

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ELEKTRICKÉ SIETE A KOHOMOLÓGIE

Bakalárska práca

2014

Zuzana Šinská

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ELEKTRICKÉ SIETE A KOHOMOLÓGIE

Bakalárska práca

Študijný program: Fyzika
Študijný odbor: 1160 Fyzika
Školiace pracovisko: Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky
Školiteľ: doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.

2014

Zuzana Šinská



ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Zuzana Šinská
Študijný program: fyzika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 4.1.1. fyzika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov: Elektrické siete a kohomológie

Cieľ: Keď riešime elektrické siete, používame pritom Kirchhoffove zákony. Ukazuje sa, že tieto zákony sa dajú sformulovať v "kohomologickom jazyku". (A takto potom aj naozaj riešiť.) Čo to znamená?

Základným objektom v teórii kohomológií je "komplex", čo je sústava lineárnych priestorov očíslovaných celými číslami spolu so sústavou lineárnych zobrazení z priestoru s číslom n do priestoru s číslom $n+1$. Tieto zobrazenia musia mať navyše vlastnosť, že keď zložíme ľubovoľné dve susedné, dostaneme nulu. (Sústava tých zobrazení sa nazve diferenciál.) Keď takýto komplex niekde objavíme, dajú sa počítať jeho "kohomológie" (prakticky isté faktorpriestory), čo spravidla prinesie istú užitočnú informáciu o tej oblasti, kde sme ten komplex objavili.

No a takýto komplex sa dá priradiť aj elektrickej sieti. Neznáme veličiny sa istým spôsobom zakódujú do prvkov vyššie spomenutých vektorových priestorov a zistí sa, že tam máme prirodzene aj tie potrebné lineárne zobrazenia (diferenciál). Kirchhoffove zákony sú v tomto jazyku jasné a stručné výroky. Napríklad prvý z nich hovorí, že diferenciál vektora, ktorý kóduje prúdy v obvode (tento vektor je z priestoru s číslom 1), je nulový.

Cieľ úlohy:

Cieľom práce bude naučiť sa spomenutý formalizmus na všeobecnej úrovni, zrátať si pomocou neho nejaké konkrétne obvody a spísať to celé tak zrozumiteľne, aby sa to z toho mohli naučiť aj iní záujemcovia (napríklad spolužiaci/spolužiačky).

Vhodné pre záujemcu, ktorého baví lineárna algebra a neodradí ho trochu (dobro motivovanej) abstrakcie.

Literatúra: P.Bamberg, S.Sternberg: A course in mathematics for students of physics: 2, Cambridge University Press 1990

Vedúci: doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.

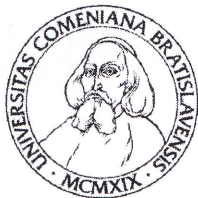
Katedra: FMFI.KTFDF - Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky

Vedúci katedry: doc. RNDr. Tomáš Blažek, PhD.

Dátum zadania: 18.04.2013

Dátum schválenia: 22.04.2013

prof. RNDr. Jozef Masarik, DrSc.
garant študijného programu



88428710

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Gušta

študent

m. Fečko

vedúci práce

Čestné prehlásenie

Vyhlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracovala samostatne s použitím uvedenej literatúry.

Bratislava, 29.5.2014

.....

Zuzana Šinská

Pod'akovanie

Na tomto mieste by som sa chcela poďakovať môjmu vedúcemu práce doc. RNDr. Mariánovi Feckovi, PhD. za čas, ktorý mi venoval, za jeho ochotu a trpezlivosť, ako aj za cenné rady a pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce.

Moje poďakovanie tiež patrí rodine a kamarátom za pomoc a podporu pri tvorbe práce, predovšetkým mojej mamine, ktorá ma vždy naháňala do písania.

Abstrakt

<i>Autor:</i>	Zuzana Šinská
<i>Názov práce:</i>	Elektrické siete a kohomológie
<i>Škola:</i>	Univerzita Komenského v Bratislave
<i>Fakulta:</i>	Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
<i>Katedra:</i>	Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky
<i>Vedúci práce:</i>	doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.
<i>Miesto:</i>	Bratislava
<i>Dátum:</i>	29.5.2014
<i>Počet strán:</i>	63
<i>Druh záverečnej práce:</i>	Bakalárska práca

Abstrakt: V tejto práci sa zaoberáme riešením elektrických sietí s využitím kohomológií. V prvej časti si zopakujeme Kirchhoffove zákony a rôzne metódy riešenia sietí, sústredíme sa na metódu obvodových prúdov a metódu uzlových potenciálov. V ďalšej časti do sietí zavedieme prvky algebraickej topológie, ktoré nám, ako uvidíme, prinesú užitočnú informáciu o samotnej sieti. Budeme sa zaoberať komplexmi, vektorovými priestormi v nich, ich duálnymi priestormi, zobrazeniami medzi nimi, nájdeme kohomológie komplexu. Zistíme, že Kirchhoffove zákony sa dajú celkom prirodzene sformulovať v "kohomologickom jazyku" a potom pomocou dvoch spomenutých metód vieme takto siete riešiť. Nakoniec si ukážeme tento postup na konkrétnych príkladoch, ozrejníme si význam jednotlivých krokov a zistíme, kedy je možné takýto postup použiť. Čitateľ si tiež môže skúsiť vyriešiť nejakú sieť pomocou programu, ktorý obsahuje príloha.

Kľúčové slová: elektrická sieť, metóda obvodových prúdov, metóda uzlových potenciálov, komplex, kohomológie

Abstract

<i>Author:</i>	Zuzana Šinská
<i>Title:</i>	Electrical networks and cohomologies
<i>University:</i>	Comenius University in Bratislava
<i>Faculty:</i>	Faculty of Mathematics, Physics and Informatics
<i>Department:</i>	Department of Theoretical Physics and Didactics of Physics
<i>Advisor:</i>	doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.
<i>City:</i>	Bratislava
<i>Date:</i>	29.5.2014
<i>Number of pages:</i>	63
<i>Type of thesis:</i>	Bachelor thesis

Abstract: The thesis deals with a solution of electrical networks using cohomology. In the first part, we recapitulate Kirchhoff's laws as well as various methods of network solution focusing especially on the mesh-current method and the node-potential method. In the next part, the elements of algebraic topology are introduced providing us with useful information about the network. We deal with complexes, vector spaces in them, their dual spaces, mappings between them and we find the cohomology of complex. We find out that Kirchhoff's laws can be naturally formulated in "cohomological language" and on the basis of the above mentioned methods, we are able to solve networks in this way. At the end we demonstrate the procedure on real examples, show the meaning of individual steps and we discuss when this procedure can be used. In addition, the reader is invited to try to solve some network using the program enclosed in our thesis.

Key words: electrical network, mesh-current method, node-potential method, complex, cohomology

Predhovor

V práci sa budeme zaoberať riešením elektrických sietí. Ako už názov hovorí, použijeme na to aparát algebraickej topológie, pretože sa ukáže byť užitočný. Zistíme, že elektrickej sieti môžeme priradiť komplex, v ktorom postupne objavíme všetky potrebné fyzikálne prvky. Dokážeme tu sformulovať aj Kirchhoffove zákony, dokonca bez veľkej námahy. A takýmto spôsobom vieme elektrické siete aj naozaj riešiť. Cieľom tejto bakalárskej práce je teda naučiť sa formalizmus, ktorý na to potrebujeme, najskôr na všeobecnej úrovni a potom ho aplikovať v konkrétnych prípadoch a pomocou neho vyriešiť niekoľko sietí.

Práca predpokladá znalosť lineárnej algebry a základného kurzu elektromagnetizmu, preto sa autorka snažila, aby bola prístupná pre študentov, ktorí tieto prednášky absolvovali a aby mohol čitateľ po jej prečítaní sám vyriešiť nejaký príklad, ak bude mať záujem. Práca sa snaží objasňovať veci skôr na intuitívnej úrovni, čomu zodpovedá niekedy aj menej presná matematická formulácia.

Obsah

Predhovor	viii
Úvod	1
1 Elektrické siete I.	3
1.1 Kirchhoffove zákony	3
1.2 Pravidlá pre počítanie	4
1.3 Metóda obvodových prúdov	5
1.4 Metóda uzlových potenciálov	5
1.5 Príklad	5
2 Elektrické siete II.	9
2.1 Sieť a komplex	9
2.2 Hraničné zobrazenie	13
2.2.1 Jadro a obraz hraničného zobrazenia	14
2.2.2 Priestor cyklov	16
2.2.2.1 Hľadanie slučiek	17
2.3 Duálne priestory a kohraničné zobrazenie	19
2.3.1 Zachovanie energie	21
2.3.2 Jadro a obraz kohraničného zobrazenia	21
2.4 Metóda obvodových prúdov a metóda uzlových potenciálov	25
2.4.1 Kirchhoffove zákony v symetrickej forme	25
2.4.2 Všeobecná vetva	27
2.4.3 Metóda obvodových prúdov	28
2.4.4 Metóda uzlových potenciálov	29

<i>OBSAH</i>	x
3 Konkrétne príklady	30
3.1 Na úvod	30
3.2 Význam jednotlivých krokov	36
3.3 Nutná podmienka úspechu	42
3.4 Kocka	46
Záver	54
A Kohomológie	56
A.1 Komplexy a homológie	56
A.2 Duálne priestory a kohomológie	58
Literatúra	61
Príloha na CD	62

Úvod

Na začiatku môžeme spomenúť niečo z histórie, kto vôbec na takéto spojenie elektrických sietí a kohomológií prišiel. V roku 1923 Hermann Weyl publikoval článok v španielčine [1], ktorý popisoval elektrické siete v termínoch homológie a kohomológie grafov. Koncom šesťdesiatych a začiatkom sedemdesiatych rokov dvadsiateho storočia boli tieto myšlienky ďalej rozvíjané autormi ako Paul Slepian, G. E. Ching, J. P. Roth a Stephen Smale. Bamberg a Sternberg vo svojej knihe [2] používajú elektrické siete ako motiváciu pre zavedenie homológie a kohomológie.

Na úvod si v prvej kapitole zopakujeme Kirchhoffove zákony, ktoré sú dôležité pri riešení elektrických sietí, spomenieme si na "klasické" pravidlá počítania a ukážeme si dve duálne metódy (metódu obvodových prúdov a metódu uzlových potenciálov), ktoré môžu riešenie v niektorých prípadoch značne uľahčiť. A toto si ilustrujeme na konkrétnom príklade.

V druhej kapitole na chvíľu zabudneme na to, že skúmame elektrickú sieť, budeme si všímať iba jej topológiu a zistíme, že takejto sieti môžeme priradiť komplex, presnejšie jednorozmerný komplex. V ňom objavíme zobrazenie, ktorého význam nám ukáže, že v reči komplexu vieme prirodzene sformulovať Kirchhoffov zákon pre prúdy. Pozrieme sa tiež na jadro a obraz tohto zobrazenia a uvidíme, že nezávislé slučky komplexu (t.j. nezávislé obvody elektrickej siete) môžu byť bázou pre jadro zobrazenia a tak je v našom komplexe prítomný aj základ pre metódu obvodových prúdov. Ďalej si ukážeme, že tu vieme sformulovať aj Kirchhoffov zákon pre napätie. A už nám nebude nič brániť v tom, aby sme mohli týmto spôsobom riešiť elektrické siete.

V tretej kapitole využijeme nadobudnuté poznatky v konkrétnych príkladoch. Začneme s jednoduchou úlohou, kde si celý postup vysvetlíme. Následne si skúsime objasniť význam jednotlivých krokov vo všeobecnom prípade a pomocou nich zistiť, kedy

máme šancu na úspech pri počítaní uvedeným spôsobom. Nakoniec si vyskúšame ešte jeden zložitejší príklad - sieť v tvare kocky, ktorý môže čitateľa presvedčiť o užitočnosti tejto metódy.

V dodatku ponúkame čitateľovi stručný pohľad na komplexy a všetko, čo je s nimi spojené a pokúsime sa poukázať na to, že slovo kohomológie má naozaj oprávnené miesto v názve tejto práce.

Prílohou práce je program, ktorý počíta elektrické siete. Využíva pri tom obe metódy, ktorými sa tu zaoberáme - metódu obvodových prúdov a metódu uzlových potenciálov. Avšak čitateľ, ktorý má záujem si ho vyskúšať, si nemusí takmer nič pamätať z tejto práce, pretože program sa snaží priviesť čitateľa k výsledku iba odpoveďami na jednoduché otázky.

Kapitola 1

Elektrické siete I.

Pri riešení elektrických sietí sú potrebné niektoré základné poznatky, ktoré si teraz uvedieme len pre zopakovanie a s ktorými sa už čitateľ mohol stretnúť na úvodných prednáškach z elektromagnetizmu alebo aj na strednej škole. V ďalšom budeme uvažovať jednoduchý prípad (a nám asi najbližší z bežných úloh), že elektrická sieť obsahuje iba vetvy s rezistormi a našou úlohou je určiť neznáme napätia a prúdy vo vetvách.

1.1 Kirchhoffove zákony

Prvý Kirchhoffov zákon (zákon pre prúdy):

Algebraický súčet všetkých prúdov v uzle elektrickej siete sa rovná nule.

Prúdy, ktoré do uzla vtekajú, uvažujeme s kladným znamienkom a naopak, prúdy vytekajúce z uzla so záporným (toto nie je všeobecne platné, je to na našej dohode). Tento zákon platí iba pre stacionárne prúdy, keď sa náboj v uzle nehromadí alebo z neho neubúda.

Druhý Kirchhoffov zákon (zákon pre napätia):

Algebraický súčet elektromotorických napätí zdrojov v uzavretom obvode elektrickej siete sa rovná súčtu potenciálových spádov na jednotlivých odporoch obvodu.

Toto vyjadrenie je ekvivalentné tvrdeniu, že algebraický súčet všetkých napätí v uzavretom obvode sa rovná nule a zodpovedá formálne tvrdeniu, že integrál intenzity elektrického poľa po uzavretej dráhe vybraného obvodu sa rovná nule.

1.2 Pravidlá pre počítanie

Síce priamočiarly, ale nie najjednoduchší spôsob je výpočet prúdov v jednotlivých vetvách s využitím Kirchhoffových zákonov. Snáď každý pozná tieto pravidlá pre počítanie úloh s elektrickými sieťami (počet vetiev označme b , počet uzlov n):

1. V našej sieti si vyznačíme predpokladané smery prúdov v jednotlivých vetvách. Ak by sme náhodou niektorý smer neuhádli, nič sa nedeje. Ak má totiž skutočný prúd opačný smer ako sme určili, na konci výpočtu bude jeho číselná hodnota záporná, veľkosť však bude rovnaká. Ak smer príslušného prúdu bol zvolený správne, hodnota bude kladná.
2. Pre všetky uzly v sieti napíšeme rovnice pre prúdy podľa prvého Kirchhoffovho zákona, pričom rešpektujeme znamienkovú konvenciu. Do výpočtov nám stačí vziať len ľubovoľných $n - 1$ rovníc, pretože posledná rovnica je už iba lineárnou kombináciou predchádzajúcich.
3. V ďalšom kroku potrebujeme nájsť všetky nezávislé uzavreté obvody siete. Aj v tomto máme slobodu, zväzuje nás iba počet daných obvodov, ktorý je určený jednoznačne ($p = b - (n - 1) = b - n + 1$). Nezávislosť chápeme v bežnom zmysle: Nový obvod je nezávislý, ak sa nedá vytvoriť z už vybraných obvodov. Možno ich vyberať rôznymi spôsobmi, pre zložité siete boli vypracované dokonca špeciálne metódy výberu nezávislých obvodov, z ktorých najznámejšia je metóda nazývaná *metóda úplného stromu*.
4. V každom takomto obvode ďalej vyznačíme orientáciu (smer obehu). Všetko opäť ľubovoľne.
5. Teraz si zavoláme na pomoc druhý Kirchhoffov zákon a pre každý z p nezávislých obvodov napíšeme rovnice (riadiac sa týmto zákonom). V súčte vystupujú napätia zdrojov a potenciálové spády na odporoch, kde je potrebné takisto dodržať nejaké znamienkové predpisy. Napätia zdrojov v obvode uvažujeme s kladným znamienkom, ak smer obehu ide od $+$ k $-$, potenciálové spády budú kladné, ak vyznačený smer prúdu a smer obehu sú rovnaké. V opačnom prípade sú záporné.

6. Takto získame systém b rovníc ($n - 1 + p = b$) pre neznáme prúdy, ktoré môžeme riešiť bežnými metódami lineárnej algebry.

Okrem priameho využitia Kirchhoffových zákonov existujú ďalšie dve duálne metódy na takúto analýzu elektrických sietí: metóda obvodových prúdov a metóda uzlových potenciálov. Obe z týchto metód znižujú počet rovníc, ktoré treba riešiť (výhoda ich použitia je závislá od konkrétnej siete).

1.3 Metóda obvodových prúdov

Táto metóda je založená na takom špeciálnom výbere prúdov v sieti, aby bol pre ne automaticky splnený prvý Kirchhoffov zákon. Rovnice pre dané prúdy potom získame aplikovaním druhého Kirchhoffovho zákona. Takýmito prúdmi sú prúdy tečúce v jednotlivých nezávislých obvodoch siete. Tieto prúdy sú len myslené, nie sú skutočné. Reálny prúd vo vetve je daný súčtom obvodových prúdov tečúcich vetvou. Počet rovníc sa rovná počtu nezávislých obvodov.

1.4 Metóda uzlových potenciálov

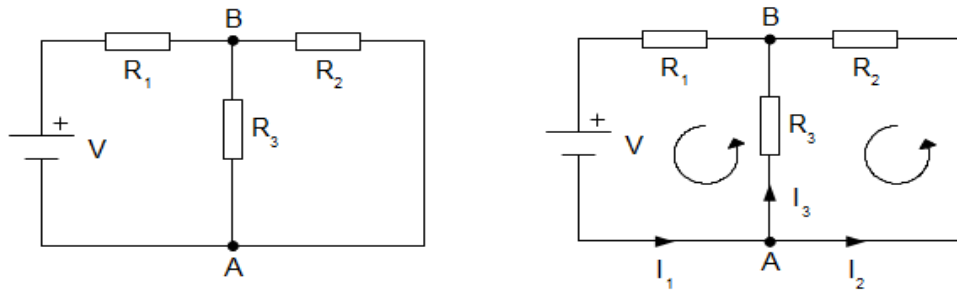
V sieti si zvolíme ľubovoľný uzol a položíme potenciál v tomto uzle rovný nule. Potenciály ostatných uzlov sú potom napätia oproti nášmu zvolenému. Rovnice pre ne získame použitím prvého Kirchhoffovho zákona pre každý zo zvyšných uzlov. Počet rovníc je teda o jeden menší ako počet uzlov.

1.5 Príklad

Vyskúšajme si tento postup na konkrétnom príklade. Uvažujme jednoduchú sieť znázornenú na Obr. 1.1, ktorá pozostáva z troch vetiev, ktoré sú spojené dvoma uzlami (body A a B).

Ak si zvolíme smery prúdov ako je naznačené na Obr. 1.1, môžeme pre jeden uzol písať rovnicu

$$I_3 + I_2 = I_1$$



Obr. 1.1: Elektrická sieť (vľavo) aj so zvolenými smermi prúdov a orientáciami vybraných nezávislých slučiek (vpravo)

Rovnica pre druhý uzol je iba (-1) -násobok našej, teda prvý Kirchhoffov zákon nám viac už neposkytne. V ďalšom kroku je potrebné nájsť nezávislé obvody siete. V tomto prípade je to celkom jednoduché, vidíme, že takéto obvody sú tu dva. Môžeme ich vybrať napríklad tak, ako je to vyznačené. Tomu zodpovedajúce rovnice podľa druhého Kirchhoffovho zákona sú

$$\begin{aligned} 0 &= -R_3 I_3 + R_2 I_2 \\ 0 &= V + R_3 I_3 + R_1 I_1 \end{aligned}$$

Systém týchto troch rovníc je už úplný a lineárne nezávislý, teraz vieme vypočítať jednotlivé prúdy a získať tak celkovú informáciu o sieti.

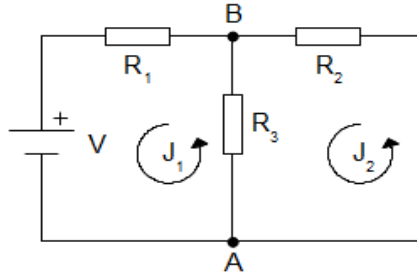
Aj ďalšie dve metódy si môžeme ilustrovať na našom príklade.

Metóda obvodových prúdov

Na začiatku musíme opäť nájsť všetky nezávislé obvody siete. V každom obvode si potom označíme formálne tečúci prúd. V jednotlivých vetvách je potom skutočný prúd súčtom všetkých obvodových prúdov. Výhodou je, že tieto formálne tečúce prúdy spĺňajú prvý Kirchhoffov zákon automaticky, rovnice, ktoré potrebujeme, získame aplikovaním druhého zákona. Ich počet bude rovný počtu obvodov.

$$\begin{aligned} V + R_1 J_1 + R_3(J_1 - J_2) &= 0 \\ R_3(J_2 - J_1) + R_2 J_2 &= 0 \end{aligned}$$

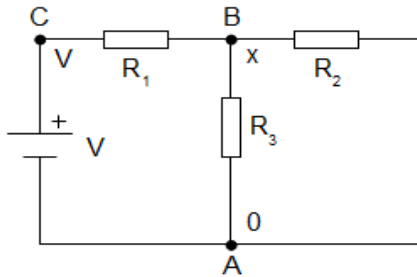
Takto sme získali sústavu dvoch rovníc s dvoma neznámymi, teda o jednu rovnicu menej ako pri priamom využití Kirchhoffových zákonov.



Obr. 1.2: Výber nezávislých slučiek a ich zvolené orientácie v metóde obvodových prúdov

Metóda uzlových potenciálov

Keďže elektrický potenciál je určený jednoznačne až na konštantu, môžeme jeden ľubovoľný uzol zobrať za referenčný a položiť jeho potenciál rovný nule a potenciály ostatných uzlov budeme uvažovať vzhľadom k referenčnému. V tomto prípade rovnice získame z prvého Kirchhoffovho zákona. Ak si v našej sieti vezmeme napríklad bod A za bod s nulovým potenciálom, potom potenciál v bode C (ktorý sme si nateraz doplnili) musí byť V (medzi A a C je iba batéria) a jediným neznámym potenciálom je len potenciál v bode B , tento si označme x .



Obr. 1.3: Výber referenčného bodu a potenciály v jednotlivých bodoch

Teraz aplikujme prvý Kirchhoffov zákon pre tento bod. Všetky prúdy vieme vyjadriť pomocou neznámeho potenciálu x . Prúd tečúci rezistorom R_1 je $(V - x)/R_1$, rezistorom R_2 je to $(0 - x)/R_2$ a prúd tečúci rezistorom R_3 je $(0 - x)/R_3$. Suma týchto troch sa musí rovnať nule

$$(V - x)/R_1 - x/R_2 - x/R_3 = 0$$

Vyriešime rovnicu pre x a tak určíme napätia a prúdy pre jednotlivé vetvy.

Vidíme, že v tomto konkrétnom prípade bola pre nás najvýhodnejšia táto posledná metóda, kde nám stačilo vyriešiť len jednu rovnicu s jednou neznámou. To však závisí od konkrétneho príkladu. Vo všeobecnosti však platí, že prvá metóda (s priamym použitím Kirchhoffových zákonov) je najpracnejšia.

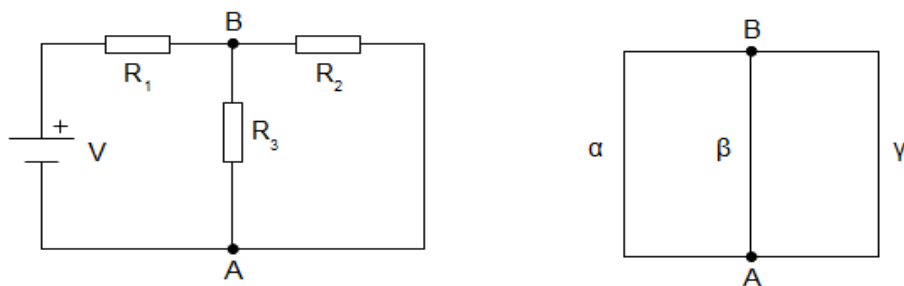
Kapitola 2

Elektrické siete II.

Celá táto kapitola vznikla na základe [2], autorka len na niektorých miestach pridala myšlienky a príklady, ktoré sa jej zdali užitočné pre objasnenie a pochopenie obsahu.

2.1 Sieť a komplex

Predstavme si ľubovoľnú elektrickú sieť. Ak nemáme radi úlohy so sieťami z elektromagnetizmu, príde nám na um čo možno najjednoduchšia sieť s malým počtom zdrojov a odporov bez cievok či kondenzátorov, ktoré tieto príklady ešte sťažujú. Odmyslime si teraz úplne aj elektrické vlastnosti obvodu (zabudnime na rezistory či zdroje), všímajme si iba samotnú sieť. (Takto si možno obľúbia tieto typy úloh aj tí, ktorým sa nepáčilo množstvo elektrických prvkov v obvode.) Učene by sme mohli povedať, že ideme študovať algebraickú topológiu siete.

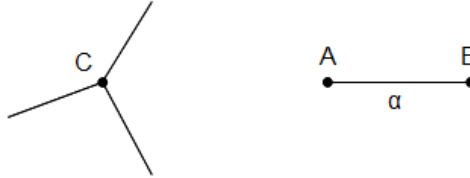


Obr. 2.1: Elektrická sieť (vľavo) a jej topológia (vpravo)

Ak sa pozrieme na sieť, ktorú sme počítali v predchádzajúcej kapitole, môžeme si ju

prekresliť tak, ako je to znázornené na Obr. 2.1 (jednotlivé vetvy sme označili α , β , γ).

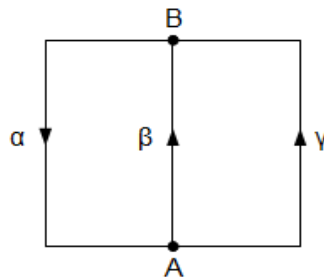
V takto zjednodušenej sieti môžeme rozlíšiť iba dva druhy objektov - uzly a vetvy. Uzolom v sieti nazveme bod, v ktorom sa stretávajú tri alebo viac "čiar" (na Obr. 2.2 označený C). Vetvou nazveme "čiaru" medzi dvoma uzlami (na Obr. 2.2 označená α).



Obr. 2.2: Uzol a vetva

Uzly by sme mohli považovať za akési "nularozmerné" objekty a podľa toho označíme skupinu všetkých uzlov S_0 . Ďalej sú tu ešte vetvy, ktoré sú v tomto zmysle jednorozmerné a ich skupinu označíme S_1 . Tieto dve skupiny spolu vytvárajú určitý systém, ktorý nazývame *jednorozmerný komplex*.

Čo keby sme sa teraz chceli pohybovať po takejto sieti? Naša cesta by bola daná vetvami, ktorými sme prešli a tiež začiatočným a koncovým bodom. Napríklad cesta z bodu A do bodu B môže byť α , ďalšou cestou rovnako z bodu A do bodu B môže byť β . Ak by sme sa chceli dostať z bodu B do bodu A , mohli by sme ísť po ceste α . Tu by sme sa mali zastaviť - po ceste s takýmto názvom sme už raz išli, ale nebola to táto cesta. Jedenkrát sme išli z A do B a druhýkrát z B do A , to sú predsa dve rôzne cesty. Na tomto príklade vidíme, že je dôležitý aj smer vetiev. Náš obrázok by mal teda vyzeráť nejako takto (smery jednotlivých vetiev môžeme zvoliť ľubovoľne):



Obr. 2.3: Topológia siete so zvolenými smermi vetiev

Teraz cesta z B do A je α a cesta z A do B je $-\alpha$.

Cestu nazývame *uzavretou*, ak skončíme v tom istom bode, z ktorého sme začínali. Na Obr. 2.3 je ňou napríklad $\alpha + \beta$. Počas našej cesty môžeme, samozrejme, prejsť niektorou vetvou aj viackrát, preto má zmysel špeciálne pomenovať takú cestu, na ktorej každú jej vetvu prejdeme práve jedenkrát. Takúto cestu nazveme *jednoduchou*. Opäť môže byť príkladom $\alpha + \beta$. Príklad cesty, ktorá nie je jednoduchá: $\alpha + \beta - \gamma + \beta$. Jednoduchú uzavretú cestu voláme *slučka* (alebo aj obvod pri elektrických sieťach, preto tieto dva pojmy budú ďalej znamenať to isté). V slučke nás nezaujímajú začiatkový či koncový bod, ale ako sme zistili, dôležitý je tu smer cesty.

Každá vetva je určená dvoma bodmi - počiatkovým a konečným. Môžeme preto povedať, že tu máme dané zobrazenie z S_1 do $S_0 \times S_0$. Napríklad vetva α ide z bodu B do bodu A . Toto môžeme symbolicky zapísať:

$$\partial\alpha = A - B$$

Symbol ∂ sa nazýva *hraničný operátor* (alebo aj *hraničné zobrazenie*). Všeobecne:

$$\partial(\text{vetva}) = (\text{koncový bod}) - (\text{začiatkový bod})$$

kde (len pre ujasnenie) koncovým bodom rozumieme bod, ku ktorému vetva smeruje a začiatkovým bodom bod, z ktorého vetva vychádza.

Vzťahy pre ďalšie vetvy môžeme zapísať:

$$\partial\beta = B - A \quad , \quad \partial\gamma = B - A$$

Cestou, po ktorej sa vyberieme, môže byť napríklad $\alpha + \beta - \gamma$, ktorá ide z bodu B do bodu A (cez α) a odtiaľ naspäť do bodu B (cez β) a opäť do bodu A (cez γ). Hranica tejto cesty je

$$\partial(\alpha + \beta - \gamma) = A - B + B - A - (B - A) = A - B$$

Iná cesta, $\alpha + \beta$, ide z bodu B do bodu A (cez α) a potom späť do bodu B (cez β). Ak by sme hľadali hranicu v tomto prípade, zistíme, že táto cesta hranicu nemá, pretože

$$\partial(\alpha + \beta) = A - B + B - A = 0$$

Táto cesta je teda slučkou. V našej sieti máme napríklad slučky $M_1 = \alpha + \beta$ alebo $M_2 = \gamma - \beta$ či $M_3 = \alpha + \gamma$. Hovorili sme, že v slučke je dôležitý iba jej smer, nie začiatok a koniec. Teda môžeme písať: $M_1 = \alpha + \beta = \beta + \alpha$. Ale už $-\beta - \alpha = -M_1$ a to nie je to isté ako M_1 , tieto dve slučky majú opačný smer. Dôležitou vlastnosťou slučky bude jej nezávislosť. V našej sieti sú navzájom nezávislými jej ľubovoľné dve slučky (k tomu sa však ešte neskôr dostaneme).

Pre každú cestu vieme povedať, koľkokrát sme počas nej prešli nejakou vetvou. Tým priradíme každej vetve nejaké celé číslo a cestu potom môžeme určiť vektorom $p = (p_\alpha, p_\beta, \dots)^T$, ktorého komponenty prislúchajú jednotlivým vetvám. Aby sme zahrnuli aj orientáciu vetiev, môžeme uvažovať takto: príspevok je $+1$, ak sme vetvu prešli v smere jej orientácie, ak v opačnom smere, zarátame -1 . To znamená, že číslo p_α je dané rozdielom počtu prechodov vetvy α v kladnom smere a počtu prechodov v opačnom smere. Napríklad na Obr. 2.3 slučka $M_1 = \alpha + \beta$ je reprezentovaná vektorom $p_1 = (1, 1, 0)^T$, slučke $M_2 = \gamma - \beta$ prislúcha vektor $p_2 = (0, -1, 1)^T$. Súčet týchto dvoch vektorov $p_3 = p_1 + p_2 = (1, 0, 1)^T$ je ďalšia slučka $M_3 = \alpha + \gamma$.

Pri fyzikálnom pohľade nám možno napadne distribúcia prúdu v sieti. Každéj vetve priradíme číslo, ktoré udáva, aký prúd ňou preteká. Celá sieť je charakterizovaná vektorom $I = (I_\alpha, I_\beta, \dots)^T$, kde I_α je prúd, ktorý tečie vetvou α .¹ Vidíme, že pre celý komplex môžeme uvažovať vektorový priestor pozostávajúci zo všetkých vektorov $K = (K_\alpha, K_\beta, \dots)^T$, ktorého komponenty zodpovedajú jednotlivým vetvám (každý takýto vektor určuje nejakú vlastnosť vetvy).² Tento vektorový priestor označíme C_1 . Vetvu κ môžeme určiť vektorom, ktorý má 1 na pozícii κ (pozícia zodpovedajúca vetve κ) a nuly všade inde. Tak napríklad $\alpha = (1, 0, 0, \dots)^T$, $\beta = (0, 1, 0, \dots)^T$ atď.

Rovnakým spôsobom môžeme vytvoriť vektorový priestor C_0 , pozostávajúci z vektorov, ktorých komponenty prislúchajú jednotlivým uzlom. Opäť platí, že napríklad bod A je určený vektorom, ktorý má 1 na pozícii A (pozícia zodpovedajúca bodu A) a na ostatných nuly. Všimnime si, že rozmer priestoru C_1 ($\dim C_1$) je počet vetiev a $\dim C_0$ je počet uzlov. Asi nám napadne, že vetvy by mohli tvoriť bázu pre priestor C_1 a uzly zasa bázu pre C_0 . A tento nápad je naozaj správny.

¹Nemáme na mysli vetvu α z Obr. 2.3, teraz opäť uvažujeme všeobecnú sieť.

²Predpokladajme, že všetky komponenty sú reálne čísla, takže máme reálny vektorový priestor.

2.2 Hraničné zobrazenie

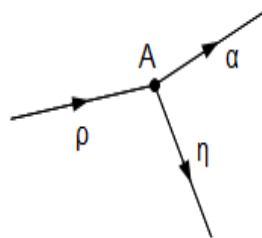
Teraz už môžeme naozaj definovať hraničné zobrazenie ∂ ako lineárne zobrazenie z C_1 do C_0 . Na definíciu stačí poznať jeho hodnoty na jednotlivých vetvách, pretože tvoria bázu pre C_1 . Toto zobrazenie sme zadali takto:

$$\partial(\text{vetva}) = (\text{koncový bod}) - (\text{začiatkový bod})$$

Skúsme sa pozrieť, čo robí hraničný operátor ∂ . Majme vektor $K = (K_\alpha, K_\beta, K_\gamma, \dots)^T$ z priestoru C_1 , pre ktorý platí $\partial K = L$. Je zrejmé, že vektor $L = (L_A, L_B, \dots)^T$ je z priestoru C_0 . Vyskúšajme vypočítať niektorý koeficient tohoto vektora, napríklad L_A . Vieme, že ak aplikujeme ∂ na niektorú vetvu, získame rozdiel jej hraničných bodov. Z toho môžeme usúdiť, že do L_A budú prispievať iba také koeficienty vektora K , ktoré sú priradené vetvám s hraničným bodom A . Ak označíme $\delta_1, \dots, \delta_l$ všetky vetvy, ktoré vstupujú do bodu A a $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k$ všetky vetvy, ktoré vystupujú z bodu A , potom dostaneme pre koeficient L_A takúto sumu koeficientov vektora K :

$$L_A = (K_{\delta_1} + \dots + K_{\delta_l}) - (K_{\epsilon_1} + \dots + K_{\epsilon_k}).$$

Napríklad pre Obr. 2.4 by podľa toho platilo: $L_A = K_\rho - K_\eta - K_\alpha$.



Obr. 2.4: Význam koeficientu L_A

Ak si teraz spomenieme na to, že sme pôvodne chceli riešiť elektrickú sieť, môže nám v tejto chvíli ľahko napadnúť prvý Kirchhoffov zákon, pretože hovorí, že súčet prúdov v uzle sa rovná nule. V reči nášho komplexu má tento zákon veľmi jednoduchú formuláciu:

Ak I je vektor zadávajúci distribúciu prúdov, potom platí

$$\partial I = 0$$

Kirchhoffov zákon pre prúdy

2.2.1 Jadro a obraz hraničného zobrazenia

Pri skúmaní ciest sme našli medzi nimi jeden zvláštny typ - cesty, ktoré nemali hranicu. Z priestoru C_1 môžeme vybrať všetky vektory $K = (K_\alpha, K_\beta, K_\gamma, \dots)^T$, ktoré spĺňajú podmienku $\partial K = 0$. Spolu tieto vektory tvoria podpriestor vektorového priestoru C_1 , ktorý označíme Z_1 . Elementy podpriestoru Z_1 nazývame *cykly*. Všetky tieto vektory sa zobrazia na nulu, čo je definícia jadra lineárneho zobrazenia.³ Teda

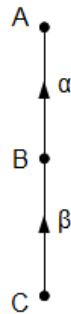
$$Z_1 = \ker \partial \subset C_1$$

K jadrú neodmysliteľne patrí aj obraz lineárneho zobrazenia. ∂ je zobrazenie z C_1 do C_0 , preto jeho obraz musí byť podpriestor C_0 . Označme B_0 podpriestor C_0 , ktorý je obrazom ∂ :

$$B_0 = \partial C_1 \subset C_0$$

B_0 nazveme *priestorom hraníc*. (Tento názov je celkom logický, ak si spomenieme, ako sme zobrazenie ∂ definovali.)

Skúsme trochu porozmýšľať nad priestorom B_0 . Je asi jasné, že hranice všetkých vetiev patria do B_0 (pretože vetvy tvoria bázu pre priestor C_1). Ale nie každý prvok B_0 vieme interpretovať ako hranicu nejakej cesty. Pozrime sa na Obr. 2.5.



Obr. 2.5: Príklad 1-komplexu s $\dim H_0 = 1$ (súvislý komplex)

Vieme, že hranice vetiev α a β : $\partial\alpha = A - B = (1, -1, 0)^T$, $\partial\beta = B - C = (0, 1, -1)^T$ ležia v podpriestore B_0 . Súčet týchto vektorov $\partial\alpha + \partial\beta = A - C = (1, 0, -1)^T$ je tiež

³Teraz vieme povedať, že každá slučka je cyklus. No naopak to neplatí, nie každý cyklus musí byť slučka. Toto možno ľahko nahliadnuť, keď si uvedomíme, že slučka môže mať koeficienty iba $-1, 1, 0$.

prvok B_0 a zároveň je hranicou cesty $\alpha + \beta$. Ale napríklad vektor $(2, -1, -1)^T$ je síce element B_0 (ako lineárna kombinácia $\partial\alpha$ a $\partial\beta$, $(2, -1, -1)^T = 2(1, -1, 0)^T + (0, 1, -1)^T = 2A - C = 2\partial\alpha + \partial\beta$), no nezodpovedá žiadnej jednoduchéj ceste.

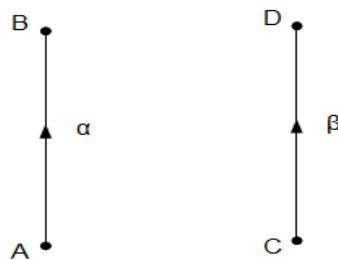
Ak uvažujeme z priestoru C_0 tie prvky, ktoré neležia v podpriestore B_0 , zistíme, že netvoria podpriestor.

Vďaka tomu, že B_0 je podpriestorom C_0 , môžeme vytvoriť faktorpriestor H_0 priestoru C_0 podľa svojho podpriestoru B_0 :

$$H_0 = C_0/B_0$$

Túto myšlienku sme už trochu nenápadne podsúvali, keď sme prvky B_0 pre sieť na Obr. 2.5 interpretovali ako rozdiel bodov (uzlov), teda ako rozdiel prvkov C_0 . Jednotlivé prvky H_0 sú triedy ekvivalencie prvkov z C_0 , ktorých rozdiel patrí do B_0 .

Na Obr. 2.5 vektory $A = (1, 0, 0)^T$ a $B = (0, 1, 0)^T$ z C_0 zodpovedajú tomu istému vektoru v H_0 , pretože ich rozdiel je vektor $(1, -1, 0)^T$, ktorý leží v B_0 . Môžeme označiť túto triedu ekvivalencie \bar{A} alebo $\overline{(1, 0, 0)^T}$. Pre našu jednoduchú sieť na obrázku patria všetky vektory z C_0 do rovnakej triedy ekvivalencie, napríklad \bar{A} . Priestor H_0 je preto jednorozmerný. Môžeme sa možno trochu intuitívne pozrieť, prečo stačí jediná trieda ekvivalencie. Všetky tri body A, B, C patria do tej istej triedy ekvivalencie, pretože rozdiel ľubovoľných dvoch z nich je prvkom B_0 , ako sme už zistili. Potom môžeme usúdiť, že hocijaká ich lineárna kombinácia bude patriť do tejto triedy ekvivalencie. Ak by sme chceli priestor H_0 viac ako jednorozmerný, museli by sme podľa predchádzajúcej úvahy žiadať, aby sa niektoré dva body nedali spojiť cestou. Ako príklad komplexu, v ktorom je priestor H_0 dvojrozmerný, by mohol byť Obr. 2.6.



Obr. 2.6: Príklad 1-komplexu s $\dim H_0 = 2$

Vektory $(1, 0, 0, 0)^T$ a $(0, 0, 1, 0)^T$ nepatria do tej istej triedy ekvivalencie, pretože ich rozdiel $(1, 0, -1, 0)^T$ nie je hranicou žiadneho prvku z C_1 (teda nie je prvkom B_0). V tomto prípade trieda ekvivalencie vektora $(1, 0, 0, 0)^T$ a trieda ekvivalencie vektora $(0, 0, 1, 0)^T$ tvoria bázu dvojrozmerného vektorového priestoru H_0 . Ak by sme sem teraz pridali vetvu γ spájajúcu body A a C , potom by vektor $(1, 0, -1, 0)^T$ patril do B_0 a priestor H_0 by bol jednorozmerný.

Z týchto jednoduchých príkladov môžeme predpokladať, že rozmer priestoru H_0 sa rovná počtu súvislých komponent komplexu. (A toto je naozaj aj pravda.) Uveďme si, len na ujasnenie, čo rozumieme pod pojmom súvislé komponenty. Komplex sa nazýva súvislý, ak každý jeho bod môže byť spojený s každým ďalším bodom. Súvislá komponenta je teda časť komplexu, ktorej každé dva body môžeme spojiť, ale zároveň je izolovaná od zvyšku komplexu (nie je spojená s ďalšou časťou). Toto sme asi aj celkom prirodzene očakávali. Pre ľubovoľný súvislý komplex je $\dim H_0 = 1$. Ďalej sa budeme zaoberať už iba súvislými komplexmi, keďže chceme uvažovať o elektrických sieťach.

2.2.2 Priestor cyklov

Vráťme sa ešte k priestoru cyklov Z_1 . Ukážeme, že rozmer tohto priestoru sa rovná počtu nezávislých slučiek komplexu. Potom môžeme nájsť bázu priestoru Z_1 nájdením všetkých nezávislých slučiek.

▼ Uvažujme súvislý komplex. Už sme zistili, že preň platí: $\dim H_0 = 1$. Tento priestor sme vytvorili ako $H_0 = C_0/B_0$, preto

$$\dim H_0 = \dim C_0 - \dim B_0$$

Teda po dosadení

$$1 = n - \dim B_0 \quad \Rightarrow \quad \dim B_0 = n - 1$$

Teraz nám pomôže dostať sa k cieľu zobrazenie ∂ . Lineárna algebra hovorí, že pre ľubovoľné lineárne zobrazenie $T: V \rightarrow W$ platí:

$$\dim(\operatorname{im} T) + \dim(\operatorname{ker} T) = \dim V$$

A toto použijeme pre naše zobrazenie ∂ : B_0 je obraz ∂ a Z_1 je jadro ∂ , preto

$$\dim B_0 + \dim Z_1 = \dim C_1$$

Dosadením dostaneme

$$(n - 1) + \dim Z_1 = b \quad \Rightarrow \quad \dim Z_1 = b + 1 - n$$

pre ľubovoľný súvislý komplex.⁴ ▲

Slučkou rozumieme jednoduchú uzavretú cestu. Každá slučka je určená nejakým vektorom M z priestoru C_1 , ktorého komponenty sú $+1$, -1 alebo 0 a pre ktorý platí $\partial M = 0$ (toto je práve vlastnosť prvkov z priestoru Z_1). Na to, aby slučky tvorili bázu, musia byť im prislúchajúce prvky lineárne nezávislé a musia generovať celý priestor Z_1 . Mali by sme teda nájsť presne $b + 1 - n$ nezávislých slučiek, pretože sme zistili, že práve taký je rozmer priestoru Z_1 .

2.2.2.1 Hľadanie slučiek

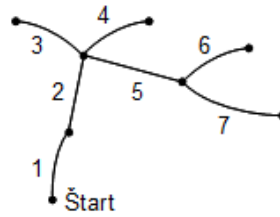
Pozrime sa teraz na hľadanie slučiek. Stačí pracovať opäť iba so súvislým komplexom, ak by komplex nebol súvislý, jednoducho aplikujeme daný proces na každú súvislú komponentu samostatne. Komponenty sú nezávislé od seba, preto spojením získame výsledok pre celý komplex.

Súvislý komplex, ktorý neobsahuje slučky, nazývame *strom*. Strom môžeme vytvoriť tak, že si vezmeme jeden uzol ako štartovací a z tohto bodu postavíme celý komplex postupným pridávaním vetiev (zakaždým iba jednej) tak, ako je to znázornené na Obr. 2.7. Ak tu nie sú slučky, nikdy sa nevrátíme k niektorému predchádzajúcemu bodu, teda vždy, keď pridáme novú vetvu, pridáme aj nový uzol. Preto v strome platí, že počet uzlov je práve o jeden väčší ako počet vetiev: ak b označuje počet vetiev a n počet uzlov, potom

$$n = b + 1$$

⁴Z definície rôznych priestorov spojených so zobrazením ∂ získame ako okamžitý dôsledok vzťah pre všeobecný komplex (t.j. komplex, ktorý nemusí byť súvislý):

$$\dim H_0 - \dim Z_1 = \dim C_0 - \dim C_1$$

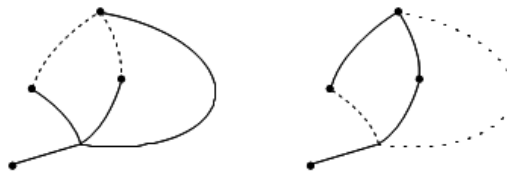


Obr. 2.7: Vytvorenie stromu

Pri skladaní ľubovoľného komplexu môžeme rozmýšľať podobne s jednou výnimkou: keď pridáme vetvu, nemusíme pridať aj nový uzol. Toto nastane práve vtedy, keď vytvoríme v našom komplexe slučku. Pre všeobecný komplex teda platí

$$n \leq b + 1$$

Rozdeľme všetky vetvy komplexu do dvoch skupín: jednou skupinou bude *úplný strom* T (časť komplexu, ktorá obsahuje všetky uzly a zároveň tvorí strom) a do druhej skupiny \bar{T} zaradíme všetky zvyšné vetvy, ktoré nie sú súčasťou úplného stromu. Takéto rozdelenie neurčuje jednoznačne úplný strom, napríklad Obr. 2.8 ukazuje dva rôzne spôsoby výberu úplného stromu (plné čiary) pre daný komplex (prerušované čiary sú odstránené vetvy, ktoré tvoria časti slučiek).



Obr. 2.8: Rôzne výbery úplného stromu pre danú sieť

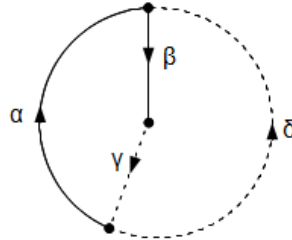
Keďže T tvorí strom, ktorý obsahuje všetky uzly (lebo sme to tak vytvorili), musí obsahovať $n - 1$ vetiev. Potom v \bar{T} sa nachádza $b - (n - 1) = b + 1 - n$ vetiev. Pridaním ľubovoľnej vetvy z \bar{T} k T vytvoríme slučku. Počet vetiev v \bar{T} je $b + 1 - n$, teda toľko máme aj slučiek (to sa rovná dimenzii Z_1). Ak sú tieto slučky aj lineárne nezávislé, môžeme vyhlásiť, že tvoria bázu.

Označme α_i i -tú vetvu v \bar{T} a M_i označme slučku, ktorú vytvorí vetva α_i . Uvažujme všeobecnú lineárnu kombináciu slučiek: $\sum c_i M_i$. Keďže α_i sa vyskytuje iba v slučke M_i a to s koeficientom $+1$, koeficient α_i v sume musí byť c_i . Preto nemôže byť $\sum c_i M_i = 0$, kým všetky c_i nie sú nulové, a to znamená, že slučky M_i sú lineárne nezávislé a teda tvoria bázu priestoru Z_1 .

Výber úplného stromu určuje projekciu ρ_T priestoru C_1 do podpriestoru Z_1 , ktorú môžeme zaviesť nasledovne:

ak $\alpha_i \in T$, potom $\rho_T(\alpha_i) = 0$

ak $\alpha_i \in \bar{T}$, potom $\rho_T(\alpha_i) = M_i$



Obr. 2.9: Výber úplného stromu pre danú sieť

Napríklad, ak na Obr. 2.9 vyberieme úplný strom pozostávajúci z vetiev α a β :

$$\rho_T(\alpha) = 0, \rho_T(\beta) = 0, \rho_T(\gamma) = \alpha + \beta + \gamma, \rho_T(\delta) = -\alpha + \delta$$

Projekcia ρ_T môže byť tiež reprezentovaná maticou

$$\rho_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3 Duálne priestory a kohraničné zobrazenie

Rozloženie energie v nejakej vetve je určené prúdom, ktorý vetvou preteká a napätím na tejto vetve. V tomto zmysle teda môžeme považovať napätie za duálne k prúdu. Potom vektor napätí $V = (V^\alpha, V^\beta, \dots)$ by mal ležať v duálnom priestore priestoru C_1 ,

ktorý označíme C^1 . Tento duálny priestor nazveme *priestor 1-koreťazcov*, C^1 je teda priestor lineárnych funkcií na C_1 . Podobne zavedieme priestor C^0 lineárnych funkcií na C_0 a nazveme ho *priestor 0-koreťazcov*.

Ak máme zadané vektory $K = (K_\alpha, K_\beta, \dots)^T \in C_1$ a $W = (W^\alpha, W^\beta, \dots) \in C^1$, môžeme označiť hodnotu lineárnej funkcie W na vektore K ako $\langle W, K \rangle$ a definovať ju takto:

$$\langle W, K \rangle = W^\alpha K_\alpha + W^\beta K_\beta + \dots$$

Podobne môžeme označiť hodnotu 0-koreťazca $f = (f^A, f^B, \dots)^T \in C^0$ na 0-reťazci $c = (c_A, c_B, \dots)^T \in C_0$ ako $\langle f, c \rangle$:

$$\langle f, c \rangle = f^A c_A + f^B c_B + \dots$$

Medzi priestormi C_1 a C_0 už máme dané lineárne zobrazenie (konkrétne hraničné zobrazenie ∂). Preto možno očakávať, že aj medzi ich duálnymi priestormi bude existovať nejaké lineárne zobrazenie. Takýmto je združené zobrazenie k ∂ . Označíme ho d a nazveme *kohraničný operátor*. Keďže ∂ je zobrazenie z C_1 do C_0 , d je zobrazením z C^0 do C^1 .

Ak f je 0-reťazec a K je 1-reťazec, hodnota df na K je rovná hodnote f na ∂K :

$$\langle df, K \rangle = \langle f, \partial K \rangle$$

Tento vzťah môžeme chápať aj ako definíciu zobrazenia d . Napríklad ak by sme chceli počítať $\langle df, \alpha \rangle$, kde α je vetva, pre ktorú platí $\partial\alpha = B - A$, potom môžeme písať

$$\langle df, \alpha \rangle = \langle f, \partial\alpha \rangle = f^A(\partial\alpha)_A + f^B(\partial\alpha)_B + \dots = f^A(-1) + f^B(1) = f(B) - f(A)$$

Teraz obrátíme svoju pozornosť na druhý Kirchhoffov zákon. Napätie na nejakej vetve je dané rozdielom potenciálov na jej koncoch (potenciál na začiatku - potenciál na konci), napríklad $V^\alpha = \Phi(A) - \Phi(B)$ pre vetvu α s vlastnosťou $\partial\alpha = B - A$. Teda potenciál je funkcia v uzloch, tzn. 0-koreťazec. Toto by sme mohli zapísať aj takto:

$$\langle V, \alpha \rangle = \Phi(A) - \Phi(B) = -\langle \Phi, \partial\alpha \rangle$$

Takýto vzťah napísaný všeobecne

$$\langle V, K \rangle = -\langle \Phi, \partial K \rangle$$

platí pre všetky vetvy komplexu a keďže vetvy tvoria bázu priestoru 1-reťazcov, potom platí pre všetky 1-reťazce. Z definície d vieme, že platí aj

$$\langle d\Phi, K \rangle = \langle \Phi, \partial K \rangle$$

Porovnaním týchto dvoch vzťahov dostaneme

$$\langle V, K \rangle = -\langle d\Phi, K \rangle$$

a odtiaľ vidíme, že V a $-d\Phi$ majú rovnakú hodnotu pre všetky 1-reťazce. Teda druhý Kirchhoffov zákon môže byť formulovaný aj takto:

$$\boxed{V = -d\Phi}$$

Kirchhoffov zákon pre napätia

2.3.1 Zachovanie energie

Už teraz máme jeden bonus navyše. Okamžitý dôsledok dvoch Kirchhoffových zákonov (vo všeobecnej formulácii známy aj ako Tellegenova teoréma): Predpokladajme, že pre danú sieť je $I \in C_1$ rozloženie vetvových prúdov vyhovujúcich prvému Kirchhoffovmu zákonu $\partial I = 0$. Predpokladajme tiež, že pre tú istú sieť rozloženie napätí V spĺňa druhý Kirchhoffov zákon $V = -d\Phi$. Potom disipácia celkovej energie vo všetkých vetvách je

$$P = \sum V^\alpha I_\alpha = \langle V, I \rangle = -\langle d\Phi, I \rangle$$

Ak na tomto mieste použijeme definíciu zobrazenia d

$$P = -\langle d\Phi, I \rangle = -\langle \Phi, \partial I \rangle = 0$$

lebo $\partial I = 0$. Tento výsledok ukazuje, že energia v elektrickej sieti sa zachováva.

2.3.2 Jadro a obraz kohraničného zobrazenia

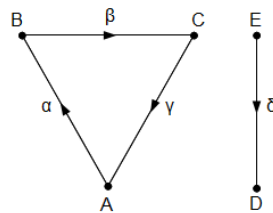
Skúsme sa pozrieť na tieto dva podpriestory vždy spojené s nejakým zobrazením. Označme $Z^0 \subset C^0$ jadro operátora d . Z definície jadra zobrazenia je Z^0 podpriestor funkcií potenciálov v uzloch s vlastnosťou, že všetky napätia vetiev sú rovné nule. Ak uvažujeme súvislý komplex, napätia všetkých vetiev budú nulové práve vtedy, ak bude

potenciál v každom bode rovnaký. Všeobecnejšie povedané, Z^0 je podpriestor potenciálov, ktoré sú konštantné na každej súvislej komponente. Z fyzikálneho hľadiska pridanie prvku zo Z^0 k prvku z C^0 nemá žiadny význam, ovplyvňuje len zmenu referenčnej hladiny potenciálu. Naozaj zaujímavý je pre nás len faktorpriestor priestoru C^0 podľa svojho podpriestoru Z^0 :

$$P^0 = C^0 / Z^0$$

Keďže Z^0 obsahuje funkcie (potenciály), ktoré sú konštantné na každej súvislej komponente, prvky P^0 sú triedami ekvivalencie funkcií, ktoré sa líšia len o konštantu. Ak zmeníme vektor v C^0 pridaním fyzikálne bezvýznamnej konštanty (ktorá môže byť dokonca rôzna na každej súvislej komponente), výsledný vektor bude stále zodpovedať tomu istému prvku z P^0 . Teda práve priestor P^0 zodpovedá priestoru potenciálov (definuje potenciál Φ). Daný vektor napätí V , ktorý spĺňa druhý Kirchhoffov zákon, $V = -d\Phi$, je určený jednoznačne ako prvok P^0 .

Ak napríklad pre sieť na Obr. 2.10 vyberieme body A a D ako základné, potom vektor (Φ^B, Φ^C, Φ^E) reprezentuje element P^0 .



Obr. 2.10: Príklad siete

Keďže pre nás je fyzikálne zaujímavý iba faktorpriestor P^0 , môžeme obmedziť zobrazenie $d: C^0 \rightarrow C^1$ na zobrazenie $[d]: P^0 \rightarrow C^1$. Maticovú reprezentáciu $[d]$ získame z matice d jednoducho vymazaním stĺpcov zodpovedajúcich základným bodom. Pre sieť na obrázku vyškrtneme stĺpce 1(A) a 4(D):

$$d = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad [d] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ľubovoľný prvok zo Z^0 pôsobiaci na prvok z B_0 dáva nulu. Preto sa Z^0 nazýva aj *anihilačný priestor* B_0 .

▼ Uvažujme, že Φ je element Z^0 , tzn. $d\Phi = 0$. Označme K prvok priestoru C_1 , potom ∂K je prvok priestoru hraníc B_0 . Použitím týchto vlastností a definície kohraničného operátora d dostaneme

$$\langle \Phi, \partial K \rangle = \langle d\Phi, K \rangle = 0$$

Teda naozaj, ľubovoľný prvok zo Z^0 pôsobiaci na prvok z B_0 dáva nulu. Opačne, ak budeme predpokladať, že $\langle \Phi, \partial K \rangle = 0$ pre všetky K , potom aj $\langle d\Phi, K \rangle = 0$ pre všetky K a to znamená, že $d\Phi = 0$ a teda $\Phi \in Z^0$. ▲

Uvažujme faktorpriestor $H_0 = C_0/B_0$. Priestor Z^0 je duálny priestor k faktorpriestoru H_0 .

▼ Nech c_1 a c_2 sú prvky C_0 , ktorých rozdiel $c_1 - c_2$ leží v B_0 , teda sú to dva prvky, ktoré patria do tej istej triedy ekvivalencie H_0 . Pre ľubovoľné $\Phi \in Z^0$ platí

$$\langle \Phi, c_1 \rangle - \langle \Phi, c_2 \rangle = \langle \Phi, c_1 - c_2 \rangle = 0$$

a odtiaľ vyplýva, že $\langle \Phi, c_1 \rangle = \langle \Phi, c_2 \rangle$. Teda daný prvok Z^0 má rovnakú hodnotu na ľubovoľnom člene triedy ekvivalencie H_0 , takže Z^0 môže byť považovaný za priestor lineárnych funkcií na H_0 . ▲

Uvažujme faktorpriestor $P^0 = C^0/Z^0$. Tento je duálnym priestorom B_0 .

▼ Stačí, ak sa pozrieme trochu z inej strany na fakt, že Z^0 je anihilačný priestor B_0 . Môžeme povedať, že nejaké dva prvky C^0 líšiac sa o prvok Z^0 dávajú rovnaký výsledok, keď pôsobia na prvok z B_0 . Teda faktorpriestor $P^0 = C^0/Z^0$ môže byť naozaj stotožnený s duálnym priestorom B_0 . ▲

Združený (adjungovaný) operátor zobrazenia $[d]: P^0 \rightarrow C^1$ je potom operátor $[\partial]: C_1 \rightarrow B_0$. Ak používame ako bázu pre B_0 duálnu bázu k báze pre P^0 , potom matica reprezentujúca $[\partial]$ je transponovaná matica k matici reprezentujúcej $[d]$. Vzhľadom na

túto bázu je vektor v B_0 reprezentovaný vektorom z C_0 , v ktorom vymažeme komponenty zodpovedajúce základným bodom. Napríklad na Obr. 2.10 so základnými bodmi A a D máme

$$\partial = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad [\partial] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = [d]^T$$

Teraz označme B^1 podpriestor priestoru C^1 , ktorý je obrazom d . Fyzikálne, B^1 je priestor vektorov napätí vetiev, ktoré spĺňajú druhý Kirchhoffov zákon.

B^1 je anihilačný priestor pre Z_1 .⁵

▼ Uvažujme, že Φ je prvok priestoru C^0 , potom $d\Phi$ je prvok obrazu d - priestoru B^1 . Označme I prvok priestoru Z_1 , tzn. $\partial I = 0$. Použitím týchto vlastností a definície kohraničného operátora d dostaneme

$$\langle d\Phi, I \rangle = \langle \Phi, \partial I \rangle = 0$$

B^1 je teda naozaj anihilačný priestor pre Z_1 . ▲

Ak vytvoríme faktorpriestor $H^1 = C^1/B^1$, potom tento môžeme stotožniť s duálnym priestorom H_1 (v tomto prípade so Z_1).

▼ Nech V_1 a V_2 sú vektory z C^1 , ktorých rozdiel leží v B^1 , teda vektory patriace do tej istej triedy ekvivalencie H^1 , t.j. $V_1 - V_2 = -d\Phi$ pre nejaké Φ . Majme ľubovoľný vektor prúdov $I \in Z_1$, pre ktorý $\partial I = 0$, potom platí

$$\langle V_1, I \rangle - \langle V_2, I \rangle = \langle V_1 - V_2, I \rangle = -\langle d\Phi, I \rangle = -\langle \Phi, \partial I \rangle = 0$$

a odtiaľ vyplýva, že $\langle V_1, I \rangle = \langle V_2, I \rangle$. Teda V_1 a V_2 , ktoré zodpovedajú tomu istému prvku z H^1 , sú rovnaké aj ako prvky duálneho priestoru H_1 . ▲

⁵Nejaká distribúcia napätí spĺňajúca druhý Kirchhoffov zákon aplikovaná na nejakú distribúciu prúdov spĺňajúcu prvý Kirchhoffov zákon dáva nulu - toto je práve zachovanie energie, ktoré sme už spomínali.

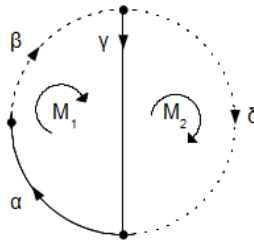
2.4 Metóda obvodových prúdov a metóda uzlových potenciálov

2.4.1 Kirchhoffove zákony v symetrickej forme

V metóde obvodových prúdov vyberáme najskôr nezávislé slučky a k jednotlivým slučkám priradíme (imaginárne) obvodové prúdy J_i . Tak vlastne vytvoríme najvšeobecnejší prvok priestoru Z_1 : $J_1 M_1 + \dots + J_m M_m$, pričom ako bonus tieto prúdy spĺňajú prvý Kirchhoffov zákon (z definície Z_1 - prvky tohto priestoru sa zobrazujú na nulu).

Uvažujme priestor obvodových prúdov ako nejakú ďalšiu kópiu Z_1 , nazvime ho H_1 . Tento priestor je kópia Z_1 , ale považovaná za abstraktný vektorový priestor, nie teda ako podpriestor C_1 . Môžeme potom uvažovať "nájdanie vetvových prúdov určených obvodovými prúdmi" ako lineárne zobrazenie σ , kde $\sigma : H_1 \rightarrow C_1$ je (identické) zobrazenie, ktoré identifikuje H_1 s podpriestorom Z_1 priestoru C_1 .

Uvažujme sieť na Obr. 2.11 s úplným stromom pozostávajúcím z vetiev α a γ . Priestor H_1 je tu dvojrozmerný (máme dve nezávislé slučky, teda dva obvodové prúdy).



Obr. 2.11: Výber úplného stromu a nezávislých slučiek pre danú sieť

Zobrazenie σ priraduje slučke M_1 vetvové prúdy $\alpha + \beta + \gamma$

$$\sigma(M_1) = \alpha + \beta + \gamma$$

a podobne slučke M_2 prúdy $-\gamma + \delta$

$$\sigma(M_2) = -\gamma + \delta$$

Teda ak použijeme M_1 a M_2 ako bázu nášho abstraktného priestoru H_1 obvodových prúdov a použijeme $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ako bázu priestoru C_1 , potom matica zobrazenia σ zodpovedajúca týmto bázam je

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Všimnime si, že σ vytvára pravidlo pre vyjadrenie vetvových prúdov pomocou obvodových prúdov:

$$\sigma \left(\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_1 \\ J_1 - J_2 \\ J_2 \end{pmatrix}$$

Ak J je vektor obvodových prúdov a I je vektor vetvových prúdov a σ je zobrazenie, ktoré priradí každej vetve lineárnu kombináciu obvodových prúdov určujúcu prúd tečúci danou vetvou, potom platí: $I = \sigma J$

Teraz môžeme vybrať bázu pre H^1 , ktorá je duálna k báze pre H_1 a označme s zobrazenie, ktoré zobrazí priestor C^1 do faktorpriestoru $H^1 = C^1/B^1$. Potom s a σ sú združené transformácie a ich maticové reprezentácie sú navzájom transponované.

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Môžeme si všimnúť, že komponenty sV sa rovnajú súčtu napätí vetiev pozdĺž rôznych slučiek, ktoré sme vybrali ako bázu pre H_1 :

$$s \left(\begin{pmatrix} v^\alpha \\ v^\beta \\ v^\gamma \\ v^\delta \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} v^\alpha + v^\beta + v^\gamma \\ -v^\gamma + v^\delta \end{pmatrix}$$

Tieto vzťahy môžeme zhrnúť do jedného diagramu:

$$\begin{array}{ccc} [d] & & s \\ P^0 & \longrightarrow & C^1 \longrightarrow H^1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} [\partial] & & \sigma \\ B_0 & \longleftarrow & C_1 \longleftarrow H_1 \end{array}$$

V tomto diagrame sú vektorové priestory v rovnakom stĺpci duálne ku sebe: C^1 a C_1 , P^0 a B_0 , H^1 a H_1 . Navyše $[d]$ a $[\partial]$, rovnako ako s a σ sú navzájom združené zobrazenia. Obe $[d]$ a σ sú injektívne (majú nulové jadro), kým ich združené transformácie $[\partial]$ a s sú surjektívne (majú celý vektorový priestor ako svoj obraz). Nakoniec, $\text{im } \sigma = \ker [\partial]$ a $\text{im } [d] = \ker s$. Podľa tejto schémy môžeme oba Kirchhoffove zákony napísať v symetrickej forme:

$$I = \sigma J \quad , \quad J \in H_1$$

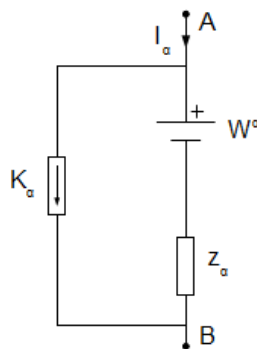
Kirchhoffov zákon pre prúdy (I.)

$$V = -[d]\Phi \quad , \quad \Phi \in P^0$$

Kirchhoffov zákon pre napätia (II.)

2.4.2 Všeobecná vetva

Ak predpokladáme, že máme elektrickú sieť pozostávajúcu len z rezistorov a zdrojov, potom najvšeobecnejšia vetva α s $\partial\alpha = B - A$ vyzerá ako na Obr. 2.12.



Obr. 2.12: Všeobecná vetva

To znamená, že nejaký zdroj napätia je v sérii s rezistorom a nejaký zdroj prúdu je s nimi paralelne zapojený: nie je tu zdroj, ktorý by mohol udržiavať konštantné napätie

bez zmeny prúdu a ani zdroj, ktorý by vytváral konštantný prúd bez zmeny napätia. Napätie na rezistore je $V^\alpha - W^\alpha$, prúd cez rezistor je $I_\alpha - K_\alpha$ a jeho odpor je z_α . Teda pre danú vetvu platí:

$$(V^\alpha - W^\alpha) = z_\alpha(I_\alpha - K_\alpha)$$

z_α , W^α , K_α sú dané (môžu byť aj nula), I_α a V^α sú neznáme.⁶

Nech $Z: C_1 \rightarrow C^1$ je lineárna transformácia, ktorej matica (v báze pozostávajúcej z vetiev) je diagonálna matica so vstupmi z_α . Predchádzajúcu rovnicu pre túto našu vetvu môžeme potom napísať ako

$$V - W = Z(I - K)$$

Spolu s Kirchhoffovými zákonmi máme teda rovnice

$$V - W = Z(I - K), \quad I = \sigma J, \quad V = -[d]\Phi$$

pre neznáme $J \in H_1$ a $\Phi \in P^0$, kde W , K a Z sú dané. Tieto rovnice môžeme vyskúšať vyriešiť niektorou z nasledujúcich dvoch metód.

2.4.3 Metóda obvodových prúdov

Do rovnice $V - W = Z(I - K)$ dosadíme $I = \sigma J$, aby bol splnený prvý Kirchhoffov zákon:

$$V - W = Z(\sigma J - K)$$

Potom na túto rovnicu aplikujeme zobrazenie s . Keďže podľa druhého Kirchhoffovho zákona $sV = s(-[d]\Phi) = 0$, dostaneme

$$-sW = sZ\sigma J - sZK \quad \Rightarrow \quad (sZ\sigma)J = s(ZK - W)$$

Pravú stranu rovnice poznáme, rovnako ako poznáme lineárnu transformáciu $sZ\sigma$. Ak je matica $sZ\sigma$ invertovateľná, získame vzťah

$$\boxed{J = (sZ\sigma)^{-1}s(ZK - W)} \quad \text{metóda obvodových prúdov}$$

z ktorého vieme určiť všetky prúdy a napätia:

$$I = \sigma J, \quad V = W + Z(I - K)$$

⁶V sieťach, kde sú len rezistory, je z_α reálne číslo ($z_\alpha \geq 0$). Ak by sme uvažovali sieť obsahujúcu kondenzátory a cievky, z_α by bolo komplexné číslo závislé od frekvencie.

2.4.4 Metóda uzlových potenciálov

Do rovnice $V - W = Z(I - K)$ napíšeme $V = -[d]\Phi$, aby bol splnený druhý Kirchhoffov zákon. Potom zľava vynásobíme celú rovnicu inverznou maticou Z^{-1} , čo je diagonálna matica a získame

$$I - K = Z^{-1}(-[d]\Phi - W)$$

Teraz aplikujeme $[\partial]$ na obe strany rovnice. Keďže podľa prvého Kirchhoffovho zákona $\partial I = 0$, získame

$$-[\partial]K = -[\partial]Z^{-1}([d]\Phi + W)$$

alebo

$$([\partial]Z^{-1}[d])\Phi = [\partial](K - Z^{-1}W)$$

Ak je matica $[\partial]Z^{-1}[d]$ invertovateľná, dostaneme

$$\Phi = ([\partial]Z^{-1}[d])^{-1}[\partial](K - Z^{-1}W)$$

metóda uzlových potenciálov

Napätia a prúdy môžeme získať zo vzťahov

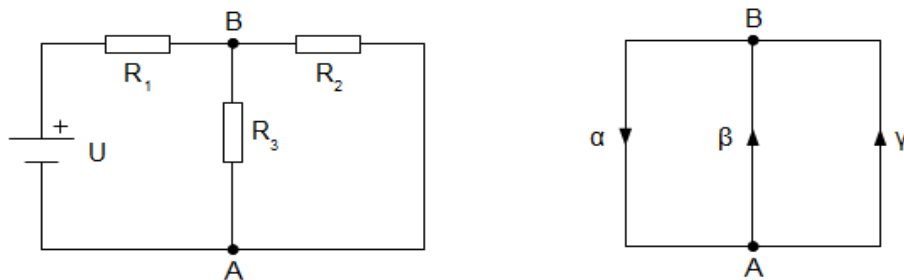
$$V = -[d]\Phi, \quad I = K + Z^{-1}(-[d]\Phi - W)$$

Kapitola 3

Konkrétne príklady

3.1 Na úvod

Vyskúšajme si teraz obe metódy na jednoduchom príklade, ktorý sme počítali v úvodnej časti. Najskôr si označíme všetky uzly a vetvy (to môžeme ľubovoľne), napríklad tak, ako je naznačené na Obr. 3.1.



Obr. 3.1: Elektrická sieť (vľavo) a jej topológia (vpravo)

Podľa toho skonštruujeme maticu ∂ (každý riadok v nej zodpovedá jednému uzlu a každý stĺpec jednej vetve; bodu, z ktorého vetva vychádza, je priradená -1 , bodu, do ktorého vetva vchádza, 1).

$$\partial\alpha = A - B, \quad \partial\beta = B - A, \quad \partial\gamma = B - A$$

$$\partial = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} A \\ B \end{matrix}$$

Zvolíme si základný bod, t.j. bod, v ktorom budeme potenciál považovať za nulový (opäť ľubovoľne). V našej sieti nemáme veľmi na výber, nech je základným napríklad bod A , tzn. $\Phi^A = 0$. Teraz vyjadríme napätia vetiev pomocou zostávajúcich uzlových potenciálov (zostal iba Φ^B):

$$V^\alpha = \Phi^B, \quad V^\beta = -\Phi^B, \quad V^\gamma = -\Phi^B$$

Z druhého Kirchhoffovho zákona $V = -[d]\Phi$ dostaneme

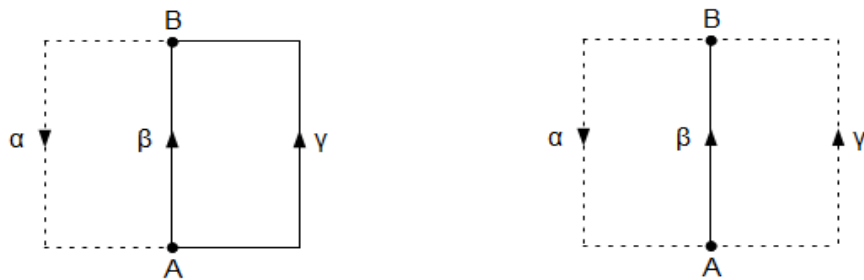
$$[d] = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Skúsme overiť, že matica $[\partial]$ a $[d]$ sú iba navzájom transponované. Maticu $[\partial]$ získame odstránením riadku ∂ , ktorý zodpovedá vybranému základnému bodu A .

$$[\partial] = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = [d]^T$$

Samozrejme, bežne takto zdĺhavo nepočítame, nájdeme iba jednu z matíc $[\partial]$ a $[d]$ a druhú získame transponovaním.

Ďalej môžeme určiť maticu σ . O nej vieme, že má v jednotlivých stĺpcoch zapísané slučky, preto ich najskôr musíme nájsť. Urobme výber úplného stromu podľa návodu - postupným odstraňovaním vetiev tvoriacich slučky, napríklad tak, ako je to zobrazené na Obr. 3.2.



Obr. 3.2: Výber úplného stromu

Úplný strom teda tvorí iba jedna vetva, v našom prípade β a v sieti máme dve nezávislé slučky: $M_1 = \alpha + \beta$, $M_2 = \beta - \gamma$.

Matica σ potom vyzerá nasledovne:

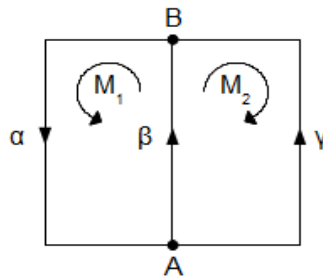
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{matrix}$$

Ak by sme náhodou zabudli, že do stĺpcov matice σ máme naukladať jednotlivé slučky, môžeme túto maticu nájsť aj pomocou prvého Kirchhoffovho zákona napísaného v tvare $I = \sigma J$. V sieti sme našli dve nezávislé slučky, to znamená, že

$$J = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}$$

Ak vyberieme slučky M_1 a M_2 tak, ako je znázornené na Obr. 3.3, vetvové prúdy sú vyjadrené pomocou obvodových prúdov J_1 a J_2 takto:

$$I_\alpha = J_1, \quad I_\beta = J_1 + J_2, \quad I_\gamma = -J_2$$



Obr. 3.3: Výber nezávislých slučiek

Porovnaním s $I = \sigma J$ dostaneme maticu σ :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Opäť si výpočet môžeme overiť - zostrojením matice s tak, že vyjadríme poklesy napätí ε okolo každej slučky pomocou vetvových napätí.

Okolo slučky 1: $\varepsilon_1 = V^\alpha + V^\beta$

Okolo slučky 2: $\varepsilon_2 = V^\beta - V^\gamma$

Porovnaním so vzťahom $\varepsilon = sV$ máme

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ako sme očakávali, matica s je len transponovaná k σ .

Ďalším krokom je zapísať vektory W a K , ktoré reprezentujú zdroje napätí a prúdov na jednotlivých vetvách siete. Znamienková konvencia pre W je taká, že napätie zdroja je uvažované ako kladné, ak zdroj prispieva kladne k poklesu napätia, keď vetvou prechádzame v zmysle danom šípkou. Z Obr. 3.1 nájdeme

$$W^\alpha = U, \quad W^\beta = 0, \quad W^\gamma = 0$$

Podobne, zdroje prúdov počítame ako kladné, ak prispievajú kladne k toku prúdov v smere šípky. V našej sieti však žiadny zdroj prúdu nemáme, preto K je nulový vektor:

$$K_\alpha = 0, \quad K_\beta = 0, \quad K_\gamma = 0$$

Zdroje v sieti môžeme teda opísať dvoma vektormi

$$W = \begin{pmatrix} U \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ešte nám zostáva napísať maticu Z , ktorá hovorí o odporoch na vetvách. Keďže

$$R_\alpha = R_1, \quad R_\beta = R_3, \quad R_\gamma = R_2,$$

matica Z vyzerá takto:

$$Z = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & R_2 \end{pmatrix}$$

Tu sa skončila akási "fyzikálna" časť príkladu, nasledujúce výpočty sú už len násobenia matíc. Zvoľme si nejaké konkrétne hodnoty napätia a odporov, pre ktoré našu sieť vyriešime, napríklad: $U = 4V$, $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 2\Omega$. Potom máme

$$W = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vyskúšajme najskôr počítať pomocou metódy obvodových prúdov, pre ktorú platí

$$J = (sZ\sigma)^{-1}s(ZK - W)$$

Robme postupne jednotlivé kroky:

$$sZ\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(sZ\sigma)^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$ZK - W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$s(ZK - W) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$J = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -16 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dostali sme riešenie pre obvodové prúdy: $J_1 = -2A$, $J_2 = 1A$.

$$I = \sigma J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vetvové prúdy sú: $I_\alpha = 2A$, $I_\beta = 1A$, $I_\gamma = 1A$. Výsledné záporné prúdy nám neprekážajú, pretože to iba znamená, že prúd tečie v danej vetve opačným smerom, ako sme si zvolili smer vetvy.

Zo známych prúdov vieme určiť napätia vetiev podľa vzťahu $V = W + Z(I - K)$, ktorý sa v našom prípade ešte zjednoduší, pretože $K = 0$ (v sieti nemáme zdroje prúdu):

$$V = W + ZI$$

$$V = W + ZI = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

To znamená: $V_\alpha = 2V$, $V_\beta = -2V$, $V_\gamma = -2V$.

Teraz si môžeme výsledky overiť vyskúšaním metódy uzlových potenciálov. Použijeme vzťah

$$\Phi = ([\partial]Z^{-1}[d])^{-1}[\partial](K - Z^{-1}W)$$

Pre napätia a prúdy potom platí:

$$V = -[d]\Phi, \quad I = K + Z^{-1}(-[d]\Phi - W)$$

Postupné výpočty:

$$[\partial]Z^{-1}[d] = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

$$([\partial]Z^{-1}[d])^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$K - Z^{-1}W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[\partial](K - Z^{-1}W) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

Teda neznámy uzlový potenciál je $\Phi^B = 2V$ a napätia na jednotlivých vetvách sú:

$V_\alpha = 2V$, $V_\beta = -2V$, $V_\gamma = -2V$.

$$V = -[d]\Phi = - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ešte spočítame prúdy vetiev:

$$I = Z^{-1}(-[d]\Phi - W) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že obe metódy nám dali zhodné výsledky, čo sme asi aj očakávali.

3.2 Význam jednotlivých krokov

Prirodzene by tu mohla vzniknúť otázka, aký význam z hľadiska fyziky majú tieto násobenia matic. Zoberme si najskôr metódu obvodových prúdov. Pre ňu je "ústrednou" rovnicou vzťah

$$J = (sZ\sigma)^{-1}s(ZK - W)$$

ktorý ešte môžeme prepísať do tvaru

$$(sZ\sigma)J = s(ZK - W)$$

Pri odvodení tohto vzťahu to mohlo vyzeráť, že len bezhlavo manévrujeme so vzťahmi s cieľom získať vzťah pre J . Všetky kroky však mali svoj fyzikálny zmysel, ktorý bolo v tom momente ťažšie uvidieť. Skúsme si ich ozrejmiť na konkrétnom príklade - majme napríklad topológiu siete z kapitoly 3.1 znázornenú na Obr. 3.1, ale uvažujme na každej vetve zdroj prúdu, napätia aj odpor bez konkrétnych hodnôt (teda všeobecne $R_1, R_2, R_3 \dots$). Prvky s indexom 1 nech sú na vetve α , index 2 nech patrí vetve β a index 3 vetve γ (nech nás nemýli, že v príklade v kapitole 3.1 to bolo označené spočiatku inak). Vektory K, W a matica Z sú potom dané takto:

$$W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{pmatrix}$$

Postupne robíme tieto kroky:

$$sZ\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 & R_2 \\ R_2 & R_2 + R_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(sZ\sigma)J &= \begin{pmatrix} R_1 + R_2 & R_2 \\ R_2 & R_2 + R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R_1 + R_2)J_1 + R_2J_2 \\ R_2J_1 + (R_2 + R_3)J_2 \end{pmatrix} \\
ZK - W &= \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1K_1 - W_1 \\ R_2K_2 - W_2 \\ R_3K_3 - W_3 \end{pmatrix} \\
s(ZK - W) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1K_1 - W_1 \\ R_2K_2 - W_2 \\ R_3K_3 - W_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1K_1 - W_1 + R_2K_2 - W_2 \\ R_2K_2 - W_2 + R_3K_3 - W_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

V prvom kroku v matici $sZ\sigma$ vystupujú iba odpory. Každý diagonálny prvok je súčtom odporov vo vetvách, ktoré tvoria slučku. Ak sa napríklad pozrieme na prvú slučku $\alpha + \beta$, vidíme, že ich spoločný odpor je $R_1 + R_2$ a tento člen naozaj stojí v matici $sZ\sigma$ na diagonále v prvom riadku a v prvom stĺpci. Rovnako pre druhú slučku $\beta - \gamma$ si môžeme overiť, že druhý diagonálny člen $R_2 + R_3$ je súčtom odporov v tejto slučke.

Zostali nám ešte nediagonálne prvky. Každý mimodiagonálny prvok je odpor spoločný dvom slučkám (až na znamienko). Napríklad prvok na pozícii 1,2 (prvý riadok, druhý stĺpec) je odpor, ktorý majú spoločný slučky 1 a 2 (čísla slučiek sú určené číslom stĺpca v matici σ , napríklad slučka 1 je slučka, ktorá je zapísaná v matici σ v prvom stĺpci). Z tohto je zrejmé, že matica $sZ\sigma$ je symetrická, pretože prvok 2,1 musí byť rovnaký ako 1,2 (oba sú odpory spoločné slučkám 1 a 2). V našom prípade máme na mieste 1,2 v matici $sZ\sigma$ odpor R_2 , čo sa zhoduje s tým, čo sme práve povedali. Tento odpor je na vetve β , ktorá je súčasťou slučky 1 a slučky 2. Nediagonálny prvok je síce odpor spoločný dvom slučkám, ale až na znamienko. Odpory majú vždy kladné hodnoty, ale nediagonálne prvky môžu byť aj záporné. Takýto prípad nastane vtedy, ak v jednej slučke je vetva s daným odporom zarátaná v kladnom smere a v druhej slučke v zápornom smere. Môžeme si to overiť, ak v našej sieti budeme uvažovať namiesto slučky $\beta - \gamma$ slučku $\gamma - \beta$ (naš výber má byť ľubovoľný). Potom matice σ a $sZ\sigma$ budú vyzeráť nasledovne:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$sZ\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{pmatrix}$$

Teraz máme v matici $sZ\sigma$ na pozícii 1,2 prvok $-R_2$.

Ďalej sme určili maticu $(sZ\sigma)J$. Jej komponenty sú poklesy napätí, ktoré by existovali pozdĺž jednotlivých slučiek, keby sme v sieti nemali zdroje.

Komponenty matice $ZK - W$ určujú nárasty napätí, ktoré by boli na jednotlivých vetvách, keby všetky obvodové prúdy boli nulové. Potom teda matica $s(ZK - W)$ obsahuje nárasty napätí pozdĺž jednotlivých slučiek v prípade, že by všetky obvodové prúdy boli nulové.

Rovnica $(sZ\sigma)J = s(ZK - W)$ teda hovorí, že pre každú slučku sa pokles napätia spôsobený obvodovým prúdom tečúcim cez odpory rovná nárastu napätia, ktorý by existoval na slučke, ak by boli všetky obvodové prúdy nulové. Teda celkový súčet napätí okolo každej slučky (spôsobený obvodovými prúdmi a zdrojmi) je nula ako vyžaduje druhý Kirchhoffov zákon.

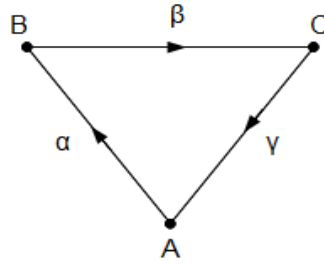
Podobne sa môžeme pozrieť na význam jednotlivých krokov v metóde uzlových potenciálov. Tu je dôležitý vzťah:

$$\Phi = ([\partial]Z^{-1}[d])^{-1}[\partial](K - Z^{-1}W)$$

ktorý prepíšeme do tvaru

$$([\partial]Z^{-1}[d])\Phi = [\partial](K - Z^{-1}W)$$

Mohli by sme si ich skúsiť pozrieť na tej istej sieti ako pri metóde slučkových prúdov, ale keďže v nej je okrem základného iba jeden bod, veľa by sme sa nedozvedeli, pretože by nám v niektorom výpočte vyšla len matica 1×1 (z nej by sme nemohli nič povedať ani o mimodiagonálnych prvkoch). Skúsme teda sieť aspoň s dvoma bodmi s topológiou,



Obr. 3.4: Príklad topológie siete s dvoma uzlami

aká je napríklad znázornená na Obr. 3.4. Nech nám neprekáža, že tentokrát máme v sieti len jednu slučku, pretože metódu obvodových prúdov už máme preskúmanú.

Pri metóde uzlových potenciálov potrebujeme poznať matice $[\partial]$ a $[d]$. Ak vyberieme bod A ako základný (t.j. s nulovým potenciálom), potom tieto matice majú tvar:

$$\partial = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad [\partial] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad [d] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Opäť majme všeobecné vetvy (to znamená s odporom aj oboma typmi zdrojov). Prvky na vetve α označíme indexom 1, na vetve β indexom 2 a na vetve γ indexom 3. Potom:

$$W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{pmatrix}$$

Jednotlivé kroky:

$$[\partial]Z^{-1}[d] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{pmatrix}$$

$$([\partial]Z^{-1}[d])\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi^B \\ \Phi^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})\Phi^B - \frac{1}{R_2}\Phi^C \\ -\frac{1}{R_2}\Phi^B + (\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3})\Phi^C \end{pmatrix}$$

$$K - Z^{-1}W = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 - \frac{W_1}{R_1} \\ K_2 - \frac{W_2}{R_2} \\ K_3 - \frac{W_3}{R_3} \end{pmatrix}$$

$$[\partial](K - Z^{-1}W) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 - \frac{W_1}{R_1} \\ K_2 - \frac{W_2}{R_2} \\ K_3 - \frac{W_3}{R_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 - \frac{W_1}{R_1} - K_2 + \frac{W_2}{R_2} \\ K_2 - \frac{W_2}{R_2} - K_3 + \frac{W_3}{R_3} \end{pmatrix}$$

Úvahy o maticiach v tejto metóde sú veľmi podobné tým, ktoré sa vyskytovali v predchádzajúcej metóde.

Každý diagonálny prvok v matici $[\partial]Z^{-1}[d]$ je súčtom prevrátených hodnôt odporov (teda súčtom vodivostí) všetkých rezistorov na vetvách, ktoré sú spojené v danom bode (tzn. vetvy, ktoré majú jeden z hraničných bodov práve daný bod). Napríklad bod B (čo zodpovedá prvku 1,1 v matici, ak body uvažujeme v poradí B, C) je hraničným bodom vetiev α a β , ktoré majú odpory R_1 a R_2 , teda prvok prislúchajúci tomuto bodu je $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Podobne pre bod C , ktorý je hraničným bodom vetiev β a γ s odpormi R_2 a R_3 , je týmto prvkom $\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ (nachádzajúci sa na pozícii 2,2).

Nediagonálny prvok v matici $[\partial]Z^{-1}[d]$ je (až na znamienko) prevrátená hodnota odporu na vetve, ktorá spája dva body. Prvok na mieste 1,2 by mal byť prevrátenou hodnotou odporu na vetve, ktorá spája body 1 a 2, teda body B a C . Tieto body sú spojené vetvou β , na ktorej je odpor R_2 . A naozaj, prvok na mieste 1,2 je $-\frac{1}{R_2}$ (až na znamienko).

Prvok matice $([\partial]Z^{-1}[d])\Phi$ môžeme považovať za prúd, ktorý by vytekal z určitého bodu, keby tu neboli zdroje. Napríklad s danými hodnotami Φ^B a Φ^C (uvažujúc bod A za základný, t.j. $\Phi^A = 0$) a bez zdrojov by bol prúd

$$\frac{1}{R_1}\Phi^B$$

tečúci z bodu B do bodu A , prúd

$$\frac{1}{R_2}(\Phi^B - \Phi^C)$$

tečúci z B do C , teda celkovo prúd

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\Phi^B - \frac{1}{R_2}\Phi^C$$

vytekajúci z bodu B , čo zodpovedá prvému prvku v matici $([\partial]Z^{-1}[d])\Phi$ (slovo vytekajúci je tu relatívne, pretože naozaj vytekajúci prúd z nejakého bodu má kladné znamienko (podľa dohody), ale vidíme, že ak $\Phi^B < \Phi^C$, potom prúd

$$\frac{1}{R_2}(\Phi^B - \Phi^C)$$

je záporný, a teda do bodu B vteká). Podobne, bez zdrojov by bol celkový prúd vytekajúci z bodu C

$$-\frac{1}{R_2}\Phi^B + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)\Phi^C$$

Jedna časť

$$\frac{1}{R_3}\Phi^C$$

by tiekla z C do A a druhá časť

$$\frac{1}{R_2}(\Phi^C - \Phi^B)$$

by tiekla z C do B .

Komponenty $K - Z^{-1}W$ majú význam vetvových prúdov, ktoré by existovali v sieti, ak by všetky uzlové potenciály boli nulové. Napríklad v takomto prípade by prúd tečúci vetvou α bol $K_1 - \frac{W_1}{R_1}$ (analogicky to platí aj pre zvyšné vetvy).

Zobrazenie $[\partial]$ len dá tieto prúdy vo vetvách do vzťahu k bodom. Komponenty $[\partial](K - Z^{-1}W)$ sú potom prúdy, ktoré by tiekli do jednotlivých bodov, ak by všetky uzlové potenciály boli rovné nule. Napríklad sa pozrime v našom príklade na bod B . Do bodu B vchádza vetva α , ktorá má prúd $K_1 - \frac{W_1}{R_1}$ a vychádza z neho vetva β , na ktorej je prúd $K_2 - \frac{W_2}{R_2}$. Celkový prúd, ktorý vteká do bodu B (alebo z neho vyteká - to závisí od znamienka výsledku), je

$$I_B = I_\alpha - I_\beta = K_1 - \frac{W_1}{R_1} - \left(K_2 - \frac{W_2}{R_2}\right) = K_1 - \frac{W_1}{R_1} - K_2 + \frac{W_2}{R_2}$$

čo aj zodpovedá prvému prvku v matici $[\partial](K - Z^{-1}W)$. Rovnako, do bodu C smeruje vetva β a vychádza z neho vetva γ , a teda prúd vtekajúci do tohto bodu (alebo z neho vytekajúci) je

$$I_C = I_\beta - I_\gamma = K_2 - \frac{W_2}{R_2} - K_3 + \frac{W_3}{R_3}$$

Rovnica

$$[\partial]Z^{-1}[d]\Phi = [\partial](K - Z^{-1}W)$$

potom hovorí, že pre každý bod súčet prúdov vytekajúcich z daného bodu ako výsledok rozdielu uzlových potenciálov sa rovná súčtu prúdov, ktoré by tiekli do bodu, ak by všetky uzlové potenciály boli nulové. To znamená, že celkový prúd vstupujúci do ľubovoľného bodu je nulový (čo súhlasí s prvým Kirchhoffovým zákonom).

Mohli by sme si všimnúť jednu zaujímavosť. Ak porovnáme význam jednotlivých matic v metóde uzlových potenciálov s maticami v metóde obvodových prúdov, môžeme vidieť veľkú podobnosť. Ak by sme nahradili slovo uzol slovom slučka, prúd slovom napätie, odpor slovom vodivosť, boli by rovnaké.

Táto časť vznikla podobne ako Kapitola 2 na základe [2], autorka len ku jednotlivým krokom pridala konkrétne príklady matic, na ktorých chcela ukázať ich význam.

3.3 Nutná podmienka úspechu

Kedy vieme takto počítať?

Po toľkom čase strávenom pri spomínaných metódach sa naskytá otázka, kedy tieto metódy fungujú a kedy ich môžeme použiť.

Zistili sme, že pri metóde obvodových prúdov platí: $J = (sZ\sigma)^{-1}s(ZK - W)$. Už prvý pohľad na tento vzorec nám hovorí, že prekážkou na ceste za J môže byť zobrazenie $(sZ\sigma)^{-1}$. Ak však vieme vyrobiť inverznú maticu k matici $(sZ\sigma)$, táto metóda nás privedie k výsledku. Inverzná matica existuje vtedy, keď na každej z nezávislých slučiek máme aspoň jeden odpor. Stačí si uvedomiť význam prvkov matice $(sZ\sigma)$, na diagonále sú súčty odporov v jednotlivých slučkách, mimodiagonálne prvky sú (až na znamienko) odpory spoločné viacerým slučkám. Na to, aby bol determinant matice $(sZ\sigma)$ nenulový (vtedy vieme vytvoriť inverznú maticu), potrebujeme len nenulovosť každého z diagonálnych členov, čo znamená mať na každej slučke aspoň jeden odpor. Ak toto platí, determinant je určite rôzny od nuly, lebo nediagonálne elementy nemajú možnosť vyrobiť nulu, pretože slučky sú nezávislé. V jednom riadku (a analogicky aj v stĺpci) sú príspevky len od odporov jednej slučky, to znamená, že ak by na niektorej zo slučiek nebol odpor, automaticky by bol nulový jeden celý riadok aj stĺpec. Odtiaľ

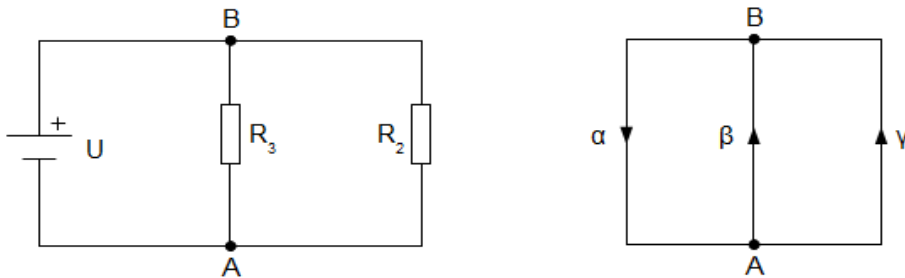
vidíme, že menej ako nenulovosť diagonálnych prvkov ($sZ\sigma$) požadovať nemôžeme.

Pri metóde uzlových potenciálov platí: $\Phi = ([\partial]Z^{-1}[d])^{-1}[\partial](K - Z^{-1}W)$. Tu potrebujeme invertovateľnosť matice Z . Keďže Z je diagonálna, nenulovosť determinantu zabezpečíme iba tak, že Z musí mať všetky diagonálne prvky nenulové, teda na každej vetve musí byť odpor. Porovnaním s prvou metódou je táto podmienka oveľa silnejšia, s metódou obvodových prúdov máme teda väčšiu šancu na úspech (môžeme ju použiť vo viacerých prípadoch).

Pozrime sa na sieť, ktorú sme uvažovali v prvej kapitole alebo aj v príklade na úvod tejto kapitoly. Ak odstránime rezistor z vetvy, na ktorej je zdroj napätia, ako je to znázornené na Obr. 3.5, matica Z pre túto sieť vyzerá nasledovne (pre uzly a vetvy zvolené tak, ako je to naznačené na Obr. 3.5):

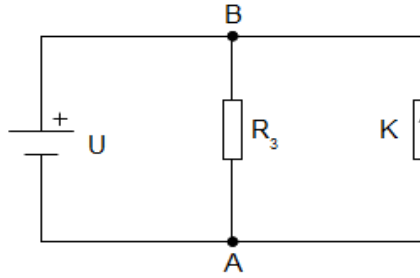
$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & R_2 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že táto matica sa nedá invertovať, a tak nemôžeme použiť metódu uzlových potenciálov.



Obr. 3.5: Elektrická sieť, pre ktorú nemôžeme použiť metódu obvodových prúdov (vľavo) a jej topológia (vpravo)

Na to, aby sme nemohli použiť ani metódu obvodových prúdov, potrebujeme ešte z ďalšej vetvy odstrániť rezistor. Ak by sme však urobili iba to, mali by sme v našej sieti vetvu, ktorá by neobsahovala žiaden prvok a bola by tam zbytočná (nijako by neovplyvňovala pomery v sieti). Odoberme teda z vetvy 3 rezistor R_2 , ale pridajme namiesto neho na vetvu zdroj prúdu. Táto sieť je znázornená na Obr. 3.6.



Obr. 3.6: Elektrická sieť, pre ktorú nemôžeme použiť metódu uzlových potenciálov

Matica $sZ\sigma$ potom vyzerá takto:

$$sZ\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_3 & R_3 \\ R_3 & R_3 \end{pmatrix}$$

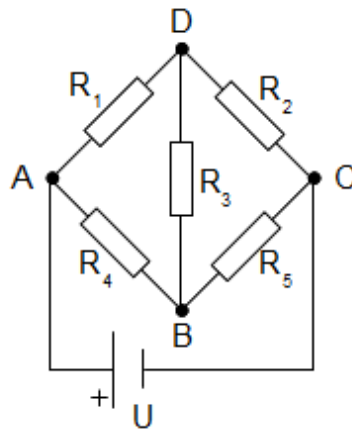
A k tejto matici opäť neexistuje inverzná matica, preto nemôžeme použiť metódu obvodových prúdov.

Zistili sme teda, že prekážkou úspechu v počítaní môže byť neinvertovateľnosť matic. Má však tento dôvod aj nejaký fyzikálny zmysel? Znamená to snáď, že sa či už metóda obvodových prúdov alebo metóda uzlových potenciálov nedá použiť v takýchto prípadoch? V úvodnej kapitole sme ich predsa "odvodili" z Kirchhoffových zákonov a povedali sme, že v niektorých prípadoch môžu zjednodušiť počítanie tým, že znížia počet rovníc. Nehovorili sme o ohraničenosti ich použitia. Ak sú tieto metódy len aplikáciou Kirchhoffových zákonov, o ktorých vieme, že musia platiť pre každú elektrickú sieť, ktorú tu uvažujeme, potom nie je dôvod, aby sa nedali niekedy použiť.

Skúsme si teda vypočítať krok za krokom metódou uzlových potenciálov sieť na Obr. 3.5, aby sme odhalili, v čom je problém (ak tu naozaj nejaký je). Zvoľme si niektorý bod za základný, povedzme bod A. Neznámym je pre nás potenciál v bode B. Podľa metódy uzlových potenciálov by sme mali teraz použiť pre bod B prvý Kirchhoffov zákon. Prúdy vo vetvách β a γ vyjadríme jednoducho: $I_\beta = -\Phi^B/R_3$ a $I_\gamma = -\Phi^B/R_2$. Prúd tečúci vetvou α by mal byť $I_\alpha = (U - \Phi^B)/R_1$, ale $R_1 = 0$ a nulu do menovateľa dosadiť nemôžeme. Na tomto mieste musíme s metódou uzlových potenciálov skončiť. Pozorný čitateľ si určite všimol, že sme vôbec nemuseli použiť Kirchhoffov zákon pre prúdy, pretože práve vetva α nám hovorí, že potenciál $\Phi^B = U$. Znamená takýto vý-

počet, že sme nemohli použiť metódu uzlových potenciálov? Dalo by sa povedať, že sme sa len trochu odklonili od "mechanického" postupu a riešenie pre potenciály sme uhádli (alebo lepšie povedané - uvideli). Necháme na čitateľa, nech si sám vyberie, čo to podľa neho znamená - či nemožnosť použiť túto metódu alebo len jej malú modifikáciu. Napriek tomu však uvedieme na tomto mieste ešte jeden príklad, ktorým sa pokúsime obhájiť práve druhú možnosť.

Uvažujme elektrickú sieť na Obr. 3.7.



Obr. 3.7: Elektrická sieť, pre ktorú nemôžeme použiť "typickú" metódu uzlových potenciálov

Vidíme, že na dolnej vetve, na ktorej máme zdroj napätia, nemáme rezistor, teda matica Z sa nebude dať obrátiť. Skúsme však uvažovať takto: Zvoľme si napríklad bod A za základný. Vetva, na ktorej nie je rezistor, sa týka bodov A a C , preto aplikujeme Kirchhoffov zákon pre prúdy len na body B a D (pre body A a C by bol už spomínaný problém s delením nulou).

$$B: \frac{\Phi^B}{R_4} + \frac{\Phi^B - \Phi^C}{R_5} + \frac{\Phi^B - \Phi^D}{R_3} = 0$$

$$D: \frac{\Phi^D}{R_1} + \frac{\Phi^D - \Phi^C}{R_2} + \frac{\Phi^D - \Phi^B}{R_3} = 0$$

Teraz máme dve rovnice pre uzlové potenciály, ktoré obsahujú tri neznáme. Poznáme však vzťah medzi potenciálmi v bodoch A a C , pretože na jednej z vetiev je medzi nimi len zdroj napätia:

$$\Phi^C - \Phi^A = U$$

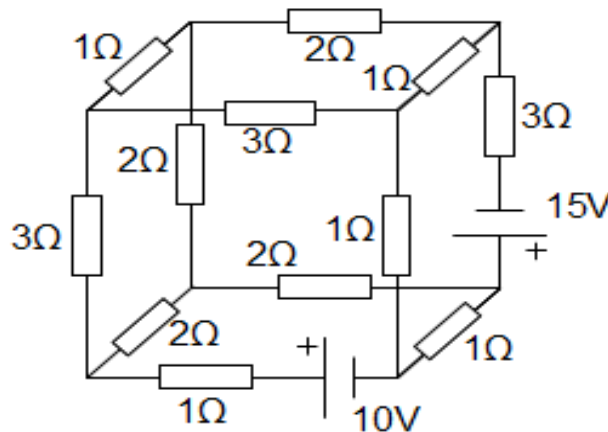
Spolu s touto rovnicou už máme systém troch rovníc s troma neznámymi, ktorý vieme vyriešiť.

Na výpočet tohoto príkladu sme tak použili sčasti metódu uzlových potenciálov, ktorú sme ešte museli trochu doplniť.

Ak však používame metódu uzlových potenciálov a metódu obvodových prúdov vo formalizme prezentovanom touto prácou, tento malý detail nám tu chýba - možnosť modifikácie (uvidieť zjednodušenie riešenia a jeho použitie). Preto nás v niektorých prípadoch tieto metódy neprivedú k výsledku. V iných prípadoch však môže použitie tohoto formalizmu sprehľadniť výpočty, a preto môže byť užitočné. Práve takýto príklad uvedieme teraz - elektrickú sieť v tvare kocky.

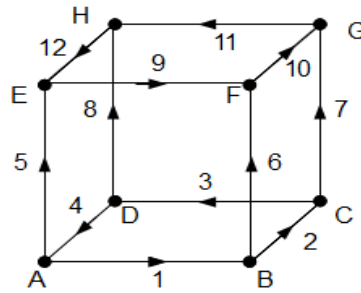
3.4 Kocka

Poučení jednoduchým príkladom na úvod môžeme teraz vyskúšať niečo zložitejšie. Uvažujme elektrickú sieť v tvare kocky, ktorá je znázornená na Obr. 3.8.



Obr. 3.8: Elektrická sieť v tvare kocky

Najskôr si označíme ľubovoľne všetky uzly a vetvy tejto siete.



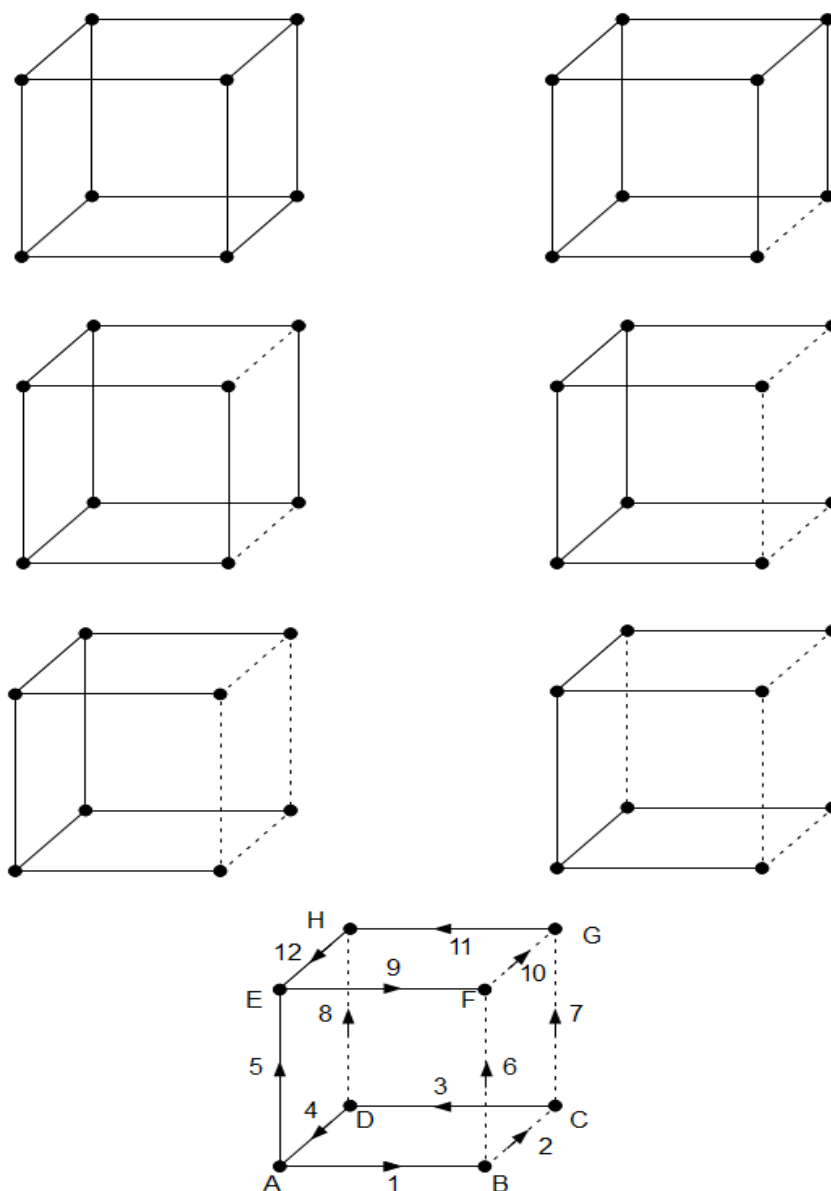
Obr. 3.9: Topológia kocky (so zvolenými smermi vetiev)

Na základe nášho označenia môžeme zostrojiť maticu zobrazenia ∂ :

$$\partial = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ak budeme potrebovať maticu zobrazenia d , netreba nič počítať, získame ju jednoducho transponovaním ∂ . Matice $[\partial]$ a $[d]$ získame už z matic ∂ a d - vymazaním riadku (v matici ∂) alebo vymazaním stĺpca (v matici d) prislúchajúceho základnému bodu. Tento bod môžeme vybrať ľubovoľne, tak nech je ním napríklad bod A .

Ešte potrebujeme zistiť, ako vyzerá matica σ . Na to musíme nájsť všetky nezávislé slučky siete. Výber úplného stromu urobíme opäť podľa návodu, t.j. postupným odstraňovaním vetiev tvoriacich slučky. Na to si však najskôr ešte trochu zjednodušíme obrázok kocky, aby sme sa v ňom mohli lepšie orientovať a až potom dokreslíme všetko potrebné.

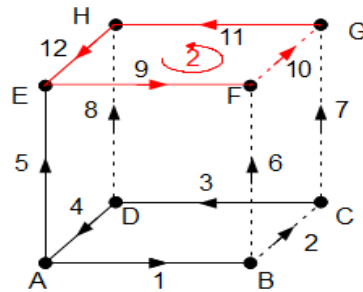
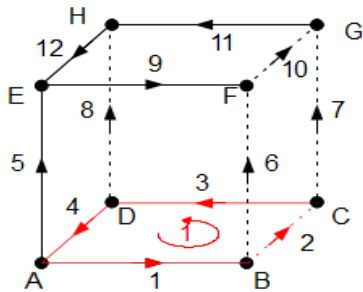


Obr. 3.10: Výber úplného stromu

Nakoniec vyberieme nezávislé slučky, ktoré sú znázornené na Obr. 3.11.

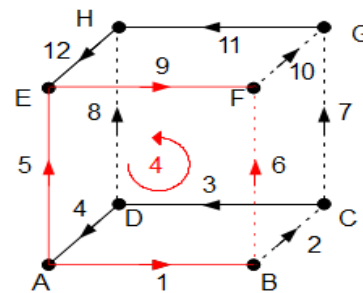
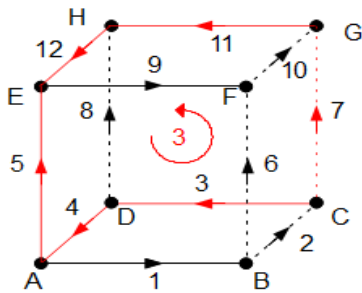
Slučka 1: $1 + 2 + 3 + 4$

Slučka 2: $9 + 10 + 11 + 12$

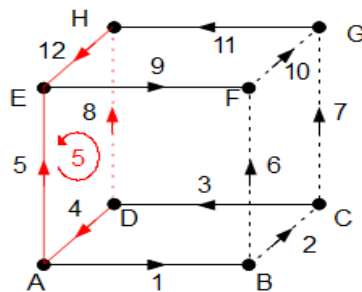


Slučka 3: $7 + 11 + 12 - 5 - 4 - 3$

Slučka 4: $1 + 6 - 9 - 5$



Slučka 5: $8 + 12 - 5 - 4$



Obr. 3.11: Výber nezávislých slučiek

Teraz vieme určiť maticu σ :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Maticu s vieme získať z matice σ opäť len transponovaním a nemusíme nič navyše počítať.

V tomto príklade sú pre výpočet prúdov a napätí vetiev použiteľné obe metódy, s ktorými sme sa oboznámili, pretože na každej vetve máme rezistor (a tak nič nebráni invertovateľnosti potrebných matíc). V sieti máme päť nezávislých slučiek, čo znamená päť neznámych pre metódu obvodových prúdov. Metóda uzlových potenciálov bude mať sedem neznámych, pretože tu máme osem uzlov. Teda v tomto prípade je pre nás výhodnejšia metóda obvodových prúdov, kde budeme pracovať s maticami menších rozmerov.

Nakoniec ešte potrebujeme zapísať vektory W a K a maticu Z . Keďže v sieti nemáme žiaden zdroj prúdu, vektor K je nulový vektor.

$$W = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teraz máme pripravené všetko potrebné a môžeme počítat'. Ako sme povedali, použijeme metódu obvodových prúdov, pre ktorú platí

$$J = (sZ\sigma)^{-1}s(ZK - W)$$

Ak ešte použijeme, že $K = 0$, môžeme túto rovnicu prepísať

$$J = (sZ\sigma)^{-1}s(-W)$$

$$sZ\sigma = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & 3 & -3 & 1 \\ -4 & 3 & 13 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 3 & 8 & 3 \\ -2 & 1 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(sZ\sigma)^{-1} = \frac{1}{6799} \begin{pmatrix} 2039 & -901 & 932 & -1063 & 322 \\ -901 & 1942 & -892 & 1280 & -279 \\ 932 & -892 & 1383 & -826 & -383 \\ -1063 & 1280 & -826 & 1978 & -548 \\ 322 & -279 & -383 & -548 & 1458 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
s(-W) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -15 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} \\
J &= \frac{1}{6799} \begin{pmatrix} 2039 & -901 & 932 & -1063 & 322 \\ -901 & 1942 & -892 & 1280 & -279 \\ 932 & -892 & 1383 & -826 & -383 \\ -1063 & 1280 & -826 & 1978 & -548 \\ 322 & -279 & -383 & -548 & 1458 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -15 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 - 3343/6799 \\ 1 + 2791/6799 \\ -3 - 1408/6799 \\ 3240/6799 \\ 1 + 1206/6799 \end{pmatrix} \approx \\
&\approx \begin{pmatrix} -3.49 \\ 1.41 \\ -3.21 \\ 0.48 \\ 1.18 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Toto je riešenie pre obvodové prúdy, odkiaľ vieme vypočítať prúdy v jednotlivých vetvách.

$$I = \sigma J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3.49 \\ 1.41 \\ -3.21 \\ 0.48 \\ 1.18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.02 \\ -3.49 \\ -0.28 \\ -1.46 \\ 1.55 \\ 0.48 \\ -3.21 \\ 1.18 \\ 0.93 \\ 1.41 \\ -1.80 \\ -0.62 \end{pmatrix}$$

Z týchto prúdov vieme určiť napätia vetiev podľa vzťahu: $V = W + ZI$

$$V = \begin{pmatrix} 6.98 \\ -3.49 \\ -0.57 \\ -2.92 \\ 4.66 \\ 0.48 \\ 5.38 \\ 2.35 \\ 2.80 \\ 1.41 \\ -3.59 \\ -0.62 \end{pmatrix}$$

Metóda uzlových potenciálov by nám dala rovnaké výsledky, čo by sme si mohli ľahko overiť.

Záver

Najskôr sme si zopakovali čo-to z fyziky - pozreli sme sa na Kirchhoffove zákony, na rôzne metódy riešenia elektrických sietí, ktoré sme si ozrejmili na jednoduchom príklade. Okrem klasického riešenia sme sa zamerali na metódu obvodových prúdov a metódu uzlových potenciálov. Potom sme sa pozreli trochu bližšie na samotnú sieť. Videli sme, že elektrickej sieti vieme priradiť jednorozmerný komplex, čo je sústava dvoch vektorových priestorov, medzi ktorými existuje lineárne zobrazenie - hraničné zobrazenie. Nahliadnutie jeho významu nám ukázalo, že v elektrickej sieti ako komplexe môžeme prirodzene sformulovať Kirchhoffov zákon pre prúdy ako stručný výrok: Prúd je 1-cyklus. Pri uvažovaní o jadre a obraze hraničného zobrazenia sme tu objavili aj ďalší fyzikálny prvok: ako bázu pre jadro tohto zobrazenia môžeme vybrať nezávislé slučky komplexu (t.j. nezávislé obvody siete), ktoré sú potrebné pri počítaní metódou obvodových prúdov. V duálnych priestoroch (ku daným dvom vektorovým priestorom) sa nám podarilo sformulovať aj druhý Kirchhoffov zákon - zákon pre napätia, ktorý je rovnako veľmi stručným výrokom: Napätie je 1-kohranica. A po tomto úspechu nám už nič nebránilo v tom, aby sme v reči nášho komplexu sformulovali metódu obvodových prúdov a metódu uzlových potenciálov a aby sme tak mohli aj týmto spôsobom počítať. Nadobudnuté vedomosti sme ďalej využili pri riešení konkrétnych príkladov. Najskôr sme si celý postup vysvetlili na jednoduchom príklade, ktorý sme na začiatku počítali "fyzikálne", neskôr sme vyskúšali aj zložitejší prípad - konkrétne elektrickú sieť v tvare kocky. Našli sme aj význam jednotlivých krokov a zisťovali sme, kedy môžeme tento nový spôsob počítania použiť. Videli sme, že nie vždy sme pri počítaní úspešní, môže sa nám stať, že zlyháme pri hľadaní inverznej matice. Neznamená to však, že by sa metóda obvodových prúdov alebo metóda uzlových potenciálov nedala použiť. Sú to príklady, v ktorých musíme pridať aj čosi navyše - podmienku, ktorá automaticky

vyplýva z rozloženia prvkov v sieti, ale ktorú formalizmus prezentovaný v tejto práci (a teda ani "návod" na metódu obvodových prúdov či uzlových potenciálov) neobsahuje, a to je príčinou zlyhania v takýchto prípadoch. Pri počítaní siete v tvare kocky nám však tento formalizmus sprehľadňoval výpočty, a to môžeme považovať za výhodu jeho použitia. Prílohou tejto práce je aj program, ktorý počíta elektrické siete, pričom stačí, aby používateľ odpovedal na jednoduché otázky.

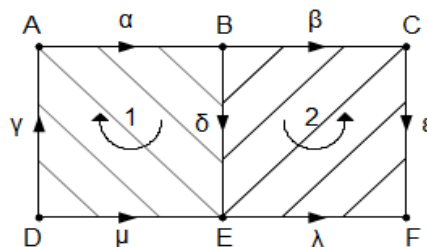
Cieľom práce bolo naučiť sa všeobecný formalizmus a vyskúšať si ho na konkrétnych príkladoch, čo sme aj splnili. Teraz už ponecháme na čitateľa, či považuje takýto spôsob riešenia niekedy za užitočný a páčil sa mu alebo uprednostní pri počítaní vždy klasický postup.

Dodatok A

Kohomológie

A.1 Komplexy a homológie

Definujme n -komplex ako zjednotenie $n+1$ (konečných) množín $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n$ navzájom spojených nejakými podmienkami (ku ktorým sa o chvíľu dostaneme). Množina S_0 obsahuje nulorozmerné elementy (alebo aj uzly) komplexu, množina S_1 jednorozmerné elementy (vetvy), množina S_2 dvojrozmerné elementy, atď. Skúsme jednoduchý príklad, predstavme si nejaký 2-komplex, napríklad stenu vykachličkovanú rôznymi tvarmi kachličiek, ktoré môžeme považovať za n -uholníky - typicky štvoruholníky. Samotná kachlička je prvok S_2 (na Obr. A.1 označené 1 a 2), hrany kachličky, t.j. strany n -uholníka sú prvky S_1 (α, β, \dots) a body n -uholníka sú prvky S_0 (A, B, \dots). Každému prvku musíme určiť nejakú orientáciu (tá bude dôležitá neskôr pri zavedení hraničného operátora).



Obr. A.1: Príklad 2-komplexu

Ku každej množine S_k priradiťme vektorový priestor C_k tvorený vektormi, ktorých komponenty sú indexované podľa prvkov S_k . Tieto vektory nazývame *k-reťazce*. Dimenzia priestoru C_k sa teda rovná počtu prvkov S_k . Každý prvok z S_k môžeme stotožniť s vektorom, ktorý má 1 na pozícii prislúchajúcej tomuto prvku a 0 na všetkých ostatných miestach.

Pre úplný popis komplexu je potrebné ešte zaviesť *hraničný operátor*, presnejšie postupnosť hraničných operátorov, ktoré môžeme všetky označiť rovnakým symbolom:

$$\partial: C_k \rightarrow C_{k-1}$$

pre každé k . Tento operátor môžeme chápať tak, že každému prvku z S_k priradí nejakú kombináciu prvkov z S_{k-1} (s vhodnými znamienkami), ktoré tvoria jeho hranicu: toto definuje ∂ na každom bázovom prvku z C_k a tým určuje lineárne zobrazenie z C_k do C_{k-1} . (Pre $k = 0$ vezmeme $\partial = 0$, pretože tu nemáme v komplexe prvky zápornej dimenzie.) Napríklad hranicou kachličky 1 sú hrany α , δ , μ a γ (je potrebné dávať pozor na smery, tie sú dôležité, tak napríklad hranu μ musíme zobrať so záporným znamienkom - obiehame v smere pohybu hodinových ručičiek). Toto môžeme trocha matematickejšie vyjadriť:

$$\partial 1 = \alpha + \delta - \mu + \gamma$$

Takisto môžeme uvažovať hranicu vetvy, povedzme pre hranu α sú to body A a B :

$$\partial \alpha = B - A$$

(bod, z ktorého hrana vychádza, má záporné znamienko, bod, do ktorého hrana smeruje, uvažujeme s kladným znamienkom).

S každým operátorom sú prirodzene spojené dva podpriestory: jadro a obraz operátora. Jadro $\partial: C_k \rightarrow C_{k-1}$ je podpriestor C_k obsahujúci prvky s nulovou hranicou (alebo teda bez hranice). Označíme ho Z_k a nazveme *priestor k-cyklov*. Druhým podpriestorom C_k je obraz $\partial: C_{k+1} \rightarrow C_k$ obsahujúci také prvky, ktoré sú hranicami prvkov z C_{k+1} . Tento označíme B_k a nazveme ho *priestor k-hraníc*.

Platí tu jedna zaujímavá vlastnosť, že každý priestor B_k je podpriestorom príslušného Z_k alebo že každá hranica je nejaký cyklus. Tak napríklad môžeme vidieť, že hranica kachličky 1:

$$\partial 1 = \alpha + \delta - \mu + \gamma$$

je uzavretá a ona sama má nulovú hranicu:

$$\partial(\partial 1) = \partial(\alpha + \delta - \mu + \gamma) = \partial\alpha + \partial\delta - \partial\mu + \partial\gamma = (B - A) + (E - B) - (E - D) + (A - D) = 0$$

To znamená, že je to cyklus. Hranica každej z kachličiek je uzavretá a je teda zároveň aj cyklom. Už sme naznačili, že vlastnosť $B_k \subset Z_k$ môže byť formulovaná aj inak. Ak B_k je obraz zobrazenia $\partial: C_{k+1} \rightarrow C_k$ a Z_k je jadro zobrazenia $\partial: C_k \rightarrow C_{k-1}$, potom $B_k \subset Z_k$ znamená, že zloženie dvoch takýchto zobrazení

$$\partial \circ \partial: C_{k+1} \rightarrow C_{k-1}$$

dáva nulu alebo že hranica hranice je nula:

$$\partial \circ \partial = 0$$

Práve vďaka tomu, že B_k je podpriestorom Z_k , môžeme vytvoriť faktorpriestor H_k priestoru k -cyklov Z_k podľa svojho podpriestoru k -hraníc B_k :

$$H_k = Z_k / B_k$$

H_k sa nazýva *k-tý homologický priestor komplexu*.¹

A.2 Duálne priestory a kohomológie

Pod *duálnym priestorom* vektorového priestoru V rozumieme vektorový priestor všetkých lineárnych funkcií (zobrazení) na V . Duálne priestory k priestorom C_k označíme C^k . Prvok z C^k , ktorý nazývame *k-koreťazec*, je teda lineárnou funkciou prvku z C_k . Ak σ je *k-koreťazec* a c je *k-reťazec*, označíme hodnotu koreťazca σ na reťazci c ako $\langle \sigma, c \rangle$.

Uvažujme teraz združený operátor d k hraničnému operátoru $\partial: C_{k+1} \rightarrow C_k$, ktorý sa nazýva *kohraničný operátor*. $d: C^k \rightarrow C^{k+1}$ je definovaný vzťahom

¹Pre n -komplex platí *Eulerova teorema*:

$$\dim H_0 - \dim H_1 + \dim H_2 - \dots \pm \dim H_n = \dim C_0 - \dim C_1 + \dim C_2 - \dots \pm \dim C_n$$

Číslo, ktoré vyjde na oboch stranách tejto rovnice sa nazýva *Eulerova charakteristika komplexu*.

$$\langle d\sigma, c \rangle = \langle \sigma, \partial c \rangle$$

kde $\sigma \in C^k$ a $c \in C^{k+1}$.

Pre kohraničný operátor platí:

$$d \circ d = 0$$

▼ Z vlastnosti, že zloženie $\partial \circ \partial$ dáva vždy nulu, priamo vyplýva, že podobná vlastnosť platí aj pre d , teda že rovnako aj zloženie $d \circ d$ je nula. Pri tomto zložení skladáme $d: C^k \rightarrow C^{k+1}$ s $d: C^{k+1} \rightarrow C^{k+2}$. Platí:

$$\langle d(d\sigma), c \rangle = \langle d\sigma, \partial c \rangle = \langle \sigma, \partial(\partial c) \rangle = 0$$

pretože $\partial(\partial c) = 0$. ▲

V priestoroch C^k máme opäť aj ich podpriestory, ktoré sú jadrom a obrazom kohraničného operátora. Obraz $d: C^{k-1} \rightarrow C^k$ nazývame *priestor k -kohraníc B^k* , jadro $d: C^k \rightarrow C^{k+1}$ je *priestor k -kocyklov Z^k* . Podmienka $d \circ d = 0$ nám hovorí, že každá kohranica je aj kocyklus a teda že B^k je podpriestor Z^k . Aj tu vytvoríme faktorpriestor H^k priestoru k -kocyklov Z^k podľa svojho podpriestoru k -kohraníc B^k :

$$H^k = Z^k / B^k$$

H^k sa nazýva *k -tý kohomologický priestor komplexu* a je duálnym priestorom ku H_k .

Jadro združeného operátora anihiluje obraz operátora, obraz združeného operátora anihiluje jadro operátora. Uvažujme nasledujúci diagram:

$$\begin{array}{ccccc} & & d & & d \\ & & \rightarrow & & \rightarrow \\ C^{k-1} & \rightarrow & C^k & \rightarrow & C^{k+1} \\ & & \partial & & \partial \\ & & \leftarrow & & \leftarrow \\ & & C_{k-1} & \leftarrow & C_k & \leftarrow & C_{k+1} \end{array}$$

Najskôr sa pozrieme na operátor $\partial: C_{k+1} \rightarrow C_k$ a jeho združený operátor $d: C^k \rightarrow C^{k+1}$. Jadro d je priestor Z^k kocyklov, ten anihiluje obraz ∂ - priestor hraníc B_k . Opačne, ak uvažujeme operátor $\partial: C_k \rightarrow C_{k-1}$ a jeho združený $d: C^{k-1} \rightarrow C^k$, obraz d je priestor kohraníc B^k a ten anihiluje jadro ∂ - priestor cyklov Z_k .

▼ Uvažujme, že σ je element Z^k , tzn. $d\sigma = 0$. Označme c prvok priestoru C_{k+1} , potom ∂c je prvok priestoru hraníc B_k . Použitím týchto vlastností a definície kohraničného operátora d dostaneme

$$\langle \sigma, \partial c \rangle = \langle d\sigma, c \rangle = 0$$

Podobne, uvažujme, že σ je prvok priestoru C^{k-1} , potom $d\sigma$ je prvok obrazu $d B^k$. Označme c prvok priestoru Z_k , tzn. $\partial c = 0$. Použitím týchto vlastností a definície kohraničného operátora d dostaneme

$$\langle d\sigma, c \rangle = \langle \sigma, \partial c \rangle = 0$$

Teda ľubovoľný prvok z B_k pôsobiaci na prvok zo Z_k dáva tiež nulu. ▲

Ak σ je prvok priestoru C^k , $\bar{\sigma}$ je jeho trieda ekvivalencie z H^k a c je prvok priestoru C_k , \bar{c} je jeho trieda ekvivalencie z H_k , potom platí

$$\langle \bar{\sigma}, \bar{c} \rangle = \langle \sigma, c \rangle$$

▼ Ak $\bar{\sigma}$ je niektorá trieda ekvivalencie z H^k , potom $\bar{\sigma}$ je kocyklus tvaru $\sigma + d\tau$. Ak $\bar{\sigma}$ je prvok rôzny od nuly, potom σ nie je určite kohranica. Podobne, ak \bar{c} je niektorá trieda ekvivalencie z H_k , potom \bar{c} je cyklus tvaru $c + \partial b$. Ak \bar{c} je rôzny od nuly, c nemôže byť hranica. Skúsime vypočítať hodnotu $\bar{\sigma}$ na \bar{c} :

$$\begin{aligned} \langle \bar{\sigma}, \bar{c} \rangle &= \langle \sigma + d\tau, c + \partial b \rangle = \langle \sigma, c \rangle + \langle d\tau, c \rangle + \langle \sigma, \partial b \rangle + \langle d\tau, \partial b \rangle = \\ &= \langle \sigma, c \rangle + \langle \tau, \partial c \rangle + \langle d\sigma, b \rangle + \langle d(d\tau), b \rangle \end{aligned}$$

Pretože c je cyklus, $\partial c = 0$, rovnako aj $\sigma = 0$, pretože σ je kocyklus a ešte aj $d(d\tau) = 0$ (vlastnosť d). Teda sme dostali, že

$$\langle \bar{\sigma}, \bar{c} \rangle = \langle \sigma, c \rangle$$

▲

Inými slovami, je jedno, ktorý prvok z triedy ekvivalencie vyberieme, výsledok nezávisí od reprezentantov. Máme tak dobre definovanú hodnotu lineárnej funkcie z H^k na prvku z H_k , teda H^k je duálny priestor k H_k .

Literatúra

- [1] Weyl, H. 1923. Repartición de corriente en una red conductora, Rev. Mat. Hisp. Amer. 5
- [2] Bamberg, P., Sternberg, S. 1988. A course in mathematics for students of physics. V.1, Cambridge University Press
- [3] Fecko, M. 2008. Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov, Iris
- [4] Renteln, P. 2013. Manifolds, Tensors, and Forms: An Introduction for Mathematicians and Physicists, Cambridge University Press
- [5] Tirpák, A. 2012. Elektromagnetizmus, Iris
- [6] <http://ncatlab.org/johnbaez/show/Circuit+theory+I>

Príloha na CD

Prílohou tejto práce je program, ktorý počíta elektrické siete. Využíva pri tom obe metódy, ktorými sme sa zaoberali v tejto práci - metódu obvodových prúdov a metódu uzlových potenciálov. Tento program nepatrí k jadrovej časti práce a autorka by chcela na tomto mieste upozorniť na to, že nie je ani žiadnym programátorským dielom. Pôvodne vznikol kvôli uľahčeniu práce pri násobení matíc v príkladoch. Neskôr bol upravený, aby si mohol nejaký ten príklad vypočítať aj niekto, kto má pocit, že tomu zatiaľ celkom nerozumie (ale chcel by si niečo spočítať) alebo kto nebol doteraz oboznámený s potrebnou časťou matematiky (s násobeniami matíc - napríklad žiak základnej školy) či fyziky (povedzme niekto, komu sa nechcelo podrobne čítať túto prácu :)

Po spustení program ponúka dve možnosti:

1. vypočítať neznáme prúdy a napätia vo všetkých vetvách siete, ktorá obsahuje zdroje (napätí a prúdov) a rezistory
2. vypočítať odpor zapojenia rezistorov (t.j. ak máme sieť, v ktorej nie je žiaden zdroj napätia ani prúdu)

Potom je potrebné zodpovedať niekoľko jednoduchých otázok:

- Koľko vetiev a koľko uzlov je v sieti?
- Aký smer majú jednotlivé vetvy?
- Medzi ktorými bodmi chceme počítať odpor? (táto otázka sa samozrejme vyskytne iba v prípade, že chceme počítať odpor zapojenia rezistorov)

- Ktorý bod je základný?
- Aké odpory majú jednotlivé vetvy?
- Aké zdroje napätí a prúdov sú na vetvách? (zadanie veľkosti a tiež smeru)

Nakoniec nám program ponúkne výsledky pre obe metódy. Ak niektorá z metód zlyhá, informuje nás o tom. Rovnako nám oznámi, ak sa mu nepodarí nájsť systém všetkých nezávislých slučiek. Program vie nájsť maximálne 15 nezávislých slučiek, toto číslo sa však môže dosť znížiť, ak počítame nejakú zložitú sieť (napríklad pri sieti tvaru kocky, ktorú sme uvažovali v kapitole 4.4, bolo potrebných 15 pokusov na nájdenie 5 nezávislých slučiek siete).