dolu, pretože pre túto úlohu nebude poloha indexov dôležitá.

2.2. PÁTRANIE PO MOMENTE HYBNOSTI

a postupne budeme pridávať ďalší člen a skúmať riešenia. Na začiatok skúsime zobrať iba prvý člen ansatzu (2.15) a riešime:

$$-\frac{1}{m} \left(p_i \frac{\partial a(\vec{q})}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (2.16)$$

Je zrejmé, že jediným riešením je $a(\vec{q}) \equiv \text{const.}$, čo sme aj čakali, pretože zachováajúca sa veličina závislá iba od súradnice by bola veľmi čudná vec. Zachováajúca sa veličina je vždy určená s presnosťou na aditívnu konštantu, ktorú vždy volíme nulovú a máme preto jedine identicky nulové riešenie. Pridáme teraz do hry o jeden člen viac a pozrieme sa na riešenia (ak čitateľa už teraz odrádza istá nízka miera elegancie predvedeného postupu, odporúčame mu preskočiť o tri strany ďalej na posledný odsek):

$$\frac{\alpha}{r^3} (q_i b_i(\vec{q})) - \frac{1}{m} \left(p_i \frac{\partial a(\vec{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial b_j(\vec{q})}{\partial q_i} p_i p_j \right) = 0 \quad (2.17)$$

Podrobnejšie tak dostávame rovnice³:

$$q_i b_i(\vec{q}) = 0 \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial b_{(j}(\vec{q})}{\partial q_i} = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial a(\vec{q})}{\partial q_i} = 0 \quad (2.20)$$

Okamžite máme $a(\vec{q}) \equiv 0$. Ďalej to už také jednoduché nebude. Označme si $\frac{\partial b_j(\vec{q})}{\partial q_i} := B_{ji}(\vec{q})$. Chceme nulovať čosi, čo je symetrické v dvoch indexoch ij . Najvšeobecnejšia možnosť ako to docieľiť je, že objekt $B_{ji}(\vec{q})$ bude v oboch indexoch antisymetrický a skúsime parametrizovať takto: $B_{ji}(\vec{q}) = \tilde{B}_{ab}(\vec{q}) \delta_{ij}^{ab}$. Teraz skúsime nejak pohnúť s druhou podmienkou, ktorú máme. Postup, ktorý predvedieme, nebude totálne presvedčivý, pretože budeme vychádzať zo slabšej podmienky, než by sme mali a potom len odôvodníme, ako musíme zmeniť výsledok, aby sme dostali správne riešenie.

³Zátvorčky v indexoch znamenajú symetrizáciu cez príslušnú n -ticu indexov.

2.2. PÁTRANIE PO MOMENTE HYBNOSTI

Teda miesto podmienky $q_i b_i(\vec{q}) = 0$ vezmeme podmienku $q_i b_i(\vec{q}) = \text{const}$. Na túto podmienku pustíme $\frac{\partial}{\partial q_i}$, čo dáva:

$$\delta_j^i b_i(\vec{q}) + q_i B_{ij}(\vec{q}) = 0 \quad (2.21)$$

Teraz vidíme, prečo sme takto postupovali, umožnilo nám to použiť výsledok, ktorý sme už dostali a vyhnúť sa nepríjemnej otázke, ako z toho nájsť $b_i(\vec{q})$ priamo. Teda dostali sme výsledok:

$$b_j(\vec{q}) = B_{ji}(\vec{q})q_i = \tilde{B}_{ab}(\vec{q})\delta_{ij}^{ab} q_i \quad (2.22)$$

Takto by sme si mysleli, že za $\tilde{B}_{ab}(\vec{q})$ môžeme zvoliť čo nás len napadne. Z prehnaného optimizmu nás prebudí nasledujúci výpočet. Vezmime za $\tilde{B}_{12} = \sin(q_1 + q_2)$ a zvyšné elementy vezmime nulové. Postupne máme:

$$b_1 = q_1 \tilde{B}_{12} \delta_{11}^{12} + q_2 \tilde{B}_{12} \delta_{21}^{12} + q_3 \tilde{B}_{12} \delta_{31}^{12} = -q_2 \tilde{B}_{12} \quad (2.23)$$

$$b_2 = q_1 \tilde{B}_{12} \delta_{12}^{12} + q_2 \tilde{B}_{12} \delta_{22}^{12} + q_3 \tilde{B}_{12} \delta_{32}^{12} = q_1 \tilde{B}_{12} \quad (2.24)$$

$$b_3 = 0 \quad (2.25)$$

Teda prvú podmienku z našej rovnice by sme ešte splnili, ale v druhej, kde treba derivovať, nás nekonštantnosť maticového elementu položí a dostaneme:

$$\dots (-\sin(q_1 + q_2) - q_2 \cos(q_1 + q_2)) p_1 p_2 + (\sin(q_1 + q_2) + q_1 \cos(q_1 + q_2)) p_2 p_1 \dots = 0 \quad (2.26)$$

čo nie je pravda a práve derivácia súčinu nám naše snaženie zrušila. Preto nám môže napadnúť možnosť, že $\tilde{B}_{ab}(\vec{q})$ bude v skutočnosti iba číselná matica a nič viac⁴.

⁴Ak čitateľ neverí, nech vyskúša voliť nekonštantné maticové elementy inak a nepochodí. Autor niečo naskúšal ale nechce tým otravovať zvedavého čitateľa.

2.2. PÁTRANIE PO MOMENTE HYBNOSTI

Kedže konštanta krát zachováajúca sa veličina zostáva stále zachovaná, tak stačí nielen číselná matica, ale postačí jedna jednotka, ktorou pobežeme po celej matici. Riešenie je konštruované ako antisymetrické, behať po diagonále preto nemusíme a jeden roh dá iba mínus to čo druhý a zostanú nám tri miesta, kam umiestnime postupne jednotky. Pozrieme sa napríklad na možnosť $\tilde{B}_{12} = 1$. To nám vďaka poslúži predchádzajúci výpočet a máme $b_1 = -q_2; b_2 = q_1; b_3 = 0$. Obe podmienky ktoré treba tak splníme a dostaneme zachováujúcu sa veličinu:

$$f = -q_2 p_1 + q_1 p_2 \quad (2.27)$$

a tešíme sa, pretože máme tretiu komponentu vektora momentu hybnosti. Rovnako pri zvyšných dvoch voľbách by sme získali zostávajúce dve komponenty momentu hybnosti a už na tomto stupni máme tri zachováujúce sa veličiny, ktoré sme chceli nájsť.

Kedže sa v práci chceme zaoberať aj tým, že klasifikujeme nájdené symetrie podľa toho, či sú alebo nie sú zdvihnuté do T^*M , tak sa pozrieme na generátory symetrií, ktoré sme našli. Návod ako hľadať symetriu zodpovednú za zákon zachovania máme, podľa (1.56) dostávame:

$$\zeta_{L_1} = -q_3 \frac{\partial}{\partial q_2} + q_2 \frac{\partial}{\partial q_3} - p_3 \frac{\partial}{\partial p_2} + p_2 \frac{\partial}{\partial p_3} \quad (2.28)$$

$$\zeta_{L_2} = -q_3 \frac{\partial}{\partial q_1} + q_1 \frac{\partial}{\partial q_3} - p_3 \frac{\partial}{\partial p_1} + p_1 \frac{\partial}{\partial p_3} \quad (2.29)$$

$$\zeta_{L_3} = -q_2 \frac{\partial}{\partial q_1} + q_1 \frac{\partial}{\partial q_2} - p_2 \frac{\partial}{\partial p_1} + p_1 \frac{\partial}{\partial p_2} \quad (2.30)$$

Teda podľa (1.84) vidíme, že tieto symetrie sú zdvihnuté z bázy ako sme aj čakali, pretože ich vidíme už v M . Konkrétne, sú zdvihom takých symetrií z M , že sa realizujú z predchádzajúcich troch rovníc vždy iba prvé dva členy a to sú známe generátory rotácii z kvantovej mechaniky. Napokon sa pokúsime odhaliť, aká symetria sa nám prejavuje v tomto zákone zachovania. V nami predvedenom postupe sme hľadali automorfizmy istej štruktúry - Hamiltonovskej sústavy. Z algebry vieme,

2.2. PÁTRANIE PO MOMENTE HYBNOSTI

že automorfizmy s operáciou skladania tvoria grupu. Preto by nás nemalo prekvapiť, že v pozadí nášho zachovania sa nenápadne schováva istá grupa, presnejšie jej pôsobenie na T^*M . V tomto prípade ľahko prideme na odpoveď, ktorá grupa je v hre. Využijeme, že generátory sú úplným zdvihom z M a tieto generátory na M poznáme ako operátory momentu hybnosti z kvantovej mechaniky (až na konštantu), ktoré spĺňajú komutačný vzťah:

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k \quad (2.31)$$

Keďže poznáme kanonické kvantovanie a súvislosti klasickej a kvantovej mechaniky, neprekvapí nás výsledok, ktorý by sme dostali rýchlym výpočtom v klasickej mechanike⁵:

$$\{L_i, L_j\} = -\varepsilon_{ijk}L_k \quad (2.32)$$

V kvantovej mechanike sa za týmto komutačným vzťahom skrýva pôsobenie Lieovej grupy $SO(3)$ a rovnako je to aj v klasickej mechanike⁶. To sme samozrejme museli očakávať, lebo naša úloha má rotačnú symetriu a tá sa po úplnom zdvihu na T^*M zachováva.

Pri pohľade na náš postup by čitateľa mohlo napadnúť, že sme vôbec neukázali skutočnosť, že pre túto časť ansatzu neexistujú iné riešenia, než tie ktoré sme našli. Aby sme rozptýlili akékoľvek pochybnosti, obrátíme sa teraz na aparát, v ktorom vieme nájsť všetky symetrie zdvihnuté z bázy explicitne. Pekné na ukázanom postupe bude to, že sa teraz na našu situáciu miesto hamiltonovskej pozrieme lagrangeovskou optikou. Na to teda v prvom rade potrebujeme lagranžián pre Keplerovu úlohu, ktorý celkom prirodzene vyzerá nasledovne:

⁵Znamienko navyše je len dôsledkom konvencie v našej definícii Poissonových zátvoriek a nehrá žiadnu dôležitú úlohu. Nájdu sa aj autori, ktorí majú opačnú konvenciu v definícii Poissonových zátvoriek a dostanú potom výsledok bez minusu. My sa držíme konvencie v [1].

⁶Pôsobiacu grupu vieme identifikovať podľa komutačných vzťahov generátorov jej Lieovej algebry. Je však známe, že dve rôzne Lieove grupy môžu mať izomorfné Lieove algebry, ak jedna grupa nakrýva druhú. Prísne vzaté nevieme rozlíšiť o ktorú grupu sa jedná, ak sú vo vzťahu nakrytia. Ako vinníka vyberáme $SO(3)$, pretože túto grupu priamo očakávame vďaka zrejmej rotačnej symetrii úlohy.

2.2. PÁTRANIE PO MOMENTE HYBNOSTI

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) := \frac{1}{2}m\dot{\vec{q}}^2 + \frac{\alpha}{r} \quad (2.33)$$

V dodatku sme ukázali, ako hľadať symetrie zdvihnuté z bázy pre istú triedu lagranžiánov a vidíme, že náš lagranžián má presne takú štruktúru, presnejšie:

$$\overset{\circ}{\phi} = -\frac{\alpha}{r} \quad \overset{\circ}{g} = m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Pozrieme sa teraz, čo máme z rovníc (3.22) pre náš prípad. Mali by sme hľadať Killingove vektory \mathbb{R}^3 s euklidovskou metrikou. Samozrejme, môžeme napísať príslušných 9 rovníc a riešiť, ale nie je to vôbec potrebné, pretože riešenia poznáme. V paragrafe venovanom Lieovej derivácii sme hľadali to isté pre euklidovskú rovinu a našli sme presne riešenia, ktoré sme čakali a to isté by sme dostali tu, teda translácie v smere a rotácie okolo súradnicových osí. Výpočet si teda odpustíme a uvedieme výsledok, ktorý je fantastický v tom, že je presnou parametrizáciou všetkých riešení a o to nám presne v tomto prístupe ide, teda:

$$\begin{aligned} V = & mk_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + mk_2 \frac{\partial}{\partial q_2} + mk_3 \frac{\partial}{\partial q_3} + mk_4 \left(-q_3 \frac{\partial}{\partial q_2} + q_2 \frac{\partial}{\partial q_3} \right) \\ & + mk_5 \left(-q_3 \frac{\partial}{\partial q_1} + q_1 \frac{\partial}{\partial q_3} \right) + mk_6 \left(-q_2 \frac{\partial}{\partial q_1} + q_1 \frac{\partial}{\partial q_2} \right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Jednu podmienku máme úplne vyriešenú, druhá nám dáva:

$$V\overset{\circ}{\phi} = 0 \quad (2.36)$$

Dosadíme teraz za V postupne každé zo šiestich riešení a okamžite vidíme, že prvé tri dosadenie neprežijú a druhé tri ním úspešné prejdú. Teda sme našli všetky symetrie, ktoré sa odohrávajú priamo na M a dostali sme presne vytúžený výsledok - generátory rotácii a po zdvihu na T^*M máme rovnaký výsledok, aký sme našli pomocou ansatzu. Rovnako vidíme, aké dôležité bolo systematické budovanie diferenciálnogeometrického prístupu, pretože na základe doterajšieho postupu, kde hľadá-

2.2. PÁTRANIE PO MOMENTE HYBNOSTI

me veličinu, ktorá má nulovú Poissonovu zátvorku s hamiltoniánom, by si mohli myslieť, že celé naše vznešené reči o vektorových poliach, Lieovej derivácii atď. boli v podstate zbytočné, pretože toto kritérium je ľahko dokázateľné aj bez toho. Teraz sme však zožali ovocie z toho, ako sme budovali náš prístup, kde sa snažíme odhaliť geometrické a algebraické štruktúry, ktoré sú v pozadí klasickej mechaniky a preto nám v prípade potreby nerobí problém pozrieť sa na vec v lagranžovskom formalizme a dostať tak požadovaný výsledok naozaj veľmi elegantne a rýchlo len zmenou optiky.

Ak sme čitateľa nepresvedčili ani priamym výpočtom hrubou silou a nechcel čítať dodatok, aby rozumel nášmu postupu v lagrangeovskom formalizme, ponúkame ešte jeden pohľad na riešenie tejto časti úlohy. Vyskúšame teraz pravý teoreticko - fyzikálny prístup⁷. Vezmeme hamiltonián $H = \frac{1}{2}g^{ab}(\vec{q})p_a p_b + \phi(\vec{q})$, navrhujeme zachovávajúcu sa veličinu v tvare $f = a(\vec{q}) + b^i(\vec{q})p_i$ a pozrieme sa na rovnicu $\{f, H\} = 0$. Využijeme jedine fakt, že $g^{ab}(\vec{q})$ je symetrický, ako sa na maticu inverznú k metrickému tenzoru patrí. Usporiadame potom výsledok podľa mocnín hybnosti a máme:

$$b^i \phi_{,i} - g^{ij} a_{,i} p_j + \left(b^i g_{,i}^{jk} - b_{,i}^j g^{ik} - b_{,i}^j g^{ki} \right) \frac{1}{2} p_j p_k = 0 \quad (2.37)$$

Z toho vidíme ihneď $a = \text{const.} = 0$. Ak sa teraz pozrieme na dve rovnice, ktoré sme dostali pre b^i a na vzťahy pre výpočet Lieovej derivácie (1.36), môžeme naše dve rovnice napísať jednoducho nasledovne:

$$\mathcal{L}_b \phi = 0 \quad \mathcal{L}_b g = 0 \quad (2.38)$$

Čo je presne výsledok, ktorý sme využili na výpočet v lagrangeovskom formalizme s malou modifikáciou, že náš tenzor $g^{ab}(\vec{q}) \in T_0^2(M)$ a preto máme dve mínusové znamienka v našej rovnici pre hľadanie b^i . Vzhľadom k tomu, že my máme tento tenzor konštantný a je iba násobkom euklidovského, k nemu inverzný takým aj zostane, teda Killingove vektory euklidovského \mathbb{R}^3 budú riešeniami aj tu a pre náš potenciál dostaneme identický výsledok, ako v dvoch doterajších postupoch. Presnejšie, ak platí rovnica (2.38) pre hornoindexové g , platí aj pre dolnoindexové a teda je Killingovým vektorom príslušného metrického tenzora, čo sa dá nahliadnuť z výpočtu

⁷Teraz sa opäť nachvíľu vrátíme k poctivému rozlišovaniu horných a dolných indexov.

Lieovej derivácie súčinu g a g^{-1} . Tu vieme opäť oceniť všeobecný prístup, pretože v našom riešení hrubou silou na začiatku tohto paragrafu sme si takúto jednoduchú štruktúru vôbec neuvedomili a natrápili sme sa s konkrétnym riešením a aj to nie úplne presvedčivým spôsobom a takto vidíme problém v celej šírke pre všeobecnú triedu hamiltoniánov. Samozrejme, celá jednoduchosť je ukrytá v tom, že v našom prípade sme mali euklidovský metrický tenzor a jeho Killingove vektory sme poznali. V ďalšom paragrafe uvidíme pri pokuse o podobný výsledok, že na neznalosti podobnej štruktúry vo všeobecnejšej verzii stroskotáme.

Keď teda zaručene máme všetky symetrie zdvihnuté z M , posunieme sa teraz ďalej a na to sa už musíme vrátiť k nášmu “drevorubačskému” prístupu.

2.3 Cesta k Rungeho-Lenzovu vektoru

Teraz sa pustíme do náročnejšej časti riešenia, zoberieme z ansatzu (2.15) prvé tri členy a dostávame tak rovnicu:

$$\frac{\alpha}{r^3} (b_i(\vec{q}) + c_{ij}(\vec{q})p_j) q_i - \frac{1}{m} \left(\frac{\partial a(\vec{q})}{\partial q_i} + p_j \frac{\partial b_j(\vec{q})}{\partial q_i} + p_j p_k \frac{\partial c_{jk}(\vec{q})}{\partial q_i} \right) p_i = 0 \quad (2.39)$$

Našťastie už máme výsledok pre moment hybnosti a ten nám rieši nulovosť prvého a štvrtého člena našej rovnice. Tie teda nepíšeme a zostávajúce členy usporiadame podľa mocnín hybnosti a dostávame:

$$\left(-\frac{1}{m} \frac{\partial a(\vec{q})}{\partial q_i} + \frac{\alpha}{r^3} c_{ij}(\vec{q}) q_j \right) p_i - \frac{1}{m} \frac{\partial c_{jk}(\vec{q})}{\partial q_i} p_i p_j p_k = 0 \quad (2.40)$$

Pri pohľade na štruktúru rovnice vidíme, že prvá zátvorka musí byť nulová pre každé i a druhá rovnica si vyžaduje antisymetriu v aspoň jednej z dvojíc indexov ijk alebo vzájomne rušenie sa členov pre všetky permutácie danej pevnej trojice ijk . Teda prvá rovnosť sa rozpadne na tri:

$$-\frac{1}{m} \frac{\partial a(\vec{q})}{\partial q_1} + \frac{\alpha}{r^3} (c_{11}(\vec{q})q_1 + c_{12}(\vec{q})q_2 + c_{13}(\vec{q})q_3) = 0 \quad (2.41)$$

2.3. CESTA K RUNGEHO-LENZOVU VEKTORU

$$-\frac{1}{m} \frac{\partial a(\vec{q})}{\partial q_2} + \frac{\alpha}{r^3} (c_{21}(\vec{q})q_1 + c_{22}(\vec{q})q_2 + c_{23}(\vec{q})q_3) = 0 \quad (2.42)$$

$$-\frac{1}{m} \frac{\partial a(\vec{q})}{\partial q_3} + \frac{\alpha}{r^3} (c_{31}(\vec{q})q_1 + c_{32}(\vec{q})q_2 + c_{33}(\vec{q})q_3) = 0 \quad (2.43)$$

Riešenie takejto úlohy rozhodne nie je priamočiare, treba skúšať rôzne možnosti a čosi snád' vyjde. Začneme tak, že na predchádzajúce tri rovnice naložíme ešte požiadavku jednej z možných antisymetrií. Začneme požiadavkou $\frac{\partial c_{jk}(\vec{q})}{\partial q_i} = -\frac{\partial c_{kj}(\vec{q})}{\partial q_i}$, čo dáva $c_{11} = c_{22} = c_{33} = 0$ a navyše aj $c_{ij} = -c_{ji}$ a dostávame rovnice:

$$-\frac{1}{m} \frac{\partial a(\vec{q})}{\partial q_1} + \frac{\alpha}{r^3} (0 + c_{12}(\vec{q})q_2 + c_{13}(\vec{q})q_3) = 0 \quad (2.44)$$

$$-\frac{1}{m} \frac{\partial a(\vec{q})}{\partial q_2} + \frac{\alpha}{r^3} (-c_{12}(\vec{q})q_1 + 0 + c_{23}(\vec{q})q_3) = 0 \quad (2.45)$$

$$-\frac{1}{m} \frac{\partial a(\vec{q})}{\partial q_3} + \frac{\alpha}{r^3} (-c_{13}(\vec{q})q_1 - c_{23}(\vec{q})q_2 + 0) = 0 \quad (2.46)$$

V druhej časti sme dostali tri rovnice pre tri neznáme, čo vieme pekne riešiť. Tak sa chytíme možnosti a zvolíme $a(\vec{q}) = \text{const.} = 0$. Vyriešime sústavu, čo nám dá:

$c_{12} = -q_3; c_{13} = q_2; c_{23} = -q_1$. Plní optimizmu sa pozrieme, akú zachovávajúcu veličinu by sme takto dostali a zistíme:

$$f(\vec{p}, \vec{q}) = c_{ij}p_i p_j = -q_3 p_1 p_2 + q_3 p_2 p_1 \dots \quad (2.47)$$

Stali sme sa obeťou vlastného antisymetrického nápadu a našli sme učené zachovanie nuly. Tak skúsime druhú z možných antisymetrií:

$$\frac{\partial c_{jk}(\vec{q})}{\partial q_i} = -\frac{\partial c_{ij}(\vec{q})}{\partial q_j} \quad (2.48)$$

Máme teraz smolu v tom, že takýto predpoklad nám nedá nijaký priamy výsledok na maticu c_{ij} , dostaneme len 18 rôznych parciálnych rovníc prvého rádu, ktoré budú

2.3. CESTA K RUNGEHO-LENZOVU VEKTORU

zvázovať jednotlivé maticové elementy. Nechceme otravovať čitateľa a mrhať papierom rozpisovaním všetkých 18-tich rovníc. Samozrejme, zanecháme rovno nádeje, že by sme vedeli takúto utešenú úlohu uspokojivo vyriešiť, skúsime sa na rovnice pozrieť a nájsť aspoň nejaké riešenie. Zo štruktúry rovníc vieme nejaké riešenie skonštruovať a ukážeme, že spĺňa rovnice pre maticové elementy, ktoré sa ho týkajú. Hovoríme o nasledujúcej voľbe⁸: $c_{22} = q_1$; $c_{12} = -q_2$; $c_{33} = +q_1$; $c_{13} = -q_3$. Pozrieme sa teraz na tie z 18-tich rovníc, ktoré sa týkajú tejto voľby sú to ⁹:

$$\frac{\partial c_{22}}{\partial q_1} = -\frac{\partial c_{12}}{\partial q_2} \quad \frac{\partial c_{22}}{\partial q_2} = -\frac{\partial c_{22}}{\partial q_2} \quad \frac{\partial c_{22}}{\partial q_3} = -\frac{\partial c_{32}}{\partial q_2} \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial c_{12}}{\partial q_1} = -\frac{\partial c_{12}}{\partial q_1} \quad \frac{\partial c_{12}}{\partial q_2} = -\frac{\partial c_{22}}{\partial q_1} \quad \frac{\partial c_{12}}{\partial q_3} = -\frac{\partial c_{32}}{\partial q_1} \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial c_{33}}{\partial q_1} = -\frac{\partial c_{13}}{\partial q_3} \quad \frac{\partial c_{33}}{\partial q_2} = -\frac{\partial c_{23}}{\partial q_3} \quad \frac{\partial c_{33}}{\partial q_3} = -\frac{\partial c_{33}}{\partial q_3} \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial c_{13}}{\partial q_1} = -\frac{\partial c_{13}}{\partial q_1} \quad \frac{\partial c_{13}}{\partial q_2} = -\frac{\partial c_{23}}{\partial q_1} \quad \frac{\partial c_{13}}{\partial q_3} = -\frac{\partial c_{33}}{\partial q_1} \quad (2.52)$$

No a pohľadom skontrolujeme, či naša voľba spĺňa čo má a vidíme že áno. Ale to sme bohužiaľ iba na začiatku, vieme že spĺňame želanú antisymetriu, ešte nám však zostávajú rovnice (2.44), (2.45) a (2.46) ktoré treba splniť. Pozrieme sa, čo dostávame:

$$-\frac{1}{m} \frac{\partial a(\vec{q})}{\partial q_1} + \frac{\alpha}{r^3} (0 - q_2 q_2 - q_3 q_3) = 0 \quad (2.53)$$

$$-\frac{1}{m} \frac{\partial a(\vec{q})}{\partial q_2} + \frac{\alpha}{r^3} (0 + q_1 q_2 + 0) = 0 \quad (2.54)$$

$$-\frac{1}{m} \frac{\partial a(\vec{q})}{\partial q_3} + \frac{\alpha}{r^3} (0 + 0 + q_1 q_3) = 0 \quad (2.55)$$

⁸Čitateľ by samozrejmi autorovi takýto tip nemal len tak zhltnúť, autor vie čo chce dostať, takže vie ako má tipovať. Pri rozpise rovníc však vidíme, že sa nejedná iba o bezhlavý ansatz, ale naozaj by nás napadol, aj keby sme nevedeli, čo chceme dostať.

⁹Pre prehľadnosť uvedieme aj rovnice, ktoré sa opakujú.

2.3. CESTA K RUNGEOHO-LENZOVU VEKTORU

To teda znamená, že ešte máme šancu keby existovala funkcia $a(\vec{q})$, ktorá by spĺňala všetky tri rovnice. A po chvíli počítania dostávame pozitívny výsledok, taká funkcia existuje a vyzerá nasledovne: $a(\vec{q}) = -\frac{m\alpha}{r}q_1$. Takže máme riešenie, ktoré naozaj spĺňa všetko, čo od neho požadujeme (aj keď sa to zdá priam zázrak) a vyzerá nasledovne:

$$f(\vec{p}, \vec{q}) = a(\vec{q}) + c_{ij}(\vec{q})p_i p_j = -\frac{m\alpha}{r}q_1 - q_2 p_1 p_2 - q_3 p_1 p_3 + q_1 p_2 p_2 + q_1 p_3 p_3 \quad (2.56)$$

Výsledok porovnáme s prvou komponentou Rungeho-Lenzovho vektora (2.9) a skutočne sa potešíme, pretože presne toto riešenie sme chceli nájsť. Stále to môže budiť dojem, že vieme čo máme hľadať, tak sa nám hľadá ľahko, ale postupným vníkaním do štruktúry rovníc (2.48) si vieme naozaj tipnúť toto riešenie. Pre ilustráciu uvedieme jeden dosť netriviálny neúspešný tip, ten dostaneme z toho správneho len zámennou pár znamienok, konkrétne: $c_{22} = q_1; c_{12} = -q_2; c_{33} = -q_1; c_{13} = +q_3$. Netriviálny preto, lebo sústavu parciálnych rovníc (2.49)-(2.52) tento tip poľahky spĺňa. Ale zvyšné tri rovnice:

$$-\frac{1}{m} \frac{\partial a(\vec{q})}{\partial q_1} + \frac{\alpha}{r^3} (0 - q_2 q_2 + q_3 q_3) = 0 \quad (2.57)$$

$$-\frac{1}{m} \frac{\partial a(\vec{q})}{\partial q_2} + \frac{\alpha}{r^3} (0 + q_1 q_2 + 0) = 0 \quad (2.58)$$

$$-\frac{1}{m} \frac{\partial a(\vec{q})}{\partial q_3} + \frac{\alpha}{r^3} (0 + 0 - q_1 q_3) = 0 \quad (2.59)$$

Tu si už riešenie netipneme tak ľahko a integrujeme naozaj poctivo, prvá rovnica dáva:

$$a(\vec{q}) = m\alpha \left(\frac{q_1 (-q_2^2 + q_3^2)}{(q_2^2 + q_3^2) r} \right) + F(q_2, q_3) \quad (2.60)$$

Dosadíme teraz do druhej rovnice a dostávame:

$$-\left(\frac{q_1 q_2 (-q_2^2 + q_3^2)}{(q_2^2 + q_3^2) r^3} \right) - \left(\frac{2q_1 q_2 (-q_2^2 + q_3^2)}{(q_2^2 + q_3^2)^2 r} \right) - \left(\frac{2q_1 q_2}{(q_2^2 + q_3^2) r} \right) + \frac{\partial F(q_2, q_3)}{\partial q_2} = m\alpha \frac{q_1 q_2}{r^3} \quad (2.61)$$

2.3. CESTA K RUNGEHO-LENZOVU VEKTORU

Teda to čomu sa rovná parciálna derivácia nesmie závisieť od q_1 , ale závisí a teda tu náš nápad stroskotá. Takže vidíme, že už relatívne jednoduché návrhy, ktoré riešia aspoň podmienku antisymetrie, vedú na negustiózne integrály pre overovanie prvej podmienky, na čom aj vidíme, ako krásne je celá riešená podmienka zhotovená, že už záměna znamienok, čo nekazí antisymetriu, kazí výslednú súhru symetrie, ktorú uvidíme iba pri návrhu správneho riešenia.

Teraz sa ešte pozrieme na jeden možný postup riešenia rovnice (2.44). Druhú podmienku danej rovnice môžeme splniť aj tak, že súčet permutácií pevnej trojice indexov dá spolu nulu. Spočiatku sa môže zdať dosť prekvapujúce, že takéto riešenie naozaj existuje, o chvíľu uvidíme nevyhnutnosť tohto faktu priamo. Reč je teda o nasledujúcom návrhu riešenia:

$$c_{23} = q_1 q_2 \quad c_{13} = -q_2^2 \quad c_{22} = -q_1 q_3 \quad c_{12} = q_2 q_3 \quad a = 0 \quad (2.62)$$

Najprv skontrolujeme druhú podmienku v našej rovnici. Nenulové časti budú:

$$\frac{\partial c_{22}}{\partial q_1} = -\frac{\partial c_{12}}{\partial q_2} = -q_3 \quad \frac{\partial c_{23}}{\partial q_2} = -\frac{\partial c_{22}}{\partial q_3} = q_1 \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial c_{13}}{\partial q_2} = -2q_2 \quad \frac{\partial c_{12}}{\partial q_3} = \frac{\partial c_{23}}{\partial q_1} = q_2 \quad (2.64)$$

Ešte overíme platnosť rovníc (2.44), (2.45) a (2.46):

$$q_2^2 q_3 - q_2^2 q_3 = 0 \quad -q_1 q_2 q_3 + q_1 q_2 q_3 = 0 \quad 0 = 0 \quad (2.65)$$

Teda sme našli ďalšiu zachovávaciu sa veličinu, čo nás môže naľakať, ale iba do chvíle, než sa pozrieme čo to vlastne je:

$$f(\vec{p}, \vec{q}) = q_1 q_2 p_2 p_3 - q_2 q_2 p_1 p_3 - q_1 q_3 p_2 p_2 + q_3 q_2 p_1 p_2 = L_1 L_3 \quad (2.66)$$

Naštastie nič nové, len súčin dvoch komponent momentu hybnosti. Opäť to však ilustruje komplexnosť rovníc ktoré riešime, o všetkých kombináciach zachovaní, ktoré nás napadnú, rovnice vedia. Teda pokusy o hľadanie nejakých iných riešení nateraz

2.3. CESTA K RUNGEHO-LENZOVU VEKTORU

necháme a inšpirujeme sa správnym výsledkom, ktorý sme už našli a hneď vidíme, že principiálne rovnaký tip na riešenie vieme spraviť pre ďalšie dve štvorice komponent matice c_{ij} . Ďalšie riešenia tak vieme spraviť takto:

$$c_{11} = q_2 \quad c_{21} = -q_1 \quad c_{23} = -q_3 \quad c_{33} = q_2 \quad a = -m\alpha \frac{q_2}{r} \quad (2.67)$$

$$c_{11} = q_3 \quad c_{22} = q_3 \quad c_{31} = -q_1 \quad c_{32} = -q_2 \quad a = -m\alpha \frac{q_3}{r} \quad (2.68)$$

Poľahky overíme, že spĺňajú všetko čo od nich chceme a už sme radosťou celí bez seba, že máme aj zvyšné dve komponenty Rungeho-Lenzovho vektora ako zachovávajúce sa veličiny. Keby sme sa pozreli na tretiu antisymetriu ktorá zostáva, našli by sme tie isté riešenia. Pozrieme sa teraz ešte na generátory symetrie nájdených komponent Rungeho-Lenzovho vektora a dostávame:

$$\begin{aligned} \zeta_{A_1} = & (-q_2 p_2 - q_3 p_3) \frac{\partial}{\partial q_1} + (2q_1 p_2 - q_2 p_1) \frac{\partial}{\partial q_2} + (2q_1 p_3 - q_3 p_1) \frac{\partial}{\partial q_3} \\ & - \left(p_2 p_2 + p_3 p_3 - m\alpha \frac{q_2^2 + q_3^2}{r^3} \right) \frac{\partial}{\partial p_1} - \left(-p_1 p_2 + m\alpha \frac{q_1 q_2}{r^3} \right) \frac{\partial}{\partial p_2} \\ & - \left(-p_1 p_3 + m\alpha \frac{q_1 q_3}{r^3} \right) \frac{\partial}{\partial p_3} \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{A_2} = & (-q_1 p_2 + 2q_2 p_1) \frac{\partial}{\partial q_1} + (-q_1 p_1 - q_3 p_3) \frac{\partial}{\partial q_2} + (2q_2 p_3 - q_3 p_2) \frac{\partial}{\partial q_3} \\ & - \left(-p_1 p_2 + m\alpha \frac{q_1 q_2}{r^3} \right) \frac{\partial}{\partial p_1} - \left(p_1 p_1 + p_3 p_3 - m\alpha \frac{q_1^2 + q_3^2}{r^3} \right) \frac{\partial}{\partial p_2} \\ & - \left(-p_2 p_3 + m\alpha \frac{q_2 q_3}{r^3} \right) \frac{\partial}{\partial p_3} \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{A_3} = & (-q_1 p_3 + 2q_3 p_1) \frac{\partial}{\partial q_1} + (-q_2 p_3 + 2q_3 p_2) \frac{\partial}{\partial q_2} + (-q_1 p_1 - q_2 p_2) \frac{\partial}{\partial q_3} \\ & - \left(-p_1 p_3 + m\alpha \frac{q_1 q_3}{r^3} \right) \frac{\partial}{\partial p_1} - \left(-p_2 p_3 + m\alpha \frac{q_2 q_3}{r^3} \right) \frac{\partial}{\partial p_2} \\ & - \left(p_1 p_1 + p_2 p_2 - m\alpha \frac{q_1^2 + q_2^2}{r^3} \right) \frac{\partial}{\partial p_3} \end{aligned} \quad (2.71)$$

2.3. CESTA K RUNGEHO-LENZOVU VEKTORU

Po úmornom výpočte sa aspoň potešíme, že sme našli symetriu, ktorá nie je zdvihom z M a vzniká priamo vo fázovom priestore a nevieme si ju predstaviť nejak názorne na konfiguračnom priestore ako v prípade momentu hybnosti. Navyše postup, ktorý sme predviedli, teda viac menej učené hádanie riešenia, už nevieme zlepšiť podobným trikom ako pri momente hybnosti, kde sme si odskočili do lagrangeovskej formulácie a našli sme, že na danej úrovni ansatzu sme objavili naozaj všetky riešenia našej rovnice. Môže za to priamo fakt, že naša symetria už nie je zdvihom z M a teda nástroje tohto kalibru, ako sme predviedli pri momente hybnosti, nezaberú. Ak to čitateľa zaujíma, existuje oveľa pokročilejšia technika, s ktorou by sme sa k výsledku pravdepodobne dopracovali priamo a využíva Killingove tenzory. V nasledujúcom odseku iba naznačíme cestu k tejto technike. My sme sa jej v tejto práci pre nezanedbateľnú zložitosť nevenovali. Nás však veľmi uspokojuje fakt, že sme našli 5 nezávislých zachovávajúcich sa veličín, teda sme si istí, že ich určite nebude viac, než tie ktoré sme našli.

Skúsime teraz aj v tejto časti ansatzu rovnaký všeobecný prístup ako v závere predchádzajúceho paragrafu. Dostávame tak rovnicu:

$$\begin{aligned} b^i \phi_{,i} &+ p_j (\phi_{,i} c^{ji} + \phi_{,i} c^{ij} - a_{,i} g^{ij}) + p_j p_k \left(\frac{1}{2} g_{,i}^{jk} b^i - b_{,i}^j g^{ik} \right) \\ &+ p_j p_k p_l \left(\frac{1}{2} c^{ji} g_{,i}^{kl} + \frac{1}{2} c^{ij} g_{,i}^{kl} - c_{,i}^{jk} g^{il} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.72)$$

Ak uvážime znalosť riešenia pre moment hybnosti z predchádzajúceho paragrafu, tak nám zostane:

$$p_j (\phi_{,i} c^{ji} + \phi_{,i} c^{ij} - a_{,i} g^{ij}) + p_j p_k p_l \left(\frac{1}{2} c^{ji} g_{,i}^{kl} + \frac{1}{2} c^{ij} g_{,i}^{kl} - c_{,i}^{jk} g^{il} \right) = 0 \quad (2.73)$$

Z čoho priamo máme (a s uvážením symetrie $c^{ij} = c^{ji}$):

$$\phi_{,i} c^{ji} + \phi_{,i} c^{ij} - a_{,i} g^{ij} = 0 \quad (2.74)$$

$$c^{i(j} g_{,i}^{kl)} - g^{i(j} c_{,i}^{kl)} = 0 \quad (2.75)$$

2.4. ČO NÁM DÁVA NOVÁ SYMETRIA

Zoberieme teraz do úvahy náš euklidovský prípad, teda z našej rovnice (2.75) nám zostane¹⁰:

$$c_{(jk,t)} = 0 \tag{2.76}$$

A to je rovnica z ktorej sa hľadá tzv. Killingov tenzor euklidovskej metriky.

Opäť sme síce úspešnejší v porozumení obsahu našej rovnice pre danú triedu hamiltoniánov, avšak to čo sme získali, nie je bohužiaľ prejavom žiadnej tu ukázanej štruktúry. Ako už bolo spomenuté, pre objekt $c^{ij}(\vec{q})$ sme dostali akoby analóg rovnice z minulého paragrafu pre Killingove vektory, teraz však hľadáme istý tenzorový objekt pre danú metriku a ten sa nazýva, ako inak, Killingov tenzor. Tomu sa však už v práci venovať nebudeme, teda sa musíme uspojiť s predvedeným postupom použitím hrubej sily. Chceme na tomto mieste len zdôrazniť, že opäť existujú nástroje na manipuláciu so získanou rovnicou.

Radi by sme sa teraz pozreli aj na to, ktorá grupa je zodpovedná za symetriu, ktorú sme práve našli. Pri pohľade na generátory, ktoré sme dostali sa veľmi nepotešíme, sú príliš zložité na to, aby sme z nich hľadanú symetriu identifikovali priamo. Ako sa neskôr ukáže, aj grupa ktorú hľadáme nie je už niečo, s čím sme zvyknutí pracovať, čo by nás nemalo prekvapiť, pretože už fakt existencie takéhoto zachovania nás musí veľmi zaraziť, no a o to viac sme potom bezradní, keď chceme identifikovať vinníka tejto symetrie. Túto otázku si preto odložíme do ďalšieho paragrafu, kde sa na nájdenú symetriu pozrieme trochu v inej verzii a potom oveľa ľahšie nájdeme grupu, ktorá by mala byť zodpovedná za celé toto príjemné prekvapenie.

2.4 Čo nám dáva nová symetria

Pozrieme sa teraz na inú fyzikálnu úlohu, v ktorej sa stretne s analógiou Keplerovej úlohy a teda na kvantovú Keplerovu úlohu a klasický príklad energetických hladín

¹⁰Príslušná rovnica (2.75) by sa dala elegantne zapísať cez kovariantnú deriváciu a dostali by sme priamo rovnicu, z ktorej sa hľadá Killingov tenzor tak, ako sa vyskytuje v literatúre. My sme sa už dodatočným objektom diferenciálnej geometrie chceli vyhnúť, preto prejdeme priamo k formulácii v euklidovskej verzii.

atómu vodíka. Chceme riešiť bezčasovú Schrödingerovu rovnicu:

$$\hat{H}\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (2.77)$$

pre hamiltonián systému nehybný protón a elektrón hýbuci sa v centrálnom elektrostatickom poli:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{\alpha}{r} \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (2.78)$$

Klasický postup, ktorý poznáme z prednášky kvantovej mechaniky, spočíva v separácii na uhlovú a radiálnu časť a riešenie niekoľkých diferenciálnych rovníc a vcelku zdĺhavé riešenie. Jeho výhodou je na druhej strane to, že rovno dostávame aj vlnové funkcie. My teraz predvedieme postup s pomocou extra zachováajúcej sa veličiny, ktorú sme objavili v klasickej analógii. Ukáže sa, že energie sme schopní nájsť priamo len algebraickými metódami. Dokonca aj vlnové funkcie, aj keď tam už hrajú úlohu náročnejšie partie z teórie reprezentácií a tie si na tomto mieste odpustíme. Budeme postupovať podľa postupu v článku[12]. Chceme teraz využiť zákony zachovania, ktoré poznáme z klasickej analógie. Potrebujeme ich však teraz prepísať do reči operátorov. S hybnosťou a momentom hybnosti si poradíme známym spôsobom nasledovne:

$$\hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \quad \hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}} \quad (2.79)$$

Pauli potom dostal geniálny nápad, čisto iba z princípu korešpondencie zaviesť operátor:

$$\hat{\vec{M}} = \frac{1}{2m} \left(\hat{\vec{p}} \times \hat{\vec{L}} - \hat{\vec{L}} \times \hat{\vec{p}} \right) - \alpha \frac{\hat{\vec{r}}}{r} \quad (2.80)$$

Na prvý pohľad je štruktúra trochu čudná voči známemu tvaru Rungeho-Lenzovho vektora (2.8), avšak my sme teraz chceli, aby náš operátor bol hermitovský, preto je tam symetrická hračka v zátvorke, klasiccky by sme po zmene poradia vo vektore súčine dostali iba $\frac{1}{m}$ násobok (2.8), tento ťah bol nutný, aby sme vyprojektovali hermitovskú časť. A teraz sa začnú diať skutočné kúzla. Pozrieme sa na komutačné vzťahy našich operátorov a dostávame:

$$\left[\hat{H}, \hat{L}_i\right] = 0 \quad \left[\hat{H}, \hat{M}_i\right] = 0 \quad \left[\hat{L}_j, \hat{L}_k\right] = i\hbar\varepsilon_{jkl}\hat{L}_l \quad (2.81)$$

$$\left[\hat{L}_j, \hat{M}_k\right] = i\hbar\varepsilon_{jkl}\hat{M}_l \quad \left[\hat{M}_j, \hat{M}_k\right] = \frac{\hbar}{i}\varepsilon_{jkl}\hat{L}_l\frac{2}{m}\hat{H} \quad (2.82)$$

Navyše máme kvantové analógie vzťahu (2.12):

$$\hat{L} \cdot \hat{M} = \hat{M} \cdot \hat{L} = 0 \quad \left(\hat{M}^2 - \alpha^2\right) = \frac{2}{m}\hat{H}\left(\hat{L}^2 + \hbar^2\right) \quad (2.83)$$

Z komutačných vzťahov teraz vidíme, že ak sa obmedzíme na podpriestor nejakej vlastnej hodnoty E (máme viazané stavy $E < 0$) operátora \hat{H} . V takomto podpriestore zavedieme potom operátor:

$$\hat{M}_i = \sqrt{\frac{m}{-2E}}\hat{M}_i \quad \left[\hat{M}_j, \hat{M}_k\right] = i\hbar\varepsilon_{jkl}\hat{L}_l \quad \left[\hat{L}_j, \hat{M}_k\right] = i\hbar\varepsilon_{jkl}\hat{M}_l \quad (2.84)$$

Takéto komutačné vzťahy nás potom nabádajú zaviesť ešte dve nové trojice operátorov zo starých tak, že každá trojica ma komutačné vzťahy ako moment hybnosti, ale medzi sebou majú nuly, akoby komutačné vzťahy rozseparovať, menovite dostávame¹¹:

$$\hat{I} = \frac{\hat{L} + \hat{M}}{2} \quad \hat{K} = \frac{\hat{L} - \hat{M}}{2} \quad \left[\hat{I}_j, \hat{I}_k\right] = i\hbar\varepsilon_{jkl}\hat{I}_l \quad (2.85)$$

$$\left[\hat{K}_j, \hat{K}_k\right] = i\hbar\varepsilon_{jkl}\hat{K}_l \quad \left[\hat{I}_j, \hat{K}_k\right] = 0 \quad (2.86)$$

Teda máme akoby dva rôzne momenty hybnosti. Neprekvapí nás potom, že aj ich veľkosti sa správajú tak, ako sa majú a navyše vďaka (2.83):

$$\hat{I}^2 = \hbar^2 j_1(j_1 + 1) \quad \hat{K}^2 = \hbar^2 j_2(j_2 + 1) \quad j_1 = j_2 := j \quad (2.87)$$

¹¹Za povšimnutie bude teraz stáť tvar výsledných dvoch operátorov, ktorý nám mimovoľne ponúka predstavu, akoby sme skladali dva momenty hybnosti, tak ako je to bežné paralelne a a antiparalelne. Je to správna predstava, ak niečo komutuje ako moment hybnosti, tak algebraicky to je moment hybnosti a preto má rovnaké vlastnosti.

2.4. ČO NÁM DÁVA NOVÁ SYMETRIA

Z teórie momentu hybnosti navyše vieme, že j je polocelé alebo celé číslo. Potom z rovnice (2.83) a predchádzajúcej rovnice máme:

$$\frac{2E}{m}(\hat{M}^2 + \hat{L}^2 + \hbar^2) = -\alpha^2 \quad (2.88)$$

$$\hat{M}^2 + \hat{L}^2 + \hbar^2 = 4\hat{I}^2 + \hbar^2 = \hbar^2 (2j + 1)^2 \quad (2.89)$$

Lenže potom vieme vyjadriť E len z toho čo máme! Teda¹²:

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2(2j+1)^2} = -\frac{1}{2}mc^2\alpha^2\frac{1}{n^2}; n \in \mathbb{N}, \alpha = \frac{1}{137} \quad (2.90)$$

A to sú presne energetické hladiny atómu vodíka. Keďže celkový moment hybnosti $\hat{L} = \hat{I} + \hat{K}$ podľa skladania momentov hybnosti pre dané $n = 2j + 1$ možné hodnoty L budú $0, 1, 2, \dots, 2j$. Teda celková degenerácia v bezspinovom atóme bude:

$$\sum_{l=0}^{2j} (2l + 1) = (2j + 1)^2 = n^2 \quad (2.91)$$

Predtým sme sľúbili, že kvantový pohľad nám umožní presnejšie sa pozrieť na to, aká symetria sa schováva za zachovaním Rungeho-Lenzovho vektora. Podľa tvaru komutačných vzťahov by sme mohli aj tušit $O(3) \times O(3)$. Ako sa aj v [12] hovorí, zostáva to len podozrením, pretože náš tvar vektora M je diferenciálny operátor druhého rádu a podľa teórie lieových algebier, sa generátory musia dať parametrizovať ako diferenciálne operátory prvého rádu. Ak chceme toto dosiahnuť, treba sa na celú situáciu pozrieť v p -reprezentácii, postup je už potom matematicky náročnejší a nemá priamy zmysel ho tu reprodukovat', pochádza od V.Foka a je tiež reprodukovaný v článku[12]. Tam sa naozaj ukáže, že za nitky symetrie ťahá v tomto prípade grupa $O(3) \times O(3) \cong O(4)$ a dokonca je tam aj ukázaný postup, ako algebraicky získať vlnové funkcie atómu vodíka.

¹²Ospravedlňujeme sa teraz za menší nesúlad značenia, konštanta jemnej štruktúry sa značí rovnako ako konštanta v hamiltoniáne.

2.4. ČO NÁM DÁVA NOVÁ SYMETRIA

Na záver sa môžeme zamýšľať, čo príroda “myslela” tým, že do svojich zákonov zapracovala takúto skrytú symetriu a dovoliť si menší filozofický úlet¹³. Na kvantovej analógii je to možné názorne predviesť. Je nutné si uvedomiť, že táto dodatočná symetria je zodpovedná za mohutnú degeneráciu energetických hladín v atóme vodíka, presnejšie zo sférickej symetrie vieme porozumieť iba degenerácii stavov s rovnakým kvantovým číslom m , ale nie číslom l . A práve energetická degenerácia hladín s rovnakým l je napríklad zodpovedná za pozoruhodné väzbové vlastnosti uhlíka v organických zlúčeninách, pretože vďaka degenerácii hladín $2s$ aj $2p$ je umožnená tzv. sp^3 hybridizácia¹⁴, ktorá je v pozadí štruktúrnych vlastností organických zlúčenín. S menšou hyperbolizáciou môžeme povedať, že aj vďaka tejto symetrii sú vôbec na Zemi živé organizmy a tobôž fyzici, ktorí ju analyzujú a tešia sa z toho, ako umožňuje ich existenciu.

¹³Prezentovaná myšlienka pochádza z jednej prednášky doc. RNDr. Vladimíra Černého, PhD. a autorovi sa natoľko zapáčila, že si neodpustil ju tu uviesť.

¹⁴Efekty jemnej štruktúry prispievajú energiami rádovo ďaleko od energií chemických väzieb, čo sú rádovo eV, preto ich v tejto úvahe možno poľahky zanedbať.

3

Dodatky

3.1 Parciálne diferenciálne rovnice prvého rádu

Keďže rovnica pomocou ktorej hľadáme zachovávajúce sa veličiny, je parciálnou diferenciálnou rovnicou prvého rádu, nezaškodilo by nám pozrieť sa na niektoré fakty, známe z teórie takýchto rovníc. Ako sa ukáže, budú nám užitočné. Definujeme si najskôr objekt nášho záujmu.

Homogénnou parciálnou diferenciálnou rovnicou prvého rádu na $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nazývame rovnicu:

$$\sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial z(x)}{\partial x_i} = 0 \quad z(x) = z(x_1, \dots, x_n) \quad f_i(x) = f_i(x_1, \dots, x_n) \quad (3.1)$$

$$z : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad f_i \in C(\Omega) \quad (3.2)$$

Aby nám riešenie nedegenerovalo, žiadame navyše ešte:

$$\sum_{i=1}^n |f_i(x)| > 0; \forall x \in \Omega \quad (3.3)$$

Ďalej ukážeme, že riešenie takejto úlohy veľmi úzko súvisí s riešeniami istej sústavy obyčajných diferenciálnych rovníc. To nás vôbec neprekvapuje, už poznáme pojmy

3.1. PARCIÁLNE DIFERENCIÁLNE ROVNICE PRVÉHO RÁDU

ako vektorové pole, ktoré v zadaní našej úlohy poľahky spoznáваме. My dokonca vieme úlohu zapísať bezsúradnicovo, ak si uvedomíme $f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} = V$. Teda naša úloha je prozaická, hľadáme funkciu $z(x_1 \dots x_n)$, ktorá spĺňa:

$$\mathcal{L}_V z = 0 \tag{3.4}$$

Teda funkciu, ktorá necíti tok nášho poľa. Vieme ďalej, že naša oblasť sa vďaka poľu vie rozvlákniť na systém integrálnych kriviek poľa. Teda očakávame, že ak bude hľadaná funkcia konštantná pozdĺž nejakej integrálnej krivky, bude to ona ktorú hľadáme. Naše očakávanie sa už o chvíľu ukáže ako správne.

Charakteristickým systémom odpovedajúcim rovnici (3.1) nazveme systém obyčajných diferenciálnych rovníc¹:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n) \tag{3.5}$$

Riešenia tohto systému nazveme charakteristiky rovnice (3.1). Teraz vyslovíme a dokážeme jednoduchú vetu.

Veta 1: Nech platí (3.3) a $z \in C(\Omega)$. Potom z je riešením rovnice (3.1) práve vtedy, keď $z = z(x) = z(x_1, \dots, x_n)$ je konštantná pozdĺž riešení systému (3.5).

Dôkaz: Budeme postupovať tak, že uváža sa bude dať rovno obrátiť aj na opačný smer implikácie. Nech je z konštantná pozdĺž charakteristík. Potom platí:

$$z(x(t)) = z(x_1(t), \dots, x_n(t)) \quad \frac{dz}{dt} = 0 \tag{3.6}$$

Zároveň ale:

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial z(x)}{\partial x_i} \tag{3.7}$$

Teda máme tvrdenie vety.

¹Sústava je vo všeobecnosti iba kvázilineárna, teda lineárna v prvej derivácii, avšak teda ako taká nelineárna, čo môže potenciálne veľmi komplikovať jej riešenie.

3.1. PARCIÁLNE DIFERENCIÁLNE ROVNICE PRVÉHO RÁDU

Mohlo by nám teraz napadnúť týmto postupom riešiť našu hlavnú rovnicu (2.13). Zistili by sme však, že tadiaľ cesta nevedie, pretože šesť nepríjemne zreťazených obyčajných diferenciálnych rovníc riešiť nevieme. Túto časť teórie sme ukázali preto, aby sme videli jasný súvis geometrického prístupu a myšlienky Lieovej derivácie s klasickou teóriou parciálnych rovníc. Ešte sa teraz v teórii kúsok posunieme, aby sme dostali výsledok, ktorý bude už pre nás naozaj užitočný.

Definujeme si preto teraz pojem funkcionálnej závislosti (nezávislosti) nejakej n -tice funkcií. Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otvorená množina, $1 \leq m \leq n$, $\varphi_1 \dots \varphi_m \in C(\Omega)$. Hovoríme, že funkcie $\varphi_1 \dots \varphi_m$ sú závislé na Ω , ak $\exists j \in \{1, \dots, m\}$ a funkcia $\psi \in C(\mathbb{R}^{m-1})$ tak, že:

$$\varphi_j(x) = \psi(\varphi_1(x), \dots, \varphi_{j-1}(x), \varphi_{j+1}(x), \dots, \varphi_m(x)), \forall x \in \Omega \quad (3.8)$$

Hovoríme, že funkcie $\varphi_1 \dots \varphi_m$ sú v Ω nezávislé, ak $\exists \Omega_0 \subset \Omega$ tak, že $\varphi_1 \dots \varphi_m$ nie sú v Ω_0 závislé. Definujeme teraz ešte nasledujúcu maticu:

$$\varphi'(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} (x) \quad (3.9)$$

Bez dôkazu uvedieme teraz takéto tvrdenie: Ak hodnosť $\varphi'(x) \leq r \leq m$, pre $\forall x \in \Omega$ a $\exists x^0 \in \Omega$ tak, že hodnosť $\varphi'(x^0) = r$, potom existuje okolie bodu $U(x^0) \subset \Omega$ tak, že medzi funkciami $\varphi_1 \dots \varphi_m$ možno vybrať práve r nezávislých funkcií a zvyšné budú s nimi závislé.

Definujeme teraz, čo budeme nazývať fundamentálnym systémom riešení úlohy (3.1). Nech platí (3.3) a $\psi_1 \dots \psi_{n-1} \in C(\Omega)$ sú riešeniamu úlohy (3.1). Budeme hovoriť, že $\psi_1 \dots \psi_{n-1}$ je fundamentálnym systémom riešení úlohy (3.1), ak $\exists x^0 \in \Omega$ tak, že hodnosť $\varphi'(x^0) = n - 1$. Teraz uvedieme a dokážeme tvrdenie, z ktorého vyplynie hlavný výsledok dodatku a teda, že máme hľadať najviac 5 funkcionálne nezávislých riešení našej úlohy.

Tvrdenie: Nech platí (3.3) a nech $\psi_1 \dots \psi_{n-1}$ je fundamentálnym systémom riešení úlohy (3.1). Potom funkcia $F \in C(\Omega)$ je riešením (3.1) práve vtedy, keď $\psi_1 \dots \psi_{n-1}, F$ sú závislé.

Dôkaz: a) \Rightarrow . Z predpokladov máme nasledovné:

$$\sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}(x) = 0; j = 1 \dots n-1 \quad \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial H}{\partial x_i}(x) = 0 \quad (3.10)$$

Pre pevné x je to systém lineárnych algebraických rovníc, pre f_1, \dots, f_n a máme predpoklad (3.3), teda pre každé x je riešenie netriviálne, ale naša sústava je homogénna a teda jej determinant musí byť nula a potom:

$$D(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial H}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial H}{\partial x_n} \end{vmatrix} (x) = 0; \forall x \in \Omega \quad (3.11)$$

Teda H je závislé od $\psi_1 \dots \psi_{n-1}$.

b) \Leftarrow . Z predpokladu máme $D(x) = 0; \forall x \in \Omega$, čo implikuje platnosť nasledovného:

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n-1} C_j(x) \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}(x) \quad (3.12)$$

Zároveň však platí aj:

$$\sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial H}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n-1} C_j(x) \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}(x) = 0 \quad (3.13)$$

A to bolo treba dokázať. V našej práci sa pohybujeme po T^*M , pre ktoré je $n = 6$ a teda môžeme mať maximálne 5 funkcionálne nezávislých zachovávajúcich sa veličín, ako riešení rovnice (2.13) a preto sme už našli všetky.

3.2 Symplektická štruktúra na TM

Napokon sa v tomto dodatku v skratke pozrieme na to, ako je možné zaviesť symplektickú štruktúru na TM . Ako uvidíme, bude to podstatne pracnejšie než pri T^*M . Zdvihy opäť analyzovať nebudeme, to čo bolo ukázané v paragrafe 2.7 by sa dalo

3.2. SYMPLEKTICKÁ ŠTRUKTÚRA NA TM

zopakovať s niekoľko málo úpravami. Pozrieme sa na iné kanonické objekty, ktorými žije TM . Ak si na TM predstavíme tok $\Phi_t : v \mapsto e^t v$, zistíme že jeho generátor $\Delta \in T_0^1(TM)$ je vertikálne pole, kanonické v súradniciach a konkrétne:

$$\Delta = v^a \frac{\partial}{\partial v^a} \quad (3.14)$$

Toto pole sa nazýva Liouvillovo pole. Druhým kanonickým tenzorovým poľom bude vertikálny endomorfizmus $S \in T_1^1(TM)$, definovaný nasledovne:

$$S := \hat{1}^\uparrow \quad S = dx^a \otimes \frac{\partial}{\partial v^a} \quad (3.15)$$

Zhrnieme teraz bez dôkazu niektoré jeho vlasnosti, väčšina sa vidí ľahko a zvedavý čitateľ ich nájde v [1]:

$$S \left(\frac{\partial}{\partial x^a} \right) = \frac{\partial}{\partial v^a} \quad S \left(\frac{\partial}{\partial v^a} \right) = 0 \quad S(dx^a) = 0 \quad S(dv^a) = dx^a \quad (3.16)$$

$$S(\tilde{V}) = V^\uparrow \quad \mathcal{L}_\Delta S = -S \quad (3.17)$$

Ak teraz máme náhodou na TM preferovanú funkciu $L(x, \dot{x})$ -lagranžian, tak ak definujeme Cartanovu 1-formu a 2-formu nasledovne:

$$\theta_L := S(dL) \quad \omega_L := d\theta_L \quad (3.18)$$

$$\theta_L = \frac{\partial L}{\partial v^a} dx^a \quad \omega_L = -\frac{\partial^2 L}{\partial v^a \partial v^b} dx^a \wedge dv^b + \frac{\partial^2 L}{\partial x^a \partial v^b} dx^a \wedge dx^b \quad (3.19)$$

A ak $\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^a \partial v^b} \right) \neq 0$ potom nazveme lagranžian regulárny a ω_L je symplektickou formou a z TM sa tým stáva symplektická varieta. My sa teraz obmedzíme na štandardné lagranžiany tvaru:

$$L = T - U = \frac{1}{2} g_{ab}(x) v^a v^b - \phi(x) \quad (3.20)$$

3.2. SYMPLEKTICKÁ ŠTRUKTÚRA NA TM

A takéto sú vďaka kladnej definitnosti g_{ab} regulárne a kladne definitné sú vďaka kladnosti kinetickej energie. $g_{ab}(x)$ môžeme z tohto titulu smelo nazvať metrickým tenzorom na M . Teraz sa vyhneme dôkazu, že takto definovaná symplektická dynamika na TM dáva to isté ako na T^*M . Jej výsledkom samozrejme bude, že áno pričom, ak považujeme lagranžián za daný, tak potom príslušný hamiltonián musí byť² :

$$H := \Delta L - L \tag{3.21}$$

A potom sa dynamika generovaná Lagrangeovými rovnicami zhoduje s dynamikou Hamiltonových rovníc. Rovnako to ide samozrejme aj naopak, závisí na uhle pohľadu, ktorú verziu mechaniky máme a ktorú z nej odvodzujeme.

Teraz späť k nášmu výsledku. Vidíme teda, že všetko o symplektickej forme na TM je v lagranžiáne, presnejšie v objektoch $g_{ab}(x)$ a $\phi(x)$. Preto je pre generátory symetrií V takejto hamiltonovskej sústavy s lagranžiánom v tvare $L = \frac{1}{2}\overset{\circ}{g} - \overset{\circ}{\phi}$ rozumné požadovať nasledovné:

$$\mathcal{L}_V \overset{\circ}{g} = 0 \quad \mathcal{L}_V \overset{\circ}{\phi} \equiv V \overset{\circ}{\phi} = 0 \tag{3.22}$$

Napokon si všimneme, že $g_{ab}(x), \phi(x)$, sú to teda objekty definované na M . Preto takto nájdeme iba symetrie, ktoré sú zdvihom do TM a teda nie všetky, čo je slabší nástroj než rovnica (1.65). Na druhej strane uvidíme, že v našom prípade bude táto podmienka veľmi jednoducho priamo riešiteľná na rozdiel od tej všeobecnej. Odvodenie v tomto dodatku treba brať skôr ako ilustratívne, čitateľa túžiaceho po precíznejšej verzii odporúčame do [1].

²Upozorňujeme čitateľa, že Δ znamená Liouvillovo pole a nie laplasián ako sa mimovoľne ponúka.

Skúsime si teraz zhrnúť, čo sme sa v tejto práci naučili. Chceli sme nájsť všetky symetrie Keplerovej úlohy a klasifikovať ich podľa toho, či sú zdvihom symetrií z konfiguračného priestoru.

Najskôr sme sa zoznámili s aparátom diferenciálnej geometrie, ktorý je na riešenie našej úlohy potrebný. Naučili sme sa čo je varieta, vektor, tenzor, vektorové a tenzorové polia, čo sú integrálne krivky vektorového poľa a aký zmysel má tok generovaný poľom. Potom sme sa zoznámili s užitočným špeciálnym typom tenzorových polí, s diferenciálnymi formami, a poukázali na ich použitie a zmysel. Zistili sme, že silným nástrojom na hľadanie symetrií tenzorových polí je Lieova derivácia a že za tieto symetrie sú vo forme generátorov zodpovedné vektorové polia. Ilustrovali sme tento aparát na hľadaní Killingových vektorov. Neskôr sme sa oboznámili s vonkajšou deriváciou a ukázali sme, na čo ju budeme potrebovať a rovnako sme poukázali na záležitosti okolo Poincarého lemy. Potom sme nazreli do tajomstiev symplektickej geometrie a možností jej aplikácie na geometrickú formuláciu Hamiltonových rovníc a nájdenie objektov, v ktorých sa ukrýva. Napokon sme sa naučili niečo o fibrovaných varietách a prišli sme na skutočnosť, že menovite kodotyková fibrácia je "od narodenia" vhodná ako ihrisko Hamiltonovskej mechaniky a žije mnohými zaujímavými štruktúrami.

V nasledujúcej kapitole sme zhrnuli informácie, ktoré by mal čitateľ o Keplerovej úlohe vedieť, ukázali sme, že prirodzene očakávame zákony zachovania energie a momentu hybnosti. Zoznámili sme čitateľa s Rungeho-Lenzovým vektorom, bola načrtnutá jeho história a využitie v klasickej mechanike ako dodatočnej zachovávajúcej sa veličiny. Potom sme skúsili explicitne hľadať symetrie Keplerovej úlohy, zostavili príslušné rovnice a navrhli ansatz, ktorý na ne zafungoval a podali sme dôvod, prečo je počet očakávaných nezávislých riešení zhora ohraničený. Triviálne sme našli zákon zachovania energie. Moment hybnosti sme objavili aj z nášho ansatzu a potom iným spôsobom ukázali, že sa jedná o všetky symetrie existujúce v konfiguračnom priestore. Identifikovali sme aj príslušné generátory symetrie a našli, aká grupa svojim pôsobením sprostredkúva nájdenú symetriu. Následne z vyššieho člena ansatzu boli nájdené

zvyšné zákony zachovania ako komponenty Rungeho-Lenzovho vektora a keďže tým sa naplnil maximálny možný počet nezávislých zachovávajúcich sa veličín pre našu úlohu, tak vieme, že sme našli všetky symetrie našej úlohy a z generátorov sme zistili, že sme našli symetriu, ktorá nie je zdvihom z konfiguračného priestoru, ale odohráva sa priamo vo fázovom priestore. Napokon bolo ilustrované využitie Rungeho-Lenzovho vektora v kvantovej mechanike a tu sme poodhalili, aká grupa je zodpovedná za túto symetriu a poukázali na fundamentálny význam tejto symetrie.

V poslednej kapitole sme ukázali, prečo pre našu úlohu očakávame najviac 5 nezávislých zákonov zachovania, čisto zo štruktúry rovnice, z ktorej zachovania hľadáme. Potom sme dodali niekoľko pojmov z diferenciálnej geometrie na dotykovej fibrácii potrebných na nájdenie kanonických štruktúr a následne ich aplikácii v časti venovanej momentu hybnosti.

V kontexte známych poznatkov nie sú samozrejme ukázané poznatky ničím nové, skôr je zaujímavý spôsob, akým sme symetrie hľadali, nakoľko čo sa autorovi podarilo nájsť, tak v literatúre autori zvolili prístup buď prostredníctvom Nötherovej vety alebo hľadali symetrie diferenciálnej rovnice pre pohyb danej sústavy, čo je už nášmu prístupu priamo cez hamiltonián bližšie. Ako sme aj v texte spomenuli, na úrovni hľadania Rungeho-Lenzovho vektora je možný prístup cez Killingove tenzory, na ten sme sa však pre jeho zložitosť nepozreli. Považujeme za zaujímavé preskúmať rovnicu (2.13) s príslušne rozumným potenciálom vo vyšších dimenziách, tam však očakávame, že symetrií bude menej než maximálny počet pre daný prípad a preto sme sa do tohto nepúšťali, pretože by to obnášalo ukázať, že nájdené nezávislé symetrie, ktorých je menej než maximálny počet, sú všetky nezávislé riešenia, čo sme na tejto úrovni považovali za príliš komplikované a preto sme si užili iba trojrozmernú situáciu, kde sme vedeli ukázať, že máme všetko, čo sa nájsť dá.

Dostali sme sa teda na úplný záver našej práce. Dúfame, že sa čitateľ dočítal s chuťou až sem, a že ak nevedel, tak sa niečo naučil o veľmi zaujímavej symetrii, ktorá nás sprevádza životom v tomto svete a o zaujímavých nástrojoch a štruktúrach diferenciálnej geometrie. Ak prišiel aj spomínaný estetický zážitok, tak to nás veľmi teší a dáva to iste zmysel nášmu snaženiu a ak nie, tak prosíme čitateľa o prepáčenie, že prišiel o drahocenný čas zavádzaný sľubom, že sa dozvie čosi zaujímavé.

Literatúra

- [1] M. Fecko, *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov*. Iris, 2004, 2008.
- [2] P. Zlatoš, *Lineárna algebra a geometria*. Marenčin PT, 2011.
- [3] J. Hermann, “d’investigare l’orbite de’ pianeti, nell’ipotesi che le forze centrali o pure le gravit’a delgi stessi pianeti sono in ragione reciproca de’ quadrati delle distanze, che i medesimi tengono dal centro, a cui si dirigono le forze stesse,” *Giornale de Letterati D’Italia*, vol. 2, pp. 447–467, 1710.
- [4] J. Bernoulli, “Extrait de la réponse de m. bernoulli à m. herman datée de basle le 7. octobre 1710,” *Histoire de l’academie royale des sciences (Paris)*, vol. 1732, pp. 521–544, 1710.
- [5] P. S. Laplace, *Traité de mécanique celeste*. 1799.
- [6] W. R. Hamilton, “The hodograph or a new method of expressing in symbolic language the Newtonian law of attraction,” *Proceedings of the Royal Irish Academy*, vol. 3, pp. 344–353, 1847.
- [7] J. W. Gibbs and E. B. Wilson, *Vector Analysis*. Scribners, 1901.
- [8] C. Runge, *Vektoranalysis*. Hirzel, 1919.
- [9] W. Lenz, “Über den Bewegungsverlauf und die Quantenzustände der gestärten Keplerbewegung,” *Zeitschrift fur Physik*, vol. 24, pp. 197–207, Dec. 1924.
- [10] W. Pauli, “Über das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der neuen Quantenmechanik,” *Zeitschrift fur Physik*, vol. 36, pp. 336–363, May 1926.
- [11] N. W. Evans, “Superintegrability in classical mechanics,” *Physical Review A*, vol. 41, pp. 5666–5676, May 1990.
- [12] M. Bander and C. Itzykson, “Group theory and the hydrogen atom (i),” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 38, pp. 330–345, Apr 1966.