Univerzita Komenského, Bratislava
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Afinná grupa a jej Lieova algebra

Bakalárska práca

2015

Ivan Kačala

Univerzita Komenského, Bratislava
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Afinná grupa a jej Lieova algebra

Bakalárska práca

Študijný program:	Fyzika
Študijný odbor:	1160 fyzika
Školiace pracovisko:	Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky
Školiteľ:	Doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.

2015 Ivan Kačala

39543725

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Ivan Kačala
Študijný program: fyzika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 4.1.1. fyzika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Afinná grupa a jej Lieova algebra

Cieľ: V bakalárskej práci by sa podrobne vlastnými rukami prepočítali rôzne detaily súvisiace s afinnou grupou a jej Lieovou algebrou. Špeciálne by sa zrátala najvšeobecnejšia invariantná bilineárna forma v Lieovej algebre.

Anotácia: Afinné transformácie pridávajú k lineárnym transformáciám ešte aj posunutia. Sú teda z praktického hľadiska zadané maticou (ktorá robí tú lineárnu časť) a stĺpčekom (ktorý má na starosti to posunutie). Vo fyzike sú transformácie tohto typu najznámejšie v dvoch prípadoch. Po prvé v trojrozmernom euklidovskom priestore, kde sa lineárne transformácie obmedzia na ortogonálne (zodpovedajú otočeniam). Po druhé v štvorrozmernom Minkowského priestore, kde sa lineárne transformácie obmedzia na „ortogonálne" transformácie v zmysle príslušnej Minkowského metriky (zodpovedajú otočeniam a „boostom"). Ako z toho vidno, špeciálne afinné transformácie hrajú kľúčovú úlohu v základoch fyziky. Ale ukazuje sa, že sú dôležité aj inde, napríklad v robotike či počítačovej grafike.

Preto stojí za to pozrieť sa podrobnejšie na to, čo to vôbec je afinný priestor (keď sme už odkázaní v ňom prežiť celý život), ako súvisí s lineárnym (s ktorým sa celkom úspešne zvyčajne pletie) a pozrieť sa na dôležité technické aspekty afinnej grupy a jej zodpovedajúcej Lieovej algebry. Napríklad, či v tejto Lieovej algebre máme invariantný skalárny súčin (Killingov-Cartanov nefunguje, lebo nie je poloprostá).

Vedúci: doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.
Katedra: FMFI.KTFDF - Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky
Vedúci katedry: doc. RNDr. Tomáš Blažek, PhD.

Dátum zadania: 22.05.2014

Dátum schválenia: 26.05.2014

prof. RNDr. Jozef Masarik, DrSc.
garant študijného programu

....

študent vedúci práce

Čestné vyhlásenie

Vyhlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne s použitím uvedenej literatúry.

Bratislava, 27.05.2015 ....

Ivan Kačala

Poďakovanie

Na tomto mieste by som rád poďakoval svojmu vedúcemu bakalárskej práce doc. RNDr. Mariánovi Feckovi, PhD., za jeho trpezlivú pomoc, rady a pripomienky, ktorými mi pomáhal pri písaní tejto práce.

Tiež by som sa chcel poďakovať svojim rodičom, že mi vždy počas písania tejto práce vytvorili doma tiché pracovné prostredie.

Abstrakt

Autor:	Ivan Kačala
Názov práce:	Afinná grupa a jej Lieova algebra
Škola:	Univerzita Komenského, Bratislava
Fakulta:	Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra:	Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky
Vedúci práce:	Doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.
Miesto:	Bratislava
Dátum:	27.05.2015
Počet strán:	37
Druh záverečnej práce:	Bakalárska práca

Abstrakt: V tejto práci sa zaoberáme afinným priestorom a Lieovou grupou afinných transformácií. V prvej časti práce zavádzame pojem afinného priestoru a dávame ho do súvisu s pojmom hlavného homogénneho priestoru grupy. Taktiež uvádzame vzťah afinného priestoru s lineárnym priestorom. Prvú kapitolu zakončujeme zavedením grupy afinných transformácií lineárneho priestoru $\mathbb{R}^n$ a jej Lieovej algebry. V druhej časti tejto práce uvádzame výpočet najvšeobecnejšej Ad-invariantnej bilineárnej formy a zvlášť Killingovej-Cartanovej formy na Lieovej algebre euklidovskej grupy $E(3)$. V záverečnej časti tejto práce pripomíname pojmy z teórie Lieových grúp dôležité z hľadiska našej témy.

Kľúčové slová: afinný priestor, afinná grupa, euklidovská grupa, Lieova grupa, Lieova algebra, pridružená reprezentácia, Ad-invariantná bilineárna forma

Abstract

Author:	Ivan Kačala
Title:	Affine group and its Lie algebra
University:	Comenius University in Bratislava
Faculty:	Faculty of Mathematics, Physics and Informatics
Department:	Department of Theoretical Physics and Didactics of Physics
Advisor:	Doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.
City:	Bratislava
Date:	27.05.2015
Number of pages:	37
Type of thesis:	Bachelor thesis

Abstract: In present thesis, we study an affine space and a related Lie group of affine transformations. In the first part, we present a definition of the affine space and its connection with a principal homogeneous space for a group. We also study connection between the affine space and a linear space. As the conclusion of the first part, we introduce a matrix group formed by the affine transformations of the linear space $\mathbb{R}^n$ and its Lie algebra. In the second part, we determine the most general bilinear form invariant under the adjoint representation on Lie algebra of the euclidean group $E(3)$. Specially, we determine the Killing form on this Lie algebra. In the last part, we recapitulate terms of the Lie groups theory, which are necessary for understanding this thesis.

Key words: affine space, affine group, euclidean group, Lie group, Lie algebra, adjoint representation, bilinear form invariant under adjoint representation

Obsah

Úvod

V práci, ktorú máte pred sebou sa budeme zaoberať štúdiom afinných priestorov a s nimi súvisiacou Lieovou grupou afinných transformácií. Ako možno už názov práce naznačuje vo veľkej miere budeme využívať pojmy z teórie Lieových grúp a lineárnej algebry. Preto sa možno prirodzene vynára otázka aké vedomosti očakávame od čitateľa tejto práce.

V prvom rade môžeme povedať, že práca je určená pre študenta fyziky, ktorý úspešne zvládol základný kurz lineárnej algebry a má isté základné poznatky z teórie grúp. Aby sme však neodradili ani tých, ktorí si nie sú svojimi vedomosťami z daných oblastí úplne istí, v tretej kapitole Dodatky si môžu pripomenúť (alebo sa aj naučiť) pojmy z teórie Lieových grúp dôležité z hľadiska tejto práce. Takýmto čitateľom teda odporúčame čítať tretiu kapitolu ako prvú. Ďalej môžeme povedať, že čitateľ sa nemusí obávať pojmov z diferenciálnej geometrie, keďže v celej práci sme sa im snažili vyhnúť.

V predkladanej práci začneme štúdiom afinných priestorov na abstraktnej úrovni na rozdiel od mnohých základných kurzov lineárnej algebry, kde sa pojem afinného priestoru zavádza len na opis rovín, či priamok, ktoré neprechádzajú počiatkom v lineárnom priestore $\mathbb{R}^3$ a dáme afinný priestor do súvisu s homogénnymi priestormi grupy $(V, +)$. Prvú kapitolu potom zakončíme zavedením afinného zobrazenia a Lieovej grupy afinných transformácií. Nájdeme aj maticovú grupu afinných transformácií lineárneho priestoru a jej Lieovu algebru.

V druhej kapitole tejto práce predložíme čitateľovi výpočet najvšeobecnejšej Ad-invariantnej bilineárnej formy na Lieovej algebre euklidovskej grupy $E(3)$. Pričom výsledok sa pokúsime dosiahnuť linearizáciou celého problému, ktorú nám umožňujú práve vlastnosti Lieových grúp.

Ako sme už spomenuli, v tretej a poslednej kapitole tejto práce uvedieme pojmy z teórie Lieových grúp, špeciálne sa budeme venovať pojmu hlavný homogénny priestor.

Na záver tohto krátkeho úvodu si ešte pripomeňme nórskeho matematika menom Sophus Lie, ktorý v druhej polovici devätnásteho storočia rozvinul teóriu spojitých grúp transformácií dnes na jeho počesť pomenovaných Lieove grupy.

1 Afinné priestory

Ústredným pojmom v tejto práci pre nás bude afinný priestor. Uveďme najprv motiváciu na zavedenie tohto pojmu a potom jeho definíciu.

1.1 Definícia afinného priestoru

Jedna z motivácií zaviesť pojem afinného priestoru by pre nás mohla byť jednoduchá geometrická predstava roviny alebo priamky v trojrozmernom lineárnom priestore, ktorá neprechádza počiatkom tohto priestoru. Takáto množina nemá nijaký význačný bod. V dôsledku toho nemáme možnosť nahliadať na prvky tejto množiny, ako to bolo v lineárnom priestore, kde sme si jeho prvky (vektory) mohli predstaviť ako orientované úsečky vychádzajúce z počiatku. Intuitívne nám teda odpadá možnosť robiť lineárne kombinácie prvkov tejto množiny. Čo si však ľahko vieme predstaviť je, že pomocou vhodných vektorov (vektorov z vhodného lineárneho priestoru) by sme sa medzi bodmi tejto množiny vedeli presúvať. Napríklad pri spomínanej rovine by sme asi potrebovali nejaký dvojrozmerný lineárny priestor, ktorého vektory by sme mohli prikladať k bodom tejto roviny tak, aby sme sa po tejto operácii nedostali mimo nej. Uvidíme teda, že sa nám predsa len ponúkne možnosť robiť akési kombinácie bodov v afinnom priestore, a to ich rozdiel, ktorý budeme chápať ako vektor. Skúsme teraz tieto myšlienky sformulovať.

Nech E je množina a V lineárny priestor. Množinu E spolu so zobrazením

$$+ : V \times E \to E; \qquad (v, p) \mapsto v + p$$

nazveme *afinným priestorom*, ak má zobrazenie nasledujúce vlastnosti

1. $\forall p \in E : \ 0 + p = p;\ 0 \in V$
2. $\forall u, v \in V; \forall p \in E : \ (u + v) + p = u + (v + p)$
3. $\forall p \in E; V \to E : v \mapsto v + p$ je bijekcia

Tretí bod našej definície by sme slovne mohli formulovať tak, že pre každý bod $p \in E$ máme práve jeden vektor $v \in V$, ktorý keď pripočítame k bodu p dostaneme sa do bodu $q \in E$. Poznamenajme, že v druhom bode tejto definície je symbol $+$ použitý v dvoch rôznych významoch. ([4], s. 48) Vráťme sa ešte k jednej myšlienke z úvodu tohto paragrafu. Majme dva body $p, q \in E$ ich rozdiel chápeme ako vektor $q - p = v \in V$, pre ktorý platí $q = v + p$. Ak by sme si totiž umelo zvolili nejaký bod v E za počiatok vektor v to neovplyvní.

Pre úplnosť uveďme ešte veľmi stručnú definíciu afinného priestoru, ktorá obsahuje všetko už povedané, avšak nemusí byť pre čitateľa taká priehľadná. Táto druhá definícia znie:

Afinný priestor je hlavný homogénny priestor grupy $(V, +)$.

O hlavnom homogénnom priestore grupy sa čitateľ dozvie viac v paragrafe 3.3 kapitola 3 Dodatky. Pozrime sa, ako tieto dve definície afinného priestoru spolu súvisia. V tomto prípade to, že akcia grupy je tranzitívna znamená, že akciou grupy $(V, +)$

$$L_v : E \to E \qquad \text{definovanou:} \qquad L_v p := v + p \tag{1.1.1}$$

kde $v \in V$ a $p \in E$ vieme spojiť ľubovoľné dva body afinného priestoru E. Prvý bod vyššie uvedenej prvej definície je zaistený tým, že akcia jednotkového prvku grupy je identické zobrazenie $L_0 = id$. Druhý bod je zabezpečený tým, že pre ľavú akciu (alebo pravú akciu, keďže grupa $(V, +)$ je komutatívna, nie je rozdiel medzi ľavým a pravým pôsobením) platí

$$L_{v+w} = L_v \circ L_w \tag{1.1.2}$$

To, že je táto akcia voľná, grupa a jej hlavný homogénny priestor sú bijektívne množiny a zobrazenie L_v je bijektívne, dokopy zas tvorí tretí bod prvej vyššie uvedenej definície. ([5], s. 5)

Na záver tohto paragrafu definujme *dimenziu afinného priestoru* a to tak, že dimenzia afinného priestoru E je rovná dimenzii k nemu prislúchajúcemu lineárnemu priestoru V ($\dim E = \dim V$). ([3], s. 98)

1.1.1 Lineárny priestor chápaný ako afinný

Ako sa ukazuje, na každý lineárny priestor V môžeme hľadieť aj ako na afinný. Inými slovami štruktúra lineárnych priestorov je dostatočná na to, aby sme z nej vedeli vybudovať (o niečo menej bohatú) štruktúru afinných priestorov. Toto tvrdenie realizujeme tak, že možnosť tvoriť lineárne kombinácie vo V budeme chápať ako akciu grupy $(V, +)$ a na samotné prvky V budeme hľadieť ako na body afinného priestoru (čo vlastne znamená ignorovanie význačného prvku vo V), inak povedané zanechávame možnosť tvorby lineárnych kombinácií medzi týmito prvkami a násobenie skalárom týchto prvkov. Ponechávame si len akciu grupy $(V, +)$ definovanú predpisom

$$L_v w = v + w \tag{1.1.3}$$

kde $v \in (V, +)$, $w \in V$ a $+$ je v tomto prípade dobre definovaná operácia v lineárnom priestore. Poznamenajme, že množina $V = E$ je tá istá množina ako $(V, +)$, iným označením len chceme zdôrazniť jej viaceré štruktúry. Ľahko nahliadneme, že takto definovaná akcia má všetky potrebné vlastnosti.

Ako teda vidíme, po ignorovaní význačného prvku v lineárnom priestore každý lineárny priestor môžeme chápať ako afinný priestor nad sebou samým. Alebo opačne, zhruba povedané, afinný priestor je matematický objekt, ktorý dostávame po ignorovaní význačného prvku v lineárnom priestore. ([4], s. 49) Ak však využijeme poznatok z teórie grúp, že hlavný homogénny priestor grupy nemusí byť vytvorený len z pojmov samotnej grupy (pozri paragraf 3.3 kapitolu 3 Dodatky), potom skutočne afinné priestory vytvorené z lineárneho priestoru (hlavné homogénne priestory vytvorené priamo faktorizáciou grupy $(V, +)$) môžeme radiť do špecifickej kategórie.

Na záver doplňme ešte jedno označenie. Špecifickú triedu afinných priestorov vytvorených z lineárneho priestoru $\mathbb{R}^n$ označujeme $\mathbb{A}^n$. Je to teda afinný priestor tvorený usporiadanými n-ticami, ktoré chápeme ako body, na ktorých pôsobí grupa $(\mathbb{R}^n, +)$.

1.2 Báza v afinnom priestore

Tak ako býva potrebné nájsť vhodný spôsob ako zaviesť súradnice v lineárnom priestore, pozrime sa teraz na vhodný spôsob ako tak učiniť v afinnom priestore. Použijeme na to pojem afinného repéru.

Na zavedenie afinného repéru v afinnom priestore E (s prislúchajúcim lineárnym priestorom V) musíme zvoliť nejaký bod $o \in E$. Ako sme uviedli v paragrafe 1.1, v afinnom priestore nemáme nijaký význačný bod. Teda pri výbere bodu o máme nekonečne veľa možností a všetky sú rovnako dobré. Teraz môžeme spraviť to, čo je nám v afinnom priestore najprirodzenejšie. Budeme pripočítavať vektory k bodu o a ako nám hovorí tretí bod definície z paragrafu 1.1, všetky ostatné body v E sú už jednoznačne určené vektormi z V, ktoré k bodu o budeme pripočítavať. Zvyšok našej úlohy je opäť zavedenie bázy v lineárnom priestore, tak ako sme to urobili v kapitole 3 Dodatky paragraf 3.1.

Afinnou bázou teda pomenujeme usporiadanú dvojicu (o, e) zloženú z bodu $o \in E$ a bázy e v lineárnom priestore V. Po zavedení bázy môžeme každý bod $p \in E$ zapísať nasledovne

$$p = x_i(p)e_i + o \tag{1.2.1}$$

Usporiadanú n-ticu čísel $x_i(p)$ nazveme *afinnými súradnicami* bodu p. ([5], s. 6) Všimnime si, že afinné súradnice bodu p vzhľadom na bázu (o, e) môžeme stotožniť so súradnicami vektora $(p - o) \in V$ vzhľadom na bázu e.

Pozrime sa teraz na problém zmeny bázy v afinnom priestore. Majme afinný priestor E a k nemu prislúchajúci lineárny priestor V. Majme teraz v afinnom priestore E dve bázy (p, e) a (q, f). Vzhľadom na obe bázy môžeme pre bod $r \in E$ písať

$$r = x_i(r)e_i + p \qquad \& \qquad r = y_i(r)f_i + q \tag{1.2.2}$$

kde čísla x_i sú afinné súradnice bodu r vzhľadom na bázu (p, e) a čísla y_i sú afinné súradnice bodu r vzhľadom na bázu (q, f). Všimnime si, že zmenu bázy v afinnom priestor musíme vlastne urobiť v dvoch krokoch. Zmeníme bázu v príslušnom lineárnom priestore V a presunieme počiatok súradnicovej sústavy. Pri výpočte zmeny afinných súradníc bodu $r \in E$ vyjdeme z rovností 1.2.2

$$\begin{aligned} y_i f_i + q &= x_i e_i + p \\ &= x_j P^{-1}_{ij} f_i + p \\ &= x_j P^{-1}_{ij} f_i + q + p_i f_i \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

kde matica P je matica prechodu z bázy e do bázy f vo V definovaná rovnicou 3.1.3 a p_i sú afinné súradnice bodu p vzhľadom na bázu (q, f). A teda pre afinné súradnice bodu $r \in E$ vzhľadom na jednu a druhú bázu dostávame rovnosť

$$y_i = P^{-1}_{ij} x_j + p_i \tag{1.2.4}$$

Poslednou otázkou už ostáva, ako zistíme afinné súradnice bodu p vzhľadom na bázu (q, f). To závisí od toho, čo budeme mať zadané. Ak budeme vedieť, tak povediac, kam posúvame počiatok nových súradníc teda afinné súradnice q_i bodu q vzhľadom na bázu (p, e), tak praktickejší vzorec by pre nás mohol byť

$$y_i = P_{ij}^{-1} x_j - P_{ij}^{-1} q_j \tag{1.2.5}$$

1.3 Afinné zobrazenie

Podobne ako v kapitole 3 Dodatky paragraf 3.1 žiadame od lineárneho zobrazenia zachovanie štruktúry lineárnych priestorov, chceme aj teraz žiadať od afinného zobrazenia zachovanie štruktúry afinných priestorov, tak ako sme ju zadefinovali v paragrafe 1.1. Inými slovami môžeme povedať, že zachovanie štruktúry v afinnom priestore pre nás znamená komutovanie afinného zobrazenia s posúvaním bodov v afinnom priestore (s akciou grupy $(V, +)$ na jej hlavnom homogénnom priestore). Pozrime sa teda, čo by sme mali žiadať od zobrazenia

$$f : E_1 \to E_2 \tag{1.3.1}$$

kde E_1 a E_2 sú afinné priestory s prisluchajúcimi lineárnymi priestormi V_1 a V_2, aby sme ho mohli volať afinným.

Uvažujme teda dva body $p, q \in E_1$ také, že $v + p = q$, kde $v \in V_1$. Ich obrazy $f(p)$ a $f(q)$ budú patriť do afinného priestoru E_2, z toho vyplýva, že bude existovať (vieme nájsť) vektor $u \in V_2$ taký, že $f(q) = u + f(p)$. Keďže však $q = v + p$ vidíme, že vektor u zároveň musí závisieť od vektora v.

$$f(v + p) = u + f(p) \qquad \Rightarrow \qquad u + f(p) = s(f)(v) + f(p) \tag{1.3.2}$$

Afinné zobrazenie bodov teda indukuje nám zatiaľ neznáme zobrazenie vektorov

$$s(f) : V_1 \to V_2 \tag{1.3.3}$$

Našou cieľom je ukázať, aké zobrazenie komutuje s posúvaním bodov v afinnom priestore. Definujme teda bod $r \in E_1$ tak, že $y + p = r$ a $x + r = q$, kde $x, y \in V_1$. Potom

$x + y = v$ a platia nasledujúce tri rovnosti

$$\begin{aligned} f(q) &= f(x+y+p) &= s(f)(x+y) + f(p) \\ f(r) &= f(y+p) &= s(f)(y) + f(p) \\ f(q) &= f(x+r) &= s(f)(x) + f(r) \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Jednoduchými úpravami týchto troch rovníc dostávame podmienku pre zobrazenie $s(f)$

$$s(f)(x+y) = s(f)(x) + s(f)(y) \tag{1.3.5}$$

čo je jedna z vlastností lineárneho zobrazenia. Ako sa teda ukazuje, od afinného zobrazenia by sme mali chcieť, aby indukovalo zobrazenie vektorov, ktoré bude lineárne. Uveďme si na základe našich očakávaní definíciu afinného zobrazenia.

Ak E_1 a E_2 sú afinné priestory a V_1 a V_2 sú k nim prislúchajúce lineárne priestory (ich grupy posunutí), zobrazenie

$$f : E_1 \to E_2$$

nazveme *afinným zobrazením*, ak existuje lineárne zobrazenie

$$s(f) : V_1 \to V_2$$

pre ktoré platí

$$f(v+p) = s(f)(v) + f(p)$$

kde $v \in V_1$ a $p \in E_1$. ([5], s. 5)

Bijektívne afinné zobrazenie nazývame afinným izomorfizmom. Ukážeme, že afinné zobrazenie f je bijektívne práve vtedy, keď ním indukované lineárne zobrazenie $s(f)$ je bijektívne. ([4], s. 50) Ak by afinné zobrazenie nebolo surjektívne, existoval by bod $m \in E_2$, ktorý by nebol obrazom žiadneho bodu $p \in E_1$. Potom by musel existovať aj vektor $f(p) + u = m$, kde $u \in V_2$, ktorý by nebol obrazom žiadneho vektora z V_1. Teda zobrazenie $s(f)$ by bolo tiež nesurjektívne. Podobne ak by f bolo surjektívne aj $s(f)$ by muselo byť surjektívne, keďže pre rôzne $v \in V_1$ by sme výrazom $s(f)(v) + f(p) = f(p)$ museli pokryť celý afinný priestor E_2 respektíve zobrazením $s(f)(v)$ celý lineárny priestor V_2. Pozrime sa, ako je to s injektívnosťou. Majme body $p, q \in E_1$ také, že $p = v + q$, kde $0 \neq v \in V_1$. Potom, ak

$$f(p) = f(q) \qquad \Rightarrow \qquad s(f)(v) = 0 \tag{1.3.6}$$

Ak teda zobrazenie f nie je injektívne ani zobrazenie $s(f)$ nie je injektívne. Povedzme teraz, že afinné zobrazenie f je injektívne, ale zobrazenie $s(f)$ nie je. Potom platí

$$f(q) = (v + p) = s(f)(v) + f(p) = f(p) \tag{1.3.7}$$

To je spor s predpokladom a tým je naše tvrdenie o vzájomnej bijektívnosti f a $s(f)$ dokázané. Doplňme ešte, že bijektívne afinné zobrazenie

$$f : E \to E \tag{1.3.8}$$

nazývame *afinnou transformáciou.* Množina všetkých afinných transformácií tvorí *afinnú grupu*, ktorú označujeme $GA(E)$.

▼ Ukážeme, že afinné transformácie tvoria grupu. Majme zobrazenia $f, h \in GA(E)$. Potom, ak $g = f \circ h$

$$g(v + p) = (f \circ h)(v + p) = f(s(h)(v) + h(p)) = (s(f) \circ s(h))(v) + (f \circ h)(p) \tag{1.3.9}$$

kde $p \in E$ a $v \in V$. Keďže zložením dvoch lineárnych zobrazení dostávame lineárne zobrazenie, vidíme, že aj zobrazenie g je afinné. Bijektívnosť zobrazenia g máme zaručenú bijektívnosťou zobrazení f a h a teda $g \in GA(E)$. Obsahuje ďalej $GA(E)$ jednotkový prvok?

$$id(v + p) = v + p = s(id)(v) + id(p) \tag{1.3.10}$$

Zobrazenie $s(id)$ je identické, a teda určite aj lineárne, takže zobrazenie id je afinné, a teda $id \in GA(E)$. Pozrime sa na existenciu inverzného prvku. Existenciu f^{-1} máme zaručenú bijektívnosťou $f \in GA(E)$, takže stačí ukázať, že f^{-1} je afinné. Začnime rovnosťou

$$f(v + p) = s(f)(v) + f(p) = u + q = r \tag{1.3.11}$$

Potom určite platí

$$v = s(f)^{-1}(u) \qquad \& \qquad p = f^{-1}(q)$$

$$f^{-1}(r) = f^{-1}(u + q) = v + p = s(f)^{-1}(u) + f^{-1}(q) \tag{1.3.12}$$

kde $p, q, r \in E$ a $u, v \in V$. Vidíme, že zobrazenie f^{-1} je skutočne afinné, a teda $f^{-1} \in GA(E)$. Navyše platí $s(f^{-1}) = s(f)^{-1}$. Keďže asociatívnosť je vlastnosťou operácie skladania zobrazení, množina $GA(E)$ má skutočne štruktúru grupy. ▲

Pozrime sa teraz, či tak ako to bolo v lineárnom priestore pomocou matice lineárneho zobrazenia, nevieme aj v afinnom priestore po zavedení bázy nájsť praktické vyjadrenie afinného zobrazenia pomocou súradníc. Majme afinné zobrazenie $h : E_1 \to E_2$ a bázy (p, e) a (q, f) v E_1 a E_2.

$$\begin{aligned} h(x) &= h(x)_\alpha f_\alpha + q &&= h(x_i e_i + p) \\ & &&= x_i s(h)(e_i) + h(p) \\ & &&= x_i A_{\alpha i} f_\alpha + h(p)_\alpha f_\alpha + q \end{aligned} \tag{1.3.13}$$

kde $i, \ldots, \dim(E_1)$, $\alpha, \ldots, \dim(E_2)$, $x \in E_1$, matica A je maticou lineárneho zobrazenia $s(h)$ a $h(p)_\alpha$, $h(x)_\alpha$ sú afinné súradnice bodu $h(p)$ respektíve $h(x)$ vzhľadom na bázu (q, f). Ako teda vidíme, afinné súradnice bodu $h(x)$ vzhľadom na bázu (q, f) sú dané nasledujúcim vzorcom

$$h(x)_\alpha = A_{\alpha i} x_i + h(p)_\alpha \tag{1.3.14}$$

Položme teraz $E = V$. Afinné transformácie $f : V \to V$ tvoria grupu $GA(V)$. Zaveďme vo V ako afinnom priestore bázu $(0, e)$, kde sme ako referenčný bod prirodzene zvolili jediný význačný bod v lineárnom priestore. Potom každý vektor $v \in V$ je určený akciou grupy $(V, +)$ prislúchajúcej jemu samému, teda je určený sám sebou.

$$f(v) = f(v + 0) = s(f)(v) + f(0) = s(f)(v) + a \tag{1.3.15}$$

Ak teraz využijeme rovnicu 1.3.14 dostávame

$$f(v)_i = A_{ij} v_j + a_i \tag{1.3.16}$$

kde $i, j = 1, \ldots, \dim(V)$. Pripomeňme, že afinné zobrazenie je bijektívne práve vtedy, keď ním indukované lineárne zobrazenie je bijektívne. Vidíme teda, že afinná transformácia V je úplne určená lineárnou transformáciou $s(f) \in GL(V)$ (respektíve jej maticou z $GL(n, \mathbb{R})$) a prvkom $a \in V$. Prvky grupy $GA(V)$ môžeme teda zapísať ako dvojice $(s(f), a)$. Ďalej sa ukazuje, že každému prvku $(s(f), a) \in GL(V)$ môžeme priradiť vhodnú blokovú maticu (pre lepšiu prehľadnosť označme lineárnu transformáciu $s(f) = A$)

$$(A, a) \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} A & a \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \tag{1.3.17}$$

$$(A, a) \circ (B, b)(v) = A(B(v)) + A(b) + a \qquad \Rightarrow$$
$$(A, a) \circ (B, b) = (A \circ B, A(b) + a) \tag{1.3.18}$$

$$(A, a) \circ (B, b) \to \left(\begin{array}{c|c} A & a \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} B & b \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AB & Ab + a \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \to (A \circ B, A(b) + a)$$

Násobenie takto zostavených matíc nám umožnuje jednoducho skladať afinné transformácie V. ([5], s. 6) Položme teraz $V = \mathbb{R}^n$. Keďže v lineárnom priestore $\mathbb{R}^n$ máme prirodzenú bázu (štandartnú bázu), afinnú transformáciu $\mathbb{R}^n$ budú tvoriť matice podľa rovnice 1.3.17, kde $A \in GL(n, \mathbb{R})$ je matica a $\mathbf{a} \in (\mathbb{R}^n, +)$ je vektor. Grupu takýchto blokových matíc $(A, \mathbf{a})$ označujeme $GA(n, \mathbb{R})$. Pozrime sa, na aké objekty vlastne grupa $GA(n, \mathbb{R})$ pôsobí. Priraďme každému vektoru $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektor $(\mathbf{v}, 1)$

$$(A, \mathbf{a})(\mathbf{v}) \to \left(\begin{array}{c|c} A & \mathbf{a} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\mathbf{v} + \mathbf{a} \\ 1 \end{pmatrix} \to A\mathbf{v} + \mathbf{a} \tag{1.3.19}$$

Vidíme, že sme dostali správnu afinnú transformáciu $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ podľa rovnice 1.3.15. ([1], s. 19)

Na záver spomeňme ešte dve významné podgrupy afinnej grupy. Prvú z nich tvorenú blokovými maticami $(R, \mathbf{v})$, kde $R \in SO(n)$ a $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ označujeme $E(n)$ a nazývame *euklidovskou grupou.* Euklidovská grupa je teda zloženie rotácie a posunutia a konkrétne grupa $E(3)$ hrá dôležitú úlohu napríklad v robotike, kde sa jednotlivé diely posúvajú a otáčajú (inak povedané pôsobí na ne euklidovská grupa). Pripomeňme, že grupa $SO(n)$ má pôvod v požiadavke vybrať tie lineárne transformácie, voči ktorým je skalárny súčin v euklidovskom priestore invariantný. Podobne ak v špeciálnej teórii relativity hľadáme lineárne transformácie, voči ktorým by bol invariatný skalárny súčin v Minkowského časopriestore (Minkowskeho metrika) dostávame Lorentzovu grupu $SO(1, 3)$. Potom *Poincarého grupou* nazveme podgrupu afinnej grupy tvorenú blokovými maticami $(\Lambda, \mathbf{v})$, kde $\Lambda \in SO(1, 3)$ a $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$.

1.4 Lieova algebra grupy $GA(n,\mathbb{R})$

V tomto paragrafe sa pozrieme na Lieovu algebru maticovej grupy $GA(n,\mathbb{R})$. Ako prvé vypočítajme tvar matíc, ktorými je Lieova algebra $ga(n,\mathbb{R})$ tvorená. Výpočet urobíme postupom opísaným v paragrafe 3.2.1 kapitola 3 Dodatky, kde sú uvedené aj ďalšie dôležité pojmy o Lieových algebrách všeobecne.

Tvar prvku (matice) grupy $GA(n,\mathbb{R})$ poznáme podľa rovnice 1.3.17, a teda riešime rovnicu

$$\mathbb{1}+\epsilon\mathbf{X}=\left(\begin{array}{c|c}\mathbb{1}+\epsilon X & \epsilon\mathbf{x}_1\\ \hline \epsilon\mathbf{x}_2 & 1+\epsilon x_3\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}A & \mathbf{v}\\ \hline 0 & 1\end{array}\right) \tag{1.4.1}$$

kde $A\in GL(n,\mathbb{R})$, $\mathbf{v}\in(\mathbb{R}^3,+)$ a $\mathbf{X}\in ga(n,\mathbb{R})$ je neznámou maticou. Keďže podľa rovnice 3.2.3 vidíme, že podmienka $\det(\mathbb{1}+\epsilon X)\neq 0$ je splnená pre ľubovoľnú maticu X, ľahko nahliadneme, že posledná rovnica je splnená, ak vektor $\mathbf{x}_2=0$ je nulový a konštanta $x_3=0$ je taktiež nulová. Teda maticovú Lieovu algebru $ga(n,\mathbb{R})$ tvoria matice

$$\left(\begin{array}{c|c}X & \mathbf{x}\\ \hline 0 & 0\end{array}\right) \tag{1.4.2}$$

kde $X\in gl(n,\mathbb{R})$ je ľubovoľná matica rozmeru $n\times n$ a vektor $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$. Ako teda vidno, dimenzia Lieovej alebry $ga(n,\mathbb{R})$ je rovná n^2+n. Teraz, keď už vieme, akými maticami je Lieova algebra $ga(n,\mathbb{R})$ tvorená, môžeme sa pozrieť na jej Lieovu zátvorku (v tomto prípade komutátor). Najprv však zvoľme v $ga(n,\mathbb{R})$ vhodnú bázu. Pre Lieovu algebru $gl(n,\mathbb{R})$ sa ako veľmi vhodná ukazuje Weylova báza, ktorej prvky sú matice definované nasledujúco

$$(E_{ml})_{ij}=\delta_{im}\delta_{lj} \tag{1.4.3}$$

V lineárnom priestore máme tiež prirodzenú bázu a to štandartnú bázu e. Bázu v $ga(n,\mathbb{R})$ teda môžeme zaviesť pomocou matíc dvoch typov

$$\left(\begin{array}{c|c}E_{ml} & 0\\ \hline 0 & 0\end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{c|c}0 & e_i\\ \hline 0 & 0\end{array}\right) \tag{1.4.4}$$

Označme prvky bázy tvorené maticami prvého typu $\mathbf{E}_{ml}$ a prvky bázy tvorené maticami druhého typu $\mathbf{e}_i$, kde všetky indexy sú rovné $1,\ldots,n$. Predtým, ako určíme štruktúrne konštanty vzhľadom na práve zavedenú bázu v $ga(n,\mathbb{R})$, pozrime sa na nasledujúci komutátor

$$
\begin{aligned}
[E_{ab}; E_{cd}]_{ij} &= (E_{ab}E_{cd})_{ij} - (E_{cd}E_{ab})_{ij} \\
&= (E_{ab})_{ik}(E_{cd})_{kj} - (E_{cd})_{ik}(E_{ab})_{kj} \\
&= \delta_{ia}\delta_{bk}\delta_{kc}\delta_{dj} - \delta_{ic}\delta_{dk}\delta_{ka}\delta_{bj} \\
&= \delta_{ia}\delta_{bc}\delta_{dj} - \delta_{ic}\delta_{da}\delta_{bj} \\
&= \delta_{bc}(E_{ad})_{ij} - \delta_{da}(E_{cb})_{ij}
\end{aligned} \tag{1.4.5}
$$

a čomu nasledovný výraz

$$(E_{ml})_{ij}(e_a)_j = \delta_{im}\delta_{lj}\delta_{aj} = \delta_{im}\delta_{la} = \delta_{la}(e_m)_i \tag{1.4.6}$$

Teraz už môžeme určiť tri rôzne prípady komutátora Lieovej algebry $ga(n, \mathbb{R})$ vzhľadom na nami zavedenú bázu.
Komutátor typu $[\mathbf{E}_{ab}, \mathbf{E}_{cd}]$

$$[\mathbf{E}_{ab}, \mathbf{E}_{cd}] = \left(\begin{array}{c|c} [E_{ab}; E_{cd}] & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \delta_{bc}\mathbf{E}_{ad} - \delta_{da}\mathbf{E}_{cb} \tag{1.4.7}$$

Komutátor typu $[\mathbf{E}_{ab}, \mathbf{e}_c]$

$$[\mathbf{E}_{ab}, \mathbf{e}_c] = \left(\begin{array}{c|c} 0 & E_{ab}e_c \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \delta_{bc}\mathbf{e}_a \tag{1.4.8}$$

Komutátor typu $[\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b]$

$$[\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b] = 0 \tag{1.4.9}$$

Na záver tohto paragrafu doplňme, že Lieova algebra $e(3)$ euklidovskej grupy $E(3)$ je tiež tvorená blokovými maticami podľa rovnice 1.4.2 avšak matice $X \in so(3)$ sú antisymetrické (pozri paragraf 3.2.1 kapitola 3 Dodatky).

2 Ad-invariantná bilineárna forma na $e(3)$

V tejto kapitole si dávame za cieľ vypočítať najvšeobecnejšiu Ad-invariantnú bilineárnu formu na Lieovej algebre euklidovskej grupy $E(3)$. Predtým však, ako sa pustíme do samotného výpočtu, uveďme jedno tvrdenie a to, že Ad-invariantné bilineárne formy na Lieovej algebre A tvoria lineárny priestor, označme ho V_B. Nahliadnime, že toto tvrdenie je pravdivé. Majme dve Ad-invariantné bilineárne formy $K, L \in V_B$ (V_B je zatiaľ pre nás len množina všetkých Ad-invariantných bilineárnych foriem na A), pre ktoré vieme, že platí

$$K(X,Y) = K(\mathrm{Ad}_g X, \mathrm{Ad}_g Y) \qquad L(X,Y) = L(\mathrm{Ad}_g X, \mathrm{Ad}_g Y)$$

kde $X, Y \in A$ a g prvok príslušnej Lieovej grupy. Označme písmenom $J = K + \alpha L$ lineárnu kombináciu Ad-invariantných bilineárnych foriem $K, L \in V_B$.

$$\begin{aligned} J(\mathrm{Ad}_g X, \mathrm{Ad}_g Y) &= K(\mathrm{Ad}_g X, \mathrm{Ad}_g Y) + \alpha L(\mathrm{Ad}_g X, \mathrm{Ad}_g Y) \\ &= K(X,Y) + \alpha L(X,Y) \\ &= J(X,Y) \end{aligned}$$

Tým je naše tvrdenie dokázané, lebo ako vidíme, množina V_B je skutočne uzavretá na lineárne kombinácie. Ak by sa nám teda vo V_B podarilo nájsť nejakú bázu, nájdeme skutočne všetky Ad-invariantné bilineárne formy na Lieovej algebre A.

Na záver tohto úvodu s cieľom zlepšenia prehľadnosti zaveďme formalizmus využívajúci dvojvektory. Prvok Lieovej algebry grupy $E(3)$ budeme zapisovať ako dvojvektor $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{x})$, kde $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ je trojrozmerný vektor taký, že $\omega_i l_i \in so(3)$, ($\mathbf{l}$ je báza v $so(3)$ podľa rovnice 3.2.4) a $\mathbf{x}$ je taktiež trojrozmerný vektor patriaci $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Pri zápise prvkov euklidovskej grupy $E(3)$ využijeme označenie, ktoré sme začali používať už v predošlej kapitole. Prvok grupy $E(3)$ teda označíme $(R, \mathbf{v})$, kde $R \in SO(3)$ je matica a $\mathbf{v} \in (\mathbb{R}^3, +)$ trojrozmerný vektor. Pri výpočtoch budeme podľa potreby prechádzať medzi maticovým zápisom jednotlivých prvkov a zápisom pomocou dvojvektorov.

2.1 Ad reprezentácia $E(3)$

Pozrime sa najprv ako bude vyzerať Ad reprezentácia euklidovskej grupy. Ešte predtým však povedzme, že matica $R = (r_1, r_2, r_3)^T \in SO(3)$, kde $r_1 = (r_{11}, r_{12}, r_{13})$; $r_2 = \ \ldots$

a matica $X = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{l} \in so(3)$. Vyjdeme z definície Ad reprezentácie podľa rovnice 3.2.10

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_{(R,\mathbf{v})}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{x}) &= \left(\begin{array}{c|c} R & \mathbf{v} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} X & \mathbf{x} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} R^T & -R^T\mathbf{v} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} RXR^T & -RXR^T\mathbf{v} + R\mathbf{x} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

S takýmto výsledkom sa však ešte neuspokojíme, pretože pre Ad reprezentáciu $E(3)$ by sme radi mali úspornejší a prehľadnejší zápis pomocou dvojvektorov. Pred ďalšími výpočtami ešte pripomeňme, že stĺpce matice $R \in SO(3)$ tvoria ortonormálnu bázu v $\mathbb{R}^3$, ktorú dostávame rotáciou štandartnej bázy.

$$\begin{aligned} RXR^T &= (r_1, r_2, r_3)^T \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} (r_1, r_2, r_3) \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) \\ -\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3) \\ \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{l} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{r}_2 \cdot \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{r}_3 \cdot \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{l} \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

A teda dostávame výsledok

$$\mathrm{Ad}_R X = RXR^T = R\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{l} = \boldsymbol{\varpi} \cdot \mathbf{l} \tag{2.1.3}$$

Teraz sa pozrime na ďalší nenulový prvok matice z rovnice 2.1.1

$$\begin{aligned} RXR^T\mathbf{v} &= \begin{pmatrix} 0 & -\varpi_3 & \varpi_2 \\ \varpi_3 & 0 & -\varpi_1 \\ -\varpi_2 & \varpi_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\ &= -\mathbf{v} \times \boldsymbol{\varpi} \\ &= R\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

a teda dostávame

$$-RXR^T\mathbf{v} + R\mathbf{x} = -R\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + R\mathbf{x} \tag{2.1.5}$$

Teraz už máme všetko pripravené aby sme mohli zapísať vzorec Ad reprezentácie $E(3)$ pomocou dvojvektorov

$$\mathrm{Ad}_{(R,\mathbf{v})}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{x}) = (R\boldsymbol{\omega}, R\mathbf{x} - R\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) \tag{2.1.6}$$

2.2 ad **reprezentácia** $e(3)$

Ďalší náš krok bude, že určíme vzorec v jazyku dvojvektorov pre infinitezimálnu verziu Ad reprezentácie $E(3)$ teda ad reprezentáciu $e(3)$. Vyjdeme zo známeho vzorca pre ad reprezentáciu Lieovej algebry podľa rovnice 3.2.11

$$\mathrm{ad}_{(\boldsymbol{\omega}_1,\mathbf{y})}(\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{x}) = [(\boldsymbol{\omega}_1,\mathbf{y}),(\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{x})] = \left(\begin{array}{c|c} YX - XY & Y\mathbf{x} - X\mathbf{y} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \tag{2.2.1}$$

kde $X = \boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{l}$ a $Y = \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{l}$. Opäť sa pozrime na jednotlivé prvky matice z predošlej rovnice a označme $\boldsymbol{\omega}_1 = (a_1, a_2, a_3)$ a $\boldsymbol{\omega}_2 = (b_1, b_2, b_3)$

$$\begin{aligned} [Y,X] &= \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix} - XY \\ &= \begin{pmatrix} \cdot & a_2b_1 & a_3b_1 \\ \cdot & \cdot & a_3b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cdot & a_1b_2 & a_1b_3 \\ \cdot & \cdot & a_2b_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{l} \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

dostávame teda výsledok

$$[Y,X] = (\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2) \cdot \mathbf{l} \tag{2.2.3}$$

Všimnime si, ako nám môže aj v tomto prípade uľahčiť výpočet znalosť štruktúrnych konštánt (konkrétne štruktúrnych konštánt $so(3)$ vzhľadom na bázu $\mathbf{l}$, pozri rovnicu 3.2.5)

$$[Y,X] = a_i b_j [l_i, l_j] = a_i b_j\, \varepsilon_{ijk} l_k = l_k\, \varepsilon_{kij} a_i b_j = l_k (\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2)_k = (\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2) \cdot \mathbf{l} \tag{2.2.4}$$

Na úpravu druhého nenulového prvku matice z rovnice 2.2.1 využijeme rovnicu 2.1.4

$$Y\mathbf{x} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{x} \qquad X\mathbf{y} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{y} \tag{2.2.5}$$

Teda vzorec pre ad reprezentáciu $e(3)$ v jazyku dvojvektorov je

$$\mathrm{ad}_{(\boldsymbol{\omega}_1,\mathbf{y})}(\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{x}) = (\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{y}) \tag{2.2.6}$$

▼ Pozrime sa ešte raz na výsledok rovnice 2.2.3, konkréntne, čo platí pre maticu ad reprezentácie $so(3)$.

$$\mathrm{ad}_{l_i}\boldsymbol{\omega} = \omega_j [l_i, l_j] = \omega_j \varepsilon_{ijk} l_k = -\varepsilon_{ikj} \omega_j l_k = (l_i)_{kj} \omega_j l_k = l_i \boldsymbol{\omega} \tag{2.2.7}$$

Dostali sme teda výsledok

$$\mathrm{ad}_{l_i} = l_i \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{ad}_X = X \tag{2.2.8}$$

kde $X = \omega \cdot \mathbf{l} \in so(3)$. Ak ešte uvážime, že matica $\mathbb{1} + \epsilon X = R \in SO(3)$ a $\mathrm{Ad}_{\mathbb{1}+\epsilon X} = \mathbb{1} + \epsilon \mathrm{ad}_X$ dostávame pre maticu Ad reprezentácie $SO(3)$

$$\mathrm{Ad}_R = R \qquad \Rightarrow \qquad AXA^T = A(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{l})A^T = (A\boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{l} \tag{2.2.9}$$

čo je zhodný výsledok, s výsledkom podľa rovnice 2.1.3.

▲

2.3 Infinitezimálna verzia Ad-invariantnosti bilineárnej formy

Na začiatok tohto paragrafu si pripomeňme podmienku pre nami hľadanú bilineárnu formu

$$J[(\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{y}), (\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{x})] = J[\mathrm{Ad}_{(R,\mathbf{v})}(\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{y}), \mathrm{Ad}_{(R,\mathbf{v})}(\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{x})] \tag{2.3.1}$$

Vlastnosť Lieových grúp nám teraz umožní celý problém zlinearizovať. Môžeme si to predstaviť jednoducho tak, že to, čo platí pre veľmi malú rotáciu (rotáciu blízku jednotkovej) alebo veľmi malú transláciu, bude platiť pre ľubovoľnú rotáciu alebo transláciu, ktoré sú len násobky tej veľmi malej. Konkrétne v našom prípade budeme hľadať bilineárnu formu invariantnú voči Ad reprezentácii prvku $(\mathbb{1} + \epsilon Z, \epsilon z) \in E(3)$

$$J[(\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{y}), (\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{x})] = J[\mathrm{Ad}_{(\mathbb{1}+\epsilon Z,\epsilon \mathbf{z})}(\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{y}), \mathrm{Ad}_{(\mathbb{1}+\epsilon Z,\epsilon \mathbf{z})}(\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{x})] \tag{2.3.2}$$

Rozpíšme teda poslednú rovnicu

$$\begin{aligned}
J[(\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{y}), (\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{x})] &= J[\mathrm{Ad}_{(\mathbb{1}+\epsilon Z,\epsilon \mathbf{z})}(\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{y}), \mathrm{Ad}_{(\mathbb{1}+\epsilon Z,\epsilon \mathbf{z})}(\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{x})] \\
&= J[(\hat{1} + \epsilon \mathrm{ad}_{(\boldsymbol{\omega}_3,\mathbf{z})})(\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{y}), (\hat{1} + \epsilon \mathrm{ad}_{(\boldsymbol{\omega}_3,\mathbf{z})})(\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{x})] \\
&= J[(\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{y}) + \epsilon \mathrm{ad}_{(\boldsymbol{\omega}_3,\mathbf{z})}(\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{y}), (\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{x}) + \epsilon \mathrm{ad}_{(\boldsymbol{\omega}_3,\mathbf{z})}(\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{x})]
\end{aligned}$$

$$= J[(\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{y}), (\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{x}) + \epsilon \mathrm{ad}_{(\boldsymbol{\omega}_3,\mathbf{z})}(\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{x})] + J[\epsilon \mathrm{ad}_{(\boldsymbol{\omega}_3,\mathbf{z})}(\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{y}), (\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{x}) + \epsilon \mathrm{ad}_{(\boldsymbol{\omega}_3,\mathbf{z})}(\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{x})]$$
$$= J[(\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{y}), (\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{x})] + \epsilon J[(\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{y}), \mathrm{ad}_{(\boldsymbol{\omega}_3,\mathbf{z})}(\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{x})] + \epsilon J[\mathrm{ad}_{(\boldsymbol{\omega}_3,\mathbf{z})}(\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{y}), (\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{x})] + \epsilon^2 \ldots$$
$$= J[(\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{y}), (\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{x})] + \epsilon \{J[(\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{y}), \mathrm{ad}_{(\boldsymbol{\omega}_3,\mathbf{z})}(\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{x})] + J[\mathrm{ad}_{(\boldsymbol{\omega}_3,\mathbf{z})}(\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{y}), (\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{x})]\}$$

Ako vidíme členy úmerné vyšším mocninám ϵ ako ϵ^1 sme zanedbali, čo je samotným princípom linearizácie a z rovnice 2.3.2 dostávame nasledujúcu podmienku infinitezimálnej verzie Ad invariantnosti bilineárnej formy

$$J[(\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{y}), \mathrm{ad}_{(\boldsymbol{\omega}_3,\mathbf{z})}(\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{x})] = -J[\mathrm{ad}_{(\boldsymbol{\omega}_3,\mathbf{z})}(\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{y}), (\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{x})] \tag{2.3.3}$$

Ak teraz využijeme vyjadrenie ad reprezentácie $e(3)$, ktoré sme si odvodili v rovnici 2.2.6 dostávame

$$J[(\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{y}), (\boldsymbol{\omega}_3 \times \boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{z})] = -J[(\boldsymbol{\omega}_3 \times \boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{y} - \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{z}), (\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{x})] \tag{2.3.4}$$

2.4 Výpočet Ad-invariantnej bilineárnej formy na $e(3)$

V jazyku dvojvektorov si ľubovoľný prvok $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{x}) \in e(3)$ môžeme predstaviť ako 6-rozmerný vektor, kde prvé tri zložky budú ω_i a druhé tri zložky budú x_i. Takáto predstava nám umožní stotožniť bilineárnu formu na $e(3)$ s maticou 6×6. Pri výpočte nám dobre poslúži parametrizovať túto maticu, označme ju J, štyrmi maticami A, B, C, D rozmeru 3×3

$$J = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \tag{2.4.1}$$

Zapíšme teraz pomocou tejto parametrizácie ľavú stranu rovnice 2.3.4

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{y}) \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{\omega}_3 \times \boldsymbol{\omega}_2 \\ \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{z}) \end{array}\right) &= \\ = \boldsymbol{\omega}_1 A(\boldsymbol{\omega}_3 \times \boldsymbol{\omega}_2) + \mathbf{y}C(\boldsymbol{\omega}_3 \times \boldsymbol{\omega}_2) + \boldsymbol{\omega}_1 B(\boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{x}) & \\ -\boldsymbol{\omega}_1 B(\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{z}) + \mathbf{y}D(\boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{x}) - \mathbf{y}D(\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{z}) & \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

a pravú stranu rovncie 2.3.4

$$\begin{aligned} -(\boldsymbol{\omega}_3 \times \boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{y} - \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{z}) \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{\omega}_2 \\ \mathbf{x} \end{array}\right) &= \\ = (\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_3) A \boldsymbol{\omega}_2 + (\mathbf{y} \times \boldsymbol{\omega}_3) C \boldsymbol{\omega}_2 - (\mathbf{z} \times \boldsymbol{\omega}_1) C \boldsymbol{\omega}_2 & \\ +(\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_3) B\mathbf{x} + (\mathbf{y} \times \boldsymbol{\omega}_3) D\mathbf{x} - (\mathbf{z} \times \boldsymbol{\omega}_1) D\mathbf{x} & \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Dostávame pomerne zložitú maticovú rovnicu, ktorá musí platiť pre ľubovoľné vektory $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_3$ a $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$. Po parametrizovaní matice J hľadáme teraz riešenie tejto rovnice pre štyri neznáme matice A, B, C, D. Pokúsime sa teraz o nich niečo viac zistiť, a to vhodným výberom vektorov $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_3$ a $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, keďže, ako sme povedali rovnica musí platiť pre ľubovoľné tieto vektory.

Skúsme vybrať dané vektory tak, aby nám zostala rovnica len pre jednu z matíc 3×3. To dosiahneme napríklad tak, že v rovniciach 2.4.2 a 2.4.3 položíme $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{z} = \mathbf{0}$ a následne $\boldsymbol{\omega}_3 = \boldsymbol{\omega}_2$. Zostane nám rovnica len pre maticu A.

$$\boldsymbol{\omega}_1 A(\boldsymbol{\omega}_3 \times \boldsymbol{\omega}_2) = (\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_3) A\boldsymbol{\omega}_2$$

$$(\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2) A\boldsymbol{\omega}_2 = 0 \tag{2.4.4}$$

Ak položíme $\boldsymbol{\omega}_2 = \mathbf{y} = \mathbf{z} = \mathbf{0}$ a následne $\boldsymbol{\omega}_3 = \mathbf{x}$, dostaneme podobnú podmienku ako pre maticu A pre maticu B.

$$\boldsymbol{\omega}_1 B(\boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{x}) = (\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_3) B\mathbf{x}$$

$$(\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_3) B\boldsymbol{\omega}_3 = 0 \tag{2.4.5}$$

Ako vieme z paragrafu 3.4 kapitola 3 Dodatky podmienky 2.4.4 a 2.4.5 znamenájú, že matice A a B musia mať nasledovný tvar

$$A = \alpha \mathbb{1} \qquad B = \beta \mathbb{1} \tag{2.4.6}$$

Prepíšme teraz rovnice 2.4.2 a 2.4.3 s tým, že už poznáme (až na konštantu) tvar matíc A a B.

$$\begin{aligned} &\alpha\boldsymbol{\omega}_1 \cdot (\boldsymbol{\omega}_3 \times \boldsymbol{\omega}_2) + \mathbf{y}C(\boldsymbol{\omega}_3 \times \boldsymbol{\omega}_2) + \beta\boldsymbol{\omega}_1 \cdot (\boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{x}) \\ &\qquad - \beta\boldsymbol{\omega}_1 \cdot (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{z}) + \mathbf{y}D(\boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{x}) - \mathbf{y}D(\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{z}) = \\ &= \alpha(\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_3) \cdot \boldsymbol{\omega}_2 + (\mathbf{y} \times \boldsymbol{\omega}_3) C\boldsymbol{\omega}_2 - (\mathbf{z} \times \boldsymbol{\omega}_1) C\boldsymbol{\omega}_2 \\ &\qquad + \beta(\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_3) \cdot \mathbf{x} + (\mathbf{y} \times \boldsymbol{\omega}_3) D\mathbf{x} - (\mathbf{z} \times \boldsymbol{\omega}_1) D\mathbf{x} \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

Naším ďalším cieľom je dozvedieť sa niečo viac o maticiach C a D. Opäť tak urobíme pomocou vhodného výberu vektorov $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_3$ a $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, teraz však už v rovnici 2.4.7. Položme teda v rovnici 2.4.7 $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{0}$ a následne $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_3$.

$$\alpha\boldsymbol{\omega}_1 \cdot (\boldsymbol{\omega}_3 \times \boldsymbol{\omega}_2) - \beta\boldsymbol{\omega}_1 \cdot (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{z}) = \alpha(\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_3) \cdot \boldsymbol{\omega}_2 - (\mathbf{z} \times \boldsymbol{\omega}_1) C\boldsymbol{\omega}_2$$

$$(\mathbf{z}\times\boldsymbol{\omega}_1)C\boldsymbol{\omega}_1 = 0 \tag{2.4.8}$$

Ako vidíme, dostávame verziu tej istej podmienky ako pre matice A a B. Skúsme teraz nájsť podmienku, ktorú musí spĺňať matica D. Položme v rovnici 2.4.7 $\mathbf{y} = \boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_3 = \mathbf{0}$ a následne $\mathbf{x} = \mathbf{z}$.

$$-(\mathbf{z}\times\boldsymbol{\omega}_1)D\mathbf{x} = 0$$

$$(\mathbf{x}\times\boldsymbol{\omega}_1)D\mathbf{x} = 0 \tag{2.4.9}$$

Dostávame tak dôležitý výsledok. Aby bola infinitezimálna verzia Ad invariantnosti podľa rovnice 2.3.4 nami hľadanej bilineárnej formy splnená, všetky štyri matice A, B, C, D musia byť násobkami jednotkovej matice.

$$A = \alpha\mathbb{1} \qquad B = \beta\mathbb{1} \qquad C = \gamma\mathbb{1} \qquad D = \delta\mathbb{1} \tag{2.4.10}$$

Keďže už poznáme tvar matíc C a D, prepíšme ešte raz rovnicu 2.4.7 a pokúsme sa zistiť niečo viac o konštantách $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

$$\begin{aligned}\alpha\boldsymbol{\omega}_1\cdot(\boldsymbol{\omega}_3\times\boldsymbol{\omega}_2) + \gamma\mathbf{y}\cdot(\boldsymbol{\omega}_3\times\boldsymbol{\omega}_2) + \beta\boldsymbol{\omega}_1\cdot(\boldsymbol{\omega}_3\times\mathbf{x})&\\ - \beta\boldsymbol{\omega}_1\cdot(\boldsymbol{\omega}_2\times\mathbf{z}) + \delta\mathbf{y}\cdot(\boldsymbol{\omega}_3\times\mathbf{x}) - \delta\mathbf{y}\cdot(\boldsymbol{\omega}_2\times\mathbf{z}) &=\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= \alpha(\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_3)\cdot\boldsymbol{\omega}_2 + \gamma(\mathbf{y}\times\boldsymbol{\omega}_3)\cdot\boldsymbol{\omega}_2 - \gamma(\mathbf{z}\times\boldsymbol{\omega}_1)\cdot\boldsymbol{\omega}_2&\\ + \beta(\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_3)\cdot\mathbf{x} + \delta(\mathbf{y}\times\boldsymbol{\omega}_3)\cdot\mathbf{x} - \delta(\mathbf{z}\times\boldsymbol{\omega}_1)\cdot\mathbf{x}&\end{aligned} \tag{2.4.11}$$

Predtým, ako sa pustíme do úprav poslednej rovnice, dokážme nasledujúcu identitu pre ľubovoľné vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{x}\cdot(\mathbf{z}\times\mathbf{y}) = \mathbf{y}\cdot(\mathbf{x}\times\mathbf{z}) \tag{2.4.12}$$

$$\mathbf{x}\cdot(\mathbf{z}\times\mathbf{y}) = x_i\varepsilon_{ijk}z_jy_k = y_k\varepsilon_{ijk}x_iz_j = y_k\varepsilon_{kij}x_iz_j = \mathbf{y}\cdot(\mathbf{x}\times\mathbf{z})$$

Práve dokázanú identitu nazývame cyklická invariantnosť zmiešaného súčinu. Využitím tejto identity a jej podobných teraz upravme pravú stranu rovnosti 2.4.11 a dostaneme nasledujúcu rovnosť

$$\begin{aligned}\alpha\boldsymbol{\omega}_1\cdot(\boldsymbol{\omega}_3\times\boldsymbol{\omega}_2) + \gamma\mathbf{y}\cdot(\boldsymbol{\omega}_3\times\boldsymbol{\omega}_2) + \beta\boldsymbol{\omega}_1\cdot(\boldsymbol{\omega}_3\times\mathbf{x})&\\ - \beta\boldsymbol{\omega}_1\cdot(\boldsymbol{\omega}_2\times\mathbf{z}) + \delta\mathbf{y}\cdot(\boldsymbol{\omega}_3\times\mathbf{x}) - \delta\mathbf{y}\cdot(\boldsymbol{\omega}_2\times\mathbf{z}) &=\end{aligned}$$

$$= \alpha\boldsymbol{\omega}_1 \cdot (\boldsymbol{\omega}_3 \times \boldsymbol{\omega}_2) + \gamma\mathbf{y} \cdot (\boldsymbol{\omega}_3 \times \boldsymbol{\omega}_2) + \beta\boldsymbol{\omega}_1 \cdot (\boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{x})$$
$$- \gamma\boldsymbol{\omega}_1 \cdot (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{z}) + \delta\mathbf{y} \cdot (\boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{x}) - \delta\mathbf{x} \cdot (\mathbf{z} \times \boldsymbol{\omega}_1) \quad (2.4.13)$$

Ako ihneď vidíme, rovnosť, ktorú sme práve dostali, je splnená za dvoch podmienok a to $\beta = \gamma$ a $\delta = 0$. Teraz už môžeme zapísať náš záverečný výsledok pre Ad invariantnú bilineárnu formu na $e(3)$.

$$J = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) = \alpha \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) + \beta \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{1} \\ \hline \mathbb{1} & 0 \end{array}\right) = \alpha K + \alpha L \quad (2.4.14)$$

Všimnime si, že dostávame dvojrozmerný priestor Ad-invariantných bilineárnych foriem na $e(3)$, kde bázu tvoria práve bilineárne formy K a L. Zapíšme teraz bilineárne formy K, L a J v jazyku dvojvektorov.

$$K[(\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{y}), (\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{x})] = \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_2 \quad (2.4.15)$$

$$L[(\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{y}), (\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{x})] = \boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{y} + \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{x} \quad (2.4.16)$$

$$J[(\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{y}), (\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{x})] = \alpha\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_2 + \beta\boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{y} + \beta\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{x} \quad (2.4.17)$$

Na záver nášho výpočtu overme, že vypočítaná bilineárna forma J je skutočne Ad-invariantná.

$$\begin{aligned} &K[\mathrm{Ad}_{(R,\mathbf{v})}(\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{y}), \mathrm{Ad}_{(R,\mathbf{v})}(\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{x})] = \\ &\qquad = K[(R\boldsymbol{\omega}_1, R\mathbf{y} - R\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}), (R\boldsymbol{\omega}_2, R\mathbf{x} - R\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{v})] \\ &\qquad = R\boldsymbol{\omega}_1 \cdot R\boldsymbol{\omega}_2 \\ &\qquad = \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_2 = K[(\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{y}), (\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{x})] \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

Keďže matica $R \in SO(3)$ predstavuje práve transformáciu, voči ktorej je štandartný skalárny súčin v euklidovskom priestore invariantný, bilineárna forma K je skutočne Ad-invariantná. Podobne pre bilineárnu formu L platí

$$\begin{aligned} &L[\mathrm{Ad}_{(R,\mathbf{v})}(\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{y}), \mathrm{Ad}_{(R,\mathbf{v})}(\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{x})] = \\ &\quad = L[(R\boldsymbol{\omega}_1, R\mathbf{y} - R\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}), (R\boldsymbol{\omega}_2, R\mathbf{x} - R\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{v})] \\ &\quad = R\boldsymbol{\omega}_1 \cdot (R\mathbf{x} - R\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{v}) + R\boldsymbol{\omega}_2 \cdot (R\mathbf{y} - R\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}) \\ &\quad = R\boldsymbol{\omega}_1 \cdot R\mathbf{x} - R\boldsymbol{\omega}_1 \cdot (R\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{v}) + R\boldsymbol{\omega}_2 \cdot R\mathbf{y} + R\boldsymbol{\omega}_1 \cdot (R\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{v}) \\ &\quad = R\boldsymbol{\omega}_1 \cdot R\mathbf{x} + R\boldsymbol{\omega}_2 \cdot R\mathbf{y} \\ &\quad = \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{y} = L[(\boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{y}), (\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{x})] \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

2.5 Výpočet Killingovej-Cartanovej bilineárnej formy na $e(3)$

V tomto paragrafe je naším cieľom vypočítať Killingovu-Cartanovu bilineárnu formu na $e(3)$. O Killingovej-Cartanovej forme vieme, že je Ad-invariantná, takže očakávame, že ju budeme môcť identifikovať v rovnici 2.4.14 teda v najvšeobecnejšej Ad-invariantnej bilineárnej forme na $e(3)$. Na úvod určíme všeobecný vzorec pre maticu Killingovej-Cartanovej formy

$$K(X,Y) = K(E_i, E_j)X_iY_j$$

$$K_{ij} = K(E_i, E_j) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}_{E_i}\mathrm{ad}_{E_j}) \tag{2.5.1}$$

$$\mathrm{ad}_{E_i}\mathrm{ad}_{E_j}E_k = [E_i,[E_j,E_k]] = c_{jkm}[E_i,E_m] = c_{jkm}c_{imn}E_n$$

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}_{E_i}\mathrm{ad}_{E_j}) = \mathrm{Tr}\,(c_{imn}c_{jkm}) = c_{imk}c_{jkm} \tag{2.5.2}$$

([2], s. 286) Ako by už mohla naznačiť predošlá rovnica, v ďalších výpočtoch budeme potrebovať poznať štruktúrne konštanty vzhľadom na nejakú bázu E v $e(3)$. Najprv teda zaveďme bázu v $e(3)$. Keďže v $so(3)$ aj v $\mathbb{R}^3$ máme prirodzené bázy tvorené prvkami l_i (pozri rovnicu 3.2.4), respektíve e_i (e_i označujeme vektory štandartnej bázy v $\mathbb{R}^3$), bázu v $e(3)$ zavedieme nasledovne

$$E_\alpha = (l_i, 0) \text{ pre } \alpha = 1,2,3, \text{ kde } i = \alpha \tag{2.5.3}$$

$$E_\alpha = (0, e_i) \text{ pre } \alpha = 4,5,6, \text{ kde } i = \alpha - 3 \tag{2.5.4}$$

Štruktúrne konštanty budeme musieť vypočítať po častiach pre tri rôzne prípady podľa toho, ktoré prvky bázy budú vstupovať do komutátora. V nasledujúcom výpočte využijeme znalosť štruktúrnych konštánt Lieovej algebry $so(3)$ vzhľadom na bázu $\mathbf{l}$ podľa rovnice 3.2.5. Pre lepšiu prehľadnosť označme súbor bázových vektorov E_α pre $\alpha = 1,2,3$ písmenom F a pre $\alpha = 4,5,6$ písmeno G.

Komutátor typu $[F,F]$

$$[(l_i,0),(l_j,0)] = \left(\begin{array}{c|c} [(l_i,l_j] & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \varepsilon_{ijk}(l_k,0) \tag{2.5.5}$$

Komutátor typu $[G,G]$

$$[(0,e_i),(0,e_j)] = 0 \tag{2.5.6}$$

Komutátor typu $[F, G]$

$$\begin{aligned}
[(l_i, 0), (0, e_j)] &= \left(\begin{array}{c|c} 0 & l_i e_j \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & (l_i)_{km}(e_j)_m e_k \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} 0 & -\varepsilon_{ikm}\delta_{jm} e_k \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \varepsilon_{ijk} e_k \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \varepsilon_{ijk}(0, e_j)
\end{aligned} \tag{2.5.7}$$

Teraz tak ako vo výpočte bilineárnej formy J parametrizujme maticu 6×6 Killingovej-Cartanovej formy štyrmi maticami 3×3

$$K = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \tag{2.5.8}$$

Potom podľa rovnice 2.5.1 je zrejmé, že

$$A = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}_F \circ \mathrm{ad}_F)$$

$$B = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}_F \circ \mathrm{ad}_G)$$

$$C = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}_G \circ \mathrm{ad}_F)$$

$$D = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}_G \circ \mathrm{ad}_G)$$

Predtým, ako by sme sa pustili do výpočtu matice K pomocou štruktúrnych konštánt a museli by sme určiť 1296 čísel, pozrime sa na jednotlivé operátory, z ktorých hľadáme stopu. Znalosť štruktúrnych konštánt však zužitkujeme aj tak. Začnime s operátorom $\mathrm{ad}_G \circ \mathrm{ad}_G$ a pustime ho najprv na časť bázy F a potom na G

$$\mathrm{ad}_G \mathrm{ad}_G F = [G, [G, F]] = [G, \tilde{G}] = 0 \tag{2.5.9}$$

kde prvky $\tilde{G}$ sú prvky G poprípade vynásobené -1.

$$\mathrm{ad}_G \mathrm{ad}_G G = [G, [G, G]] = [G, 0] = 0 \tag{2.5.10}$$

Ako vidíme, operátor $\mathrm{ad}_G \circ \mathrm{ad}_G$ je nulovým operátorom, a teda bude mať aj nulovú stopu. Z toho vyplýva, že matica D bude tiež nulová. Pozrime sa teraz na operátor $\mathrm{ad}_F \circ \mathrm{ad}_G$

$$\mathrm{ad}_F \mathrm{ad}_G G = [F, [G, G]] = [F, 0] = 0$$

$$\mathrm{ad}_F \mathrm{ad}_G F = [F,[G,F]] = [F,\tilde{G}] = \tilde{\tilde{G}} \tag{2.5.11}$$

Vidíme, že aj keď operátor $\mathrm{ad}_F \circ \mathrm{ad}_G$ nie je nulový, jeho stopa podľa paragrafu 3.5 kapitola 3 Dodatky určite nulová bude, a teda aj matica B bude nulová. Podobne pre operátor $\mathrm{ad}_G \circ \mathrm{ad}_F$

$$\mathrm{ad}_G \mathrm{ad}_F F = [G,[F,F]] = [G,\tilde{F}] = \tilde{G}$$

$$\mathrm{ad}_G \mathrm{ad}_F G = [G,[F,G]] = [G,\tilde{G}] = 0 \tag{2.5.12}$$

Opäť dostávame výsledok, že matica C rovnajúca sa stope tohto operátora bude nulová. Ostáva nám zodpovedať, ako bude vyzerať matica A. Začnime teda opäť tým, že sa pozrieme na operátor $\mathrm{ad}_F \circ \mathrm{ad}_F$. Pri tom využijeme rovnice 2.2.1 a 2.2.8

$$\mathrm{ad}_{(l_i,0)}(X,\mathbf{x}) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{ad}_{l_i} X & l_i\mathbf{x} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} l_i X & l_i\mathbf{x} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} l_i & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} X & \mathbf{x} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \tag{2.5.13}$$

a dostávame výsledok

$$\mathrm{ad}_{(l_i,0)} = \left(\begin{array}{c|c} l_i & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{ad}_{l_i} \circ \mathrm{ad}_{l_j} = \left(\begin{array}{c|c} l_i l_j & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \tag{2.5.14}$$

Stopa operátora $\mathrm{ad}_{l_i} \circ \mathrm{ad}_{l_j}$ bude teda rovná $\mathrm{Tr}\,(l_i l_j) + 0$.

$$(l_i l_j)_{ac} = (l_i)_{ab}(l_j)_{bc} = \varepsilon_{iab}\varepsilon_{jbc} = -\varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcb} = -\delta_{ij}\delta_{ac} + \delta_{ic}\delta_{aj}$$

$$\mathrm{Tr}\,(l_i l_j) = \mathrm{Tr}\,(-\delta_{ij}\delta_{ac} + \delta_{ic}\delta_{aj}) = -\delta_{ij}\delta_{aa} + \delta_{ia}\delta_{aj} = -3\delta_{ij} + \delta_{ij} = -2\delta_{ij} \tag{2.5.15}$$

Takže pre maticu A sme dostali predpis $A = -2\mathbb{1}$ a môžeme napísať záverečný výsledok Killingovej-Cartanovej formy na $e(3)$

$$K = -2 \cdot \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \tag{2.5.16}$$

Respektíve v jazyku dvojvektorov

$$K[(\boldsymbol{\omega}_1,\mathbf{y}),(\boldsymbol{\omega}_2,\mathbf{x})] = -2\,\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_2 \tag{2.5.17}$$

Na záver si ešte všimnime, že Killingovu-Cartanovu formu, tak ako sme ju vypočítali v tomto paragrafe, skutočne dokážeme identifikovať v rovnici 2.4.14, kde je taktiež označená K a líši sa len o násobok konštantou.

Je tiež dôležité uvedomiť si, že Killingova-Cartanova forma na Lieovej algebre $e(3)$ vychádza degenerovaná. Z tohto hľadiska je pre nás zaujímavejšia druhá bázová bilineárna forma, ktorú sme v rovnici 2.4.14 označili písmenom L a nazýva sa *Kleinova forma*, ktorá, ako vidíme, vychádza nedegenerovaná ($\det(L) \neq 0$).

3 Dodatky

3.1 Dodatok 1 - Lineárne priestory

Na začiatok tejto kapitoly uvedemie niektoré základné pojmy o lineárnych priestoroch. Aj keď tieto pojmy považujeme za čitateľovi dobre známe, tvoria základ pre niektoré ďalšie úvahy v tejto práci.

Štruktúra *lineárneho priestoru* V nad poľom reálnych čísel $\mathbb{R}$ (v zmysle ďalšieho textu iné skalárne polia uvažovať nebudeme) pozostáva z dvoch základných vlastností, ktoré spolu súvisia. Z možnosti vytvárať lineárne kombinácie $x + \lambda y \in V$, kde $x, y \in V$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ a z existencie význačného prvku 0. ([6], s. 51)

Ďalej môžeme v lineárnom priestore V zaviesť pojem *repéru* (v lineárnej algebre bude pre nás pojem repéru a *bázy* znamenať to isté). Báza (repér) e je maximálny súbor lineárne nezávislých vektorov vo V. Takýchto súborov môžeme nájsť nekonečne veľa, ale dá sa ukázať, že každý bude mať rovnaký počet vektorov. Počet vektorov v báze e nazývame *dimenzia lineárneho priestoru*. Majme teraz reálny lineárny priestor V a v ňom repér $e = (e_1, \ldots, e_n)$, kde $e_i \in V$ potom každý vektor $u \in V$ môžeme zapísať ako $u = u_i e_i$, kde čísla $u_i \in \mathbb{R}$ sú súradnicami vektora u vzhľadom na daný repér. ([5], s. 3)

Taktiež dôležitým pojmom je *lineárne zobrazenie*. Zo všetkých zobrazení $f : V \to U$ medzi dvomi lineárnymi priestormi U a V vyberáme také, ktoré zachovajú štruktúru lineárneho priestoru. A tak prirodzene nazveme zobrazenie f lineárnym, ak platí

$$f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y) \tag{3.1.1}$$

Ukazuje sa, že nám stačí poznať, ako sa lineárne zobrazenie správa na báze. Taktiež po zavedení bázy vo V aj U môžeme lineárne zobrazenie f realizovať pomocou matice definovanej nasledovne

$$f(e_i) = A_{\alpha i} e_\alpha \tag{3.1.2}$$

kde $i = 1, \ldots, \dim(V)$ a $\alpha = 1, \ldots, \dim(U)$. ([6], s. 119)

Bijektívne lineárne zobrazenie $f : V \to V$ nazveme lineárnou transformáciou V. Grupu takýchto lineárnych transfomácií na V značíme $GL(V)$. Respektíve po zavedení bázy vo V dostávame maticovú grupu $GL(n, \mathbb{R})$ tvorenú regulárnymi maticami rozmeru $n \times n$.

Pomocou regulárnej štvorcovej matice, nazývame ju *matica prechodu* P, môžeme tiež realizovať zmenu bázy v lineárnom priestore V. ([6], s. 135) Majme vo V dve bázy e a f, potom matica prechodu z bázy e do bázy f je maticou bijektívneho lineárneho zobrazenia $f : V \to V$

$$f_i = P_{ji} e_j \tag{3.1.3}$$

Na záver tohto paragrafu ešte pripomeňme pojmy bilineárne zobrazenie a bilineárna forma. Majme reálne lineárne priestory U, V a W. Zobrazenie $B : U \times V \to W$ nazveme *bilineárne zobrazením*, ak platí

$$\begin{aligned} B(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1 + c\mathbf{y}_2) &= B(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + cB(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2) \\ B(\mathbf{x}_1 + c\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1) &= B(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + cB(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1) \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

kde $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \in U$, $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1 \in V$ a $c \in \mathbb{R}$. Teda bilineárne zobrazenie sa správa lineárne v oboch vstupoch. ([3], s. 197)

Špeciálnym prípadom bilineárneho zobrazenia je bilineárna forma na lineárnom priestore V. *Bilineárna forma* na V je bilineárne zobrazenie $B : V \times V \to \mathbb{R}$. Teda z dvoch vektorov dostávame číslo. Po zavedení bázy e vo V môžeme bilineárnu formu realizovať štvorcovou maticou definovanou nasledujúcim vzťahom

$$B(e_i, e_j) = B_{ij} \tag{3.1.5}$$

Ak je bilineárna forma B na V nedegenerovaná a symetrická ($\forall x, y \in V : B(x, y) = B(y, x)$), nazveme ju skalárnym súčinom (niekedy sa vyžaduje aj kladná definitnosť ($\forall x \in V$; $x \neq 0 \Rightarrow B(x, x) > 0$)).

3.2 Dodatok 2 - Grupy

V tomto dodatku pripomenieme niektoré pojmy z teórie grúp. Väčšina pojmov, ktoré uvedieme, majú ďalekosiahle dôsledky a je za nimi veľmi široká teória, ktorá však zďaleka prekračuje rozsah tejto práce, preto pripomenieme len tie aspekty tejto teórie, ktoré sa úzko týkajú našej témy.

3.2.1 Lieova grupa a Lieova algebra

Grupa je z hľadiska matematickej definície veľmi jednoduchý objekt, čo však nijako neuberá na jej význame. Práve naopak. Pomocou grúp totiž v matematike a následne aj vo fyzike opisujeme a používame rôzne symetrie. Ľahko nájdeme veľa triviálnych množín so štruktúrou grupy. Z hľadiska teórie grúp je však najdôležitejší príklad grupy množina transformácií ľubovoľnej množiny M teda bijektívnych zobrazení $f : M \to M$ vzhľadom na operáciu skladania zobrazení. Z hľadiska tejto práce sú to konkrétne dve Lieove grupy, maticová grupa lineárnych transformácií $GL(n, \mathbb{R})$ a grupa afinných transformácií $GA(E)$. *Lieova grupa* je matematický objekt, ktorý je zároveň grupou a hladkou varietou. Pojem variety je opäť ďaleko presahujúci rozsah tejto práce, no povedzme aspoň, že varieta je množina, na ktorej môžeme v okolí každého bodu zaviesť súradnice.

Lieova algebra je matematický objekt, ktorý sa študuje osobitne aj v súvise s Lieovými grupami. Nás bude Lieova algebra zaujímať práve v súvislosti s Lieovými grupami, pretože, ako sa ukazuje, Lieova algebra nesie podstatnú informáciu o príslušnej Lieovej grupe.

Lieova algebra je lineárny priestor $\mathfrak{g}$ spolu s *Lieovou zátvorkou* $[\cdot, \cdot]$ teda bilineárnym zobrazením $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, ktoré musí spĺňať nasledujúce vlastnosti:

1. antisymetria $\forall x, y \in \mathfrak{g} : \ [x, y] = -[y, x]$
2. Jacobiho identita $\forall x, y, z \in \mathfrak{g} : \ [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$

([1], s. 68) Príkladom Lieovej algebry je napríklad vektorový priestor $\mathbb{R}^3$, kde úlohu Lieovej zátvorky bude plniť vektorový súčin. Pozrime sa však, ako sme už spomenuli, na pre nás dôležitý vzťah Lieovej algebry a Lieovej grupy. V algoritme výpočtu Lieovej algebry sa však obmedzíme len na prípad maticových Lieových grúp. Majme teda maticovú grupu $GL(n, \mathbb{R})$, jej podgrupy (označme ľubovoľnú takúto podgrupu $P(n, \mathbb{R})$) si môžeme predstaviť ako trajektórie vnútri tejto grupy, ktoré prechádzajú jednotkovým prvkom. Ak použijeme analógiu z mechaniky, tak prvok X Lieovej algebry bude rýchlosť, ktorou sa vydávame z jednotkového prvku po danej trajektórii teda $\mathbb{1} + \epsilon X \in P(n, \mathbb{R})$. Inými slovami, hľadáme matice blízke jednotkovej, ktoré do rádu ϵ^1 budú spĺňať vzťahy v danej grupe alebo podgrupe. Povedzme ešte, že v maticovej Lieovej algebre plní úlohu Lieovej zátvorky komutátor ([2], s. 253).

Na záver tohto paragrafu doplňme, že keďže základom štruktúry Lieovej algebry je lineárny priestor, môžeme v nej zaviesť bázu. Ak E bude báza v Lieovej algebre, potom môžeme definovať pojem *štruktúrnych konštánt* vzťahom $[E_i, E_j] = c_{ijk}E_k$. Vidíme, že štruktúrne konštanty c_{ijk} vyjadrujú Lieovu zátvorku na báze. ([2], s. 717)

▼ Na ilustráciu uveďme výpočet Lieovej algebry grupy $SO(n)$ (pričom pre nás je tento výpočet najdôležitejší z hľadiska rotačnej grupy $SO(3)$). Ako vieme, maticovú grupu $SO(n)$ charakterizujú dve podmienky $R^TR = \mathbb{1}$ a $\det(R) = 1$, kde $R \in SO(n)$. Pozrime sa najprv na prvú z nich

$$\begin{aligned} R^TR &= (\mathbb{1} + \epsilon X^T)(\mathbb{1} + \epsilon X) \\ &= \mathbb{1} + \epsilon X + \epsilon X^T + \epsilon^2 \dots \\ &= \mathbb{1} + \epsilon(X + X^T) \ = \ \mathbb{1} \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

vidíme, že pre maticu $X \in so(n)$ dostávame

$$X^T = -X \tag{3.2.2}$$

Pozrime sa teraz na druhú podmienku pre maticu X. Vyjdeme zo vzťahu

$$\det(\mathbb{1} + \epsilon X) = 1 + \epsilon \mathrm{Tr}\,(X) \tag{3.2.3}$$

Ak uvážime, že matica $\mathbb{1} + \epsilon X \in SO(n)$ dostávame podmienku, že matica X musí mať nulovú stopu. Všimnime si však, že nulovosť stopy je automaticky zabezpečená už tým, že matica X je antisymetrická podľa podmienky 3.2.2. Teda Lieove grupy $O(n)$ a $SO(n)$ majú totožné Lieove algebry tvorené antisymetrickými maticami rozmeru $n \times n$. Ukazuje sa, že Lieova algebra $so(3)$ je trojrozmerná a môžeme v nej zvoliť vhodnú bázu tvorenú troma maticami l_i rozmeru 3×3 podľa predpisu

$$(l_i)_{jk} := -\varepsilon_{ijk} \tag{3.2.4}$$

vzhľadom, na ktorú vychádza komutátor nasledovne ([2], s. 259)

$$[l_i, l_j] = \varepsilon_{ijk} l_k \tag{3.2.5}$$

▲

3.2.2 Pôsobenie a reprezentácia grupy

V tomto paragrafe pripomenieme pojmy pôsobenia a reprezentácie grupy. Pre úplnosť najprv uveďme podmienku, kedy zobrazenie $F : G_1 \to G_2$ z grupy G_1 do grupy G_2 je *homomorfizmom grúp*. Pre zobrazenie F musí platiť

$$F(g \circ h) = F(g) \circ F(h) \tag{3.2.6}$$

kde $g, h \in G_1$.

Majme grupu G a ľubovoľnú množinu M, *pôsobenie grupy* G na množine M je zobrazenie $g \to L_g$, kde $L_g : M \to M$ sú bijektívne zobrazenia. Ďalej môžeme hovoriť o ľavom pôsobení grupy, ak platí

$$gh \to L_{gh} \equiv L_g \circ L_h \tag{3.2.7}$$

(niekedy označujeme $L_g x = gx$, kde $x \in M$) a pravom pôsobení, ak platí

$$gh \to R_{gh} \equiv R_h \circ R_g \tag{3.2.8}$$

(niekedy označujeme $R_g x = xg$, kde $x \in M$). ([2], s. 313) *Reprezentácia grupy* je špeciálny prípad ľavého pôsobenia, keď grupa G pôsobí na lineárnom priestore $V = M$ a bijektívne zobrazenia L_g sú lineárne. K reprezentácii $\rho(g)$ Lieovej grupy G vieme nájsť aj odvodenú reprezentáciu $\rho'(X)$ príslušnej Lieovej algebry definovanú predpisom ([2], s. 269)

$$\rho(\mathbb{1} + \epsilon X) = \hat{1} + \epsilon \rho'(X) \tag{3.2.9}$$

Na záver tohto paragrafu pripomeňme ešte istý druh reprezentácie Lieovej grupy G, a to Ad reprezentáciu (tiež nazývanú pridružená reprezentácia) a jej odvodenú ad reprezentáciu Lieovej algebry $\mathfrak{g}$. Ad reprezentáciu definujeme predpisom

$$A \to \mathrm{Ad}_A \qquad \mathrm{Ad}_A X \equiv AXA^{-1} \tag{3.2.10}$$

kde $A \in G$ a $X \in \mathfrak{g}$. Je to teda reprezentácia Lieovej grupy na jej vlastnej Lieovej algebre. Poznamenajme ešte, že takáto definícia Ad reprezentácie je možná len v maticových Lieových grupách a maticových Lieových algebrách, v abstraktných Lieových grupách a algebrách nie je definovaný násobok prvku grupy a algebry. Pozrime sa teraz na odvodenú reprezentáciu k Ad reprezentácii teda ad reprezentáciu, ktorá vychádza nasledujúco

$$X \to \mathrm{ad}_X \qquad \mathrm{ad}_X Y = [X, Y] \tag{3.2.11}$$

kde $X, Y \in \mathfrak{g}$. Reprezentácia ad je teda reprezentácia Lieovej algebry na sebe samej. Doplňme ešte, že výnimočnosť Ad reprezentácie spočíva v tom, že ju vieme konštruovať v pojmoch samotnej grupy. ([2], s. 281)

3.2.3 Killingova-Cartanova forma

Killingovou-Cartanovou formou zadanou predpisom

$$K(X, Y) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y) \tag{3.2.12}$$

kde $X, Y \in \mathfrak{g}$, je v Lieovej algebre $\mathfrak{g}$ definovaná symetrická Ad-invariantná bilineárna forma. ([2], s. 286) Skúsme tieto vlastnosti overiť.

Symetriu Killingovej-Cartanovej formy dostávame priamo z vlastnosti stopy

$$\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA) \qquad \Rightarrow \qquad K(X, Y) = K(Y, X) \tag{3.2.13}$$

Predtým, ako dokážeme Ad-invariantnosť, ukážme, že platí nasledujúca rovnosť

$$\mathrm{ad}_{\mathrm{Ad}_A X} = \mathrm{Ad}_A \mathrm{ad}_X (\mathrm{Ad}_A)^{-1} \tag{3.2.14}$$

keďže platí $\mathrm{Ad}_A^{-1} = \mathrm{Ad}_{A^{-1}}$ môžeme písať

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_A \mathrm{ad}_X (\mathrm{Ad}_A)^{-1} Y &= \mathrm{Ad}_A (XA^{-1}YA - A^{-1}YAX) \\ &= AXA^{-1}YAA^{-1} - AA^{-1}YAXA^{-1} \\ &= AXA^{-1}Y - YAXA^{-1} \\ &= \mathrm{ad}_{\mathrm{Ad}_A X} Y \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

tým je rovnosť 3.2.14 dokázaná. V ďalšom výpočte využijeme spolu s rovnosťou 3.2.14 možnosť cyklickej zámeny v stope ($\mathrm{Tr}\,(ABC) = \mathrm{Tr}\,(CAB) = \mathrm{Tr}\,(BCA)$)

$$\begin{aligned} K(\mathrm{Ad}_A X, \mathrm{Ad}_A Y) &= \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}_{\mathrm{Ad}_A X} \circ \mathrm{ad}_{\mathrm{Ad}_A Y}) \\ &= \mathrm{Tr}\,(\mathrm{Ad}_A \mathrm{ad}_X (\mathrm{Ad}_A)^{-1} \mathrm{Ad}_A \mathrm{ad}_Y (\mathrm{Ad}_A)^{-1}) \\ &= \mathrm{Tr}\,(\mathrm{Ad}_A \mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y (\mathrm{Ad}_A)^{-1}) \\ &= \mathrm{Tr}\,((\mathrm{Ad}_A)^{-1} \mathrm{Ad}_A \mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y) \\ &= \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y) \\ &= K(X, Y) \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

Tým je dôkaz Ad-invariantnosti Killingovej-Cartanovej formy skončený.

3.3 Dodatok 3 - Hlavný homogénny priestor grupy

Pri objasnení pojmu hlavný homogénny priestor grupy G začneme pojmom $G-$*priestor*. $G-$priestor je množina, na ktorej pôsobí grupa G (zľava alebo sprava). V $G-$priestore, označme ho M, môžeme ďalej hovoriť o *orbitách*. Orbita bodu $x \in M$ je podmnožina $G-$priestoru M taká, že

$$O_x = \{y \in M \mid \exists g \in G \text{ pre ktoré platí } y = gx\} \tag{3.3.1}$$

$G-$priestor sa teda rozpadá na jednotlivé orbity, ktoré nemajú žiadne spoločné prvky. To znamená, že každá orbita O je jednoznačne určená jediným bodom (teda ktorýmkoľvek bodom, ktorý obsahuje). ([2] s. 315)

▼ Povedzme, že máme bod $y \in M$, ktorý patrí do dvoch rôznych orbít O_{x_1} a O_{x_2}. To znamená, že existujú také $g_1, g_2 \in G$, pre ktoré platí $y = g_1 x_1$ a $y = g_2 x_2$. Z vlastností prvkov grupy potom máme $x_1 = g_1^{-1} g_2 x_2 = \tilde{g} x_2$, kde $\tilde{g} \in G$. Vidíme teda, že ak orbity O_{x_1} a O_{x_2} majú nejaký spoločný bod, tak majú všetky body spoločné, teda $O_{x_1} = O_{x_2}$. ▲

Ak je teraz $G-$priestor tvorený jednou orbitou nazveme ho *homogénnym priestorom.* Uvidíme, že len pomocou samotnej grupy G vieme vytvoriť izomorfnú kópiu každého homogénneho priestoru grupy G. Na to však ešte zaveďme pojmy stabilizátor bodu x a ľavá zvyšková trieda. *Stabilizátor bodu* x G_x je podgrupa grupy G, pre ktorú platí ([2] s. 316)

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\} \tag{3.3.2}$$

▼ Je G_x naozaj podgrupa? Keďže určite platí $ex = x\,(L_e = id)$, takže $e \in G_x$. Ďalej platí

$$\forall g, h \in G_x : \ (gh)x = g(hx) = gx = x \qquad \Rightarrow \qquad gh \in G_x$$

$$\forall g \in G_x : \, gx = x \qquad \Rightarrow \qquad x = g^{-1}x \qquad \Rightarrow \qquad g^{-1} \in G_x$$

Teda G_x je skutočne podgrupa G.

▲

Ak H je podgrupa grupy G, potom *ľavá zvyšková trieda* gH je množina takých prvkov, že

$$gH = \{k \,|\, k = gh;\, h \in H\} \tag{3.3.3}$$

([2] s. 318). Podobným spôsobom ako sme ukázali, že $G-$priestor sa rozpadá na samostatné orbity, môžeme ukázať, že grupa G sa rozkladá na samostatné ľavé zvyškové triedy (výrazy typu gh sú teraz násobením v grupe). A teda pomocou ľavých zvyškových tried vieme zaviesť ekvivalenciu grupových prvkov. Množinu ľavých zvyškových tried (teda množinu bodov $[g] \in G/H$, ktoré sme priradili jednotlivým zvyškovým triedam) označíme G/H. Hovoríme tiež, že grupu G faktorizujeme podľa podgrupy H a dostávame množinu G/H. Na tejto množine môže grupa pôsobiť zľava predpisom

$$\tilde{g}[g] = [\tilde{g}g] \tag{3.3.4}$$

▼

$$L_{gh}[\tilde{g}] = [gh\tilde{g}] = L_g[h\tilde{g}] = L_g L_h[\tilde{g}] \tag{3.3.5}$$

▲

Pomocou takejto ľavej akcie grupy G sa naozaj vieme presúvať medzi všetkými prvkami množiny G/H. Vytvorili sme teda homogénny priestor grupy G len v pojmoch samotnej grupy. Ako ho teraz spojiť s ľubovoľným homogénnym priestorom grupy G?

Tvrdením, že ku každému homogénnemu priestoru N grupy G vieme nájsť izomorfný homogénny priestor tvaru G/G_x, kde $x \in N$. Skúsme nahliadnuť, či takýto izomorfizmus vôbec môže existovať a ako bude vyzerať. Na to pripomeňme, že máme prípad, keď $N = O_x$, takže ľavou akciou grupy sa vieme dostať ku ktorémukoľvek bodu $y = gx \in N$. Prvky množiny G/G_x sú definované rovnicou 3.3.3, kde $H = G_x$.

Prirodzene môžeme potom definovať zobrazenia $\rho : N \to G/G_x$ a $\rho_1 : G/G_x \to N$

$$\rho : y = gx \longmapsto [g] = [gh] = [\tilde{g}] \tag{3.3.6}$$

$$\rho_1 : [\tilde{g}] \longmapsto \tilde{g}x = ghx = (\text{keďže}\, h \in G_x) = gx = y = \rho^{-1}([g]) \tag{3.3.7}$$

Teda naozaj zobrazenie ρ alebo ρ_1 sú bijekcie, keďže k nim existujú inverzné zobrazenia. Ešte overíme ekvivariantnosť

$$g\rho(x) = g[e] = [ge] = [g] = \rho(gx) \tag{3.3.8}$$

Teraz môžeme už skutočne všeobecne definovať pojem hlavného homogénneho priestoru. *Hlavný homogénny priestor* grupy G je množina $G/\{e\}$, kde e je jednotkový prvok grupy G. Teda je to homogénny priestor podľa najmenšej podgrupy $\{e\} \subset G$. ([2] s. 320)

Všimnime si ďalej, že hlavný homogénny priestor danej grupy a samotná grupa sú rovnako veľké teda bijektívne množiny. Faktorizáciou sme z grupy vytvorili množinu, ktorá úplne stráca štruktúru grupy (grupový súčin aj existenciu význačného prvku) a jej jedinou štruktúrou ostáva akcia pôvodnej grupy na tejto množine. V prípade homogénnych priestorov všeobecne túto akciu nazývame *tranzitívnou*, čo znamená, že ľubovoľné dva body vieme spojiť akciou grupy. Avšak na hlavnom homogénnom priestore je táto akcia navyše *voľná*, čo znamená, že po zapôsobení nejednotkovým prvkom sa nemôže stať, že by sme sa neposunuli z daného bodu do iného.

Zatiaľ sme spomenuli len homogénny priestor grupy G vytvorený z nej samotnej vzdaním sa grupového súčinu. Vzniká však otázka, či neexistuje hlavný homogénny priestor grupy G, ktorý by bol nezávislý od grupy G. Hľadáme teda množinu, ktorá by bola rovnako veľká ako samotná grupa a akcia grupy na tejto množine by bola voľná a tranzitívna. Ukazuje sa, že napríklad pre grupu $GL(n, \mathbb{R})$ takúto množinu skutočne dokážeme nájsť. Je ňou množina M všetkých báz v n-rozmernom lineárnom priestore V, na ktorej je definovaná pravá akcia grupy $GL(n, \mathbb{R})$ nasledovne

$$R_A e \equiv eA$$

kde $A \in GL(n, \mathbb{R})$ a $e \in M$. Všimnime si, že dve bázy skutočne nevieme násobiť a neexistuje ani jednotková báza. Teda v množine M naozaj nemáme štruktúru grupy (grupový súčin) a nie je to spôsobené tým, že by sme sa tejto štruktúry len vzdali. ([2] s. 320)

3.4 Dodatok 4

V tomto paragrafe sa pozrieme, akú podmienku musí splňať matica M, ak chceme, aby rovnica

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y})M\mathbf{y} = 0 \tag{3.4.1}$$

bola splnená pre ľubovoľné vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. Rozpíšme teda uvedenú rovnicu

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y})M\mathbf{y} =$$

$$= (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \tag{3.4.2}$$

kde $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. Keď po roznásobení posledného výrazu a ďalších úpravách vyjmeme x_1, x_2 a x_3, dostaneme rovnicu

$$\begin{aligned} & x_1(m_{31}y_2y_1 + m_{32}y_2y_2 + m_{33}y_2y_3 - m_{21}y_3y_1 - m_{22}y_3y_2 - m_{23}y_3y_3) \\ + \quad & x_2(m_{11}y_3y_1 + m_{12}y_3y_2 + m_{13}y_3y_3 - m_{31}y_1y_1 - m_{32}y_1y_2 - m_{33}y_1y_3) \\ + \quad & x_3(m_{21}y_1y_1 + m_{22}y_1y_2 + m_{23}y_1y_3 - m_{11}y_2y_1 - m_{12}y_2y_2 - m_{13}y_2y_3) \\ = \quad & 0 \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

Keďže vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ je úplne ľubovoľný, môžeme napísať nasledujúce tri podmienky ekvivalentné predošlej rovnici

$$\begin{aligned} m_{31}y_2y_1 + m_{32}y_2y_2 + m_{33}y_2y_3 - m_{21}y_3y_1 - m_{22}y_3y_2 - m_{23}y_3y_3 = 0 \\ m_{11}y_3y_1 + m_{12}y_3y_2 + m_{13}y_3y_3 - m_{31}y_1y_1 - m_{32}y_1y_2 - m_{33}y_1y_3 = 0 \\ m_{21}y_1y_1 + m_{22}y_1y_2 + m_{23}y_1y_3 - m_{11}y_2y_1 - m_{12}y_2y_2 - m_{13}y_2y_3 = 0 \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Tak ako vektor $\mathbf{x}$ aj vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ v našej rovnici je úplne ľubovoľný, a tak z posledných troch rovníc postupne dostávame nasledujúce podmienky pre jednotlivé prvky matice M

$$\begin{array}{lllll} m_{31} = 0 & m_{32} = 0 & m_{21} = 0 & m_{23} = 0 & m_{33} = m_{22} \\ m_{12} = 0 & m_{13} = 0 & m_{31} = 0 & m_{32} = 0 & m_{11} = m_{33} \\ m_{21} = 0 & m_{23} = 0 & m_{12} = 0 & m_{13} = 0 & m_{22} = m_{11} \end{array}$$

Ako z posledného stĺpca vidíme, diagonálne prvky matice M musia byť totožné a všetky ostatné prvky nulové. Matica M musí byť teda v tvare

$$M = \mu \mathbb{1} \tag{3.4.5}$$

kde $\mu \in \mathbb{R}$ je ľubovoľná konštanta.

3.5 Dodatok 5 - O stope lineárneho operátora

V tomto paragrafe uvedieme krátku poznámku o stope lineárnych operátorov, konkrétne o jej nulovosti za istých podmienok. Na účely tejto poznámky nám postačí pracovať v dvojrozmernom lineárnom priestore. Ďalej využijeme rovnicu 3.1.2, teda definíciu matice lineárneho zobrazenia, kde maticu lineárneho zobrazenia $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ teraz budeme značiť A a bázové vektory budeme značiť $e_i \in \mathbb{R}^2$. Pustime teraz zobrazenie φ na prvý bázový vektor.

$$\varphi(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 \tag{3.5.1}$$

Analogicky k rovniciam 2.5.11 a 2.5.12 by predchádzajúca rovnica vyzerala

$$\varphi(e_1) = a_{21}e_2 = 0e_1 + a_{21}e_2 \qquad \Rightarrow \qquad a_{11} = 0 \tag{3.5.2}$$

$$\varphi(e_2) = 0 = 0e_1 + 0e_2 \qquad \Rightarrow \qquad a_{12} = 0 \qquad a_{22} = 0 \tag{3.5.3}$$

A keďže $\mathrm{Tr}\,(A) = a_{11} + a_{22} = 0 + 0$, dostávame nulovú stopu matice A.

Záver

Na začiatku tejto práce sme uviedli krátku motiváciu a dve definície pojmu afinný priestor. Druhou definíciou, ktorá sa ukázala ako veľmi výstižná a stručná, sme zadali súvis medzi afinným priestorom a homogénnym priestorom grupy. Tiež sa ukázalo, že lineárny priestor môžeme chápať ako afinný, nie však naopak. Ďalej sme sa zaoberali afinným zobrazením ako zobrazením, ktoré komutuje so štruktúrou afinných priestorov a zistili sme, že množina všetkých afinných transformácií afinného priestoru tvorí grupu. Na záver prvej kapitoly sme zaviedli grupu afinných transformácií lineárneho priestoru $\mathbb{R}^n$ a vypočítali sme aj Lieovu algebru tejto grupy.

V druhej kapitole sme úspešne vypočítali najvšeobecnejšiu Ad-invariantnú bilineárnu formu na Lieovej algebre euklidovskej grupy $E(3)$. Pri výpočte sme najprv celý problém zlinearizovali, čo nám umožnila práve lieovosť afinnej (euklidovskej) grupy a využili sme infinitezimálnu podmienku Ad-invariantnosti bilineárnej formy. Vo výsledku sme dostali dve bázové Ad-invariantné bilineárne formy na $e(3)$, z ktorých jednu sme dokázali identifikovať ako Killingovu-Cartanovu, ktorá však vyšla degenerovaná. Preto sa ukázala ako významnejšia druhá bázová bilineárna forma, nazývaná Kleinova, ktorá vyšla nedegenerovaná. Zistili sme teda, že Ad-invariantné bilineárne formy na $e(3)$ tvoria dvojrozmerný lineárny priestor.

V Dodatkoch k hlavnému textu sme zhrnuli dôležité pojmy z hľadiska našej práce z teórie Lieových grúp. Tiež sme uviedli niektoré dodatočné výpočty k druhej kapitole.

Cieľom práce bolo dozvedieť sa čo najviac o afinnom priestore, afinnej grupe a vypočítať uvedenú bilineárnu formu. Teraz je už na čitateľovi, ktoré z poskytovaných informácií a výsledkov bude považovať za dôležité a zaujímavé a rozhodne sa ich využiť v ďalšom štúdiu napríklad klasickej mechaniky, ktorá sa celá odohráva práve v afinnom priestore a výberom vzťažnej sústavy vlastne do tohto priestoru zavádzame bázu. Ak sa čitateľ naopak venuje robotike, mohol by ho zaujať výsledok Ad-invariantnej bilineárnej formy na $e(3)$, keďže by sme mohli povedať, že na jednotlivé súčiastky robotov pôsobí práve euklidovská grupa.

Literatúra

[1] BAKER, A. *Matrix Groups: an introduction to Lie group theory.* London: Springer-Verlag London Ltd, 2002. 330 s.

[2] FECKO, M. *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov.* Bratislava: IRIS, 2008. 741 s.

[3] LEUNG, K.T. *Linear Algebra and Geometry.* Hong Kong: Hong Kong University Press, 1974. 309 s.

[4] SAUNDERS, D. J. *The Geometry of Jet Bundles.* Cambridge, Cambridge University Press, 1989. 293 s.

[5] TRAUTMAN, A. *Differential geometry for physicists: Stony Brook lectures.* Napoli: Bibliopolis, 1984. 145 s.

[6] ZLATOŠ, P. *Lineárna algebra a geometria.* Bratislava: Marenčin PT, 2011. 741 s.