

UNIVERZITA KOMENSKÉHO, BRATISLAVA  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

# EISENHARTOV ZDVIH

BAKALÁRSKA PRÁCA

UNIVERZITA KOMENSKÉHO, BRATISLAVA  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

# EISENHARTOV ZDVIH

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Fyzika  
Študijný odbor: 4.1.1 Fyzika  
Katedra: Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky  
Vedúci práce: doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.

Bratislava, 2014

Jozef Melicher

# Čestné prehlásenie

Vyhlasujem, že som bakalársku prácu vypracoval samostatne a s použitím literatúry uvedenej v zozname.

Bratislava, 2014

Jozef Melicher

Tento text bol vysádzaný pomocou programu L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X. Obrázky boli kreslené v programoch Inkscape a Maxima.



## ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

**Meno a priezvisko študenta:** Jozef Melicher  
**Študijný program:** fyzika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)  
**Študijný odbor:** 4.1.1. fyzika  
**Typ záverečnej práce:** bakalárska  
**Jazyk záverečnej práce:** slovenský

**Názov:** Eisenhartov zdvih / *Eisenhart lift*

**Cieľ:** Majme lagranžián pre sústavu s  $n$  stupňami voľnosti, pričom táto sústava má nejakú (prípadne aj zovšeobecnenú) potenciálnu energiu. Dynamika teda nie je voľný pohyb v konfiguračnom priestore - potenciálna energia generuje nenulovú silu.

Osud takejto sústavy sa zdal L.P.Eisenhartovi veľmi smutný. Tvrdil, že sloboda a voľnosť nadovšetko a že za slobodu treba priniesť aj obeť.

V roku 1928 vymyslel zaujímavý formálny trik, ako oslobodiť uvažovanú sústavu spod neznesiteľného jarma sily: podarilo sa mu prerobiť daný lagranžián na iný lagranžián (ktorý opisuje inú sústavu) vo viacrozmernom (o dva rozmery) konfiguračnom priestore.

Obeťou teda bol prechod do väčšieho konfiguračného priestoru.

A v čom bol zisk? No v spomínanej slobode: nová sústava sa už pohybuje voľne.

Ale ako súvisí nová sústava so starou (môžeme dobiedzať)?

Odpoveď znie: Tak, že keď si všimame len tie stupne voľnosti, ktoré tam boli pôvodne, vidíme to, čo by sme videli pôvodne.

Dá sa to povedať aj tak, že pohyb sústavy je voľný v tom viacrozmernom priestore, ale po projekcii do toho pôvodného tam je to, čo bolo (a čo nás zaujímalo).

Táto kuriozita v čase svojho vzniku veľký záujem neprotiahla (všetkých priťahoval vzrušujúci svet čerstvej kvantovej mechaniky). Dnes ožila, vyrábajú sa pomocou nej napríklad priestoročasy s netriviálnymi symetriami.

Cieľ úlohy:

V bakalárskej práci by sa na jednoduchých príkladoch ohmatalo, ako sa to celé robí. V prípade záujmu a schopností ísť ďalej by sa smerovalo ku Killingovým tenzorom, čo by si už vyžadovalo aj isté vniknutie do diferenciálnej geometrie. Vhodné pre záujemcu, ktorého baví experimentovať s teoretickou mechanikou a neodradí ho trocha (dobře motivovanej) abstrakcie.

**Literatúra:** Luther Pfahler Eisenhart: Dynamical Trajectories and Geodesics, The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 30, No. 1/4 (1928 - 1929), pp. 591-606

**Vedúci:** doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.

**Katedra:** FMFI.KTFDF - Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky

**Vedúci katedry:** doc. RNDr. Tomáš Blažek, PhD.

**Dátum zadania:** 18.04.2013

**Dátum schválenia:** 22.04.2013

prof. RNDr. Jozef Masarik, DrSc.



Univerzita Komenského v Bratislave  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

---

garant študijného programu

.....  
študent

.....  
vedúci práce

# Pod'akovanie

Ďakujem Bohu za to, že stvoril svet plný krás a nám dal možnosť ich objavovať, mne konkrétne pomocou fyziky.

Ďakujem môjmu školiteľovi doc. RNDr. Mariánovi Feckovi, PhD. za vedenie pri práci, pomoc a užitočné rady.

# Abstract

*Author:* Jozef Melicher  
*Title:* Eisenhartov zdvih  
*University:* Univerzita Komenského, Bratislava  
*Faculty:* Fakulta matematiky, fyziky a informatiky  
*Department:* Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky  
*Supervisor:* doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.  
*Date:* May 29, 2014  
*Number of pages:* 36  
*Type of thesis:* Bakalárska práca

**ABSTRACT:** Principal subject of this thesis is observation of properties of Eisenhart's lift. The point is formal finesse which cause that we can dynamic trajectories of some system with  $n$  degrees of freedom and affecting forces solve with the aid of trajectories of free system (geodesics) in space with two added dimensions. In this lifted  $(n + 2)$  - dimensional space, there are not any forces yet and projection of it's mentioned trajectory of free system to original  $n$  dimensions is same like the first movement influented by force. Thesis includes two specific examples of Eisenhart's lift and also general calculations which serves to demonstrate some statements and derivation of general properties of the lift.

**KEYWORDS:** Eisenhart's lift, geodesics, pseudo-riemannian space

# Abstrakt

<i>Autor:</i>	Jozef Melicher
<i>Názov práce:</i>	Eisenhartov zdvih
<i>Škola:</i>	Univerzita Komenského, Bratislava
<i>Fakulta:</i>	Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
<i>Katedra:</i>	Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky
<i>Vedúci práce:</i>	doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.
<i>Dátum:</i>	29. mája 2014
<i>Počet strán:</i>	36
<i>Druh záverečnej práce:</i>	Bakalárska práca

**ABSTRAKT:** Práca sa zaoberá odvodením a skúmaním vlastností Eisenhartovho zdvihu. Ide o formálny trik, pomocou ktorého dokážeme dynamické trajektórie systému s  $n$  stupňami voľnosti a pôsobiacimi silami počítať pomocou trajektórií voľného systému (geodetické krivky) v priestore s dvoma pridanými rozmermi. V zdvihnutom  $(n + 2)$  - rozmernom priestore už nepôsobí sily a projekcia jeho spomínanej trajektórie voľného systému do pôvodných  $n$  rozmerov je rovnaká, ako pôvodný pohyb pod vplyvom sily. Práca obsahuje dva konkrétne príklady Eisenhartovho zdvihu ako aj všeobecné výpočty, ktoré slúžia na dokázanie niektorých tvrdení a odvodenie všeobecných vlastností zdvihu.

**KEÚČOVÉ SLOVÁ:** Eisenhartov zdvih, geodetické krivky, pseudoriemannovský priestor



# Predhovor

Predstavme si, že máme systém s  $n$  stupňami voľnosti a sily, ktoré naň pôsobia. Nech sú tieto sily navyše potenciálové. Dobre. Tak po prvé máme kinetickú energiu. Ukazuje sa, že tá charakterizuje (okrem rozmeru) zakrivenie konfiguračného priestoru. Ďalej máme potenciálnu energiu, ktorá opisuje sily. Už to len spočítame cez lagranžovskú mechaniku...

Dá sa to ale inak! Vráťme sa na začiatok. Náš systém opisujme nie v  $n$  - rozmernom, ale v  $(n + 2)$  - rozmernom priestore a čuduj sa svete, ukazuje sa už nepotrebujeme žiadnu potenciálnu energiu, ktorá by generovala silu. Budeme sa pohybovať v našom novom zdvihnutom priestore voľne, s konštantnou rýchlosťou, jednoducho rovnomerne priamočiari. Keď sa pozrieme na pôvodných  $n$  rozmerov, tak zistíme, že sa v nich vlastne pohybujeme rovnako ako keby na nás pôsobila pôvodná sila. Tento postup, ktorý náš priestor síce „nafúkne“ o dva rozmery, ale za to nám dovolí zabudnúť na sily a pohybovať sa tak ako všetci<sup>1</sup> chceme, teda voľne, sa nazýva Eisenhartov zdvih.

Ak máte radi voľnosť rovnako ako Eisenhart, tak pokračujte v čítaní. V prvej kapitole napríklad postupne prideme na to, čo za trik (zdvih) to musíme urobiť ak sa zaujímate o bežné sily. Druhá kapitola bude trochu zložitejšia (je možné ju preskočiť) a ukážeme všeobecnú podobu Eisenhartovho zdvihu, tak ako bol pôvodne publikovaný[2]. Konkrétne príklady si ukážeme v tretej kapitole a posledná kapitola bude skúmať priestor, v ktorom sa po zdvihnutí ocitneme a zistíme viaceré zaujímavé či priam nečakané vlastnosti zdvihu. Ako správni ctitelia krásy tohoto sveta a obzvlášť tej, ktorú nachádzame vo fyzike a matematike, sa na ceste pátrania po Eisenhartových stopách neraz pristavíme a trošku aj odbočíme k pozoruhodnostiam, ktoré sme cestou zahliadli. Odbočenia, pri ktorých napríklad obehnete celú Zem dokola alebo sa zbavíte miernej schizofrénie v pojmoch predstavujú dva dodatky.

Táto práca sa týka teoretickej fyziky, takže ak do nej chceme vstúpiť a stať sa tak *ar-biterom elegantiarum*, podobne ako Petronius na dvore cisára Nera, potrebujeme mať absolvovaný apoň kurz teoretickej mechaniky. Práca samotná je písaná tak, aby jej porozumel tretiak študujúci fyziku.

---

<sup>1</sup>Predovšetkým študenti, ktorí si ctia princíp najmenšieho odporu, nemajú v obl'ube, keď ich učiteľské sily nútia robiť viac ako je nutné minimum.

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Od krivého k rovnému</b>	<b>2</b>
1.1 Teoretická mechanika . . . . .	2
1.2 Pohyb v silovom poli a voľný pohyb . . . . .	3
1.3 Motivácia . . . . .	4
1.4 „Odvodenie“ zdvihu v elementárnom príklade . . . . .	5
1.4.1 Pomocné výpočty . . . . .	7
1.5 Výsledok . . . . .	8
<b>2 Najvšeobecnejší prípad</b>	<b>10</b>
2.1 Zdvih . . . . .	10
2.2 Ako na to . . . . .	10
2.3 Overenie fungovania zdvihu: výpočty . . . . .	12
<b>3 Jednoduché príklady</b>	<b>15</b>
3.1 Lineárny harmonický oscilátor . . . . .	15
3.2 Vodorovný vrh . . . . .	17
<b>4 Nové priestory</b>	<b>20</b>
4.1 Riemannovský a pseudoriemannovský priestor . . . . .	20
4.2 Pseudoriemannovský zdvihnutý priestor . . . . .	22
4.2.1 Prípad zovšeobecneného potenciálu . . . . .	23
<b>Záver</b>	<b>27</b>
<b>A Geodetické krivky z pohľadu fyzika</b>	<b>28</b>
<b>B Súvis najkratšej a voľnej dráhy</b>	<b>31</b>

# Zoznam obrázkov

1.1	Aj vodorovný vrh môže letieť rovno . . . . .	4
3.1	Trajektória LHO v zdvihnutom priestore . . . . .	17
3.2	Vodorovný vrh ako ho poznáme . . . . .	18
3.3	Vodorovný vrh, keď letí „rovno“ . . . . .	19
A.1	Cesta okolo sveta po rovnobežkách . . . . .	29
B.1	Najkratšia - rovná cesta z Londýna do Moskvy . . . . .	34
B.2	Tá istá rovná cesta ako na obrázku B.1, tentokrát nakreslená na mape zo školského atlasu . . . . .	34

# Úvod

Cieľom tejto práce je zahĺbiť sa do skúmania formálneho matematického triku nazývaného *Eisenhartov zdvih*. Budeme sa naň pozerat' z pohľadu fyziky, presnejšie z pohľadu fyzikálnych systémov, na ktoré budeme zdvih aplikovat'.

V prvej kapitole začneme zopakovaním základných prvkov teoretickej mechaniky. Potom postupne odvodíme zdvih pre najtypickejšiu formu kinetickej a potenciálnej energie. Začneme úvahou, čo od zdvihu požadujeme. Zistíme, že je nutné pridať ďalšie rozmery a tiež to, že jeden nestačí. V kapitole taktiež operujeme so slovami rovno alebo krivo a ich presnému vysvetleniu sme okrem iného venovali Dodatok A.

Eisenhartovmu zdvihu v podobe ako bol publikovaný, t.j. v tom najvšeobecnejšom a najkomplikovanejšom prípade kinetickej a potenciálnej energie je venovaná druhá kapitola. V tejto kapitole priamo uvedieme Eisenhartom navrhovaný postup a pomerne nezáživnými výpočtami dokážeme, že vedie k správnym výsledkom. V tejto kapitole sa nevyhýbame matematickému prístupu, akým bol písaný aj pôvodný článok [2]. K celkovému pochopeniu našej práce však nie je druhá kapitola nevyhnutná, preto je možné ju preskočiť.

V tretej kapitole aplikujeme zdvih na dvoch jednoduchých príkladoch - lineárnom harmonickom oscilátore a vodorovnom vrhu. Sú dostatočne jednoduché a pritom zaujímavé, aby sme na nich mohli niečo vidieť. Trajektórie spočítame aj v abstraktných rozmeroch a s určitým priblížením ich znázorníme aj graficky.

Na záver v štvrtej poslednej kapitole preskúmame priestor generovaný Eisenhartovým zdvihom ako taký. Zdvihnutý priestor podrobíme skúmaniu z hľadiska signatúry a pomocou poznatkov z lineárnej algebry sa nám podarí odhaliť signatúru aj v tom najvšeobecnejšom prípade. V tejto kapitole rovnako spomenieme delenie priestorov podľa signatúry i to, aký vplyv má signatúra na vektory v týchto priestoroch. K priestoru s obvyklou (prirodzenou) signatúrou sa viaže aj Dodatok B, v ktorom si ukážeme dva pohľady na geodetiku. V závere štvrtej kapitoly je aj odstavec spomínajúci aplikácie eisenhartovhu zdvihu, ktoré sa objavili v posledných rokoch a oživil tak vyše pol storočia starý Eisenhartov nápad.

# Kapitola 1

## Od krivého k rovnému

V tejto kapitole si na úvod zopakujeme základné poznatky z teoretickej mechaniky, v ktorej formalizme je písaná celá táto práca. Následne si na elementárnom prípade ukážeme, čo vlastne Eisenhartov zdvih robí a pomocou jednoduchých úvah sa dopracujeme až k jeho odvodeniu.

### 1.1 Teoretická mechanika

Eisenhartov zdvih je formulovaný pre lagranžovskú mechaniku. Pre pochopenie tejto práce je preto potrebné mať absolvovaný aspoň základný kurz teoretickej mechaniky. Pre istotu len pripomenieme jej základné prvky.

Ústrednou funkciou celej teoretickej fyziky je *lagranžián*:

$$L = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - U \quad (1.1)$$

Lagranžián závisí od systému, ktorý skúmame. Polohu systému v  $n$  - rozmernom konfiguračnom priestore udávajú súradnice  $q \equiv (q^1, \dots, q^n)$ . Kinetická energia vystupuje vo forme  $\frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$  a  $U$  je potenciálna energia.

Symbolom  $g_{ij}$  označujeme *metrický tenzor*, v ktorom je ukrytá informácia o charaktere konfiguračného priestoru. Vo všeobecnosti môžu byť  $g_{ij}$  aj  $U$  závislé od súradníc  $q$  a času  $t$ .

Riešenie, t.j. pohybové rovnice pre trajektóriu systému získame vo forme diferenciálnych rovníc. Urobíme tak dosadením lagranžiánu do Lagranžových<sup>1</sup> diferenciálnych rovníc:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (1.2)$$

---

<sup>1</sup>Rovnako bývajú nazývané Eulerove, tak ich častejšie volajú matematici vo variačnom počte.

Výsledné diferenciálne rovnice môžeme zapísať v tvare<sup>2</sup>:

$$g_{ij}\ddot{q}^j + \Gamma_{ijk}\dot{q}^j\dot{q}^k + \frac{\partial U}{\partial q^i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (1.3)$$

kde  $\Gamma_{ijk}$  je Christoffelov symbol prvého druhu, konkrétne:

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \right) \quad (1.4)$$

### Poznámka k potenciálnej energii

Spomínali sme potenciálnu energiu v tvare  $U(q, t)$ , teda závislú od polohy a času. Existujú však fyzikálne systémy, ktoré nás vedú k rozšíreniu pojmu potenciálnej energie. Pre takéto systémy zavádzame *zovšeobecnenú potenciálnu energiu* [4]:

$$U(q, \dot{q}, t) = V(q, t) - A_i(q, t)\dot{q}^i$$

Systém je potom charakterizovaný lagranžiánom:

$$L = \frac{1}{2} g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j - V + A_i\dot{q}^i$$

Takýmto systémom je napríklad bodová nabitá častica v elektromagnetickom poli so skalárnym potenciálom  $\varphi$  a vektorovým  $\mathbf{A}$ . Pričom platí:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Zovšeobecnená potenciálna energia v tomto prípade vyzerá takto:

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = e(\varphi(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t))$$

## 1.2 Pohyb v silovom poli a voľný pohyb

Už na základnej škole nás učili, čo je to rovnomerný priamočiary pohyb a že sa koná ak na hmotný bod nepôsobí sila. Podobné je to v teoretickej mechanike, pohyb bez pôsobenia síl nazývame pohybom po geodetickej krivke a svojim spôsobom je to pohyb „rovno“ a rovnako rýchlo aj keď už v nejakom všeobecnom konfiguračnom priestore. Tým čo znamená „rovno“ a rovnako rýchlo v zakrivených priestoroch sa zaoberáme viac v Dodatku A.

<sup>2</sup>V celej práci používame Einsteinovu sumačnú konvenciu, to znamená, že ak sú vo výraze práve dva rovnaké indexy, tak tomu rozumieme tak, že cez ne prebieha sumácia, aj keď ju nepíšeme. Zápis pomocou súm by v prípade rovníc (1.3) vyzeral takto:  $\sum_{j=1}^n g_{ij}\ddot{q}^j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \Gamma_{ijk}\dot{q}^j\dot{q}^k + \frac{\partial U}{\partial q^i} = 0$

Konfiguračný priestor je charakterizovaný metrickým tenzorom  $g_{ij}$  a teda aj lagranžiánom, ak nepôsobia sily:

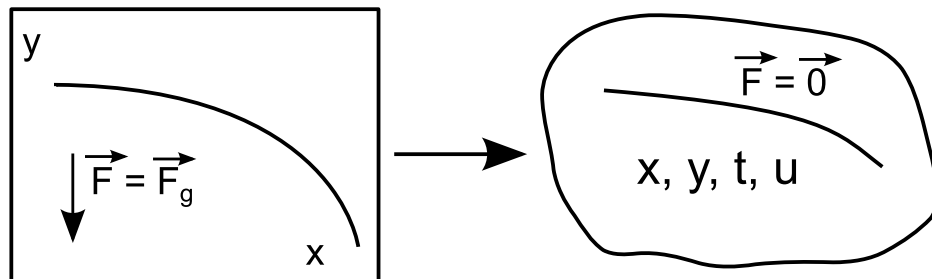
$$L = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j \quad i = 1, \dots, n \quad (1.5)$$

Vyriešením Lagrangeových rovníc (1.2) pre tento lagranžián dostaneme trajektóriu pre voľný pohyb v  $n$ -rozmernom priestore. Takýto pohyb má niekoľko zaujímavých vlastností. Okrem tej, že je to pohyb rovno<sup>3</sup>, teda po geodetike, je ešte jedna spomenutá v Dodatku B. V pohybe po geodetike je však niečo hlbšie, napríklad aj častica vo všeobecnej teórii relativity sa pohybuje po geodetike, čo vieme od roku 1916 vďaka Einsteinovi [1].

Eisenhart prvý navrhol formálny trik, ktorým z ľubovoľného „krivého“ pohybu spôsobeného silou (potenciálnou energiou) vytvoríme pohyb rovnomerný priamočiary. Nie je to samozrejme zadarmo, voľný pohyb získame až keď systém rozšírime o dva dodatočné rozmery. Vo výslednom  $(n + 2)$ -rozmernom priestore sa už tento systém pohybuje voľne.

### 1.3 Motivácia

Čo má vlastne Eisenhartov zdvih robiť? Z krivého pohybu rovný. Pozrime sa napríklad na obrázok 1.1. Vieme, že vodorovný vrh sa koná po zakrivenej trajektórii (parabole). Zaprí-



Obr. 1.1: Aj vodorovný vrh môže letieť rovno

činené je to pôsobiacou gravitačnou silou  $\mathbf{F}_g$  (teda aj potenciálnou energiou). Eisenhartov zdvih nám rozšíri priestor  $x, y$  o ďalšie dva rozmery<sup>4</sup>  $t$  a  $u$ . Vo výslednom 4-rozmernom priestore nebudú pôsobiť žiadne sily a tento voľný rovný pohyb bude práve taký, že v priemete na súradnice  $x, y$  sa bude javiť ako vodorovný vrh.

Udivujúce na celom zdvihu je, že niečo také vôbec dokážeme urobiť. Sústavu, kde pôsobili sily vieme vložiť do takého konfiguračného priestoru, kde sily nepôsobia a voľným

<sup>3</sup>Rovno už píšeme bez úvodzoviek, pre zakrivený priestor je rovno jednoznačne definované v Dodatku A

<sup>4</sup>Zatiaľ sú pre nás  $t$  a  $u$  len označenia pridaných rozmerov, nič viac.

pohybom v novom priestore dostávame rovnaké správne výsledky. Teraz si na jednoduchom prípade ukážeme ako zistiť, čo za rozmery máme pridať, aby zdvih fungoval.

## 1.4 „Odvodenie“ zdvihu v elementárnom príklade

Uvažujme sústavu pohybujúcu sa v  $n$ -rozmernom konfiguračnom priestore so súradnicami  $q = (q^1, \dots, q^n)$ , kinetickú energiu v tvare  $T = \frac{1}{2}g_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j$  a najbežnejšiu potenciálnu energiu  $U = U(q)$ . Lagranžian pre takúto sústavu vyzerá takto:

$$L = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j - U \quad i = 1, \dots, n \quad (1.6)$$

Nápad je taký, že chceme potenciálnu energiu  $U$  upraviť do takého tvaru, aby sme na ňu mohli pozerat' ako súčasť metriky  $g_{\alpha\beta}$  rozšíreného priestoru. Máme snahu zapísať lagranžian s potenciálnou energiou (1.6) ako lagranžian pre systém bez síl:

$$L = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta \quad (1.7)$$

Koľkorozmerný má byť náš rozšírený priestor (aké hodny  $\alpha, \beta$  nadobúdajú) ešte nevieme. Skúsme najskôr, či by nestačil len jeden rozmer navyše.

### Pridanie jedného rozmeru

Prvé čo by nám mohlo napadnúť, je vyrobiť voľný lagranžian takto:

$$L = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j - U\dot{r}, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.8)$$

kde  $r \equiv q^{n+1}$  by bol náš pridaný rozmer. Náš pohyb, čo sa týka fyzikálnych rozmerov  $\{q^1 \dots q^n\}$  je daný Lagranžovými rovnicami<sup>5</sup>:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.9)$$

$$\text{t.j.} \quad g_{ij}\ddot{q}^j + \Gamma_{ijk}\dot{q}^j\dot{q}^k + \frac{\partial U}{\partial q^i}\dot{r}^2 = 0 \quad (1.10)$$

Ak by platilo, že  $\dot{r} = 1$ , tak máme obvyklé riešenie (1.3) a teda presne to čo sme chceli. Voľný pohyb v  $(n + 1)$ -rozmernom priestore a projekcia tohoto pobytu v pôvodných  $n$  rozmerov sa javí ako pohyb v potenciálovom poli. Aby sme to zaručili, tak skúsme rovno položiť  $r = t$ , teda fyzikálnemu času. Potom je  $\dot{r} = \ddot{r} = 1$  triviálne. Ak však zavedieme čas  $t$  ako ďalší rozmer, tak už z pohľadu voľného pohybu v tomto väčšom priestore musíme zaviesť nový parameter pohybu  $\tau$  a potom  $q = q(\tau)$ . Pre jednoduchosť budeme od teraz používať označenie?

$$\dot{q}^\alpha = \frac{dq^\alpha}{d\tau} \quad (1.11)$$

<sup>5</sup>Pohyb v nefyzikálnych rozmeroch nás z pohľadu fungovania zdvihu zatiaľ vôbec netrápi.



Náš nový lagranžián je:

$$L = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j - U\dot{t}, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.12)$$

Tušíme však, že sme si až tak nepomohli, od nefyzikálneho rozmeru  $r$  sme prešli k nefyzikálnemu parametru  $\tau$ , točíme sa v kruhu. V skutočnosti je lagranžián (1.12) s  $t$  a  $\tau$  lepší ako pôvodne navrhovaný (1.8) s  $r$ . Pri  $r$ -kovom sme požadovali  $\frac{dr}{dt} = 1$ . V (1.12) nám stačí všeobecnejšie  $\frac{dt}{d\tau} = const$ . Pohybové rovnice sa totiž nezmenia, ak vynásobíme lagranžián konštantou a presne to sa udeje ak prejdeme od derivácie  $\frac{dq^\alpha}{d\tau}$  ku  $\frac{dq^\alpha}{dt}$  ak sú  $\tau$  a  $t$  lineárne závislé. Jediné čo však máme k dispozícii a z čoho by sme mohli dostať lineárnu závislosť medzi  $\tau$  a  $t$  sú Lagranžove rovnice:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n+1 \quad (1.13)$$

Tie pre  $\alpha = 1, \dots, n$  popisujú pohyb vo fyzikálnych rozmeroch. Požadovanú závislosť môže dať jedine tá, ktorá pribudla, teda pre  $\alpha = n+1$ :

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (1.14)$$

$$\text{t.j.} \quad \frac{d}{d\tau} (2U\dot{t}) = 0 \quad (1.15)$$

My ale potrebujeme rovnicu  $\ddot{t} = 0$ , ktorá odpovedá lineárnej závislosti medzi  $t$  a  $\tau$ . To by vyplývalo z tejto rovnice len, ak by  $U(q) = const.$ , čo je pole bez síl, a teda je to v rozpore s naším predpokladom. Pridaním jedného rozmeru sme sa teda k voľnému pohybu, a zároveň zachovaniu pôvodných rovníc v  $n$  rozmeroch neprepracovali. Skúsme pridať ďalší rozmer.

### Pridanie druhého rozmeru

Ďalšiu Lagrangeovu rovnicu (ďalšiu možnosť ako dosiahnuť  $\frac{dt}{d\tau} = const.$ ) získame zdvihnutím nášho konfiguračného priestoru o ďalší rozmer. Označme ho  $q^{n+2} = u$ . Ako sme videli v predošlom paragrafe, tak potrebujeme do lagranžiánu pridať jednoduchý člen za pridaný rozmer, aby sme dostali zo vzt'ahu

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial L}{\partial u} = 0 \quad (1.16)$$

rovniciu  $\ddot{t} = 0$ . Ľahko uhádneme, že na to stačí prirátat'  $k\dot{u}\dot{t}$ , kde  $k$  je ľubovoľná konštanta. Pôvodných  $n$  rovníc tým neovplyvníme, pretože v (1.16) nevystupujú  $q^i$  a  $\dot{q}^j$  z pôvodných fyzikálnych rozmerov. Celkový lagranžián v zdvihnutom priestore je po pridaní posledného člena:

$$L = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j - U\dot{t} + k\dot{u}\dot{t}, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.17)$$

Jeho dosadením do rovnice (1.16) dostaneme:

$$k\ddot{t} = 0 \quad (1.18)$$

$$\Downarrow \quad (1.19)$$

$$t = c\tau + b \leftrightarrow \tau = at + t_0 \quad (1.20)$$

To je naozaj to, čo sme požadovali. Vidíme, že  $\tau$  je svojim spôsobom tiež čas, iba s inou rýchlosťou plynutia (konštanta  $a$ ) a inou polohou času nula ( $t_0$ ). Z toho vyplýva, že rovnice (1.21) pre pôvodný pohyb v  $n$ -rozmernom priestore s lagranžiánom  $L = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j - U$  sú rovnaké ako projekcia voľného pohybu (1.22) v zdvihnutom  $n+2$ -rozmernom priestore do pôvodných  $n$  rozmerov s lagranžiánom (1.17).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad \dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt}, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.21)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad \dot{q}^i = \frac{dq^i}{d\tau}, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.22)$$

Jediné čo je na nich v konečnom dôsledku iné je konštanta  $c = \frac{dt}{d\tau}$ , ktorú vykrátíme, takže nehrá úlohu. Poriadne to spočítame v nasledujúcej odbočke 1.4.1.

**Pozn.** Posledný člen v „zdvihnutom“ lagranžiáne (1.17) bol  $k\ddot{t}$ , kde sme na  $k$  nemali žiadnu podmienku. Pre jednoduchosť zvolíme  $k = 1$ . Podrobnejšie sa na náš výsledok pozrieme v časti 1.5.

### 1.4.1 Pomocné výpočty

Ukážeme si, že vzťahy (1.21) a (1.22) vedú naozaj k rovnakým pohybovým rovniciam, ako sme tvrdili v predchádzajúcom texte.

**Rovnice (1.21)**

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$$

t.j.

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \left( \frac{1}{2}g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j - U \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q^i} \left( \frac{1}{2}g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j - U \right) = 0$$

**Rovnice (1.22)**

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad \dot{q}^i = \frac{dq^i}{d\tau}, \quad i = 1, \dots, n$$

Využijeme lineárnu závislosť  $t = c\tau + b$ . Potom  $\frac{dt}{d\tau} = c$  a teda aj  $q' = \frac{dq}{d\tau} = \frac{dq}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \dot{q}c$ . Pomocou tejto identity upravujeme nasledovné vzťahy:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{\partial}{\partial q'^i} \left( \frac{1}{2} g_{ij} q'^i q'^j - U t' t' + k u' t' \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q^i} \left( \frac{1}{2} g_{ij} q'^i q'^j - U t' t' + k u' t' \right) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial (\dot{q}^i \frac{d\tau}{dt})} \left( \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j \frac{d\tau}{dt} \frac{d\tau}{dt} - U \frac{d\tau}{dt} \frac{d\tau}{dt} \right) \right] \frac{d\tau}{dt} - \frac{\partial}{\partial q^i} \left( \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j \frac{d\tau}{dt} \frac{d\tau}{dt} - U \frac{d\tau}{dt} \frac{d\tau}{dt} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \left( \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j c^2 - U c^2 \right) \right] c - \frac{\partial}{\partial q^i} \left( \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j c^2 - U c^2 \right) &= 0 \\ c^2 \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \left( \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - U \right) \right] - c^2 \frac{\partial}{\partial q^i} \left( \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - U \right) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \left( \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - U \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q^i} \left( \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - U \right) &= 0 \end{aligned}$$

Posledný výraz je totožný s tým, ktorý sme dostali upravovaním (1.21). Vidíme, že rovnice (1.21) a (1.22) sú rovnaké a to je to, čo sme chceli dokázať.

## 1.5 Výsledok

Ak máme pohyb v  $n$ -rozmernom konfiguračnom priestore  $q = (q^1, \dots, q^n)$  charakterizovanom  $g_{ij}(q)$  a pôsobí v ňom potenciálna energia  $U(q)$ , potom vieme tento priestor rozšíriť o 2 rozmery tak, že na novom zdvihnutom  $(n+2)$ -rozmernom priestore je tento pohyb súčasťou<sup>6</sup> pohybu po geodetike (bez potenciálnej energie). Metrický tenzor zdvihnutého priestoru je:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & -2U & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

S ním je spojený lagranžian pre voľný pohyb<sup>7</sup>:

$$L = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - U t t + \dot{t} t, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n+2 \quad (1.24)$$

Inak povedané máme dva prístupy ako hľadať na fyzikálnu sústavu s potenciálnou energiou  $U = U(q)$  a metrickým tenzorom  $g_{ij} = g_{ij}(q)$ :

Bežný prístup dáva rovnice (1.3):

$$g_{ij} \ddot{q}^j + \Gamma_{ijk} \dot{q}^j \dot{q}^k + \frac{\partial U}{\partial q^i} = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

<sup>6</sup>V pôvodných  $n$  rozmeroch sa koná pôvodný pohyb.

<sup>7</sup>Od tejto časti aj vo všetkých nasledujúcich budeme rozumieť grécke indexy ( $\alpha, \beta, \dots$ ) tak, že nadobúdajú hodnoty od 1 do  $n+2$  a latinské ( $i, j, \dots$ ) od 1 do  $n$ .

Eisenhartov prístup sa k rovnakým rovniciam dostane cez rovnice pre voľný pohyb v priestore s metrickým tenzorom (1.23):

$$g_{i\alpha}\ddot{q}^\alpha + \Gamma_{i\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta = 0 \quad i = 1, \dots, n; \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n+2$$

Pridané rozmery sú  $q^{n+1} = t$ , čo je fyzikálny čas a  $q^{n+2} = u$ , ktorý nemá žiaden fyzikálny význam, ale je potrebný na správne fungovanie zdvihu.

Ukázali sme, ako môžeme pri najbežnejšom type lagranžiánu zo všeobecného pohybu vytvoriť rovnomerný priamočiary. Pre veľkú väčšinu systémov nám tento výsledok (1.24) stačí. Sú to systémy s kinetickou energiou  $T = \frac{1}{2}g_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j$  a potenciálnou  $U = U(q)$ , ktoré závisia len od súradníc. Komplikovanejšími závislosťami sa budeme zaoberať v Kapitole 2, kde si ukážeme a dokážeme ako vyzerá Eisenhartov zdvih v tom najvšeobecnejšom prípade.

# Kapitola 2

## Najvšeobecnejší prípad

Táto kapitola bude dosť abstraktná, ukážeme Eisenhartov zdvih v tom najvšeobecnejšom prípade a dokážeme, že jeho geodetiky správne opisujú pohyb, z ktorého sme začali. Predovšetkým všeobecné overenie môže byť náročnejšie na čítanie. Ak sa uspokojíte s konkrétnymi príkladmi je možné túto kapitolu preskočiť. Budeme pracovať so *zovšeobecnenou potenciálnou energiou*, ktorej príklad sme spomenuli v poznámke k teoretickej mechanike na strane 3. Zovšeobecnú potenciálnu energiu uvažoval Luther P. Eisenhart v článku o dynamických trajektóriách a geodetikách [2], teda v prvom článku, kde sa jeho zdvih vôbec objavil. My sme zvolili iný postup a uvažovali najskôr jednoduchší prípad v Kapitole 1. Keďže Eisenhart bol matematik, tak používal trochu iný pohľad na vec ako my v prvej kapitole. Teraz sa však aj my na niektorých miestach tejto kapitoly pustíme do trochu matematickejšej práce.

### 2.1 Zdvih

Geodetické krivky v priestore danom metrickým tenzorom  $g_{ij}$  sú ekvivalentné s dynamickými trajektóriami pohybu len v prípade, že v systéme nepôsobia sily t.j. lagranžian  $L = \frac{1}{2}g_{ij}(q, t)\dot{q}^i\dot{q}^j$  neobsahuje členy za potenciálnu energiu.

Eisenhartov zdvih nám umožňuje z ľubovoľných dynamických trajektórií vytvoriť geodetiky v priestore o 2 rozmery bohatšom ako bol pôvodný. V predošlej kapitole sme prišli na to ako to doceliť ak  $g_{ij} = g_{ij}(q)$  a  $U = U(q)$ . V niektorých zriedkavejších prípadoch môžu byť tieto závislosti komplikovanejšie.

### 2.2 Ako na to

Uvažujme všeobecný dynamický systém [5] v  $n$ -rozmernom konfiguračnom priestore s lagranžianom

$$L = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j - V + A_i\dot{q}^i \quad (2.1)$$

kde

$$q \equiv (q^1, \dots, q^n)$$

$$g_{ij} = g_{ij}(q, t)$$

$$V - A_i \dot{q}^i = V(q, t) - A_i(q, t) \dot{q}^i$$

$U(q, \dot{q}^i, t) = V - A_i \dot{q}^i$  sa nazýva zovšeobecnená potenciálna energia<sup>1</sup>.

Teraz tento systém vložíme do  $(n + 2)$  – rozmerného Riemannovho priestoru s metrikou definovanou ako

$$ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j - 2V dt^2 + 2A_i dq^i dt + 2dt du \quad (2.2)$$

Metriku môžeme tiež zapísať takto:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta \quad (2.3)$$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{ij} & A_i & 0 \\ A_j & -2V & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

pričom označujeme  $q^{n+1} = t$ , čo je štandardný čas a  $q^{n+2} = u$  je pomocný nefyzikálny rozmer.

Pohyb systému v pôvodnom priestore ovplyvnenom silami je teraz voľným pohybom v priestore bez síl. Dynamické trajektórie pohybu závisia od lagranžiánu. Spolu s pridaním dvoch rozmerov  $u$  a  $t$  pozmeníme lagranžián (2.1) na:

$$L = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - V \dot{t} + A_i \dot{q}^i \dot{t} + i \dot{u}, \quad \dot{q}^\alpha = \frac{dq^\alpha}{d\tau}, \quad \alpha = 1, \dots, n+2 \quad (2.5)$$

V tomto novom konfiguračnom priestore máme trajekóriu  $q^\alpha = q^\alpha(\tau)$  parametrizovanú nejakým všeobecným parametrom  $\tau$ . Jeho súvis s fyzikálnym parametrom - časom  $t$  bude rovnaký ako bol v jednoduchom prípade<sup>2</sup> v Kapitole 1. Ukážeme ho v ďalšej podkapitole. Samozrejme, cieľom tejto kapitoly je ukázať, že pohyb daný všeobecným lagranžiánom (2.1) je ekvivalentný geodetickej krivke<sup>3</sup>:

$$g_{\alpha\beta} \frac{d^2 q^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma} \frac{dq^\beta}{d\tau} \frac{dq^\gamma}{d\tau} = 0 \quad (2.6)$$

kde  $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$  je Christoffelov symbol definovaný ako (1.4), ale teraz súvisí so „zdvihnutou“ metrikou (2.4).

<sup>1</sup>Príklad zovšeobecnenej potenciálnej energie je na strane 3.

<sup>2</sup>Medzi  $t$  a  $\tau$  je lineárna závislosť.

<sup>3</sup>Tiež by sme mohli zvoliť postup priameho dosadenia pôvodného lagranžiánu (2.1) a zdvihnutého (2.5) do Lagranžových dif. rovníc (1.2) tak, ako sme to robili v predošlej kapitole. Prístup cez formulu geodetickej krivky si zvolíme z úcty k matematikom, ktorí takto zväčša postupujú a L. P. Eisenhart nebol výnimkou. Pre fyzikov to môže byť tiež zaujímavá skúsenosť, po ktorej sa zrejme s radosťou vrátia k postupu v Kapitole 1.

## 2.3 Overenie fungovania zdvihu: výpočty

### Priestor s potenciálnou energiou

Bežný lagranžian (2.1)  $L = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j - V + A_i\dot{q}^i$  dosadíme do Lagranžovej diferenciálnej rovnice:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$$

$$\text{t.j.} \quad \frac{d}{dt} (g_{ij}\dot{q}^j + A_i) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \dot{q}^j \dot{q}^k + \frac{\partial V}{\partial q^i} - \frac{\partial A_j}{\partial q^i} \dot{q}^j = 0$$

kde

$$\frac{d}{dt} (g_{ij}\dot{q}^j + A_i) = g_{ij}\ddot{q}^j + \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} \dot{q}^j + \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \dot{q}^j \dot{q}^k + \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial A_i}{\partial q^j} \dot{q}^j$$

potom dostávame

$$g_{ij}\ddot{q}^j + \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} \dot{q}^j + \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \dot{q}^j \dot{q}^k + \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial A_i}{\partial q^j} \dot{q}^j - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \dot{q}^j \dot{q}^k + \frac{\partial V}{\partial q^i} - \frac{\partial A_j}{\partial q^i} \dot{q}^j = 0$$

čo môžeme pomocou Christoffelovho symbolu (1.4) zapísať

$$g_{ij}\ddot{q}^j + \Gamma_{ijk}\dot{q}^j\dot{q}^k + \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} \dot{q}^j + \frac{\partial V}{\partial q^i} + \frac{\partial A_i}{\partial t} + \left( \frac{\partial A_i}{\partial q^j} - \frac{\partial A_j}{\partial q^i} \right) \dot{q}^j = 0 \quad (2.7)$$

### „Zdvihnutý“ voľný priestor

Pod' me nájsť geodetickú krivku v zdvihnutom priestore. Lagranžian v tomto priestore bez síl je  $L = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta$ , kde  $g_{\alpha\beta}$  ako aj pridané dva rozmery sme definovali v časti 2.2. Teraz máme trajektóriu (geodetiku) parametrizovanú parametrom  $\tau$ , takže v tomto paragrafe rozumieme pod označením  $\dot{q}^\alpha(\tau) \equiv \frac{dq^\alpha(\tau)}{d\tau}$ .

Metrický tenzor aj so závislosťami na premenných v jeho zložkách je:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{ij}[q(\tau), t] & A_i[q(\tau), t] & 0 \\ A_j[q(\tau), t] & -2V[q(\tau), t] & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Trajektóriu v pôvodných rozmeroch  $\alpha = i, i = 1, \dots, n$  vyjadrujú rovnice

$$g_{i\alpha}\ddot{q}^\alpha + \Gamma_{i\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta = 0 \quad (2.8)$$

Pod' me teraz vyjadrovať presné závislosti dosadením  $g_{\alpha\beta}$  a dopočítaním zložiek  $\Gamma_{i\alpha\beta}$ :

$$g_{i\alpha}\ddot{q}^\alpha = g_{ij}\ddot{q}^j + A_i\ddot{t}$$

zo symetrie

$$\Gamma_{i\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta = \Gamma_{ijk}\dot{q}^j\dot{q}^k + 2(\Gamma_{ijn+1}\dot{q}^j\dot{t} + \Gamma_{ijn+2}\dot{q}^j\dot{u} + \Gamma_{in+1n+2}\dot{t}\dot{u}) + \Gamma_{in+1n+1}\dot{t}^2 + \Gamma_{in+2n+2}\dot{u}^2$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ijn+1} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^{n+1}} + \frac{\partial g_{n+1i}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{jn+1}}{\partial q^i} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial A_i}{\partial q^j} - \frac{A_j}{\partial q^i} \right) \\
\Gamma_{ijn+2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^{n+2}} + \frac{\partial g_{n+2i}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{jn+2}}{\partial q^i} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial u} + \frac{\partial 0}{\partial q^j} - \frac{\partial 0}{\partial q^i} \right) \\
&= 0 \\
\Gamma_{in+1n+1} &= \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial q^i} \\
\Gamma_{in+2n+2} &= \Gamma_{in+1n+2} = 0
\end{aligned}$$

Po dosadení týchto pomocných výpočtov do rovnice (2.8) dostávame vzt'ah:

$$g_{ij}\ddot{q}^j + A_i\ddot{t} + \Gamma_{ijk}\dot{q}^j\dot{q}^k + \frac{\partial g_{ij}}{\partial t}\dot{q}^j + \left( \frac{\partial V}{\partial q^i} + \frac{\partial A_i}{\partial t} \right)\ddot{t} + \left( \frac{\partial A_i}{\partial q^j} - \frac{\partial A_j}{\partial q^i} \right)\dot{q}^j\dot{t} = 0 \quad (2.9)$$

Tieto rovnice sa naoko líšia od rovníc v bežnom postupe (2.7). Je to spôsobené tým, že vo vzt'ahu (2.9) sú bodkované derivácie podľa  $\tau$  a nie podľa  $t$  ako v obvyklom výsledku. Samozrejme, tento postup je ekvivalentný a rovnice sú v skutočnosti rovnaké. Dôvodom je lineárna závislosť  $t$  od  $\tau$ , ktorá vyplýva z rovnice pre  $\alpha = n + 2$ :

$$\begin{aligned}
&g_{n+2\alpha}\ddot{q}^\alpha + \Gamma_{n+2\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta = 0 \\
\text{t.j.} \quad \ddot{t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{n+2\alpha}}{\partial q^\beta} + \frac{\partial g_{\beta n+2}}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial q^{n+2}} \right)\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta &= 0 \\
&\ddot{t} = 0
\end{aligned}$$

⇓

$$t = c\tau + b \leftrightarrow \tau = at + t_0$$

Takže vidíme, že sme prišli k rovnakému záveru ako v špeciálnejšom prípade zdvihu v časti 1.4. Teda  $\tau$  je svojim spôsobom tiež čas, iba s inou rýchlosťou plynutia (konštanta  $a$ ) a inou polohou času nula ( $t_0$ ). Potom rovnice (2.7) a (2.9) sú rovnaké až na konštantu  $c^2$ .

Rovnice (2.9) v zdvihnutom priestore po úprave:

$$c^2 \left[ g_{ij}\ddot{q}^j + \Gamma_{ijk}\dot{q}^j\dot{q}^k + \frac{\partial g_{ij}}{\partial t}\dot{q}^j + \frac{\partial V}{\partial q^i} + \frac{\partial A_i}{\partial t} + \left( \frac{\partial A_i}{\partial q^j} - \frac{\partial A_j}{\partial q^i} \right)\dot{q}^j \right] = 0 \quad \dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt}$$

Konštanta však nehrá úlohu, z celej rovnice ju vyjmeme a dostaneme úplnú zhodu medzi trajektóriami. Spôsob vyňatia konštanty je presne ten istý, ako sme urobili v podkapitole 1.4.1 a využíva identitu  $\frac{dq^\alpha}{d\tau} = c \frac{dq^\alpha}{dt}$ . Všetky bodky podľa  $\tau$  „zmeníme“ na bodky podľa  $t$  a za každú zmenu vynásobíme člen  $c$ . Konkrétnu techniku menenia derivácií si v prípade záujmu pozrite v spomínanej podkapitole 1.4.1.



**Pozn.**

Vôbec sme nepoužili rovnicu pre  $\alpha = n + 1$ :

$$g_{n+1\alpha} \ddot{q}^\alpha + \Gamma_{n+1\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta = 0$$

Avšak, zaujímala nás projekcia do fyzikálnych  $n$  rozmerov a tú sme vyriešili bez pomoci tejto rovnice. Takže pre nás nemá žiaden fyzikálny význam a nemusíme si ju všímať. Čo sme chceli, to už máme. Eisenhartov zdvih už vieme realizovať aj v tých najvšeobecnejších prípadoch.

# Kapitola 3

## Jednoduché príklady

Táto kapitola je venovaná jednoduchým príkladom, kde porovnáme v praxi Eisenhartovu metódu s bežným Lagranžovým prístupom a pokúsime sa bližšie pozrieť na geodetické krivky v zdvihnutých konfiguračných priestoroch.

### 3.1 Lineárny harmonický oscilátor

Skúmanie správania lineárneho harmonického oscilátora (LHO) patrí k najčastejším príkladom v rôznych oblastiach fyziky. Býva to totiž zväčša najjednoduchší zaujímavý príklad a v našom prípade tomu nie je inak.

#### Zadanie úlohy

Máme jednorozmerný priestor so súradnicou  $x$  a pôsobiacou silou

$F(x) = -kx$ . Zaujímá nás pohyb hmotného bodu s hmotnosťou  $m$  v tomto priestore. Kinetická energia je  $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$  a potenciálna energia  $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ .

Počiatkové podmienky sú:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

#### Obvyklé riešenie

Pomocou lagranžiánu  $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$  a počiatkových podmienok sa dostaneme k známemu riešeniu, ktoré priamo uvedieme:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) \quad \text{kde } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.1)$$

#### Zdvihnutý priestor

Podľa postupu v časti 1.5 rozšírme teraz náš priestor o rozmery  $t$  a  $u$ . Tvrdíme, že voľný

pohyb daný lagranžiánom (iba z kinetickej energie)

$$L = T = \frac{1}{2}mx'^2 - \frac{1}{2}kx^2t'^2 + u't', \quad q'^\alpha = \frac{dq^\alpha}{d\tau}$$

je v súradnici  $x$  totožný zo známym výsledkom (3.1). V zdvihnutom priestore je pohyb závislý od parametra  $\tau$ .

Pohybové rovnice dostaneme dosadením nášho lagranžiánu do Lagranžových rovníc:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial q'^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0 \quad (3.2)$$

$$\alpha = 1, \quad \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial x'} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = mx'' + kxt'^2 = 0 \quad (3.3)$$

$$\alpha = 3, \quad \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial t'} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} = (-mx^2t' + u')' = u'' - 2mxx' - mx^2t'' = 0 \quad (3.4)$$

$$\alpha = 4, \quad \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial u'} \right) - \frac{\partial L}{\partial u} = t'' = 0 \quad (3.5)$$

Z poslednej rovnice (3.5) vyplýva lineárna závislosť  $t = c\tau + b$  a v pomocných výpočtoch v časti 1.4.1 sme ukazali, že môžeme teraz všade zameniť derivácie podľa  $\tau$  za derivácie podľa času a rovnice budú správne. Rovnica (3.3) pre súradnicu  $x$  sa nám tým prevedie na známu rovnicu:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Jej riešenie je pri počiatkových podmienkach úlohy totožné<sup>1</sup> so známym (3.1):

$$\text{t.j.} \quad x(t) = x_0 \cos(\omega t)$$

Pre zaujímavosť dopočítame závislosť  $u(t)$  z rovnice (3.4) tým, že zmeníme derivácie za časové a dosadíme do nej vzt'ah pre  $x(t)$  (3.1):

$$\ddot{u} - 2mxx\dot{\quad} = 0 \quad (3.6)$$

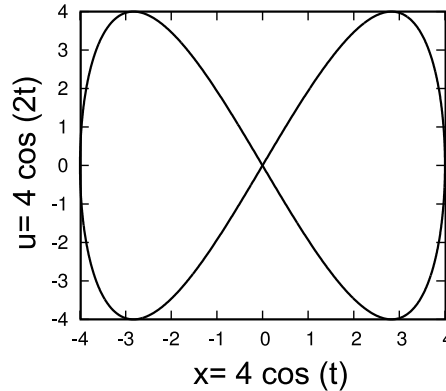
$$\text{po dosadení } x(t) \quad \ddot{u} = -x_0^2 m \omega^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) \quad (3.7)$$

$$\text{zapíšme ako} \quad \ddot{u} = -x_0^2 m \omega \sin(2\omega t) \quad (3.8)$$

$$\text{a po dvojnásobnom zintegrovaní} \quad u(t) = \frac{x_0^2 m}{4\omega} \sin(2\omega t) \quad (3.9)$$

Pre  $u$  sme si zvolili jednoduché počiatkové podmienky  $u(0) = 0$  a  $\dot{u}(0) = 0$ , aby sme si to nekomplikovali. Na obrázku 3.1 môžeme vidieť ako vyzerá trajektória lineárneho harmonického oscilátora v zdvihnutom priestore v súradniciach  $x$  a  $u$ . Prípad na obrázku má numerické hodnoty  $m = k = 1$  a  $x_0 = 4$ . Súradnicu  $t$  sme nevykrel'ovali, je v nej len lineárny rast. Celkom zaujímavé je, že aj v súradnici  $u$  sa koná periodický pohyb.

<sup>1</sup>To, že sú rovnice pre pôvodné rozmery totožné musí platiť vždy, veď tak bol Eisenhartov zdvih vymyslený.



Obr. 3.1: Trajektória LHO v zdvihnutom priestore

## 3.2 Vodorovný vrh

V časti 1.3 sme vodorovný vrh uviedli ako príklad zakriveného pohybu, ktorý dokážeme pomocou Eisenhartovho zdvihu „vyrovnať“. Tento príklad si preto spočítame a odhalíme ako vyzerajú geodetiky v zdvihnutom priestore, ktoré sa majú projektovať na nám známy vodorovný vrh v dvoch rozmeroch.

### Zadanie úlohy

Uvažujme ako obvykle systém v dvoch rozmeroch  $x$  a  $y$ . Súradnica  $q^1 = x$  vyjadruje vodorovnú vzdialenosť a  $q^2 = y$  je výška od zeme. To sú kartézské súradnice s prirodzeným metrickým tenzorom  $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Vrhateľ budeme hmotný bod s hmotnosťou  $m$  v smere kladného rastu súradnice  $x$ . V zápornom smere súradnice  $y$  pôsobí gravitačné zrýchlenie  $g$ , takže potenciálna energia je  $U = mgy$ . Počiatočná výška  $h$  a rýchlosť  $v_0$  tvoria počiatočné podmienky:

1.  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0$

2.  $y(0) = h, \dot{y}(0) = 0$

Lagranžian takejto sústavy je

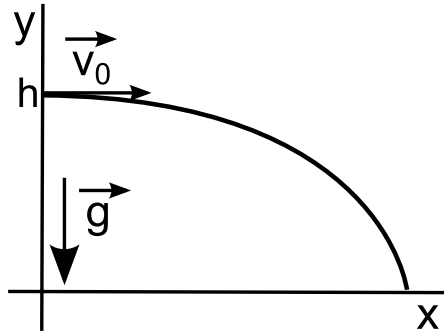
$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

### Bežné riešenie

Riešenie bežným spôsobom priamo uvedieme, je dobre známe a graficky znázornené na obrázku 3.2:

$$x(t) = v_0 t \tag{3.10}$$

$$y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \tag{3.11}$$



Obr. 3.2: Vodorovný vrh ako ho poznáme

**Zdvihnime priestor**

Postupujme podľa návodu v časti 1.5. Rozšírime priestor o rozmery  $q^3 = t$  a  $q^4 = u$ . Ďalej v novom priestore nebude žiadna potenciálna energia, ale iba kinetická. Tá je rovná lagražiánu a vyzerá takto:

$$L = T = \frac{1}{2}m(x'^2 + y'^2) - mgyt'^2 + u't', \quad q'^\alpha = \frac{dq^\alpha}{d\tau} \quad (3.12)$$

kde  $\tau$  je parameter pre trajektóriu v rozšírenom priestore  $q(\tau) = [x(\tau), y(\tau), t(\tau), u(\tau)]$ . Keďže celková energia je len kinetická, tak trajektóriou pohybu sústavy je geodetika. Samotné pohybové rovnice dostaneme dosadením lagranžiánu (3.12) do Lagranžových diferenciálnych rovníc:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial q'^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0 \quad (3.13)$$

$$\alpha = 1, \quad \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial x'} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = mx'' = 0 \quad (3.14)$$

$$\alpha = 2, \quad \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = my'' + mgt'^2 = 0 \quad (3.15)$$

$$\alpha = 3, \quad \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial t'} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} = -2gm(yt')' + u'' = u'' - 2gm(yt'' + y't') = 0 \quad (3.16)$$

$$\alpha = 4, \quad \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial u'} \right) - \frac{\partial L}{\partial u} = t'' = 0 \quad (3.17)$$

Z poslednej rovnice (3.17) vyplýva lineárna závislosť  $t = c\tau + b$  a v pomocných výpočtoch v časti 1.4.1 sme ukázali, že môžeme teraz všade zameniť derivácie podľa  $\tau$  za derivácie podľa času a rovnice budú správne. Rovnice pre pôvodné súradnice (3.14) a (3.15) sa nám tým prevedú na rovnice

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} + g = 0$$

Ich riešenia sú pri počiatkových podmienkach úlohy totožné s obvyklými pohybovými rovnicami (3.10) a (3.11).

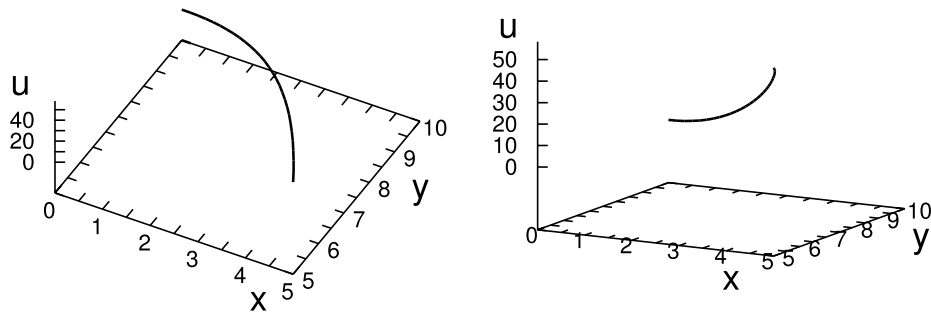
Pre zaujímavosť dopočítame závislosť  $u(t)$  z rovnice (3.16) tým, že do nej dosadíme vzťah pre  $y(t)$  (3.11):

$$\ddot{u} - 2gm(y + \dot{y}) = 0 \quad (3.18)$$

$$\text{po dosadení } y(t) \quad \ddot{u} = 2gm \left( h - \frac{1}{2}gt^2 - gt \right) \quad (3.19)$$

$$\text{a po dvojnásobnom zintegrovaní} \quad u = gm \left( ht^2 - \frac{1}{12}gt^4 - \frac{1}{3}gt^3 \right) \quad (3.20)$$

Pre  $u$  sme rovnako ako pri príklade s LHO zvolili jednoduché počiatkové podmienky  $u(0) = 0$  a  $\dot{u}(0) = 0$ , aby sme si to nekomplikovali. Vieme, že v súradniciach  $x, y$  je trajektóriou pohybu parabola. V zvisnutom priestore v súradniciach  $x, y, u$  vyzerá rovný pohyb po geodetike tak, ako krivka na obrázku 3.3. Štvrtý rozmer, čas  $t$ , sme už nezvládli nakresliť, ale v ňom nás nemá čo prekvapiť, lebo  $t(t) = t$  je jednoduchá závislosť. Vidíme, že aj geodetika, ktorá je z pohľadu zakriveného priestoru rovná čiara, môže byť dosť komplikovaná krivka. Samozrejme v priemete do súradníc  $x$  a  $y$  vidíme známu parabolu.



Obr. 3.3: Vodorovný vrh, keď letí „rovno“

Obrázok 3.3 bol nakreslený pre číselné hodnoty  $m = 1$ ,  $v_0 = 5$ ,  $g = h = 10$  a čas 0 až 1. Spolu s obrázkom 3.1, bol nakreslený v programe Maxima.

# Kapitola 4

## Nové priestory

Rozširovanie bežných priestorov o abstraktné rozmery bolo v dobe Eisenhartovho článku [2] už dobre známe z teórie relativity vo forme Minkowskeho časopriestoru, ktorý zjednodušil použitie Einsteinovej teórie. Najväčšia myšlienková podobnosť je však s *Kaluza - Kleinovou teóriou* [6], [7]. Tá vytvára z 4 - rozmernej teórie gravitácie s elektromagnetickým poľom, 5 - rozmernú gravitáciu bez elmag. poľa. Na pôvodných štyroch rozmeroch však výsledky opisujú spravenie sa systému s pôvodným elektromagnetickým poľom. V prípade Eisenhartovho zdvíhu nezískame rovnice pohybu ľahšie ako je tomu v Minkowského časopriestore, ale za skúmanie stojí, čo sa vlastne s konfiguračným priestorom udeje, ako sa zmení pridaním nových rozmerov. Pri tomto skúmaní sa dostaneme aj do hĺbín lineárnej algebry, aby sme sa neutopili tak si môžeme vziať na pomoc napríklad zaoceánsky parník číslo [8].

### 4.1 Riemannovský a pseudoriemannovský priestor

Charakter priestoru závisí od jeho metrického tenzoru  $g_{ij}$ , presnejšie od jeho *signatúry*. Tú vyjadruje počet kladných<sup>1</sup> členov na diagonále matice  $g_{ij}$  v kanonickom tvare, teda po prechode do bázy z vlastných vektorov. Potom diagonálne členy sú im prislúchajúce vlastné hodnoty.

Už sme spomínali v predošlých kapitolách, že metrický tenzor nám v priestore určuje kvadrát infinitezimálnej vzdialenosti  $ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j$ . V skutočnosti nám toho o priestore povie viac, napríklad ako počítať skalárny súčin a teda aj aká je veľkosť (kvadrát normy)

---

<sup>1</sup>Vo všeobecnom prípade signatúru udáva počet kladných a počet záporných členov, pretože na diagonále môžu byť aj nuly. Metrika v kanonickom však na diagonále nesmie mať nuly. Preto stačí poznať počet kladných členov, záporných je toľko, aby ich bolo spolu  $n$

vektora.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = g_{ij}a^i b^j = \begin{pmatrix} a^1 & \cdots & a^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

$$\|\mathbf{a}\|^2 = g_{ij}a^i a^j \quad (4.2)$$

**Riemannovský priestor** má metrický tenzor *kladne definitný* - všetky vlastné hodnoty sú kladné. Príkladom je  $n$  - rozmerný euklidovský priestor, ktorý má v kartézskych súradniciach na diagonále jednotky. To znamená, že vzdialenosť počítame pomocou Pytagorovej vety a skalárny súčin takto<sup>2</sup>

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a^1 & \cdots & a^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} = a^i \delta_{ij} b^j = a^i b_i$$

Kvadrát normy vektora potom počítame takto:

$$\|\mathbf{a}\|^2 = (a^1)^2 + \cdots + (a^n)^2$$

Veľkosť vektora v tomto priestore je vždy nezáporná a nulová len v prípade vektora  $\vec{0}$ .

Presne táto vlastnosť sa nazýva *kladná definitnosť*:

$$\|\mathbf{a}\|^2 = a^i g_{ij} a^j \geq 0, \quad \|\mathbf{a}\|^2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

Podmienka je ekvivalentná s tým, že pre kanonický tvar  $g_{ij}$  sú *všetky prvky na diagonále kladné*. Tieto podmienky nám prídu veľmi prirodzené, fyzikálne. Ved' aj kinetickú energiu sme zapisovali  $T = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j = \frac{1}{2} m v^2$  a oprávnene požadujeme, aby  $v^2$  bolo vždy kladné a nulové len ak sa systém nepohybuje. Metrický tenzor konfiguračných priestorov, vytvorených zo stupňov voľnosti ako sa to bežne robí je prirodzene kladne definitný.

Kladná definitnosť zaručuje tiež dobre definovú vzdialenosť dvoch blízkych<sup>3</sup> bodov:  $ds = \sqrt{ds^2} = \sqrt{g_{ij} dq^i dq^j}$ , ktorej sa v spojení s geodetikami venujeme v Dodatku B. Riemannovský priestor je prirodzený pre našu intuíciu aj preto, že na malých vzdialenostiach sa podobá na euklidovský<sup>4</sup> a bežný človek sa s iným ani nestretne. To sa však zmení ak človek opustí pevnú pôdu prirodzených prírodných rozmerov, začne napríklad študovať teoretickú fyziku a vydá sa na cestu vyššej abstrakcie.

<sup>2</sup>Kroneckerova delta  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pre } i = j \\ 0 & \text{pre } i \neq j \end{cases}$

<sup>3</sup>Pomocou integrálneho počtu máme dobre definovanú aj vzdialenosť ľubovoľne vzdialených bodov.

<sup>4</sup>Kvôli tomu ľudia na Zemi nevedeli dlho zistiť, že žijú na sfére a nie na rovine. Na krátkych vzdialenostiach, ktoré pre nich znamenali ich svet bolo zakrivenie Zeme zanedbateľné.



**Pseudoriemannovský priestor** je taký, ktorého metrický tenzor  $g_{ij}$  je *indefinitný*, t.j. nie je kladne definitný. Nemá potom prirodzené vlastnosti ako sme uvažovali v predošlom paragrafe. Kvadrát rýchlosti, či vzdialenosť môžu byť v takomto priestore záporné! Všeobecný pseudoriemannovský priestor má vlastné hodnoty svojho metrického tenzora aj kladné aj záporné. Špeciálny prípad je, keď má práve jednu vlastnú hodnotu zápornú a ostatné kladné, taký priestor nazývame *lorentzovský*. V úvode kapitoly sme spomenuli *Minkovského priestor* ako príklad priestora, ktorý bol vytvorený matematickou abstrakciou. Hoci je pridaný rozmer - čas<sup>5</sup> prirodzený, jeho metrika z neho robí pseudoriemannovský priestor, konkrétne lorentzovský.

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Zapríčinené to je členom pre časový rozmer:  $-1$ . Napríklad ak sa pohybujeme len po časovej osi, tak je kvadrát rýchlosti záporný. Pre fotóny, ktoré sa pohybujú vždy rýchlosťou svetla ( $v = c$ ) je kvadrát ich rýchlosti  $u^2 = -c^2 + v^2 = 0$ . V zmysle zakrivenia štvorrozmerného Minkovského priestoru fotón počas svojho pohybu prejde vždy nulovou vzdialenosťou.

Neintuitívny Minkovského priestor je podobný Eisenhartovmu nie len myšlienkovo, ale aj svojou metriku, ako si hneď ukážeme.

## 4.2 Pseudoriemannovský zdvihnutý priestor

Skúmame signatúru, t.j. vlastné hodnoty metrického tenzora  $g_{\alpha\beta}$  v bežnom prípade s  $U = U(q)$ :

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & -2U & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Od kapitána lode [8] sme sa dozvedeli, že si takúto maticu môžeme rozdeliť na podbloky a pre tie vyšetrovať vlastné hodnoty zvlášť. Blok  $g_{ij}$  je kladne definitná matica, lebo charakterizuje pôvodný konfiguračný priestor a ten je riemannovský.

<sup>5</sup>Pridáva sa 0 - tý rozmer  $ct$ , kde  $c$  je rýchlosť svetla a  $t$  čas.

Úloha spočíva v nájdení vlastných hodnôt  $\lambda$  druhého podbloku a tie hľadáme z nulovosti determinantu:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -2U - \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} &= (-2U - \lambda)(-\lambda) - 1 = 0 \\ \lambda^2 + 2U\lambda - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Korene tejto kvadratickej rovnice sú:

$$\lambda_1 = U + \sqrt{U^2 + 1} \quad (4.5)$$

$$\lambda_2 = U - \sqrt{U^2 + 1} \quad (4.6)$$

Nezáleží na znamienku  $U$  ani na presnej závislosti  $U(q)$ , vždy platí  $\lambda_2 < 0$  a to kazí kladnú definitnosť celej metriky  $g_{\alpha\beta}$ . Naopak platí  $\lambda_1 > 0$ .

### Záver

Zistili sme, že  $(n + 2)$  - rozmerný priestor vytvorený Eisenhartovým zdvihom z  $n$  - rozmerného konfiguračného priestoru s pôsobiacou potenciálnou energiou  $U(q)$  prídá o kladnú definitnosť z pôvodného priestoru. K signatúre metriky  $g_{ij}$ , ktorá je<sup>6</sup>  $(n, 0)$  pribudne jedno + a jedno - a celková signatúra metrického tenzora  $g_{\alpha\beta}$  bude  $(n + 1, 1)$ . Rovnaký typ signatúry má aj Minkowského priestor. Eisenhartov zdvihnutý priestor je teda *pseudoriemannovský*.

### 4.2.1 Prípád zovšeobecneného potenciálu

Ako je to s definitnosťou zdvihnutého priestoru v tom najvšeobecnejšom prípade z Kapitoly 2? Teda pre:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{ij} & A_i & 0 \\ A_j & -2V & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Teraz je všoobecné určenie definitnosti cez vlastné hodnoty priam nemožné, pôjdeme na to inak. Máme silné podozrenie, že keď už jednoduchý prípad (4.4) bol indefinitný, tak pri (4.7) sa to môže jedine zhoršiť. Výpočtovo určite. Na druhej strane indefinitnosť sa dokazuje ľahšie, stačí nájsť jediný prípad, v ktorom nie je splnené kladná definitnosť. Presne to aj urobíme.

Zvoľme si ten najtriviálnejší zaujímavý<sup>7</sup> prípad matice (4.7), keby pôvodný priestor bol dvojrozmerný ( $n = 2$ ) s metrikou  $g_{ij} = \delta_{ij}$ . Potenciály  $A_i$  a  $V$  uvažujeme v nejakom konkrét-

<sup>6</sup>Signatúru matice značíme  $(n, m)$ , kde  $n$  je počet kladných a  $m$  počet záporných vlastných hodnôt.

<sup>7</sup>Vektorový potenciál  $A_i$  nemá v jedno rozmere zmysel, lebo v pohybových rovniciach (2.7) sa neprejaví (odčíta sa na nulu).

nom bude tak, aby v tom bode vyzeral metrický tenzor takto:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Kladne definitná matica sa dá odhaliť aj pomocou *hlavných minorov*  $|G_k|$ , čo sú determinanty matíc tvorených ľavými hornými rohmi rozmeru  $k \times k$ .

$$|G_1| = |1| = 1 > 0 \quad (4.9)$$

$$|G_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0 \quad (4.10)$$

$$|G_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 < 0 \quad (4.11)$$

$$|G_4| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0 \quad (4.12)$$

V (4.12) sme použili pri druhom kroku Laplaceov rozvoj determinantu podľa posledného riadku (teda úlohu zohrala len jednotka na mieste  $g_{32}$ ). Kladne definitné matice musia mať všetky hlavné minory kladné, takže nami navrhnutá metrika (4.8) je indefinitná. To znamená, že ani vo všeobecnom prípade zdvihu nie je výsledný priestor riemannovský, ale je *pseudo-riemannovský*.

### Všeobecný dôkaz indefinitnosti

Pomocou viet pre hlavné minory dokážeme ukázať všeobecne indefinitnosť metrického tenzora  $g_{\alpha\beta}$  (4.7). Stačí, keď je jeden z hlavných minorov záporný a to je vždy posledný  $|G_n|$ . Použijeme rovnaký postup ako pri výpočte (4.12):

$$|g_{\alpha\beta}| = |G_n| = \begin{vmatrix} g_{ij} & A_i & 0 \\ A_j & -2V & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \times \begin{vmatrix} g_{ij} & 0 \\ A_j & 1 \end{vmatrix} = -|g_{ij}| < 0$$

Laplaceov rozvoj sme použili dvakrát a  $|g_{ij}|$  je kladné napríklad preto, že samotný metrický tenzor  $g_{ij}$  pôvodného konfiguračného priestoru je kladne definitný. Čo nás prekvapuje, je to, že determinant celej matice  $|g_{\alpha\beta}|$  vôbec nezávisí od  $A_i$ . Bez ohľadu naň je determinant vždy záporný. To je dôležité, nikdy je nie nulový ani kladný. To nám pomôže určiť signatúru  $g_{\alpha\beta}$ .

**Signatúra metriky vo všeobecnom prípade**

Predstavme si, že  $A_i$  nahradíme s  $\lambda A_i$ ,

kde  $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ . Potom náš metrický tenzor a vyzerá takto:

$$g_{\alpha\beta}(\lambda) = \begin{pmatrix} g_{ij} & \lambda A_i & 0 \\ \lambda A_j & -2V & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Z rovnakých úvah ako v predošlom paragrafe platí

$$|g_{\alpha\beta}(\lambda)| = \begin{vmatrix} g_{ij} & \lambda A_i & 0 \\ \lambda A_j & -2V & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \times \begin{vmatrix} g_{ij} & 0 \\ \lambda A_j & 1 \end{vmatrix} = -|g_{ij}| < 0 \quad \text{pre } \forall \lambda \in \langle 0, 1 \rangle \quad (4.13)$$

Teraz máme spojitý prechod medzi metrickým tenzorom (4.4) ( $\lambda = 0$ ), ktorý má signatúru  $(n + 1, 1)$  a všeobecným tenzorom (4.7) ( $\lambda = 1$ ), ktorého signatúru hľadáme. Z toho, že pre všetky  $\lambda$  platí  $|g_{\alpha\beta}(\lambda)| \neq 0$  vyplýva, že signatúra je v oboch prípadoch  $(n + 1, 1)$ . Predstavme si, že by to tak nebolo a pri zmene  $\lambda$  od 0 po 1 nastane v nejakej hodnote  $\lambda_0$  zmena znamienka jednej vlastnej hodnoty. Ale ak sa má zmeniť jej znamienko, tak potom je táto vlastná hodnota pri hodnote  $\lambda_0$  nutne nulová. Avšak determinant je invariantný na zmenu bázy, a teda rovnaký aj pre maticu v kanonickom tvare. Ak by bola jedna vlastná hodnota nulová, tak potom aj  $|g_{\alpha\beta}(\lambda_0)| = 0$ . To je však spor s (4.13). Znamienko žiadnej vlastnej hodnoty sa preto nemôže zmeniť a signatúra  $(n + 1, 1)$  sa zachová.

Eisenhartov zdvih vždy vytvára  $(n+2)$  - rozmerný *pseudoriemannovský* priestor s metrickým tenzorom  $g_{\alpha\beta}$ , ktorý má signatúru  $(n + 1, 1)$ .

**Na záver: Využitie Eisenhartovho zdvihu vo všeobecnej teórii relativity**

Z toho čo sme o Eisenhartovom zdvihu v tejto práci povedali môže nastať dojem: „Je to všetko pekné a zaujímavé, ale nič viac. Nijakým spôsobom nám to napríklad nepomôže pri počítaní.“

Ak máte tento dojem, tak je to v poriadku, rovnaký prístup k Eisenhartovmu článku [2] mal vedecký svet niekoľko desaťročí. Článok vyšiel v dobe, keď bola všetká pozornosť upriamená na vznikajúcu kvantovú mechaniku. Len pred niekoľko pár rokmi sa začali objavovať články, napríklad [5] z roku 2011, s aplikáciami Eisenhartovho zdvihu na hľadanie takzvaných *Killingových tenzorov*. Eisenhart's *lightlike lift*, ako ho nazývajú<sup>8</sup> v tomto článku, vytvára totiž priestor (matematicky) rovnakého typu ako je Minkowského časopriestor (čo

<sup>8</sup>Pridaný rozmer  $u$  je *lightlike* = *svetlu podobný*. Vektor s nenulovou zložkou len na mieste  $u$  ( $n+2$ ), t.j.  $(0, \dots, 0, a)$  má kvadrát normy rovný nule kvôli  $g_{n+2n+2} = 0$ . Rovnakú vlastnosť má v Minkowského priestore vektor predstavujúci svetlo, preto *lightlike*.

sme ukázali v predošlom paragrafe), a to využívajú. Spolu so zdvíhaním priestoru zdvíhajú Killingove tenzory, a tak ich dokážu nájsť pre komplikované časopriestory. Táto aplikácia je však už za hranicami mojej bakalárskej práce.

# Záver

Naším cieľom bolo predstaviť Eisenhartov zdvih, pochopiť ako funguje a ukázať ho v praxi. Eisenhartov zdvih je trik, ktorý sa odohráva na úrovni konfiguračných priestorov a umožňuje nám formálne počítať trajektórie pohybu spôsobeného silami ako geodetiky v priestore, ktorý má počet rozmerov o dva väčší ako je počet stupňov voľnosti reálneho fyzikálneho systému. Pôvodný článok [2] aj ďalšie, na ktoré sa práci odvolávame boli písane dosť komplikovaným jazykom a ťažko sa v nich orientovalo. Snažili sme sa preto vytvoriť niečo ako elementárny úvod do Eisenhartovho zdvihu tak, aby ho mohol pochopiť aj človek, ktorý nie je odborníkom v tejto oblasti (napr. študent).

V prvých dvoch kapitolách sme teoreticky ukázali ako zdvih funguje a dokázali, že skutočne vedie k správnym výsledkom pre bežné, ale aj zriedkavejšie typy fyzikálnych úloh. Naj všeobecnejší prípad, na ktorý vieme zdvih aplikovať môže mať metriku konfiguračného priestoru závislú od súradníc a času  $g_{ij} = g_{ij}(q, t)$ , a tak potenciálnu energiu  $U(q, \dot{q}, t) = V(q, t) + A_i(q, t)\dot{q}^i$ . Na jednoduchých príkladoch v tretej kapitole sme ilustrovali zdvih v praxi ako aj to, že geodetika v zdvihutom priestore nemusí byť vôbec jednoduchšia krivka ako trajektória v pôvodnom priestore s dynamikou.

V štvrtej kapitole sme dokázali základnú vlastnosť Eisenhartovho zdvihu. Náš nový  $(n+2)$ -rozmerný priestor, ktorý vznikol zhvihom z  $n$ -rozmerného priestoru, má vždy *lorentzovskú metriku* so signatúrou  $(n + 1, 1)$ . Túto vlastnosť využíva aj jedna aktuálna aplikácia Eisenhartovho zdvihu, ktorú uvádzame tiež v tejto kapitole. Samotná aplikácia však už spadá do diferenciálnej geometrie<sup>9</sup>, preto sme ju len spomenuli. Je však motiváciou študovať Eisenhartov zdvih ďalej. O tom možno niekedy nabudúce.

---

<sup>9</sup>Diferenciálnej geometrie sme sa okrajovo dotkli aj v prvom dodatku. To spomíname hlavne preto, aby vám náhodou dodatky neunikli. Bola by to veľká škoda :)

# Dodatok A

## Geodetické krivky z pohľadu fyzika

Geodetická krivka  $q = q(t)$  s parametrom  $t$  - časom je trajektória, po ktorej sa pohybuje hmotný bod pri voľnom pohybe.

### Voľný pohyb

Voľný pohyb je pohyb bez pôsobenia síl a keď nepôsobia sily, tak nie je ani žiadne zrýchlenie meniace rýchlosť. V našom známom euklidovskom priestore bez zakrivenia je to pohyb s konštantným vektorom rýchlosti, *rovnomerý priamočiary pohyb*. Preto myslíme to isté, keď hovoríme, že máme pohyb, ktorý ide rovno (rovnomerne priamočiary) a voľne. V teoretickej fyzike pracujeme zväčša v zakrivených priestoroch, ale princíp voľného pohybu je rovnaký. Ideme priamočiary rovnomerne v zmysle zakriveného priestoru a geodetické krivky (naše voľné trajektórie) sú dané rovnicami pre nulové zrýchlenie v tomto priestore so súradnicami  $q = (q^1, \dots, q^n)$ :

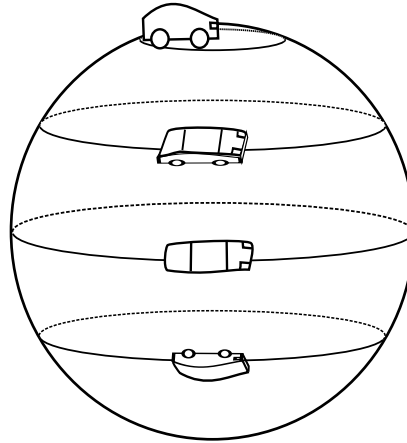
$$g_{ij} \frac{d^2 q^j}{dt^2} + \Gamma_{ijk} \frac{dq^j}{dt} \frac{dq^k}{dt} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{A.1})$$

kde  $\Gamma_{ijk}$  je Christoffelov symbol (1.4), ktorý závisí od metrického tenzora  $g_{ij}(q)$  nášho priestoru, v ktorom hľadáme geodetické krivky.

Najbežnejší neeuklidovský priestor, s ktorým máme skúsenosti je dvojrozmerná sféra, teda naša Zem, ak by bola dokonalou guľou. Čo znamená rovno na Zemi a ako na nej vyzerajú geodetiky? Predstavme si, že po celej Zemi sú cesty na rovnobežkách ako na obrázku A.1. Na všetkých cestách na severnej polguli musíme zatáčať doľava, na južnej zase doprava. Iba po ceste na rovníku pôjdeme stále rovno, to je geodetika, voľná<sup>1</sup> dráha. Čím sa líši rovník od

---

<sup>1</sup>Voľná doslova, v prípade auta zapneme tempomat, volant nastavíme rovno a auto pôjde stále po ceste aj bez nášho ďalšieho zásahu. Máme voľno od šoférovania. Keby sme však išli do zákruty tak sa nám volant stočí.



Obr. A.1: Cesta okolo sveta po rovnobežkách

ostatných rovnobežiek? Je to najväčšia možná kružnica. Naše zemepisné mapovanie je však len niečo, čo sme umelo pridali k sfére, ona necíti, aké súradnice zavádzame. Z pohľadu dvorozmernej sféry je geodetikou každá najväčšia kružnica. V geografii sa tieto kružnice nazývajú *veľké kružnice*.

To, že jazda po rovníku rieši rovnice (A.1) si vieme ľahko overiť, ale ak by sme sa chceli presvedčiť, že aj ostatné veľké kružnice(krivky) predstavujú naozaj nulové zrýchlenie, a teda pohyb po geodetickej krivky, tak to vyžaduje poznatky z diferenciálnej geometrie. Tým sa zaoberať nebudeme, ale dávam do pozornosti kapitolu 15 v knihe [3]. My si ukážeme iný spôsob, ktorým sa dostaneme k rovnakým rovniciam.

## Najmenší účinok

V teoretickej mechanike hľadáme geodetickú krivku ako riešenie variačnej úlohy, a to trajektóriu  $q(t)$  v konfiguračnom priestore, ktorá je extrémalom účinkového integrálu:

$$S^L[q] \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (\text{A.2})$$

Úloha pochádza z *princípu najmenšieho účinku*, fundamentálnej vlastnosti prírody: systém sa pohybuje v konfiguračnom priestore (vyvíja sa) takým spôsobom, ktorý minimalizuje účinok (A.2).

Podintegrálna funkcia  $L$  sa nazýva lagranžian a pre voľný pohyb je rovnaká ako kinetická energia<sup>2</sup>.

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}v^2$$

<sup>2</sup>Všeobecný pohyb pri pôsobení síl je taktiež riešením rovnakej variačnej úlohy, iba s tým rozdielom, že lagranžian obsahuje aj potenciálnu energiu.



Rýchlosť  $v$  v konfiguračnom priestore má v sebe zarátané aj členy za hmotnosť. Vzťah pre lagranžián môžeme zapísať pomocou metrického tenzoru  $ds^2 = g_{ij}(q)dq^i dq^j$ , do ktorého tiež vkladáme hmotnosť. Potom:

$$\begin{aligned} L(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2}v^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{ds^2}{dt^2} \\ &= \frac{1}{2} g_{ij} \frac{dq^i}{dt} \frac{dq^j}{dt} \\ &= \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j \end{aligned}$$

Riešenie potom hľadáme dosadením podintegrálnej funkcie  $L$  do Eulerových - Lagranžových rovníc:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \\ \text{po dosadení za } L & \quad \frac{d}{dt} (g_{ij} \dot{q}^j) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} \dot{q}^k \dot{q}^j = 0 \\ \text{t.j.} & \quad g_{ij} \ddot{q}^j + \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \dot{q}^k \dot{q}^j - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} \dot{q}^k \dot{q}^j = 0 \end{aligned}$$

To je skutočne rovnaký vzťah ako (A.1), pretože platí  $g_{ij} = g_{ji}$ . Rýchlosť je aj v prístupe cez najmenší účinok konštantná. Lagranžián, kde rýchlosť  $v$  vystupovala je rovný konstante, lebo predstavuje celkovú energiu.

### Záver

Geodetická krivka je trajektória s konštantnou rýchlosťou. Určená je diferenciálnymi rovnicami:

$$g_{ij} \ddot{q}^j + \Gamma_{ijk} \dot{q}^j \dot{q}^k = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

# Dodatok B

## Súvis najkratšej a voľnej dráhy

V tomto dodatku ukážeme, že geodetika ako sme si ju zadefinovali v Dodatku A, t.j. čiara po ktorej sa koná voľný pohyb je výnimočná v Riemannovom priestore (geometrii) tým, že je to zároveň najkratšia možná spojnice dvoch bodov.

### Voľný pohyb

Ak nepôsobia sily, tak trajektória častice v  $n$ -rozmernom priestore so súdanicami  $(x^1, \dots, x^n)$  je daná diferenciálnymi rovnicami (A.1):

$$g_{ij} \frac{d^2 x^j}{dt^2} + \Gamma_{ijk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

### Najkratšia dráha

#### Definícia geodetiky ako najkratšej čiary

Pripomeňme, že Riemannova geometria je definovaná metrikou

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^1, \dots, x^n) dx^\mu dx^\nu \quad (\text{B.1})$$

čo je vlastne štvorec vzdialenosti dvoch infinitezimálne blízkych bodov, pričom platí:

1.  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$
2.  $\det \|g_{\mu\nu}\| \neq 0$

Hľadanie geodetiky ako krivky  $\Lambda : x^\mu = x^\mu(\tau)$  je potom úlohou variačného počtu, kedy hľadáme najkratšiu krivku spájajúcu dané body  $A [a^1, \dots, a^n], B [b^1, \dots, b^n]$ .

Okrajové podmienky pre krivku sú, že začína v bode  $A$  a končí v  $B$ :

$$\tau_0 \rightarrow A : x^\mu(\tau_0) = a^\mu, \quad (\text{B.2})$$

$$\tau_1 \rightarrow B : x^\mu(\tau_1) = b^\mu, \quad \mu = 1, \dots, n \quad (\text{B.3})$$

Vzdialenosť je daná funkcionálom:

$$s[\Lambda] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{g_{\mu\nu}[x^1(\tau), \dots, x^n(\tau)] \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\tau \quad (\text{B.4})$$

Najkratšia čiara ako krivka je extrémalom funkcionálu (B.4) s okrajovými podmienkami (B.2), (B.3)

Riešenie variačnej úlohy spĺňa *Eulerove - Lagranžove diferenciálne rovnice*:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\sigma} \right) - \frac{\partial F}{\partial x^\sigma} = 0, \quad \sigma = 1, \dots, n \quad (\text{B.5})$$

kde  $F = \sqrt{g_{\mu\nu}[x^1(\tau), \dots, x^n(\tau)] \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$  je podintegrálna funkcia funkcionálu (B.4).

Dosadením  $F$  do rovníc (B.5) dostaneme

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{g_{\mu\sigma} \dot{x}^\mu}{\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}{\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} = 0, \quad \sigma = 1, \dots, n \quad (\text{B.6})$$

### Prvé zjednodušenie: prirodzený parameter krivky

Parameter  $\tau$  nie je obmedzený žiadnymi podmienkami. Ak zvolíme  $\tau = s$  (B.4) tak sa nám rovnica (B.6) zjednoduší na tvar:

$$\frac{d}{ds} (g_{\mu\sigma} \dot{x}^\mu) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0, \quad \sigma = 1, \dots, n \quad \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \quad (\text{B.7})$$

$$g_{\mu\nu}[x^1(s), \dots, x^n(s)] \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 1 \quad (\text{B.8})$$

Z pohľadu krivky parameter  $s$  počíta prejdenú dráhu. Je tu vidieť krásu matematiky. Od abstraktného ľubovoľného parametru  $\tau$ , ktorý nemá nič spoločné so samotnou krivkou prejdeme ku konkrétnemu parametru  $s$ , ktorý je úzko spojený s pohybom po krivke, počíta nám koľko sme už prešli po krivke. Často sa vo svete stretávame so situáciami **niečo - za niečo**. Tu sme zaviedli parameter, ktorý vieme dobre odsledovať v reálnom svete (meriame dĺžku) a rovnice sa nám zjednodušili. Dobrý obchod :)

### Druhé zjednodušenie: Christoffelove symboly 1. druhu

V tomto zjednodušení už nie je toľko krásy ako v prvom. Keď sa nad tým zamyslíme tak vôbec žiadna. Len formálne zavedieme Christoffelov symbol, do ktorého skryjeme menej príjemné členy rovníc (B.7). Rovnice s použitím toho symbolu sú už jednoduché. Pri všeobecnej práci s rovnicami nám jednoduchší zapis skrátí prácu, a tak isto ho Eisenhart používal vo svojom článku [2]. Samotné výpočty nám však postup cez vyjadrovanie zložiek Christoffelovho symbolu môže skôr predĺžiť ako skrátiť, preto treba používať Christoffelove symboly rozumne.

Upravujeme (B.7):

$$g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

$$(\lambda \rightarrow \nu)$$

$$g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

Teraz využijeme symetriu  $g_{\mu\sigma}$  a vykonajme zámenu  $\mu \leftrightarrow \sigma$  v prvom člene v zátvorke. V druhom člene zátvorky vykonajme zámenu  $\mu \leftrightarrow \nu$  (symetria kvôli súčinu derivácií za zátvorkou) a získame konečný tvar:

$$g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\sigma\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad \sigma = 1, \dots, n \quad (\text{B.9})$$

Christoffelovým symbolom prvého druhu nazývame člen:

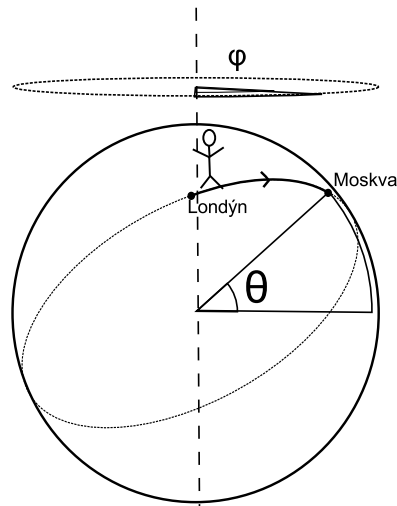
$$\Gamma_{\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial q^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial q^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\sigma} \right) \quad (\text{B.10})$$

Vzťah (B.9) je až na premenú podľa ktorej derivujeme a teda parameter krivky  $s$  rovnaký ako geodetická krivka (A.1). Takže keď nehľadáme na geodetiky ako krivky, ale len ako na čiary, tak najkratšia čiara je zároveň tá, po ktorej sa koná voľný pohyb.

## Fyzikálny význam indentickosti kriviek

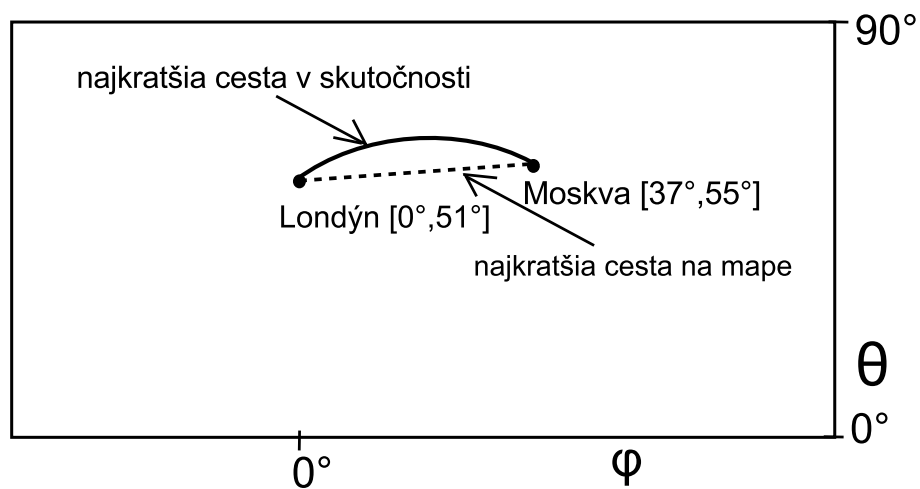
Zistili sme, že keď pôjdeme „rovno“, tak pôjdeme najkratšou cestou. V intuitívnom euklidovskom priestore je to známa vec. Najkratšou spojnicou dvoch bodov je úsečka a hmotný bod v bezsilovom poli nemení vektor rýchlosti a pohybuje sa po priamke. Zaniká rozdiel medzi pojmi krátko a rovno. Ako sme však ukázali, to že sa stráca rozdiel medzi najkratšou a voľnou trajektóriou je vlastnosť všetkých riemannovských priestorov definovaných metrickým tenzorom  $g_{ij}$ <sup>1</sup>. Príkladom z reálneho života je pohyb po Zemi rovno v zmysle „rovno za nosom“, z lokálneho hľadiska máme pocit, že náš pohyb po dvojrozmernom povrchu Zeme je po priamke. Keby sme však kráčali, respektíve miestami plávali, dostatočne dlho, tak by sme postupne obišli celú Zem odokola, vrátili by sme sa domov. Zistili by sme, že náš pohyb bol v skutočnosti po kružnici. Nemusíme sa však púšťať na tieto dlhé výpravy, zostaneme pri počítaní. Ak však budete náhodou niekedy cestovať povedzme z Londýna do

<sup>1</sup>Riemannovský priestor znamená, že jeho metrický tenzor  $g_{ij}$  má v kanonickom tvare mať na diagonále iba kladné čísla. Táto poznámka je dôležitá, zabezpečí, aby kvadrát vzdialenosti bol vždy kladný, a teda mal zmysel. Náš zdvihnutý priestor takúto vlastnosť žiaľ nemá, takže sa v ňom o najkratšej vzdialenosti uvažovať nedá. Napriek tomu venujem priestor úvahám o najkratšej vzdialenosti, vzťahujú sa na väčšinu používaných priestorov a sú podľa mňa dosť pekné.



Obr. B.1: Najkratšia - rovná cesta z Londýna do Moskvy

Moskvy ako je znázornené na obrázku B.1, tak podobnú expedíciu absolvujete<sup>2</sup>. Denne tak robia stovky, či tisícky lietadiel. Samozrejme nie preto, že vedia lietať iba rovno, ale pretože, ako sme ukázali v tomto dodatku, cesta rovno je najkratšia.



Obr. B.2: Tá istá rovná cesta ako na obrázku B.1, tentokrát nakreslená na mape zo školského atlasu

Na obrázku B.2 vidíme, aké zavádzajúce a proti všetkej ľudskej intuícii sú 2D mapy

<sup>2</sup>Samozrejme to bude cesta v menšej mierke ako okolo sveta. Pre úsporu času a väčšie pohodlie však odporúčame ísť lietadlom, a teda sa nedržať presne obrázku B.1.

Zeme, ak nemajú serióznú euklidovskú metriku<sup>3</sup>, ale ako v tomto prípade metriku:

$$ds^2 = R^2 * d\theta^2 + R^2 * \cos^2(\theta) * d\phi^2$$

kde  $R$  je polomer Zeme,  $\theta \in \langle -90^\circ, 90^\circ \rangle$  je takzvaná zemepisná šírka v stupňoch a  $\phi \in \langle -180^\circ, 180^\circ \rangle$  je takzvaná zemepisná dĺžka rovnako v stuňoch. Vidíme, že v takýchto mapách je najkratšia vzdialenosť medzi dvoma bodmi rozhodne niečo iné ako úsečka.

**Ako ideme po krivkách?** Za povšimnutie stojí aj *spôsob pohybu* po oboch krivkách spomínaných v tomto dodatku, najkratšej spojnici a vol'nej dráhe. Matematicky to závisí od toho, čím sú krivky parametrizované. Pri najkratšej spojnici sme mali predpis  $x(s)$ , kde  $s$  je prejdená dráha, t.j. akou rýchlosťou po nej ideme nehrá úlohu<sup>4</sup>. Pri vol'nom pohybe po geodetickej krivke  $x(t)$  ideme konštantnou rýchlosťou<sup>5</sup>. Vidíme, že tieto zásadne iné úlohy majú rovnaké riešenia (ak na ne hľadíme ako na čiary) a splývajú do jednej. Môžeme počítat' najkratšiu spojnicu dvoch bodov ako trajektóriu vol'nej častice a naopak.

Takže príroda nám uľahčuje prácu a vždy nás poteší, keď nájdeme analógie v zdanlivo nesúvisiacich úlohách. Môžeme zovšeobecňovať, nemusíme si toho až tak veľa pamätať a zároveň prenikáme do hlbších štruktúr sveta okolo nás. V neposlednom rade si po takomto estetickom zážitku odnesieme motiváciu spoznávať svet hlbšie a vystaviť sa tak podobným nečakaným zážitkom.

---

<sup>3</sup>Vzdialenosť v euklidovskom priestore počítame pomocou Pytagorovej vety, v prípade dvojrozmerného priestoru  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ .

<sup>4</sup>Ako by to aj mohlo hrať úlohu, keď je raz niečo najkratšie, tak tomu nezmeníme dĺžku nech po tom ideme akýmkoľvek spôsobom.

<sup>5</sup>Kinetická energia sa nemení.

# Literatúra

- [1] A. Einstein. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie (The foundation of the General Theory of Relativity). *Annalen der Physik*, 40:284–337, 1916.
- [2] L.P. Eisenhart. Dynamical trajectories and geodesics. *Annals Math.*, 30:591–606, 1928.
- [3] M. Fecko. *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov*. Iris, 2004.
- [4] M. Fecko. Rozšírený sylabus a príklady k prednáške “teoretická mechanika”, 2010.
- [5] G.W. Gibbons, T. Houry, D. Kubiznak, and C.M. Warnick. Some Spacetimes with Higher Rank Killing-Stackel Tensors. *Phys.Lett.*, B700:68–74, 2011.
- [6] T. Kaluza. *Zum Unitätsproblem der Physik*. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1921.
- [7] O. Klein. Quantentheorie und fünfdimensionale relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik*, 37(12):895–906, 1926.
- [8] P. Zlatoš. *Lineárna algebra a geometria*. Marenčin PT, 2011.