Univerzita Komenského, Bratislava
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Gaussovská optika z lineárnej

Bakalárska práca

2015 Mária Šubjaková

Univerzita Komenského, Bratislava
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Gaussovská optika z lineárnej

Bakalárska práca

Študijný program: Fyzika
Študijný odbor: 1160 fyzika
Školiace pracovisko: Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky
Školiteľ: doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.

2015 Mária Šubjaková

64661072

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Mária Šubjaková
Študijný program: fyzika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 4.1.1. fyzika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Gaussovská optika z lineárnej

Cieľ: Bakalár(ka) má najprv naštudovať používanie maticových metód (dvoj aj štvorrozmerných). Potom nájsť všeobecné riešenie rovnice, ktorá vyjadruje podmienku, že príslušná 4 x 4 matica z grupy Sp(4,R) je splietajúcim operátorom (a teda optická sústava je rotačne invariantná). Presvedčiť sa, že riešenie spočíva v efektívnom prechode k 2 x 2 maticiam z grupy SL(2,R).

Literatúra: 1. P.Bamberg, S.Sternberg: A course in mathematics for students of physics 1, CUP 1992
2. M.Fecko: Differential geometry and Lie groups for physicists, CUP, 2006

Anotácia: Lineárna optika skúma lúče, ktoré idú blízko optickej osi sústavy a pod malými uhlami. Na ich opis existuje šikovná maticová metóda, pričom matice sú rozmeru 4 x 4.
Gaussovská optika je špeciálny prípad, keď je optická sústava (plochy šošoviek a zrkadiel) rotačne invariantná voči optickej osi. Tu sa ukazuje, že ak vieme opisovať lúče, ktoré ležia v rovine v ktorej leží aj optická os, vieme už aj všeobecné (všeobecný sa sprojektuje do dvoch navzájom kolmých rovín; tieto projekcie sú už také, aké sa spomínali vyššie).
To znamená, že v gaussovskej optike stačí vedieť opisovať lúče v dvojrozmenom priestore.
Tu teda príslušná maticová metóda vystačí s maticami iba 2 x 2.
Na vzťah gaussovskej a všeobecnejšej lineárnej optiky sa dá užitočne pozrieť cez reprezentácie Lieových grúp. Ukazuje sa, že spomínané 4 x 4 matice, ktoré plne charakterizujú konkrétnu optickú sústavu, sú vždy z desaťrozmernej grupy Sp(4,R) a 2 x 2 matice sú zase z trojrozmernej grupy SL(2,R). Ak je sústava rotačne invariantná, tá 4 x 4 matica musí byť tzv. splietajúci operátor (komutovať s pôsobením grupy rotácií) a dá sa explicitne nájsť jej najvšeobecnejší tvar.

Vedúci: doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.
Katedra: FMFI.KTFDF - Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky
Vedúci katedry: doc. RNDr. Tomáš Blažek, PhD.

Dátum zadania: 18.09.2014

Dátum schválenia: 19.09.2014

prof. RNDr. Jozef Masarik, DrSc.
garant študijného programu

64661072

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

študent

vedúci práce

Čestné vyhlásenie

Vyhlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracovala samostatne s použitím uvedenej literatúry.

Bratislava, 31.05.2015

. . . .

Mária Šubjaková

Poďakovanie

Na tomto mieste by som sa rada poďakovala svojmu vedúcemu práce Doc. RNDr. Mariánovi Feckovi, PhD. za jeho pomoc a užitočné rady pri písaní tejto práce.

Abstrakt

Autor:	Mária Šubjaková
Názov práce:	Gaussovská optika z lineárnej
Škola:	Univerzita Komenského, Bratislava
Fakulta:	Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra:	Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky
Vedúci práce:	doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.
Miesto:	Bratislava
Dátum:	31.05.2015
Počet strán:	32
Druh záverečnej práce:	Bakalárska práca

Abstrakt: Bakalárska práca sa zaoberá maticovou metódou na opis lúčov v lineánej optike. V rámci tejto metódy charakterizujeme lúč v referenčných rovinách kolmých na optickú os sústavy, ktorou lúč prechádza, pomocou štvorrozmerných vektorov a optickú sústavu 4×4 maticou. V práci preskúmame možné tvary matíc vystupujúcich v tomto opise a pozrieme sa na ich niektoré vlastnosti. Nájdeme všeobecný tvar matice optickej sústavy, ktorá je rotačne invariantná voči svojej optickej osi a aj všeobecný tvar matice opisujúcej optickú sústavu v gaussovkej optike, špeciálnom prípade lineárnej optiky. Preskúmame vzťah medzi týmito maticami, pričom sa ukáže užitočné zaoberať sa aj optickými sústavami v lineárnej optike, ktoré sú zrkadlovo invariantné voči rovine obsahujúcej optickú os.

Kľúčové slová: lineárna optika, gaussovská optika, rotačne invariantné optické sústavy, zrkadlovo invariantné optické sústavy

Abstract

Author:	Mária Šubjaková
Title:	Gaussian optics from linear
University:	Comenius University in Bratislava
Faculty:	Faculty of Mathematics, Physics and Informatics
Department:	Department of Theoretical Physics and Didactics of Physics
Advisor:	doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.
City:	Bratislava
Date:	31.05.2015
Number of pages:	32
Type of thesis:	Bachelor thesis

Abstract: The thesis deals with a matrix method describing rays in linear optics. In this method we characterize a ray, in a reference plane perpendicular to the optical axis of a system the ray is passing through, by a four-dimensional vector. The optical system itself is then characterized by 4 x 4 matrix. In the thesis we examine possible forms of matrices within this description and we study some of their general properties. Then, we find the structure of the matrices describing optical systems which are rotationally invariant about their optical axes and, in particular, the form of the corresponding matrices in Gaussian optics, which is a special case of linear optics. It also turns out to be a good idea, in order to better understand the results obtained above, to examine the structure of the matrices of optical systems that are mirror invariant with respect to a plane of symmetry, in which the optical axis lies. Finally, we closely examine relation between all the matrices involved.

Key words: linear optics, Gaussian optics, rotationally invariant optical systems, mirror invariant optical systems

Predhovor

Na opis lúčov v lineárnej optike, ktorá sa ako špeciálny prípad geometrickej optiky obmedzuje na lúče šíriace sa v blízkosti optickej osi sústavy, existuje maticová metóda, v ktorej charakterizujeme lúč v určitej rovine kolmej na optickú os dvoma dvojrozmernými vektormi. Tieto vektory považujeme za zložky jedného štvorrozmerného vektora a optickú sústavu potom charakterizujeme 4×4 maticou tak, že pôsobením tejto matice na vektor lúča vstupujúceho do tejto sústavy dostaneme vektor vystupujúceho lúča. V tejto práci sa bližšie pozrieme na spomínanú metódu, nájdeme vlastnosti matíc vystupujúcich v spomínanom opise. Cieľom práce je nájsť najvšeobecnejší tvar matíc zodpovedajúcich optickým sústavam, ktoré sú rotačne invariantné voči optickej osi a porovnať tieto matice s maticami zodpovedajúcimi optickým sústavam v gaussovkej optike, ktorá je špeciálnym prípadom lineárnej optiky, keď sú všetky lámavé plochy a zrkadlá v rámci optickej sústavy rotačne invariantné. V práci sa pozrieme aj na optické sústavy zrkadlovo invariantné voči nejakej rovine obsahujúcej optickú os.

Práca predpokladá znalosť lineárnej algebry, niektoré základné vedomosti z geometrickej optiky (Snellov zákon lomu, zákon odrazu) a matematickej analýzy (Taylorov rozvoj funkcií jednej aj dvoch premenných do druhého rádu).

Obsah

Úvod

V geometrickej optike študujeme šírenie svetelného lúča pri prechode optickou sústavou, ktorá môže byť zložená z rôznych prostredí, ktorými lúč prechádza, z ich ostrých rozhraní (lámavých plôch) a zrkadiel, pričom ale neuvažujeme vlnové vlastnosti svetla. Toto priblíženie je dobré pokiaľ rozmery uvažovaných rozhraní a zrkadiel v optickej sústave sú oveľa väčšie ako vlnová dĺžka svetla. Lineárna optika je špeciálny prípad geometrickej optiky, ktorá sa zaoberá iba lúčmi šíriacimi sa v blízkosti optickej osi sústavy, myslenej priamky, pozdĺž ktorej šíriaci sa lúč ostáva stále na tejto priamke. Gaussovská optika je špeciálny prípad lineárnej optiky, keď sú všetky lamavé plochy a zrkadlá v optickej sústave sústave rotačne symetrické okolo optickej osi.

V tejto práci sa budeme zaoberať maticovou metódou opisu lúčov v lineárnej optike, pričom budeme v optických sústavách uvažovať iba prostredia, ktoré majú konštantný index lomu. Pozrieme sa na vzťah medzi optickými sústavami rotačne invariantnými voči optickej osi (sústavami, ktoré keď ľubovoľne otočíme okolo optickej osi, dostaneme pri prechode lúča vždy rovnaký výsledok) a optickými sústavami v gaussovkej optike, pričom sa ukáže užitočné zaoberať sa aj optickými sústavami, ktoré sú zrkadlovo invariantné voči nejakej rovine obsahujúcej optickú os (zrkadlenie takejto sústavy voči danej rovine nezmení výsledok pri prechode lúča).

V prvej kapitole budeme študovať vyššie spomínanú maticovú metódu na opis lúčov v lineárnej optike. Charakterizujeme svetelný lúč v určitej rovine kolmej na optickú os štvorrozmerným vektorom zloženým z dvoch dvojrozmerných vektorov, ktoré definujeme zvlášť. Optické sústavy popíšeme pomocou príslušných 4×4 matíc tak, že pôsobením matice optickej sústavy na vektor lúča vstupujúceho do tejto sústavy dostaneme vektor vystupujúceho lúča. Ďalej sa v tejto kapitole pozrieme na súvis matíc optických sústav s istými symplektickými maticami.

V druhej kapitole budeme hľadať všeobecný tvar matíc optických sústav rotačne invariantných voči optickej osi (ďalej ich budeme často označovať len ako rotačne invariantné sústavy), pričom využijeme dva prístupy. V prvej časti tejto kapitoly sa na tento problém pozrieme v štandardnom formalizme, pomocou 4×4 matíc, využívajúc v postupoch obyčajné maticové násobenie. V druhej časti zadefinujeme tenzorový súčin matíc a ten potom využijeme na riešenie nášho problému. V nasledujúcich častiach budeme používať prevažne tento druhý formalizmus, pretože sa ukáže byť prehľadnejší.

V tretej kapitole sa sa bližšie pozrieme na tvar matíc optických sústav v gaussovskej optike, porovnáme ich s maticami rotačne invariantných sústav odvodených v predchádzajúcej kapitole a takisto sa pozrieme na vzťah matíc gaussovskej optiky s grupou SL(2, $\mathbb{R}$).

V štvrtej kapitole spravíme odbočku a pozrieme sa, zdanlivo bez dôvodu, na optické sústavy v lineárnej optike, ktoré sú zrkadlovo invariantné voči nejakej rovine obsahujúcej optickú os (ďalej ich často nazývame len zrkadlovo invariantné sústavy). Na záver tejto kapitoly nájdeme optické sústavy, ktoré sú zrkadlovo invariantné voči každej takejto rovine a zároveň sú aj rotačne invariantné voči optickej osi. Ukáže sa, že práve tieto optické sústavy úzko súvisia s optickými sústavami v gaussovskej optike.

V poslednej piatej kapitole zhrnieme súvis medzi zrkadlovo invariantnými optickými sústavami, rotačne invariantnými sústavami a sústavami vystupujúcimi v gaussovskej optike.

Kapitola 1

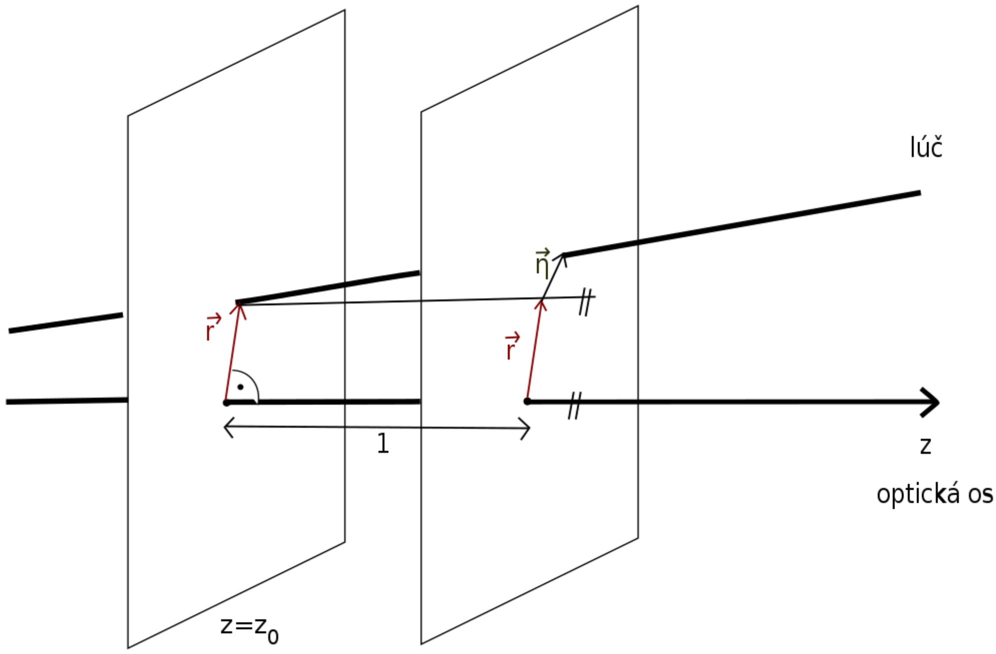
Lineárna optika

V tejto kapitole sa pozrieme na maticovú metódu opisu lúčov v lineárnej optike. Budeme teda touto metódou študovať lúče šíriace sa v blízkosti optickej osi sústavy zloženej z rôznych prostredí s konštantnými indexmi lomu, ich rozhraní a zrkadiel. Takisto sa pozrieme na niektoré vlastnosti matíc vystupujúcich v tejto metóde.

1.1 Maticový opis lineárnej optiky

Zaveďme pravotočivý kartézsky súradný systém (x, y, z) tak, že os z stotožníme s optickou osou sústavy. Na pohyb v smere osi z budeme ďalej odkazovať ako na pohyb doprava a pohyb v protismere budeme označovať ako pohyb vľavo. Lúč prechádzajúci zľava doprava optickým prostredím s konštantným indexom lomu n má tvar priamky a môžeme ho popísať tak, že pre nejakú konkrétnu referenčnú rovinu $z = z_0$ zadáme vektor $\begin{pmatrix} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix}$, kde $\boldsymbol{p} = n\boldsymbol{\eta}$. Dvojrozmerné vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{\eta}$ definujme nasledovne. Vektor $\boldsymbol{r} = (x_0, y_0)$, kde x_0 je x-ová zložka a y_0 y-ová zložka súradníc prieniku lúča s rovinou z_0 a vektor $\boldsymbol{k} = (\boldsymbol{\eta}, 1)$ je smerovým vektorom lúča, (obr. 1.1). V priblížení lineárnej optiky sú $\boldsymbol{r}$ aj $\boldsymbol{p}$ malé a veľkosť smerového vektora $\boldsymbol{k}$ je rovná jednej. To, prečo si vyberáme na charakteristiku lúča práve vektor $\boldsymbol{p}$ a nie rovno vektor $\boldsymbol{\eta}$ sa objasní neskôr (na str. 7).

Uvažujme najprv optickú sústavu bez zrkadiel a lúč prechádzajúci touto sústavou zľava doprava. Prechod lúča cez takúto sústavu ležiacu medzi danými referenčnými rovinami $z = z_1$ a $z = z_2$ môžeme rozložiť na prechody prostrediami s konštantným indexom lomu a lomy na ich rozhraniach. Ak teda zistíme ako sa mení vektor $\begin{pmatrix} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix}$ v týchto dvoch prípadoch,



Obr. 1.1

opíšeme už prechod lúča cez ľubovoľnú takúto optickú sústavu.

1.1.1 Odvodenie matice opisujúcej prechod prostredím s konštantným indexom lomu

Zvoľme si teda dve referenčné roviny z_1 a z_2, $z_2 > z_1$ ležiace v prostredí s indexom lomu n. Vzťah medzi vektorom $\begin{pmatrix} \boldsymbol{r_1} \\ \boldsymbol{p_1} \end{pmatrix}$ opisujúcom lúč v rovine $z = z_1$ a vektorom $\begin{pmatrix} \boldsymbol{r_2} \\ \boldsymbol{p_2} \end{pmatrix}$ opisujúcim lúč v rovine $z = z_2$, (obr. 1.2), dostaneme nasledovne. Keďže lúč prechádza prostredím s konštantným indexom lomu, jeho smerový vektor sa nezmení a teda platí:

$$\boldsymbol{p_1} = \boldsymbol{p_2}$$

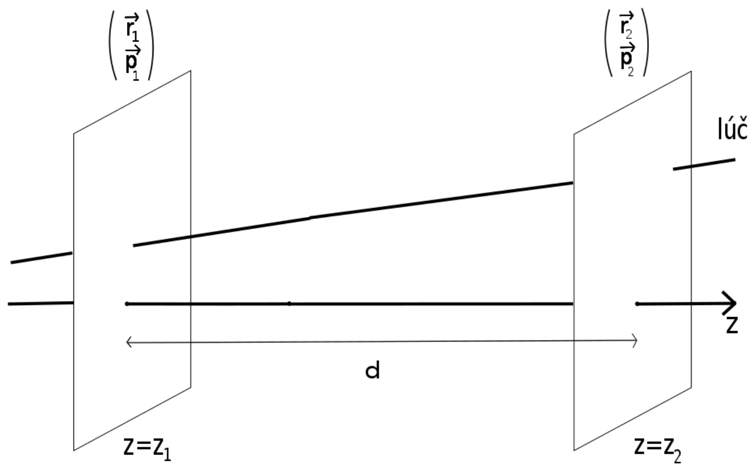
Lúč je daný analytickými rovnicami:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_1} + \boldsymbol{\eta} t$$

$$z = z_1 + t$$

Pre $z = z_2$ dostaneme:

$$\boldsymbol{r_2} = \boldsymbol{r_1} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{\eta}$$



Obr. 1.2

Označme $z_2 - z_1 = d$, je to vzdialenosť medzi referenčnými rovinami. Dostaneme teda:

$$\boldsymbol{r_2} = \boldsymbol{r_1} + \frac{d}{n}\boldsymbol{p_1}$$

alebo v maticovom zápise:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{r_2} \\ \boldsymbol{p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \frac{d}{n}\mathbb{1} \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{r_1} \\ \boldsymbol{p_1} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

1.1.2 Odvodenie matice opisujúcej lom na rozhraní prostredí

Pre opis prechodu lúča rozhraním s rôznymi indexmi lomu n_1 a n_2 využijeme, že rozhrania optických prostredí môžeme opísať ako plochy $z(x, y)$. Ľubovoľné rozhranie možeme teda v okolí optickej osi rozvinúť do tvaru:

$$z(x, y) = z_0 + ax + by + k_1x^2 + k_2y^2 + k_3xy + \dots \tag{1.2}$$

Lúč šíriaci sa pozdĺž optickej osi má prechádzať optickou sústavou bez zmeny. Ak by dotyková plocha k rozhraniu v mieste prieniku s optickou osou nebola kolmá na túto os, lúč šíriaci sa pozdĺž tejto osi by zmenil svoj smer podľa Snellovho zákona lomu. V rozvoji (1.2) musíme preto položiť $a = b = 0$. Rozhranie $z(x, y)$ teda aproximujeme kvadratickou plochou:

$$z(x, y) = z_0 + k_1x^2 + k_2y^2 + k_3xy \tag{1.3}$$

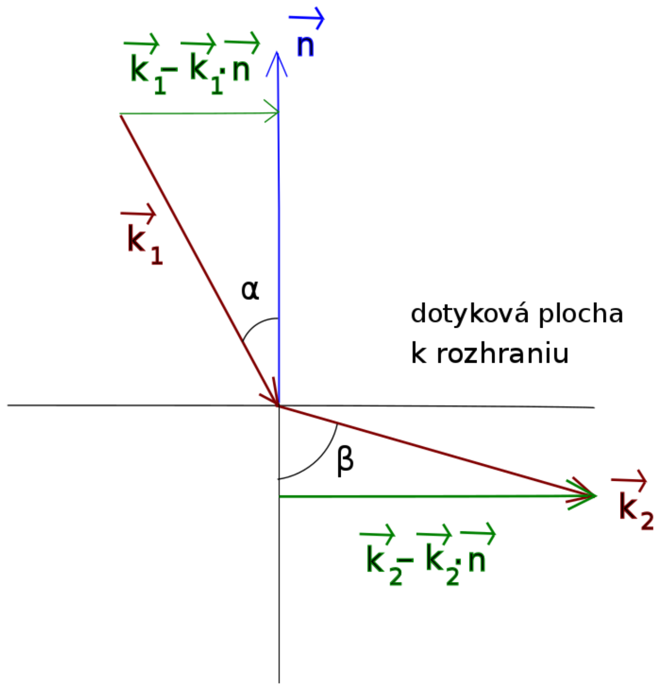
alebo v tvare:

$$z(\boldsymbol{r}) = z_0 + (K\boldsymbol{r}).\boldsymbol{r}, \tag{1.4}$$

kde

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & \frac{k_3}{2} \\ \frac{k_3}{2} & k_2 \end{pmatrix}$$

Charakterizujme lúč pred prechodom rozhraním vektorom $\begin{pmatrix} \boldsymbol{r_1} \\ \boldsymbol{p_1} \end{pmatrix}$, kde $\boldsymbol{p_1} = n_1\boldsymbol{\eta}$, v rovine $z = z_1$, ktorú zvolíme tesne pred rovinou, v ktorej lúč pretne rozhranie. Lúč po prechode rozhraním charakterizujme tesne za touto rovinou, v rovine $z = z_2$, vektorom $\begin{pmatrix} \boldsymbol{r_2} \\ \boldsymbol{p_2} \end{pmatrix}$, kde $\boldsymbol{p_2} = n_2\boldsymbol{\eta_2}$. Potom platí, že $\boldsymbol{r_1} = \boldsymbol{r_2}$, ďalej ho budeme označovať ako $\boldsymbol{r'}$. Na vyjadrenie $\boldsymbol{p_2}$ použijeme Snellov zákon lomu, pričom keďže uhly vstupujúce do tohto zákona sú v tomto prípade malé, použijeme jeho lineárnu aproximáciu. Snellov zákon vo vektorovom tvare dostaneme uvážením, že v rovine danej jednotkovým smerovým vektorom dopadajúceho lúča $\boldsymbol{k_1}$ a normálou dotykovej plochy k rozhraniu v mieste dopadu lúča $\boldsymbol{n}$ dostaneme zvyčajnú rovinnú podobu tohto zákona, (obr. 1.3). Teda platí:



Obr. 1.3

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{k_2} &= (\boldsymbol{k_2}.\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} + \boldsymbol{k_2} - (\boldsymbol{k_2}.\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} \\
\boldsymbol{k_2} - (\boldsymbol{k_2}.\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} &= \frac{n_1}{n_2}(\boldsymbol{k_1} - (\boldsymbol{k_1}.\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}) \qquad (1.5) \\
(\boldsymbol{k_2}.\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} &= -\left(\sqrt{1 - \frac{n_1}{n_2}|\boldsymbol{k_1} - (\boldsymbol{k_1}.\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}|^2}\right)\boldsymbol{n}, \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{k_2}$ je jednotkový smerový vektor lúča po lome na rozhraní, $\boldsymbol{k_1}$ jednotkový smerový vektor lúča pred lomom a $\boldsymbol{n}$ je normála dotykovej plochy k rozhraniu v mieste lomu, tiež jednotkovej dĺžky a má smer proti prichádzajúcemu lúču. V našom prípade je smerový vektor pred lomom $\boldsymbol{k_1} = (\boldsymbol{\eta_1}, 1)$ a po lome $\boldsymbol{k_2} = (\boldsymbol{\eta_2}, 1)$. Rovnica dotykovej roviny k rozhraniu z($\boldsymbol{r}$) v mieste lomu $\boldsymbol{r'} = (x', y')$ bude:

$$z_0 - z + (2k_1x' + k_3y')x + (2k_2y' + k_3x')y = 0$$

a teda normála k tejto ploche je $\boldsymbol{n} = (2k_1x' + k_3y', 2k_2y' + k_3x', -1)$ alebo v tvare $\boldsymbol{n} = (2K\vec{r'}, -1)$. Dosadením do (1.5) dostaneme:

$$n_2(\boldsymbol{\eta_2} - (2K\boldsymbol{r'}.\boldsymbol{\eta_2} - 1)2K\boldsymbol{r'}, 2K\boldsymbol{r'}.\boldsymbol{\eta_2}) = n_1(\boldsymbol{\eta_1} - (2K\boldsymbol{r'}.\boldsymbol{\eta_1} - 1)2K\boldsymbol{r'}, 2K\boldsymbol{r'}.\boldsymbol{\eta_1}) \qquad (1.7)$$

Z rovnosti druhých zložiek v rovnici (1.7) dostávame:

$$2K\boldsymbol{r'}.\boldsymbol{\eta_2} = \frac{n_1}{n_2}2K\boldsymbol{r'}.\boldsymbol{\eta_1} \qquad (1.8)$$

Dosadením (1.8) do rovnosti pre prvé zložky v rovnici (1.7) dostaneme:

$$n_2\boldsymbol{\eta_2} - n_2(\frac{n_1}{n_2}2K\boldsymbol{r'}.\boldsymbol{\eta_1})2K\boldsymbol{r'} + n_2 2K\boldsymbol{r'} = n_1\boldsymbol{\eta_1} - n_1(2K\vec{r'}.\boldsymbol{\eta_1})2K\boldsymbol{r'} + n_1 2K\boldsymbol{r'}$$

a po úprave:

$$n_2\boldsymbol{\eta_2} = n_1\boldsymbol{\eta_1} + (n_1 - n_2)2K\boldsymbol{r'}$$

alebo v maticovom zápise:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{r_2} \\ \boldsymbol{p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ (n_1 - n_2)2K & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{r_1} \\ \boldsymbol{p_1} \end{pmatrix} \qquad (1.9)$$

Všimnime si, že keby rozhranie bolo rovnou plochou kolmou na optickú os, teda K by bola nulová matica, lineárny Snellov zákon lomu by mal podobu $\boldsymbol{p_2} = \boldsymbol{p_1}$ a vo vzťahu (1.9) by sme dostali jednotkovú maticu. Vektor $\boldsymbol{p}$ sa teda pri takomto lome zachováva. Za krivosť plochy však máme dodatočnú opravu k tomuto zachovaniu. Preto sa ukazuje výhodnejšie charakterizovať lúč vektorom $\boldsymbol{p}$ namiesto vektora $\boldsymbol{\eta}$.

Označme matice:

$$T = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \frac{d}{n}\mathbb{1} \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ (n_1 - n_2)2K & \mathbb{1} \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

Potom maticu každej takej optickej sústavy v lineárnej optike, ktorá neobsahuje zrkadlá dostaneme násobením matíc týchto dvoch typov v príslušnom poradí.

1.1.3 Pridanie zrkadiel do optických sústav

Ešte si ukážme, že uvážením zrkadiel nedostaneme matice iného typu ako matice T a P. Najprv charakterizujme lúč šíriaci sa sprava doľava v nejakej referenčnej rovine $z = z_0$ vektorom $\begin{pmatrix} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix}$, kde vektor $\boldsymbol{r}$ definujme rovnako ako bol definovaný v prípade lúča idúceho zľava a vektor $\boldsymbol{p}$ tak, že $\boldsymbol{p} = n\boldsymbol{\eta}$, kde $\boldsymbol{k} = (\boldsymbol{\eta}, -1)$ je smerový vektor lúča. Vidíme, že vektor $\boldsymbol{p}$ je opačný ako keby sme mali lúč idúci po tej istej priamke zľava. Poznamenajme, že v skutočnosti necharakterizujeme lúč iba vektorom $\begin{pmatrix} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix}$, to nestačí, ale charakterizujeme ho ešte aj smerom priemetu jeho smerového vektora na os z, teda v našom prípade smerom doľava alebo doprava.

Malými zmenami v odvodeniach vzťahov (1.1), (1.9), v ktorých vyjadrujeme výsledný lúč pomocou počiatočného pri prechode prostredím s konštantným indexom lomu a lome na rozhraní, sa ukáže, že tieto vzťahy zostanú aj pre lúč idúci sprava rovnaké. Podotknime, že matica všeobecnej optickej sústavy tvorenej lámavými plochami je rôzna pre lúče idúce sprava ako pre lúče idúce zľava (násobíme jednotlivé matice v opačnom poradí), ak by sme však nakreslili trajektóriu lúča pri prechádzaní sústavou jedným smerom, táto trajektória je správna aj v opačnom smere.

Uvažujme teda lúč, ktorý vstúpi do optickej sústavy zľava, narazí na zrkadlo a šíri sa naspäť doprava. Majme dve referenčné roviny: z_1, v ktorej opisujeme vstupný lúč a z_2, v ktorej opisujeme výsledný lúč, obe samozrejme naľavo od zrkadla (môže platiť aj $z_1 = z_2$). Keďže maticu prechodu lámavými plochami a prostrediami s konštantným indexom sprava aj zľava už poznáme, k tomu aby sme dostali maticu takejto optickej sústavy nám chýba už len jediná časť a to matica opisujúca odraz na zrkadle. Charakterizujme lúč tesne pred odrazom vektorom $\begin{pmatrix} \boldsymbol{r_1} \\ \boldsymbol{p_1} \end{pmatrix}$, kde $\boldsymbol{p_1} = n\boldsymbol{\eta}$ a lúč tesne po odraze vektorom $\begin{pmatrix} \boldsymbol{r_2} \\ \boldsymbol{p_2} \end{pmatrix}$, kde $\boldsymbol{p_2} = n\boldsymbol{\eta_2}$. Pre prvé zložky teda dostávame $\boldsymbol{r_1} = \boldsymbol{r_2}$, ďalej budeme tento vektor označovať ako $\boldsymbol{r}$.

Platí zákon odrazu, ktorý vo vektorovom tvare dostaneme rovnakou úvahou ako v prípade Snellovho zákona lomu:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k_2} &= (\boldsymbol{k_2}.\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} + \boldsymbol{k_2} - (\boldsymbol{k_2}.\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{k_2} - (\boldsymbol{k_2}.\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} &= \boldsymbol{k_1} - (\boldsymbol{k_1}.\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} && (1.11) \\ (\boldsymbol{k_2}.\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} &= -(\boldsymbol{k_1}.\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}, && (1.12) \end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{k_1} = (\boldsymbol{\eta_1}, 1)$ je jednotkový smerový vektor lúča pred odrazom, $\boldsymbol{k_2} = (\boldsymbol{\eta_2}, -1)$ je jednotkový smerový vektor lúča po odraze a $\boldsymbol{n} = (2K\boldsymbol{r}, -1)$ je normála dotykovej plochy k zrkadlu v mieste odrazu. Dosadením (1.12) do (1.11) a zanedbaním kvadratických členov: $K\boldsymbol{r}.\boldsymbol{\eta}$ dostaneme:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\eta_2}, -1) &= (\boldsymbol{\eta_1}, 1) + 2(2K\boldsymbol{r}, -1) \\ n\boldsymbol{\eta_2} &= n\boldsymbol{\eta_1} + 2n(2K\boldsymbol{r}) \end{aligned}$$

alebo v tvare

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{r_2} \\ \boldsymbol{p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ (2n)2K & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{r_1} \\ \boldsymbol{p_1} \end{pmatrix} \qquad (1.13)$$

Dostali sme teda maticu rovnakého typu ako matica P. Všimnime si, že v prípade odrazu od rovného zrkadla (K=0) dostaneme zákon lomu v tvare $\boldsymbol{p_2} = \boldsymbol{p_1}$ a vo vzťahu (1.13) bude v tomto prípade jednotková matica. Pri odraze od rovnej plochy sa teda, podobne ako pri lome na rovnej ploche, vektor $\boldsymbol{p}$ zachováva.

Poznamenajme nakoniec, že pre lúč dopadajúci na zrkadlo sprava dostaneme rovnakú maticu, vieme teda opísať aj rôzne také sústavy, kedy by sme lúču po odraze od jedného zrkadla vložili do cesty druhé zrkadlo a podobne. Avšak maticu každej optickej sústavy v lineárnej optike dostaneme poskladaním matíc typu P a T s príslušnými parametrami. Rozmyslime si, že ľubovoľným súčinom matíc typu P, T, a teda ľubovoľným súčinom optických matíc dostaneme maticu nejakej optickej sústavy [1].

[1]Poznamenajme, že táto maticová zostáva platná aj keby sme vzali do úvahy aj materiály so záporným indexom lomu, kde sa lúč na rozhraní takéhoto materiálu správa podľa Snellovho zákona (pri prechode lúča z prostredia s kladným indexom lomu do prostredia so záporným týmto indexom sa lúč zalomí pod rovnakým uhlom od kolmice na rozhranie, ako keby bol index lomu druhého prostredia kladný, ale na rovnakú stranu od kolmice ako prichádzajúci lúč). Boli skonštruované materiály vykazujúce záporný index lomu pre niektoré vlnové dĺžky elektromagnetického žiarenia. Výsledky v tejto práci by sa nezmenili ani keby sme pripustili aj záporné indexy lomu.

1.2 Súvis matíc v lineárnej optike so symplektickými maticami

Označme $\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{p}_1 \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_2 \\ \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix}$. Definujme nedegenerovanú antisymetrickú formu ω nasledovne:

$$\omega(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}) = \boldsymbol{v_1}^T J \boldsymbol{v_2}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

Matice M zachovávajúce túto formu, teda spĺňajúce vzťah:

$$\omega(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}) = \omega(M\boldsymbol{v_1}, M\boldsymbol{v_2})$$

alebo ekvivalentne:

$$M^T J\, M = J \tag{1.14}$$

sa nazývajú symplektické matice. Ľahko sa nahliadne, že súčin dvoch symplektických matíc je znovu symplektická matica:

$$(AB)^T J\,(AB) = B^T\, A^T J\, A\, B = B^T\, J\, B = J$$

Takisto aj inverzná matica takejto matice je tiež symplektická:

$$M^{-1^T} J\, M^{-1} = M^{-1^T} M^T J\, M\, M^{-1} = (M^{-1}M)^T J (M M^{-1}) = \mathbb{1}^T J\, \mathbb{1} = J,$$

takže tieto 4×4 matice tvoria grupu, nazýva sa Sp(4).

Poznamenajme, že pre inverzné matice k optickým maticiam P, T,(1.10), platí:

$$\begin{aligned} T^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -\frac{d}{n}\mathbb{1} \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \\ P^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -(n_1 - n_2)2K & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Aby sme videli, že aj matica T^{-1} je maticou nejakej optickej sústavy môžeme ju prepísať nasledovne:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ \frac{d}{n}\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}^3 \tag{1.15}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

Inverznú maticu ku každej optickej sústave poskladáme z P^{-1}, T^{-1} a teda aj matice sústav v lineárnej optike tvoria grupu.

Priamým dosadením našich optických matíc P, T z časti 1.1 do (1.14) sa ukáže, že sú symplektické. Platí teda, že každá matica optickej sústavy je symplektickou a dá sa dokázať aj opačné tvrdenie, že každá symplektická matica je maticou nejakej optickej sústavy[2]. Grupa matíc lineárnej optiky je teda izomorfná s Sp(4). Zo vzťahu (1.14) tiež vyplýva, že každá symplektická matica má determinant rovný jednej. Tým, že sme v opise lúčov v lineárnej optike použili vektor $\boldsymbol{p}$ namiesto vektora $\boldsymbol{\eta}$ sme už rovno mohli optické matice stotožniť so symplektickými maticami. V prípade keby sme použili vektor $\boldsymbol{\eta}$, by sme vo vzťahu (1.9) nedostali maticu s jednotkovým determinantom a toto stotožnenie by bolo zložitejšie.

[2] Dôkaz sa dá nájsť v [1]

Kapitola 2

Rotačne invariantné optické sústavy v lineárnej optike

V tejto kapitole sa bližšie pozrieme na optické sústavy, ktoré sú rotačne invariantné voči optickej osi. Teda také sústavy, ktoré keď ľubovoľne otočíme okolo optickej osi, dostaneme pri prechode lúča vždy ten istý výsledok. Nájdeme najvšeobecnejší tvar matice takejto sústavy, pričom k riešeniu tohto problému využijeme dva prístupy.

2.1 Rotačne invariantné optické sústavy využitím štandardného formalizmu

V rotačne invariantnej sústave musí platiť, že ak najprv otočíme lúč a potom ho necháme prejsť cez optickú sústavu, dostaneme to isté, ako keby sme nechali najprv prejsť lúč cez optickú sústavu a potom ho otočili. Otočiť lúč okolo optickej osi o určitý uhol v našom formalizme znamená otočiť takto vektor $\boldsymbol{r}$ aj vektor $\boldsymbol{p}$. Označme maticu, ktorá takto otočí vektor $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix}$ ako maticu R a maticu optickej sústavy M. Pre rotačne invariantnú optickú sústavu teda platí:

$$M.R = R.M \tag{2.1}$$

Keďže matica R má zvlášť otočiť vektor $\boldsymbol{r}$ a zvlášť vektor $\boldsymbol{p}$ musí mať blokový tvar:

$$R = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix},$$

kde 2×2 matica r otočí vektory $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{p}$ v príslušných rovinách, v ktorých sú definované okolo optickej osi, ktorá je kolmá na tieto roviny, (obr. 1.1). Dostávame teda rotáciu v príslušnej xy rovine okolo počiatku (0,0) a matica r je maticou takejto rotácie:

$$r = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Rotačné matice R teda tvoria grupu izomorfnú grupe rovinných rotácií SO(2). Otáčanie lúčov okolo optickej osi môžeme chápať ako reprezentáciu grupy SO(2) v štvorrozmernom lineárnom priestore vektorov $\begin{pmatrix} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix}$ a optickú sústavu ako lineárny operátor v tomto vektorovom priestore. Lineárny operátor, ktorého matica M spĺňa komutačný vzťah vzťah (2.1) pre rotáciu o ľubovoľný uhol sa nazýva splietajúci operátor spomínanej reprezentácie SO(2). Takže v tejto kapitole hľadáme také optické sústavy, ktoré sú splietajúcimi operátormi pre túto reprezentáciu.

Hľadajme teda najvšeobecnejší možný tvar matice takejto optickej sústavy M. Na to bude užitočné na chvíľu zabudnúť, že M má byť maticou nejakej optickej sústavy, a teda symplektickou, a nájsť najvšeobecnejší možný tvar, ktorý spĺňa vzťah (2.1). Zapíšme si maticu M v blokovom tvare:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

kde bloky A, B, C a D sú 2×2 matice. Potom môžeme podmienku (2.1) prepísať nasledovne:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A.r & B.r \\ C.r & D.r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r.A & r.B \\ r.C & r.D \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Keďže grupa rotácii SO(2) je jednoparametrická grupa generovaná infinitezimálnou rotáciou, v rovnosti (2.2) stačí uvažovať maticu rotácie o infinitezimálny uhol ϵ:

$$r = \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix}$$

Označme prvky 2x2 matice A:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

Analogicky označme prvky matíc B, C, D. Potom z rovnosti (2.2) dostaneme roznásobením príslušných blokov a porovnaním pravej a ľavej strany nasledujúce podmienky na prvky matice M:

$$\begin{aligned} a_3 &= -a_2 & b_3 &= -b_2 & c_3 &= -c_2 & d_3 &= -d_2 \\ a_4 &= a_1 & b_4 &= b_1 & c_4 &= c_1 & d_4 &= d_1 \end{aligned}$$

Matica A musí mať teda tvar:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

Analogicky dostaneme matice B, C, D. Najvšeobecnejší tvar matice, ktorá spĺňa (2.1) je teda:

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ -a_2 & a_1 & -b_2 & b_1 \\ c_1 & c_2 & d_1 & d_2 \\ -c_2 & c_1 & -d_2 & d_1 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Vráťme sa teraz k tomu, že M má byť maticou nejakej optickej sústavy, musí byť teda symplektickou. Využijúc:

$$M^T = \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}$$

dostaneme zo vzťahu (1.14) blokovým roznásobením ľavej strany podmienky:

$$C^T A = A^T C \tag{2.4}$$

$$D^T B = B^T D \tag{2.5}$$

$$D^T A - B^T C = \mathbb{1} \tag{2.6}$$

$$C^T B - A^T D = -\mathbb{1} \tag{2.7}$$

Roznásobením (2.4) až (2.7), použijúc tvary matíc A, B, C, D, ktoré sme získali vyššie z podmienky komutácie s maticou rotácie R, dostaneme nasledujúce dodatočné podmienky pre prvky matice M:

$$c_2 a_1 = a_2 c_1 \tag{2.8}$$

$$b_2 d_1 = d_2 b_1 \tag{2.9}$$

$$a_1 d_1 + a_2 d_2 - b_1 c_1 - b_2 c_2 = 1 \tag{2.10}$$

$$b_2 c_1 - b_1 c_2 = d_2 a_1 - d_1 a_2 \tag{2.11}$$

Matica rotačne invariantnej optickej sústavy môže byť teda iba tvaru (2.3) spĺňajúca dodatočné podmienky (2.8) až (2.11).

2.2 Rotačne invariantné sústavy pomocou tenzorových súčinov matíc

V tejto časti sa pozrieme na iný prístup k problému riešenému v predchádzajúcej podkapitole, pomocou tenzorového súčinu matíc.

2.2.1 Definícia tenzorového súčinu matíc

Tenzorový súčin dvoch matíc ľubovoľných rozmerov $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ a B je definovaný nasledovne:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Ak má teda matica A rozmer $m \times n$ a matica B rozmer $r \times s$ výsledná matica $A \otimes B$ bude rozmeru $mr \times ns$. Rozmyslime si, že platia nasledujúce vzťahy:

$$(A \otimes B)(A' \otimes B') = AA' \otimes BB' \tag{2.13}$$

$$(A + B) \otimes (C + D) = A \otimes C + A \otimes D + B \otimes C + B \otimes D \tag{2.14}$$

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T, \tag{2.15}$$

kde matice vystupujúce v rovnostiach (2.13), (2.14) majú prípustné rozmery.

2.2.2 Problém rotačnej invariantnosti sústav v jazyku tenzorových súčinov

Všimnime si, že maticu bilineárnej formy ω definovanej v podkapitole 1.2, $J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$, môžeme napísať v tvare tenzorového súčinu dvoch 2×2 matíc:

$$J = \epsilon \otimes \mathbb{1}, \tag{2.16}$$

kde $\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Pozrime sa, či neexistuje podobný tvar matice komutujúcej s rotáciami (2.3), ktorú sme odvodili v časti 2.1. Ľahko sa nahliadne, že túto maticu nie je vo všeobecnosti možné zapísať v tvare tenzorového súčinu dvoch 2×2 matíc, ale je možné ju zapísať ako súčet tenzorových súčinov takýchto matíc:

$$M = K \otimes \mathbb{1} + L \otimes \epsilon, \tag{2.17}$$

kde $K = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ a $L = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ sú ľubovoľné matice.

Nájdime teraz najvšeobecnejší tvar matice rotačne invariantnej optickej sústavy. Teda naša matica M, (2.17), musí ešte navyše spĺňať podmienku (1.14). Prepíšme túto podmienku pomocou formalizmu zavedeného v tejto podkapitole:

$$\begin{aligned} M^T J M &= J \\ (K^T \otimes \mathbb{1} + L^T \otimes \epsilon^T)(\epsilon \otimes \mathbb{1})(K \otimes \mathbb{1} + L \otimes \epsilon) &= \epsilon \otimes \mathbb{1} \end{aligned} \tag{2.18}$$

Roznásobením (2.18) využijúc vzťahy (2.13), (2.14), dostaneme:

$$(K^T \epsilon K + L^T \epsilon L) \otimes \mathbb{1} + (K^T \epsilon L - L^T \epsilon K) \otimes \epsilon = \epsilon \otimes \mathbb{1}$$

A teda:

$$K^T \epsilon K + L^T \epsilon L = \epsilon \tag{2.19}$$

$$K^T \epsilon L = L^T \epsilon K \tag{2.20}$$

Všimnime si, že podmienka (2.19) je ekvivalentná podmienke:

$$\det K + \det L = 1$$

Dostávame teda maticu rotačne invariantnej sústavy v prehľadnom tvare (2.17) s podmienkami (2.19), (2.20) pre matice K, L.

Kapitola 3

Gaussovská optika

Keďže gaussovká optika je špeciálny prípad lineárnej optiky, keď sú všetky lámavé plochy aj zrkadlá v optickej sústave rotačne invariantné voči optickej osi (prostredia s konštantným indexom lomu majú vždy túto vlastnosť), každá optická sústava v rámci tejto optiky je rotačne invariantná. Zdá sa rozumné predpokladať, že každá rotačne invariantná sústava v lineárnej optike je poskladaná z častí s takoutu invariantnosťou. V tejto kapitole nájdeme všeobecný tvar matice popisujúcej sústavu v gaussovskej optike a porovnáme ho s tvarom matice popisujúcej rotačne invariantnú sústavu v lineárnej optike.

3.1 Matice optických sústav v gaussovskej optike

Matica každej optickej sústavy v lineárnej optike je poskladaná z matíc typu (1.10), odvodených v časti 1.1. Matica, ktorá opisuje prechod lúča prostredím s konštantným indexom lomu T komutuje s rotáciami vždy, matica P, na základe výsledkov druhej kapitoly, iba v prípade, ak je tvaru:

$$P = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ \lambda\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

a teda opisuje lámavú plochu (zrkadlo), ktorá je rotačne symetrická okolo optickej osi. Takáto plocha je daná nasledujúcou analytickou rovnicou:

$$z(\boldsymbol{r}) = z_0 + (K\boldsymbol{r}).\boldsymbol{r},$$

kde matica K môže byť iba tvaru:

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{pmatrix}$$

Všimnime si, že maticu T aj rotačne invariantý tvar matice P môžeme zapísať v tvare:

$$T = A \otimes \mathbb{1} \qquad\qquad P = B \otimes \mathbb{1}, \tag{3.2}$$

kde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n_1 - n_2)2k_1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

alebo v prípade zrkadiel máme v matici B vľavo dole $2n$ namiesto $(n_1 - n_2)$. Maticu každej optickej sústavy v gaussovskej optike dostaneme násobením matíc typov (3.2). Ľubovoľným násobením takýchto matíc môžeme dostať iba matice tvaru:

$$M \;=\; C \otimes \mathbb{1} \tag{3.4}$$

Aby bola matica M symplektická musí spĺňať vzťah (1.14). Podmienku, ktorá pre ňu z toho vyplýva dostaneme zo vzťahov (2.19), (2.20), keď v nich položíme L rovnú nulovej matici a $K = C$. Dostávame teda:

$$\det C = 1 \tag{3.5}$$

Dostali sme najvšeobecnejší možný tvar matice v gaussovej optike. Tento tvar, na rozdiel od toho, čo sme očakávali, nie je zhodný s tvarom matice všeobecnej rotačne invariantnej optickej sústavy (2.17). Vidíme, že každá optická sústava v gaussovskej optike je samozrejme rotačne invariantná, avšak nie každá rotačne invariantná sústava v lineárnej optike sa dá poskladať iba z rotačne invariantných častí. Túto neočakávanú situáciu si bližšie objasníme v nasledujúcich kapitolách.

3.2 Súvis matíc v gaussovskej optike s grupou SL(2, $\mathbb{R}$)

Všimnime si teraz, že matice optických sústav v gaussovskej optike tvoria grupu, podgrupu Sp(4). Vzťahom:

$$M = C \otimes \mathbb{1} \to C$$

je definovaný injektívny homomorfizmus z tejto podgrupy do SL(2, $\mathbb{R}$). Ukážme si teraz, že tento homomorfizmus je aj surjektívny a teda je izomorfizmom. Potrebujeme teda ukázať, že pre každú maticu z SL(2, $\mathbb{R}$), označme ju C, existuje optická matica M:

$$M = C \otimes \mathbb{1}$$

Vzhľadom na tvary optických matíc v gaussovskej optike nám stačí ukázať, že maticu C vieme rozložiť na matice typu A, B vystupujúce v (3.3). Uvažujme najprv matice C s prvkom $c \neq 0$ a hľadajme ich rozklad v tvare:

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Roznásobením pravej strany predchádzajúcej rovnosti dostaneme:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + lm & n + lmn + l \\ m & mn + 1 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

A túto rovnosť splníme položením:

$$\begin{aligned} m &= c \\ l &= \frac{a-1}{c} \\ n &= \frac{d-1}{c} \end{aligned}$$

V prípade, ak by l, n vyšli záporné, môžeme príslušné matice rozložiť pomocou (1.15). Uvažujme ešte matice C s prvkom $c = 0$. Použime:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ a & b + d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ a & b + d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Z podmienky na determinant matice C vyplýva, že prvok $a \neq 0$ a teda maticu: $\begin{pmatrix} a & b \\ a & b + d \end{pmatrix}$ rozložíme podľa postupu uvedeného vyššie. Týmto sme teda zavŕšili dôkaz izomorfizmu medzi grupou matíc gaussovskej optiky a grupou SL(2, $\mathbb{R}$). Poznamenajme ešte, že predpisom:

$$\begin{aligned} C \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}), \quad M &\in \mathrm{Sp}(4) \\ C \to C \otimes \mathbb{1} &= M \end{aligned}$$

je definovaný injektívny homomorfizmus grupy SL(2, $\mathbb{R}$) do grupy Sp(4).

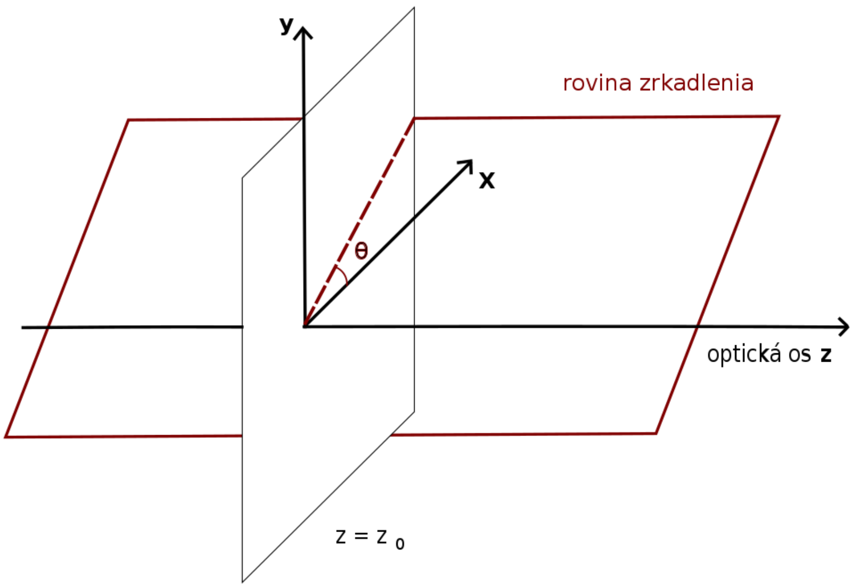
Kapitola 4

Zrkadlovo invariantné optické sústavy v lineárnej optike

V druhej kapitole sme riešili rotačne invariantné optické sústavy a teda sme hľadali optické matice komutujúce s maticami rotácií okolo optickej osi. V tejto kapitole sa bližšie pozrieme na optické sústavy zrkadlovo invariantné voči nejakej rovine obsahujúcej optickú os, teda sústavy, v ktorých platí, že pri prechode lúča ich zrkadlovým obrazom voči danej rovnine dostaneme rovnaký výsledok. Budeme teda hľadať optické matice komutujúce s maticami, ktoré lúče zrkadlia voči rovinám obsahujúcim optickú os. Zrkadlenie lúčov voči takejto rovine spolu s rotáciou lúčov okolo optickej osi môžeme chápať ako reprezentáciu grupy O(2) na vektoroch $\begin{pmatrix} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix}$. V závere tejto kapitoly ešte nájdeme optické sústavy, ktoré sú splietajúcimi operátormi tejto reprezentácie, teda také, ktorých matice komutujú s maticou rotácie o ľubovoľný uhol okolo optickej osi a takisto aj s ľubovoľnou maticou zrkadlenia voči rovine obsahujúcej optickú os. Ukáže sa, že takéto optické matice úzko súvisia s maticami vystupujúcimi v gaussovskej optike.

4.1 Odvodenie matice zrkadliacej lúč voči rovine obsahujúcej optickú os

Nájdime najprv tvar matice zrkadlenia voči nejakej rovine, v ktorej leží optická os. Takúto rovinu môžeme plne charakterizovať uhlom, ktorý zviera s osou x, (obr. 4.1). Nazvime tento uhol θ. Zrkadlený lúč, podobne ako v prípade rotácií, dostaneme tak, že budeme zrkadliť



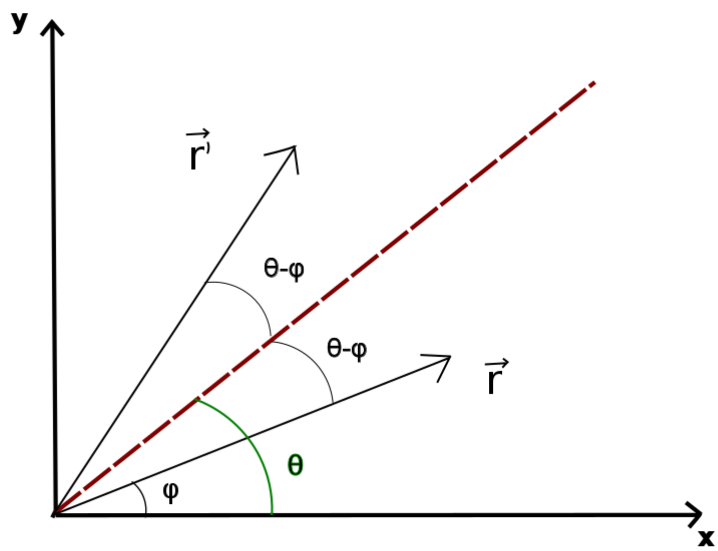
Obr. 4.1

vektor $\boldsymbol{r}$ ako aj vektor $\boldsymbol{p}$ charakterizujúce tento lúč. Matica zrkadlenia Z bude mať teda blokový tvar:

$$Z = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Nájdime najprv maticu z, ktorá zrkadlí vektor $\boldsymbol{r}$ a rovnako aj vektor $\boldsymbol{p}$. Na to bude užitočné nakresliť si situáciu v referenčnej rovine, v ktorej charakterizujeme lúč. Táto rovina je zároveň kolmá na rovinu zrkadlenia, (obr. 4.2). Dostávame teda, podobne ako v prípade rotácií, rovinný problém, kde hľadáme maticu zrkadlenia voči priamke prechádzajúcej počiatkom a zvierajúcej s osou x daný uhol θ. Keďže sa však s maticou takéhoto zrkadlenia nestretávame tak často ako s maticou rotácie v rovine okolo počiatku, tak si ju, na rozdiel od spomínanej rotačnej matice, odvodíme. Podľa obrázka potom pre lúč pred zrkadlením $\begin{pmatrix} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix}$ platí:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= (x, y) \\ x &= |\boldsymbol{r}|\cos\phi \qquad (4.2) \\ y &= |\boldsymbol{r}|\sin\phi \qquad (4.3) \end{aligned}$$



Obr. 4.2

A pre zrkadlený lúč $\begin{pmatrix} \boldsymbol{r'} \\ \boldsymbol{p'} \end{pmatrix}$:

$$\boldsymbol{r'} = (x', y')$$

$$x' = |\boldsymbol{r}|\cos(2\theta - \phi) \tag{4.4}$$

$$y' = |\boldsymbol{r}|\sin(2\theta - \phi) \tag{4.5}$$

Použitím goniometrických vzorcov v (4.4) a (4.5) dostávame:

$$\begin{aligned} x' &= |\boldsymbol{r}|\cos(2\theta)\cos\phi + |\boldsymbol{r}|\sin(2\theta)\sin\phi \\ y' &= |\boldsymbol{r}|\sin(2\theta)\cos\phi - |\boldsymbol{r}|\cos(2\theta)\sin\phi \end{aligned}$$

$$x' = x\cos(2\theta) + y\sin(2\theta) \tag{4.6}$$

$$y' = x\sin(2\theta) - y\cos(2\theta) \tag{4.7}$$

Označme $2\theta = \beta$. V maticovom zápise dostávame:

$$\boldsymbol{r'} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} \boldsymbol{r} \tag{4.8}$$

A teda:

$$z = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

4.2 Optické matice komutujúce s maticou zrkadlenia voči nejakej prípustnej rovine

Pozrime sa najprv na všeobecné matice M komutujúce s maticou zrkadlenia Z, neobmedzujme sa teraz len na optické matice. Hľadáme teda matice spĺňajúce vzťah:

$$MZ = ZM \tag{4.10}$$

Podobne ako v prípade rotácii v časti 2.1, ak si maticu M zapíšeme v tvare:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

kde bloky A, B, C, D sú 2×2 matice, dostaneme podmienku (4.10) v tvare:

$$\begin{aligned} Az &= zA \\ Bz &= zB \\ Cz &= zC \\ Dz &= zD \end{aligned} \tag{4.11}$$

Označme prvky 2×2 matice A:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

Z rovnice (4.11) dostaneme pre túto maticu nasledovné podmienky:

$$a_2 = a_3 \tag{4.12}$$

$$(a_1 - a_4)\sin\beta = 2a_2\cos\beta \tag{4.13}$$

Analogicky dostaneme podmienky pre matice B, C a D. Dostali sme teda požiadavky, ktoré musí spĺňať všeobecná matica, ak má komutovať s maticou zrkadlenia Z voči rovine obsahujúcej optickú os a zvierajúcou s osou x uhol $\theta = \frac{\beta}{2}$.

Skôr ako sa pozrieme na optické matice komutujúce so zrkadlením voči rovine pod nejakým všeobecným uhlom θ, pozrime sa na optické matice komutujúce so zrkadlením voči súradnej rovine xz, teda rovine pod uhlom $\theta = 0$. Zo vzťahov (4.12) a (4.13) dostaneme:

$$a_2 = a_3 = 0$$

A teda matica M má v tomto prípade tvar:

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & b_4 \\ c_1 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & c_4 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$$

Zapíšme ju v tvare:

$$M = E \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + F \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.14}$$

kde

$$E = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} a_4 & b_4 \\ c_4 & d_4 \end{pmatrix}$$

Ako už vieme, optická matica musí byť symplektickou. Podmienky z toho vyplývajúce pre maticu M môžeme dostať, v tomto prípade v celkom jednoduchom a prehľadnom tvare, zo vzťahov (2.4) až (2.7). Bude však užitočné, kvôli prípadu, keď budeme uvažovať zrkadlenia voči rovinám pod ľubovoľným uhlom, pozrieť sa na tento problém v jazyku formalizmu zavedenom v podkapitole 2.2. Využitím zápisu matíc M a J v tvare tenzorových súčinov (4.14), (2.16), dostaneme podmienku symplektickosti matice M (1.14) v tvare:

$$\left(E^T \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + F^T \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\left(\epsilon \otimes \mathbb{1}\right)\left(E \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + F \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \epsilon \otimes \mathbb{1}$$

$$E^T \epsilon E \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + F^T \epsilon F \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \epsilon \otimes \mathbb{1} \tag{4.15}$$

Rovnosť (4.15) bude platiť jedine ak:

$$E^T \epsilon E = \epsilon \tag{4.16}$$

$$F^T \epsilon F = \epsilon \tag{4.17}$$

Všimnime si, že tieto podmienky sú ekvivalentné podmienkam $\det E = 1$, $\det F = 1$.

Pozrime sa teraz na optické matice komutujúce s maticou zrkadlenia voči rovine pod nejakým ľubovoľným uhlom $\theta = \frac{\beta}{2}$. Všeobecná matica komutujúca s takýmto zrkadlením musí spĺňať podmienky (4.12) a (4.13) a samozrejme analogické podmienky pre bloky B, C, D, musí byť teda tvaru:

$$M = S \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + T \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + U \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.18}$$

kde ponechajúc označenie prvkov matice M zavedené vyššie:

$$S = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} a_4 & b_4 \\ c_4 & d_4 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix},$$

s dodatočnou podmienkou:

$$(S - T)\sin\beta = 2U\cos\beta \tag{4.19}$$

Dosaďme maticu M vyjadrenú v tvare tenzorových súčinov 2×2 matíc (4.18) a maticu J tiež vyjadrenú v takomto tvare (2.16) do vzťahu (1.14). Po krátkych úpravách dostaneme:

$$S^T\epsilon S \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + U^T\epsilon U \otimes \mathbb{1} + T^T\epsilon T \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (S^T\epsilon U + U^T\epsilon T) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$+(U^T\epsilon S + T^T\epsilon U) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \epsilon \otimes \mathbb{1} \tag{4.20}$$

Táto rovnosť bude platiť iba ak:

$$S^T\epsilon U + U^T\epsilon T = 0 \tag{4.21}$$
$$U^T\epsilon S + T^T\epsilon U = 0 \tag{4.22}$$
$$S^T\epsilon S = T^T\epsilon T \tag{4.23}$$
$$S^T\epsilon S + U^T\epsilon U = \epsilon \tag{4.24}$$

Pod nulou tu samozrejme rozumieme nulovú 2×2 maticu. Všimnime si, že posledné dve podmienky (4.23), (4.24) sú ekvivalentné podmienkam:

$$\det S = \det T$$
$$\det S + \det U = 1$$

Optická matica komutujúca s maticou zrkadlenia voči rovine pod uhlom $\frac{\beta}{2}$ má teda tvar (4.18) a spĺňa podmienky (4.21) až (4.23) a tiež (4.19).

4.3 Splietajúce operátory reprezentácie grupy O(2)

Na záver ešte nájdime matice optických sústav, ktoré sú splietajúcimi operátormi spomínanej reprezentácie grupy O(2), teda také matice, ktoré komutujú s maticou zrkadlenia voči ľubovoľnej rovine, ktorou prechádza optická os a takisto s maticou rotácie okolo optickej osi. Rovnako ako v predchádzajúcich prípadoch, nájdime najprv všeobecnú maticu spĺňajúcu tieto komutačné vzťahy. Aby podmienky (4.12) a (4.13) platili pre každý uhol β, musí platiť:

$$\begin{aligned} a_2 = a_3 &= 0 \\ a_1 &= a_4 \end{aligned}$$

A analogické podmienky pre bloky B, C, D. Teda výslednú maticu dostávame v tvare:

$$M = K \otimes \mathbb{1}, \tag{4.25}$$

kde K je ľubovoľná matica. Takáto matica komutuje aj s rotáciami. Zároveň vidíme, že ak máme maticku komutujúcu s rotáciami, tak buď nekomutuje so žiadnou maticou uvažovaného zrkadlenia alebo potom komutuje s každou takoutu maticou. Symplektickosť matice tohto tvaru sme už riešili v predchádzajúcej kapitole, takže dostávame podmienku pre maticu K:

$$K^T \epsilon K = \epsilon \tag{4.26}$$

alebo ekvivalentne:

$$\det K = 1$$

Dostali sme teda rovnakú maticu ako v prípade gaussovskej optiky.

Kapitola 5

Súvis rotačne invariantných a zrkadlovo invariantných optických sústav s optickými sústavami v gaussovskej optike

V predcházajúcich kapitolách sme zistili, že každá optická sústava vystupujúca v gaussovskej optike je nielen rotačne invariantná voči optickej osi, ale aj zrkadlovo invariantná voči ľubovoľnej rovine obsahujúcej optickú os. Už časti, z ktorých takúto sústavu skladáme, teda rotačne invariantné matice P, T, sú, bez toho, aby sme to od nich chceli, takto zrkadlovo invariantné a teda aj výsledná optická sústava bude vždy takto invariantná. Sústavy v gaussovskej optike majú teda vyššiu symetriu, ako sme od nich požadovali. V lineárnej optike však nájdeme aj rotačne invariantné sústavy, ktoré nie sú zrkadlovo invariantné. Takéto optické sústavy sa však už musia skladať aj z častí, ktoré nie sú rotačne symetrické voči optickej osi. V tejto kapitole urobíme rozklad takejto sústavy, ukážeme si teda na príklade rotačne invariantnú sústavu poskladanú aj z častí, ktoré túto invariantnosť nemajú.

5.1 Príklad rotačne invariantnej optickej sústavy poskladanej aj z rotačne neinvariantných častí

Vyberme si maticu:

$$M = \mathbb{1} \otimes \epsilon,$$

teda:

$$M = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

ktorá je maticou rotačne invariantnej optickej sústavy, avšak nekomutuje so žiadnou maticou zrkadlenia voči rovine obsahujúcej optickú os. Všimnime si, že táto matica je rotačnou maticou R spomínanou v druhej kapitole, ktorá otáča lúč o $\frac{\pi}{2}$. Takisto každá rotačná matica aj každá matica zrkadlenia Z, ktoré vystupujú v predchádzajúcich kapitolách, sú maticami nejakých optických sústav. V tejto čati nájdeme rozklad matice M na matice typu P a T, (1.10). Využijeme pri tom postupy uvedené v dôkaze toho, že každá symplektická matica je maticou nejakej optickej sústavy v [1].

Rozložme najprv maticu ϵ na súčin symetrických matíc. Budeme sa držať spomínaného dôkazu a použijeme rozklad:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

Označme:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad Z = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Maticu M môžeme potom vyjadriť nasledovne:

$$M = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

Všimnime si, že platí:

$$X = X^{-1} \qquad Y = Y^{-1} \qquad Z = Z^{-1}$$

Pozrime sa najprv na maticu tvorenú z blokov X. Zapíšme ju v tvare nasledovného súčinu:

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & X \\ -X & 0 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

Prvú maticu na pravej strane v (5.4) môžeme vyjadriť ako:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}^3 = \left(\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \right)^3, \tag{5.5}$$

druhú maticu:

$$\begin{pmatrix} 0 & X \\ -X & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -X & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & X \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

Rozpíšme ešte druhú maticu na pravej strane (5.6) nasledovne:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1} & X \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -X & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

a matice $\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$ v (5.7) rozložme na matice typu P, T pomocou (5.5). Dostali sme teda rozklad matice $\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}$. Analogickým postupom vyjadríme aj zvyšné dve matice $\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}$ a dostaneme rozklad matice M. Rotačne neinvariantné časti v tomto rozklade sú $\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -X & \mathbb{1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -Y & \mathbb{1} \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -Z & \mathbb{1} \end{pmatrix}$. Ukázali sme si teda príklad rotačne invariantnej optickej sústavy, v ktorej nie sú všetky lámavé plochy (prípadne zrkadlá) rotačne symetrické okolo optickej osi.

Záver

Cieľom bakalárskej práce bolo preštudovať maticovú metódu na opis lúčov v lineárnej optike a pozrieť sa na vzťah medzi optickými sústavami, ktoré sú rotačne invariantné voči optickej osi a optickými sústavami vystupujúcimi v gaussovkej optike.

V prvej kapitole sme študovali spomínanú maticovú metódu. Charakterizovali sme lúč šíriaci sa v blízkosti optickej osi v nejakej rovine kolmej na túto os štvorrozmerným vektor (a smerom priemetu smerového vektoru lúča na optickú os). Ukázali sme ako dostať 4×4 maticu, ktorá opisuje prechod takéhoto lúča ľubovoľnou optickou sústavou zloženou s rôznych prostredí s konštantným indexom lomu, ich rozhraní a zrkadiel. Zistili sme, že tieto matice zachovávajú určitú nedegenerovanú antisymetrickú bilineárnu formu, ktorá sa nazýva symplektickou. Ukázali sme, že matice zachovávajúce túto formu (symplektické matice) tvoria grupu Sp(4). Tiež sme bez dôkazu uviedli tvrdenie, že každá symplektická matica opisuje nejakú optickú sústavu.

V druhej kapitole sme hľadali možné tvary matíc popisujúcich optické sústavy, ktoré sú rotačne invariantné okolo optickej osi. Zadefinovali sme tenzorový súčin matíc a zistili sme, že pomocou tohto súčinu môžeme dostať riešenia v prehľadnejšom tvare.

V tretej kapitole sme sa pozreli na matice optických sústav v gaussovskej optike. Zistili sme, že nie každá rotačne invariantná optická sústava v lineárnej optike sa dá opísať v rámci gaussovkej a na záver sme sa ešte pozreli na vzťah matíc gaussovskej optiky s grupou SL(2, $\mathbb{R}$).

V štvrtej kapitole sme preskúmali matice optických sústav, ktoré sú zrkadlovo invariantné voči rovine obsahujúcej optickú os. Pozreli sme sa aj na možné tvary matíc popisujúcich optické sústavy, ktoré sú rotačne invariantné voči optickej osi a zároveň zrkadlovo invariantné voči všetkým rovinám obsahujúcim túto os. Takéto optické sústavy sa ukázali byť ako jediné možné optické sústavy v gaussovskej optike.

V poslednej kapitole sme zhrnuli súvis medzi rotačne invariantnými optickými sústavami v lineárnej optike, zrkadlovo invariantnými sústavami a optickými sústavami v gaussovskej optike. Na záver sme ešte ukázali príklad, v ktorom sme z rotačne neinvariantných častí poskladali rotačne invariantnú optickú sústavu.

Literatúra

[1] S. Guillemin, V., Sternberg. *Symplectic techniques in physics*. Cambridge University Press, 1984.

[2] S. Bamberg, P., Sternberg. *A course in mathematics for students of physics. V.1*. Cambridge University Press, 1988.

[3] M. Fecko. *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov*. Iris, 2004.