UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Newtonova-Cartanova teória

Bakalárska práca

2021

Frederik Ďalak

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Newtonova-Cartanova teória

Bakalárska práca

Študijný program:	Fyzika
Študijný odbor:	1160 fyzika
Školiace pracovisko:	Katedra teoretickej fyziky
Školiteľ:	doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.

2021 Frederik Ďalak

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

64099352

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta:	Bc. Frederik Ďalak
Študijný program:	fyzika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor:	fyzika
Typ záverečnej práce:	bakalárska
Jazyk záverečnej práce:	slovenský
Sekundárny jazyk:	anglický

Názov: Newtonova-Cartanova teória
Newton-Cartan theory

Anotácia: Élie Cartan, jeden z najväčších svetových geometrov 20. storočia, bol určite ohromený teóriou gravitácie, ktorú dokončil a publikoval v roku 1915 Albert Einstein a ktorá je známa ako Všeobecná teória relativity. Na rozdiel od predchádzajúcej (mimoriadne úspešnej) Newtonovej teórie, ktorá gravitáciu opisovala ako priťahovanie telies „na diaľku", ktoré klesá so štvorcom vzdialenosti, bola nová teória postavená na revolučnej geometrickej predstave. Podľa nej všetky hmotné objekty spôsobujú zakrivenie časopriestoru a v tomto zakrivenom časopriestore sa potom telesá pohybujú po „rovných čiarach" (= po geodetikách). Vzhľadom na odlišnosť správania sa geodetík v zakrivenom časopriestore oproti geodetikám v nezakrivenom časopriestore vnímame potom pohyb telies tak, ako keby sa priťahovali spôsobom, ktorý poznáme ako gravitačné priťahovanie. V roku1923-24 publikoval Cartan 2 články, ktoré nevyvolali žiaden väčší rozruch, lebo matematické pojmy a myšlienky, ktoré v nich používal, boli vtedy známe len veľmi úzkemu okruhu špecialistov (a aj to ešte matematikov). Ukázal v nich (prekvapujúco), že geometrická predstava gravitačnej sily ako prejavu zakriveného časopriestoru sa dá našiť aj na pôvodnú Newtonovu teóriu! Nóvum Einsteinovej teórie teda nie je len v samotnej myšlienke zakriveného časopriestoru, ale v detailnom spôsobe, ako sa to urobí. Dnes je matematika, ktorú vtedy použil Cartan, aj medzi fyzikmi štandardná a dostupná úrovni bakalárskej práce.

Cieľ: Najprv si naštudovať, ako to ten Cartan vymyslel. Čiže ako sa dá Newtonova teória gravitácie predstaviť v jazyku zakrivenia časopriestoru. Potom to celé spísať ako text zrozumiteľný pre motivovaných spolužiakov (tretiakov so znalosťami z výberového predmetu Matematická fyzika).

Vedúci:	doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.
Katedra:	FMFI.KTF - Katedra teoretickej fyziky
Vedúci katedry:	doc. RNDr. Tomáš Blažek, PhD.
Dátum zadania:	06.10.2020

Dátum schválenia: 08.10.2020

prof. RNDr. Jozef Masarik, DrSc.
garant študijného programu

64099352

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

študent

vedúci práce

Čestné vyhlásenie

Vyhlasujem, že som túto prácu vypracoval samostatne s použitím uvedenej literatúry.

....

Frederik Ďalak

Poďakovanie

Na tomto mieste by som sa chcel poďakovať v prvom rade svojmu školiteľovi doc. RNDr. Mariánovi Feckovi, PhD., ktorého pomoc a užitočné rady veľkou časťou prispeli k úspešnému napísaniu tejto práce. Vďaka taktiež patrí mojim rodičom a kamarátom za ich neúnavnú podporu pri mojom štúdiu.

Abstrakt

V tejto práci sa budeme zaoberať Newtonovou-Cartanovou teóriou gravitácie. Táto teória bola publikovaná v rokoch 1923 a 1924 Élie Cartanom a opisuje Newtonovu klasickú teóriu gravitácie v jazyku zakrivenia štvorrozmerného časopriestoru. Najskôr definujeme matematické štruktúry na variete potrebné pre odvodenie Cartanovej formulácie Newtonovej gravitácie. Opíšeme geodetiky, ktoré na variete predstavujú rovné čiary. Ukážeme, ako ich tvar závisí od štruktúry lineárnej konexie. V časopriestore $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ potom zavedieme po vzore Cartana štruktúru lineárnej konexie a odvodíme tvar Ricciho tenzora. Prostredníctvom neho zavedieme rovnice poľa Newtonovej-Cartanovej teórie. Nakoniec v krátkosti spomenieme základné vlastnosti „metriky“ časopriestoru Newtonovej-Cartanovej teórie.

kľúčové slová: Newtonova-Cartanova teória gravitácie, zakrivenie časopriestoru, lineárna konexia, geodetiky

Abstract

In the thesis we examine the Newton-Cartan theory of gravity. The theory was published by Élie Cartan in years 1923 a 1924 and it describes the classical Newtonian theory of gravity as curvature of four dimensional spacetime. First we define mathematical structures on a manifold needed to introduce the Cartan's formulation of Newtonian gravity. We describe geodesics, which represent straight lines on a manifold. We show, how the shape of these depends on the structure of linear connection. In spacetime $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ we then establish the structure of linear connection as shown by Cartan and we derive the shape of the Ricci tensor. Using this tensor we introduce the Newton-Cartan theory field equations. Finally we briefly touch on the basic properties of Newton-Cartan spacetime "metrics".

keywords: Newton-Cartan theory of gravity, spacetime curvature, linear connection, geodesics

Obsah

Úvod

Keďže témou, ktorej sa budeme v tejto práci venovať je gravitácia, snáď ju ani nemôžeme začať inak než tým, že na úvod spomenieme dve kľúčové postavy dejín fyziky: Isaaca Newtona a Alberta Einsteina. Sir Isaac Newton publikoval v roku 1687 jedno z najvýznamnejších vedeckých diel s názvom *Matematické princípy prírodnej filozofie*. Ako je známe, jednou z prelomových myšlienok, ktoré v ňom predostrel je Newtonov gravitačný zákon opisujúci gravitáciu ako vzájomné silové pôsobenie hmotných telies klesajúce s ich rastúcou vzdialenosťou podľa pravidla inverzného štvorca. Podľa Newtonovej predstavy na pohybujúci sa hmotný bod pôsobí od každého iného hmotného telesa vo vesmíre príťažlivá sila, v dôsledku ktorej sa tento bod pohybuje priestorom po zakrivenej trajektórii. Priestor a čas sú v Newtonovom opise fundamentálne odlišné koncepty, čas je absolútny a plynie rovnako pre každého pozorovateľa vo vesmíre. To umožňuje jasne definovať dĺžku a objektívne určiť, ktoré udalosti sa odohrali súčasne. Tento opis bol považovaný za správny až do začiatku 20. storočia, kedy bola sformulovaná teória, ktorá zásadne zmenila náš pohľad na podstatu gravitačných javov. Tou bola všeobecná teória relativity publikovaná v roku 1916 druhým zo spomenutých fyzikov Albertom Einsteinom. Všeobecná teória relativity opisuje gravitáciu ako dôsledok zakrivenia časopriestoru spôsobeného prítomnosťou hmotných objektov. Na rozdiel od Newtona, Einstein vo svojej teórii tvrdí, že hmotný bod sa pohybuje po rovnej trajektórii vo štvorrozmernom časopriestore, avšak samotný tento časopriestor je zakrivený. Gravitačné javy sú teda dané geometriou zakriveného časopriestoru [1].

Ako býva uvedené v učebniciach všeobecnej teórie relativity, pokiaľ uvažovaný hmotný bod nemá priveľkú hmotnosť a pohybuje sa rýchlosťou zanedbateľnou voči rýchlosti svetla v gravitačnom poli, ktoré je slabé a statické, stáva sa z Einsteinovej všeobecnej teórie relativity klasická Newtonova teória gravitácie. Newtonov gravitačný zákon je teda limitným priblížením všeobecnej teórie relativity za predpokladu, že sú splnené uvedené podmienky [1] [8]. Toto priblíženie však býva vyjadrené na úrovni pohybových rovníc. Človek by sa tak mohol čudovať kde sa v tomto procese aproximácie stratil opis gravitácie ako zakrivenia časopriestoru. V tejto práci čitateľa oboznámime so spôsobom ako tento geometrický opis znovu objaviť.

Už začiatkom dvadsiatych rokov 20. storočia, čiže pomerne skoro po publikovaní všeobecnej teórie relativity, sa objavila reformulácia Newtonovej teórie v podaní francúzskeho geometra Élie Cartana. Tento koncept bol zverejnený v podobe dvoch Cartanových článkov publikovaných v rokoch 1923 a 1924 [3] [4]. S podobnou myšlienkou prišiel o tri roky neskôr aj nemecký matematik Kurt Friedrichs. Ide o reformuláciu známu ako Newtonova-Cartanova teória gravitácie, ktorá vychádza z Newtonových predpokladov, a teda poskytuje predpovede zhodné s klasickou Newtonovou teóriou. Prekvapujúce však je, že sa Cartanovi podarilo vyjadriť Newtonove myšlienky spôsobom, ktorý je analogický geometrickému opisu všeobecnej teórie relativity [7] [6]. Newtonova-Cartanova teória opisuje gravitáciu v štvorrozmernom zakrivenom časopriestore, kde je čas absolútny a hmotné objekty sa pohybujú po rovných čiarach. Cartanovi sa tak podarilo zmazať zdanlivý fundamentálny rozdiel medzi klasickou Newtonovou teóriou a všeobecnou teóriou relativity. Jeho teória upozornila na to, že Einsteinov príspevok nespočíva len v zavedení predstavy gravitácie ako dôsledku zakrivenia časopriestoru, ale aj v definovaní konkrétnej geometrickej štruktúry, ktorá je na tomto časopriestore zavedená. Je teda nielen zaujímavou matematickou kuriozitou, ale čitateľovi, ktorý sa s ňou oboznámi poskytne aj cenný nový pohľad na vzťah medzi klasickým a relativistickým opisom gravitácie.

Naším cieľom je v tejto práci odvodiť Newtonovu-Cartanovu teóriu gravitácie spôsobom, ktorý bude zrozumiteľný pre študenta tretieho ročníka bakalárskeho stupňa so znalosťami základov diferenciálnej geometrie (na úrovni predmetu Matematická fyzika). Na niektorých miestach sa však nezaobídeme bez využitia niekoľkých matematických konceptov, s ktorými je študent zväčša oboznámený až v prvom ročníku magisterského stupňa. V týchto prípadoch uvedieme v dodatkoch v závere práce stručné odvodenie týchto matematických myšlienok spolu s odkazmi na literatúru, v ktorej sa čitateľ môže o danej problematike dozvedieť viac. Práca je rozdelená do šiestich hlavných častí. Čitateľa v nich najskôr postupne oboznámime s geometrickými objektami na variete, ktoré budú potrebné pre odvodenie Newtonovej-Cartanovej teórie. Následne v krátkosti zhrnieme Newtonove výsledky a potom zavedieme po vzore Cartana štvorrozmerný časopriestor a ukážeme ako určiť jeho zakrivenie. Na základe toho potom sformulujeme rovnice poľa Newtonovej-Cartanovej teórie. Výsledkom bude geometrická reprezentácia gravitácie ako dôsledku zakrivenia časopriestoru. V poslednej časti uvedieme základné vlastnosti „metriky“ časopriestoru Newtonovej-Cartanovej teórie. Nakoniec v závere prácu stručne zhrnieme a prejdeme tým, čo sme zistili.

Niekoľko technických pripomienok

Základom, na ktorom budeme budovať koncept Newtonovej-Cartanovej teórie je štvorrozmerný priestor $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ so súradnicami číslovanými indexami 0,1,2,3, v ktorom $x^0 = t$ predstavuje Newtonov absolútny čas a (x^1, x^2, x^3) je trojica priestorových súradníc. Bude preto výhodné už v úvode si zaviesť konvenciu čo sa týka označovania indexov. V celej práci budeme označovať indexy spôsobom, ktorý je bežne využívaný v literatúre o relativite. Pre označenie veličín sa budú používať dva typy indexov s odlišným významom. Pokiaľ bude index označený gréckym písmenom, napríklad x^μ bude platiť, že index μ nadobúda hodnoty od 0 po 3 a daný vzťah potom platí pre časovú aj priestorové zložky objektu s týmto indexom: $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$. Index označený latinským písmenom ako napríklad K^i, bude nadobúdať hodnoty len od 1 po 3 a bude teda označovať len priestorové zložky: $i \in \{1, 2, 3\}$. To bude mať význam obzvlášť pri využívaní sumačnej konvencie, kedy opakovaný grécky index predstavuje sumu cez všetky štyri súradnice časopriestoru, zatiaľ čo opakovaný latinský index sumu cez jeho priestorové zložky. Ďalšou užitočnou konvenciou je označenie argumentov funkcií. Pokiaľ bude v texte uvedená funkcia f s argumentom x, bude tým myslené, že ide o funkciu trojice priestorových súradníc: $f(x) \equiv f(x^1, x^2, x^3)$. Pokiaľ by sa jednalo aj o funkciu času, v jej argumente bude explicitne uvedené aj t.

1 Zrýchlenie hmotného bodu

1.1 Trajektória hmotného bodu

Na začiatok si pripomeňme, že v mechanike je často využívanou analógiou krivky γ na variete parametrizovanej parametrom t trajektória pohybujúceho sa hmotného bodu, pričom (ako to už vo fyzike býva) t predstavuje čas. V časopriestore $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ so súradnicami (x^0, x^i) je časovou súradnicou x^0. Takže prirodzene budeme pohyb hmotného bodu v ňom vyjadrovať ako krivku, ktorej parametrom bude $x^0 = t$. Pokiaľ je trajektória hmotného bodu v časopriestore daná krivkou γ, možno jej priradiť funkcie súradníc v závislosti od času:

$$\gamma \leftrightarrow x^\mu(t) \tag{1.1}$$

Deriváciou krivky γ podľa parametra t potom môžeme vygenerovať vektorové pole definované pozdĺž krivky γ, ktorého fyzikálnym významom je vektor rýchlosti hmotného bodu v závislosti od času t. V prípade časopriestoru $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ potom pôjde o *štvorvektor* rýchlosti v:

$$v = \dot{\gamma} \tag{1.2}$$

V časopriestore $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ platí, že v parametrickom vyjadrení krivky γ je x^0 samotný parameter t:

$$x^0(t) = t \tag{1.3}$$

Po zderivovaní tak dostaneme pre štvorvektor rýchlosti hmotného bodu nasledovné výsledky:

$$\dot{x}^0(t) = \frac{dt}{dt} = 1 \tag{1.4}$$

$$\dot{x}^i(t) = \frac{dx^i}{dt} = v^i(t) \tag{1.5}$$

Vo vzťahu (1.5) v^i predstavuje i-tu zložku štvorvektora rýchlosti $\dot{\gamma}$ a významom rovnice (1.4) je fakt, že za jednotku času uplynie jedna jednotka času (aspoň v Newtonovom klasickom ponímaní).

1.2 Zrýchlenie ako vektorové pole

Pri odvodení Newtonovej-Cartanovej teórie budeme vychádzať z Newtonových pohybových rovníc, a tak potrebujeme byť schopní podobným spôsobom ako rýchlosť, čiže v jazyku vektorových polí, vyjadriť aj zrýchlenie hmotného bodu. Keďže je na to potrebné porovnať vektory rýchlosti v rôznych časoch, čiže vektory v rôznych bodoch variety a z rôznych vektorových priestorov, ukazuje sa že nejde o celkom triviálnu úlohu [5]. Diferenciálna geometria má však našťastie vo svojom repertoári ideálny prostriedok pre jej riešenie, ktorým je kovariantná derivácia (Dodatok A). Kovariantná derivácia nám poskytuje informáciu o tom, o koľko sa líši vektor v danom bode variety od vektora, ktorý je od neho infinitezimálne vzdialený v smere, ktorý uvedieme. Zrýchlenie hmotného bodu možno teda vyjadriť ako kovariantnú deriváciu vektorového poľa rýchlosti v smere vektorového poľa rýchlosti. Vyjadrené v bezkomponentnej forme má potom vektorové pole zrýchlenia a tvar:

$$a = \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \tag{1.6}$$

Jednotlivé komponenty vektorového poľa zrýchlenia možno vyjadriť nasledovne:

$$a^{\mu} = \ddot{x}^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} \dot{x}^{\nu} \dot{x}^{\rho} \tag{1.7}$$

Vo všeobecnom prípade teda zrýchlenie hmotného bodu závisí od koeficientov konexie $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}$ na danej variete. Jednoducho sa dá overiť, že v prípade euklidovského priestoru a kartézskych súradníc, kedy sú všetky koeficienty konexie $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}$ nulové dostávame pre vektor zrýchlenia vzťahy známe z mechaniky, kedy je μ-tou zložkou vektora zrýchlenia druhá časová derivácia μ-tej súradnice. Môžeme si tiež všimnúť, že v našom časopriestore $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ je derivácia $\dot{x}^0$ konštantne rovná jednej, čiže druhá derivácia časovej súradnice bude zjavne nulová:

$$\ddot{x}^0(t) = 0 \tag{1.8}$$

2 Geodetiky

Keď už máme zavedený pojem zrýchlenia hmotného bodu, prípad, ktorý nás bude obzvlášť zaujímať je (tak trochu paradoxne) ten kedy je toto zrýchlenie nulové. Podľa Newtonovej klasickej mechaniky totiž ide o prípad, kedy na hmotný bod nepôsobí žiadna sila, a teda sa priestorom pohybuje rovnomerne a priamočiaro. Nájdením trajektórií s nulovým zrýchlením teda zároveň nájdeme na variete krivky, ktorým odôvodnene môžeme dať prívlastok rovné [5]. Takéto krivky nazývame geodetiky a keďže Newtonova-Cartanova teória gravitácie opisuje pohyb hmotného bodu časopriestorom po rovnej trajektórii, zohrávajú v nej dôležitú úlohu. V nasledujúcej časti preto čitateľa oboznámime so spôsobom ako geodetiky nájsť ako aj s niektorými ich vlastnosťami.

2.1 Afinne a neafinne parametrizované geodetiky

Ako sme uviedli, geodetiky sú krivky, po ktorých sa hmotný bod pohybuje s nulovým zrýchlením, teda všetky krivky γ na danej variete spĺňajúce podmienku:

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0 \tag{2.1}$$

Komponentne potom musia jednotlivé časové závislosti súradníc $x^\mu(t)$ opisujúce krivku γ spĺňať rovnice:

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho = 0 \tag{2.2}$$

Krivku γ spĺňajúcu tieto podmienky nazývame *afinne parametrizovanou geodetikou.* Naša skúsenosť nám však hovorí, že je možné, aby sa objekt pohyboval rovno a taktiež popritom zrýchľoval. V tomto prípade je však smer zrýchlenia objektu zhodný so smerom jeho rýchlosti. Rovnou krivkou preto je aj taká, pre ktorú platí, že zrýchlenie je v každom bode trajektórie násobkom (nie nutne v každom bode rovnakým) rýchlosti. Takúto krivku teda môžeme pomocou funkcie f definovanej pozdĺž krivky γ vyjadriť ako:

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = f\dot{\gamma} \tag{2.3}$$

Takáto krivka sa tiež nazýva geodetika, avšak nie je afinne parametrizovaná. Môžeme si uvedomiť, že hmotný bod v tomto prípade opisuje trajektóriu, ktorá má rovnaký tvar ako v prípade afinne parametrizovanej geodetiky, no rozdiel je v tom, že sa v jednotlivých častiach dráhy môže meniť rýchlosť pohybu. Ide teda o reparametrizáciu afinne parametrizovanej geodetiky. Môžeme teda povedať, že rovné čiary sú ozaj dané ako *čiary*, hoci môžu byť opísané rôznymi *krivkami*, teda sú nezávislé od parametrizácie. Pokiaľ však nájdeme geodetiku s neafinnou parametrizáciou, v každom prípade budeme schopní nájsť vhodnú reparametrizáciu, ktorá z nej urobí afinne parametrizovanú krivku [5].

2.2 Geodetiky v euklidovskom priestore

V tejto sekcii sa na chvíľu nebudeme sústrediť na štvorrozmerný časopriestor $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ a ukážeme ako vyzerajú geodetiky v euklidovskom priestore E^3 s trojicou kartézskych súradníc x^i, aby sme si priblížili klasickú Newtonovu predstavu o geometrii priestoru, než sa pustíme do jej modifikácie. V euklidovskom priestore E^3 možno zaviesť štruktúru lineárnej konexie, v ktorej sú všetky koeficienty konexie nulové:

$$\Gamma^i_{jk} = 0 \tag{2.4}$$

Teda rovnice geodetík (2.2) majú v tomto priestore jednoduchý tvar:

$$\ddot{x}^i = 0 \tag{2.5}$$

Zisťujeme, že rovné čiary v euklidovskom priestore sú priamky:

$$x^i(t) = k^i t + q^i \quad \text{pre } k^i, q^i \in \mathbb{R} \tag{2.6}$$

2.3 Najkratšie čiary a rovné čiary

Podľa našej intuitívnej predstavy sú rovné čiary zároveň aj najkratšími čiarami. To je minimálne v euklidovskom priestore aj pravda. Všeobecne si však môžeme uvedomiť, že dĺžka čiary na danej variete je pojem, ktorý je závislý na zavedenom metrickom tenzore. Pojem rovná čiara, ako sme ukázali, zas súvisí s lineárnou konexiou a nulovosťou vektora zrýchlenia. Pri hľadaní koeficientov konexie na variete sa väčšinou berie do úvahy podmienka kompatibility metriky s konexiou (aby pôvodný a paralelne prenesený vektor mali rovnakú dĺžku) a podmienka nulovosti torzie (Dodatok B) [5]. Výsledkom takéhoto procesu hľadania potom je konexia, ktorú nazývame Levi-Civitova konexia, a ktorá našu predstavu aj reálne uspokojuje a vedie k intuitívnemu výsledku, že sa rovná čiara zhoduje s tou najkratšou. Existujú však prípady, kedy máme nejaký rozumný dôvod (napríklad fyzikálny) konexiu definovať tak, že našej prirodzenej predstave odporuje. Nájdené koeficienty konexie tak môžu poviesť k tomu, že rovná trajektória ako taká, po ktorej sa pohybuje hmotný bod s nulovým zrýchlením, nemusí byť zároveň trajektóriou, ktorá spája ľubovoľné dva body na nej najkratšou čiarou v zmysle zavedenej metriky (to nastáva vtedy, keď nie je splnená podmienka kompatibility s metrikou). V niektorých prípadoch, ako je ten, s ktorým sa oboznámime v tejto práci, dokonca nemusí byť pojem najkratšej čiary ani dobre definovaný kvôli absencii metrického tenzora, pomocou ktorého by sme ju identifikovali.

3 Newtonov gravitačný zákon

Newtonov gravitačný zákon zrejme nie je témou, s ktorou je potrebné čitateľa od základu oboznamovať. Napriek tomu by však táto práca nebola úplná, keby sme v nej aspoň v krátkosti neuviedli niekoľko základných Newtonových záverov. Následne potom jeho výsledky upravíme do tvaru, v ktorom ich neskôr využijeme pri odvádzaní Cartanovej formulácie jeho teórie. V tejto časti práce budeme po vzore Newtona uvažovať euklidovský priestor E^3 s trojicou kartézskych súradníc x^i a metrickým tenzorom, ktorý nazveme $g = \delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$. Čas t je v Newtonovej predstave nezávislým parametrom. Newton gravitáciu opísal ako silové vektorové pole s komponentami danými vzťahom:

$$F_g^i = -GmM\frac{x^i}{r^3} \tag{3.1}$$

Tento vzťah opisuje gravitačnú silu, ktorou pôsobí hmotný bod s hmotnosťou M umiestnený v počiatku súradnicovej sústavy na hmotný bod s hmotnosťou m v mieste so súradnicami x^i, pričom G je gravitačná konštanta. Intenzita gravitačnej sily $\overrightarrow{K}$ predstavuje gravitačnú silu, pôsobiacu na jednotkovú hmotnosť umiestnenú na danom mieste:

$$K^i = \frac{F_g^i}{m} \tag{3.2}$$

Pre intenzitu gravitačnej sily od N-tice hmotných bodov, respektíve od spojito rozloženej hmotnosti s hustotou $\rho(x)$ potom zjavne platí:

$$K^i(x) = -\sum_{n=1}^{N} GM_n\frac{x^i - x_n^i}{(r - r_n)^3} \quad \text{resp.} \quad K^i(x) = -\int G\rho(x')\frac{x^i - x'^i}{(r - r')^3}\mathrm{d}^3r' \tag{3.3}$$

V tomto vzťahu výraz x_n^i pre $n \in \{1, ..., N\}$ predstavuje súradnice polôh jednotlivých hmotných bodov a M_n ich príslušné hmotnosti.

3.1 Gravitačný potenciál

Môžeme si všimnúť, že rotácia intenzity gravitačnej sily je nulová, teda platí:

$$\partial_j K^i - \partial_i K^j = 0 \tag{3.4}$$

Môžeme ju teda zapísať ako gradient skalárnej funkcie Φ. Túto funkciu Φ nazývame gravitačný potenciál. Máme na mysli gradient ako vektor, ktorý možno vyjadriť pomocou gradientu Φ ako kovektora prostredníctvom zdvihnutia indexov. Komponentne potom vzťah medzi $\overrightarrow{K}$ a Φ vyjadríme ako:

$$K^i = -\delta^{ij}\partial_j\Phi \tag{3.5}$$

Gravitačný potenciál je teda skalárna veličina, ktorá nesie informáciu o pôsobení gravitačnej sily od daného rozloženia hmotnosti v priestore na testovacie teleso s hmotnosťou dostatočne malou na to, aby sme jeho vlastné gravitačné pôsobenie mohli zanedbať.

3.2 Poissonova rovnica pre potenciál

Na základe uvedených Newtonových výsledkov možno dať do súvislosti gravitačný potenciál s hustotou hmotnosti ρ. Intenzita gravitačnej sily $\overrightarrow{K}$ od hmotného bodu s hmotnosťou M v počiatku súradnicovej sústavy je podľa klasickej Newtonovej teórie gravitácie rovná:

$$K^i \overset{1.}{=} -GM\frac{x^i}{r^3} \tag{3.6}$$

$$\overset{2.}{=} -\delta^{ij}\partial_j\Phi \tag{3.7}$$

Pre tok intenzity gravitačnej sily uzavretou plochou S potom na základe vzťahu (3.6) platí:

$$\oint_S \overrightarrow{K}.\overrightarrow{dS} = -4\pi GM \tag{3.8}$$

Môžeme si všimnúť, že na ľavej strane tejto rovnice možno využiť Gaussovu vetu, čím dostaneme namiesto plošného integrálu objemový integrál z divergencie $\overrightarrow{K}$. Zároveň môžeme na pravej strane využiť fakt, že hmotný bod môžeme vďaka princípu superpozície beztrestne nahradiť spojito rozloženou hmotnosťou s hustotou ρ vnútri plochy S. To nám umožní vzťah (3.8) prepísať do tvaru, v ktorom bude vyjadrovať vzájomnú rovnosť objemových integrálov:

$$\int_{\mathrm{int}S} \mathrm{div}\overrightarrow{K}\, dV = -4\pi G \int_{\mathrm{int}S} \rho\, dV \tag{3.9}$$

Keďže predpokladáme, že rovnosť (3.9) platí všeobecne pre akýkoľvek objem (aj infinitezimálny), požadujeme aj rovnosť samotných podintegrálnych funkcií, čím dostávame lokálne rovnosť:

$$\mathrm{div}\overrightarrow{K} = -4\pi G\rho \tag{3.10}$$

Divergenciu $\overrightarrow{K}$ možno (v kartézskych súradniciach) pomocou vzťahu (3.7) vyjadriť nasledovne:

$$\mathrm{div}\overrightarrow{K} = \partial_i\left(-\delta^{ij}\partial_j\Phi\right) \equiv - \triangle\,\Phi \tag{3.11}$$

Spojením rovností (3.10) a (3.11) potom dostávame vzťah medzi gravitačným potenciálom Φ a hustotou hmotnosti ρ daný Poissonovou rovnicou:

$$\triangle\Phi = 4\pi G\rho \tag{3.12}$$

3.3 S čím prišiel Newton

Záver tejto časti venujeme zhrnutiu Newtonovej predstavy o podstate gravitačných javov a upriameniu pozornosti na tie aspekty jeho teórie, ktoré neskôr využijeme pri jej geometrickej reformulácií. Newton si predstavoval vesmír ako trojrozmerný euklidovský priestor. Čiže v jazyku diferenciálnej geometrie vzniknutej oveľa neskôr, taký, v ktorom pri využití kartézskych súradníc sú všetky koeficienty konexie Γ^i_{jk} nulové a komponenty vektora zrýchlenia sú dané jednoducho druhými časovými deriváciami priestorových súradníc:

$$a^i = \ddot{x}^i \tag{3.13}$$

Newtonov gravitačný zákon hovorí, že na hmotné telesá pôsobí sila daná rozložením iných hmotných telies vo vesmíre. Podľa (taktiež Newtonových) pohybových rovníc potom hmotné body vplyvom tohoto pôsobenia menia svoj pohybový stav a ich trajektórie sa sú dané vzťahmi:

$$\ddot{x}^i = -\delta^{ij}\partial_j\Phi \tag{3.14}$$

Newtonove myšlienky teda môžeme zhrnúť tak, že rozloženie hmotnosti v rovnom priestore dané jej hustotou ρ generuje podľa Poissonovej rovnice (3.12) pole potenciálu Φ a hmotné body sa potom vplyvom silového pôsobenia pohybujú po trajektóriách s nenulovým zrýchlením daných vzťahom (3.14).

4 Konexia Newtonovej-Cartanovej teórie

V tejto časti nadviažeme na Newtonove výsledky a predstavíme Cartanov nápad, ktorý mu umožnil nahradiť diaľkové silové pôsobenie hmotných telies za zakrivenie štvorrozmerného časopriestoru. Keď čas považujeme za ďalší z rozmerov časopriestoru, namiesto akejsi osobitnej veličiny, umožňuje nám to pozrieť sa na gravitačné pôsobenie z nového uhla pohľadu. Budeme teda v tejto časti pracovať s časopriestorom $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Cartanovým nápadom je zaviesť v takomto časopriestore štruktúru lineárnej konexie tak, že trajektórie s nenulovým (trojrozmerným) zrýchlením v Newtonovom rovnom priestore sa stanú rovnými krivkami v zakrivenom štvorrozmernom časopriestore.

4.1 Koeficienty konexie

Časové závislosti priestorových súradníc určujúce trajektórie hmotných bodov sú dané Newtonovým vzťahom (3.14). Cartan prišiel s myšlienkou, že tieto trajektórie možno opísať ako rovné krivky vo štvorrozmernom časopriestore. Spôsobom, ktorým je to možné dosiahnuť je zavedenie štruktúry lineárnej konexie, ktorá povedie k tomu, že rovné krivky, čiže trajektórie s nulovým zrýchlením v časopriestore, budú opísané vzťahmi zhodnými s rovnicami, ktorými Newton opísal pohyb hmotného bodu v silovom gravitačnom poli. Budeme teda hľadať také koeficienty konexie $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}$, pre ktoré bude rovnosť (2.2) opisujúca geodetiku zhodná s Newtonovým vzťahom (3.14):

$$\ddot{x}^i = -\delta^{ij}\partial_j \phi \iff \ddot{x}^\mu + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho}\dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 0 \tag{4.1}$$

Pre časovú súradnicu x^0 tak dostaneme podmienku:

$$\ddot{x}^0 + \Gamma^{0}_{\nu\rho}\dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 0 \tag{4.2}$$

Keďže na základe vzťahu (1.8) je druhá derivácia $\ddot{x}^0$ nulová, pre koeficienty $\Gamma^{0}_{\nu\rho}$ tak bude platiť:

$$\Gamma^{0}_{\nu\rho}\dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 0 \tag{4.3}$$

S využitím faktu, že derivácia $\dot{x}^0$ je podľa rovnosti (1.4) konštantne rovná jednej možno podmienku (4.3) zapísať ako:

$$\Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{11}\dot{x}^1\dot{x}^1 + \Gamma^0_{22}\dot{x}^2\dot{x}^2 + \Gamma^0_{33}\dot{x}^3\dot{x}^3 + \left(\Gamma^0_{01} + \Gamma^0_{10}\right)\dot{x}^1 + \left(\Gamma^0_{02} + \Gamma^0_{20}\right)\dot{x}^2 + \left(\Gamma^0_{03} + \Gamma^0_{30}\right)\dot{x}^3 +$$
$$+ \left(\Gamma^0_{12} + \Gamma^0_{21}\right)\dot{x}^1\dot{x}^2 + \left(\Gamma^0_{13} + \Gamma^0_{31}\right)\dot{x}^1\dot{x}^3 + \left(\Gamma^0_{23} + \Gamma^0_{32}\right)\dot{x}^2\dot{x}^3 = 0$$

Analogickým postupom dostaneme na základe podmienky (4.1) pre priestorové zložky časopriestoru rovnosť:

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{\nu\rho}\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho = 0 \tag{4.4}$$

Po dosadení za $\ddot{x}^i$ z Newtonovho vzťahu (3.14) dostaneme pre koeficienty konexie $\Gamma^i_{\nu\rho}$ rovnicu:

$$\Gamma^i_{\nu\rho}\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho = \delta^{ij}\partial_j\phi \tag{4.5}$$

Túto podmienku možno opäť s využitím vzťahu (1.4) rozpísať do tvaru:

$$\Gamma^i_{00} + \Gamma^i_{11}\dot{x}^1\dot{x}^1 + \Gamma^i_{22}\dot{x}^2\dot{x}^2 + \Gamma^i_{33}\dot{x}^3\dot{x}^3 + \left(\Gamma^i_{01} + \Gamma^i_{10}\right)\dot{x}^1 + \left(\Gamma^i_{02} + \Gamma^i_{20}\right)\dot{x}^2 + \left(\Gamma^i_{03} + \Gamma^i_{30}\right)\dot{x}^3 +$$
$$+ \left(\Gamma^i_{12} + \Gamma^i_{21}\right)\dot{x}^1\dot{x}^2 + \left(\Gamma^i_{13} + \Gamma^i_{31}\right)\dot{x}^1\dot{x}^3 + \left(\Gamma^i_{23} + \Gamma^i_{32}\right)\dot{x}^2\dot{x}^3 = \delta^{ij}\partial_j\phi$$

Keďže požadujeme, aby boli naše podmienky splnené pre akékoľvek závislosti $\dot{x}^i$, čo sú všeobecne nenulové funkcie času, riešením rovníc (4.3) a (4.5) sú nasledovné koeficienty konexie:

$$\Gamma^0_{00} = 0 \tag{4.6}$$
$$\Gamma^i_{00} = \delta^{ij}\partial_j\phi \tag{4.7}$$
$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = -\Gamma^\mu_{\rho\nu} \quad \text{pre všetky } \nu, \rho \text{ okrem: } \nu = \rho = 0 \tag{4.8}$$

Môžeme si všimnúť, že koeficienty konexie Γ^μ_{ii}, ktoré majú ako dolné indexy dva zhodné indexy $i \in \{1, 2, 3\}$ sú podľa podmienky (4.8) automaticky nulové. Okrem toho podmienky (4.6) a (4.7) jednoznačne určujú koeficienty Γ^μ_{00}, ktoré majú dolnú dvojicu indexov nulovú. Ostatné koeficienty konexie však týmito podmienkami úplne jednoznačne určené nie sú, avšak vyplýva pre ne podľa rovnosti (4.8) podmienka, že musia byť antisymetrické vzhľadom na dvojicu dolných indexov. Táto nejednoznačnosť je spôsobená tým, že keď určujeme koeficienty konexie z rovnice geodetiky, nezistíme tak nič o ich antisymetrickej časti, pretože geodetika vníma len symetrickú časť koeficientov konexie. Presný tvar zvyšných koeficientov konexie potom možno zistiť na základe podmienky nulovosti torzie, ktorá súvisí s uzavretím rovnobežníka z geodetík (Dodatok B) [5]. Torzia konexie je nulová v prípade, kedy sú koeficienty konexie symetrické vzhľadom na dvojicu dolných indexov:

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \Gamma^\mu_{\rho\nu} \tag{4.9}$$

Na základe podmienok (4.8) a (4.9) zisťujeme, že všetky koeficienty konexie okrem trojice Γ^i_{00} danej vzťahom (4.7) budú nulové.

4.2 S čím prišiel Cartan

Cartanova prvotná myšlienka spočíva v tom, že po vzore všeobecnej teórie relativity by mohlo byť možné zaviesť koncept zakriveného časopriestoru, v ktorom je pohyb hmotného bodu opísaný rovnými krivkami, aj do klasického opisu gravitačných javov. Od Einsteina teda prevzal predstavu, že napriek tomu, že sa nám javí, že žijeme v rovnom euklidovskom priestore, je možné, že ide v skutočnosti o zakrivený časopriestor, avšak my nie sme schopní toto zakrivenie vnímať. Je zjavné, že časové závislosti priestorových súradníc opisujúce pohyb hmotného bodu v priestore sú klasicky opísané Newtonovými rovnicami (3.14). Cartan si teda tento jeho výsledok požičal, ale odmietol sa zmieriť s tým, že priestor musí byť euklidovský a je potrebné v ňom pre vysvetlenie týchto dráh zaviesť silové pôsobenie. Namiesto toho sa rozhodol tvdiť, že pokiaľ sa hmotný bod po týchto trajektóriách pohybuje „sám od seba“, znamená to, že práve tieto dráhy sú tie, ktoré by sme mali nazývať rovnými. Ako vieme, rovné čiary na variete sú geodetiky dané vzťahom (2.2). Tak tento elegantne jednoduchý myšlienkový postup priviedol Cartana k nápadu zaviesť v časopriestore $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ štruktúru lineárnej konexie na základe podmienky (4.1). Výsledkom je lineárna konexia s trojicou nenulových koeficientov Γ^i_{00}, ktorej geodetikami sú čiary opisujúce pohyb hmotného bodu vplyvom gravitačného pôsobenia daného gravitačným potenciálom Φ.

5 Zakrivenie časopriestoru a rovnice poľa

V časopriestore $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ sme v predchádzajúcej časti práce zaviedli štruktúru lineárnej konexie. V nasledujúcej časti ukážeme čo vyplýva z takto zavedenej štruktúry lineárnej konexie danej rozložením gravitačného potenciálu Φ pre krivosť časopriestoru. Tieto vedomosti potom využijeme pre opis zakrivenia časopriestoru pri jednom konkrétnom rozložení potenciálu. Na základe zakrivenia časopriestoru daného Ricciho tenzorom a Newtonovho klasického vzťahu medzi gravitačným potenciálom Φ a hustotou hmotnosti ρ následne odvodíme rovnice poľa pre Newtonovu-Cartanovu teóriu.

5.1 Tenzor krivosti

Štruktúra lineárnej konexie určuje, ktoré čiary na variete sú rovné. Na základe toho potom môžeme zistiť, či je daná varieta zakrivená. Zakrivenie variety opisuje tenzor krivosti R (Dodatok C). Ide o tenzor typu $\binom{1}{3}$, ktorého komponenty v súradnicovej báze možno vyjadriť pomocou koeficientov konexie na základe vzťahu (C.5) ako:

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^{\mu}_{\nu\rho,\sigma} + \Gamma^{\xi}_{\nu\sigma}\Gamma^{\mu}_{\xi\rho} - \Gamma^{\xi}_{\nu\rho}\Gamma^{\mu}_{\xi\sigma} \tag{5.1}$$

V časopriestore $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ s Cartanovou štruktúrou linárnej konexie sú tri nenulové koeficienty konexie Γ^{i}_{00} ako funkcie gravitačného potenciálu Φ dané vzťahom (4.7). Po ich dosadení do rovnosti (5.1) zisťujeme, že nenulové budú nasledovné komponenty tenzora krivosti:

$$R^{i}_{00j} = -\partial_j\left(\delta^{ik}\partial_k\Phi\right) \tag{5.2}$$

$$R^{i}_{0j0} = \partial_j\left(\delta^{ik}\partial_k\Phi\right) \tag{5.3}$$

5.2 Ricciho tenzor

Ricciho tenzor predstavuje kontrakciu tenzora krivosti, a teda taktiež podáva informáciu o zakrivení variety (Dodatok C). Na základe komponent tenzora krivosti môžeme určiť aj komponenty Ricciho tenzora podľa vzťahu (C.6):

$$R_{\mu\nu} = R^{\xi}_{\mu\xi\nu} \tag{5.4}$$

Po dosadení komponent tenzora krivosti R daných vzťahmi (5.2) a (5.3) do rovnice (5.4) sa ukazuje, že Ricciho tenzor má jedinú nenulovú komponentu, a to R_{00}.

Tá je potom daná vzťahom:

$$R_{00} = \partial_i \partial_i \Phi \equiv \triangle \Phi \tag{5.5}$$

Matica Ricciho tenzora tak bude mať tvar:

$$R_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \triangle\Phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

5.3 Výpočet zakrivenia časopriestoru pre lineárny gravitačný potenciál

Zaujímavým prípadom, na ktorý sa v tejto sekcii pozrieme bližšie je ten, kedy je gravitačný potenciál daný ako lineárna funkcia jednej z priestorových súradníc časopriestoru. Ako je známe, takýto „stredoškolský“ potenciál sa využíva pre aproximáciu gravitačného poľa v blízkosti veľkého hmotného telesa ako je Zem. Uvažujme teda v časopriestore $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ so súradnicami (t, x, y, z) gravitačný potenciál Φ daný ako:

$$\Phi = -gz \tag{5.7}$$

Tento potenciál využijeme pre ilustráciu výpočtu tenzora krivosti a Ricciho tenzora. Pre takýto potenciál bude na základe vzťahu (4.7) jediným nenulovým koeficientom konexie Γ^z_{tt}:

$$\Gamma^z_{tt} = g \tag{5.8}$$

Na základe vzťahov (5.2) a (5.3) potom zisťujeme, že všetky komponenty tenzora krivosti R, a teda aj všetky komponenty Ricciho tenzora budú v tomto prípade nulové. Takýto časopriestor teda zakrivený nie je.

Existuje však aj iný spôsob ako sa k tomuto výsledku dopracovať a pre získanie prehľadu o tom ako je vytvárané zakrivenie časopriestoru bude užitočné ho predviesť. Mohlo by nás napadnúť pokúsiť sa nájsť v časopriestore súradnice, v ktorých budú nulové všetky koeficienty konexie $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$. V takýchto súradniciach by potom bol tenzor krivosti na základe rovnosti (5.1) zjavne nulový a keďže by bol nulový v jedných súradniciach, tak (ako každý správny tenzor) aj vo všetkých ostatných. Nájdenie takýchto súradníc by teda znamenalo aj nulovú krivosť časopriestoru, čo je výsledok, ktorý sme dostali aj výpočtom tenzora krivosti. Pre transformáciu koeficientov konexie pri zmene súradníc z x^α na x'^μ platí na základe (A.3) vzťah (Dodatok A):

$$\Gamma'^\mu_{\nu\rho} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\rho} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\nu \partial x'^\rho} \tag{5.9}$$

Naším cieľom teraz bude nájsť nové súradnice, v ktorých budú všetky koeficienty konexie $\Gamma'^\mu_{\nu\rho}$ nulové. Pre väčšiu jednoduchosť budeme najskôr riešiť rovnice len pre dvojrozmerný časopriestor $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s dvojicou súradníc (t, z), kde jediným nenulovým koeficientom konexie je $\Gamma^z_{tt} = g$. Pre čas bude platiť: $t' = t$, keďže je absolútny a $z' = z'(t, z)$

bude hľadaná nová priestorová súradnica. Dostávame tak rovnice:

$$0 = \frac{\partial z'}{\partial z} g + \frac{\partial z'}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \tag{5.10}$$

$$0 = \frac{\partial z'}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial z'} \tag{5.11}$$

$$0 = \frac{\partial z'}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial z'^2} \tag{5.12}$$

Môžeme si všimnúť, že rovnicu (5.10) možno prepísať do tvaru:

$$0 = \frac{\partial z'}{\partial z} \left(g + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) \tag{5.13}$$

Z toho vyplýva, že jedným možným riešením je prípad, kedy je nulová derivácia $\partial_z z'$, ktorá vystupuje v každej z rovníc (5.10), (5.11), (5.12) alebo sú nulové výrazy, ktoré sú ňou v rovniciach prenásobené. Prípad, kedy sa $\partial_z z'$ rovná nule však nemôže byť riešením, keďže by to viedlo k nulovému Jakobiánu zámeny súradníc, a teda nejde o prípustné súradnice. Budeme preto riešiť rovnice:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -g \tag{5.14}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t \partial z'} = 0 \tag{5.15}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial z'^2} = 0 \tag{5.16}$$

Pre funkciu $z(z', t)$ tak dostávame:

$$z = -\frac{gt^2}{2} + k_1 t + k_3 z' + k_4 \tag{5.17}$$

Keď potom definujeme konštanty $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ nasledovne: $\lambda_1 = \frac{1}{k_3}$, $\lambda_2 = -\frac{k_1}{k_3}$, $\lambda_3 = -\frac{k_4}{k_3}$, dostávame pre novú súradnicu $z'(z, t)$ výraz:

$$z' = \lambda_1 \left(z + \frac{gt^2}{2} \right) + \lambda_2 t + \lambda_3 \tag{5.18}$$

Tento výsledok by sme teraz chceli zovšeobecniť do štvorrozmerného priestoru $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ so súradnicami (t, x, y, z). Užitočné bude postupovať tak, že prechodové vzťahy (5.9) medzi čiarkovanými a nečiarkovanými súradnicami vyriešime najskôr pre prípad kedy sa prechádza od nulových koeficientov $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$ k taktiež nulovým koeficientom $\Gamma'^{\mu}_{\nu\rho} = 0$. Následne potom skontrolujeme aké podmienky musia navyše riešenia spĺňať vplyvom prítomnosti nenulového koeficientu Γ^{z}_{tt} zo vzťahu (5.8). Rovnice (5.9) majú pre prípad prechodu od nulových k nulovým koeficientom konexie tvar:

$$0 = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\rho}} \tag{5.19}$$

Keďže je matica $\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}$ nesingulárna, riešením rovníc (5.19) je prípad, kedy sú nulové druhé parciálne derivácie pôvodných súradníc (t, x, y, z) podľa všetkých kombinácií nových súradníc (t', x', y', z').

To vedie k riešeniu:

$$
\begin{aligned}
t &= t' && (5.20)\\
x &= k_{10}t' + k_{11}x' + k_{12}y' + k_{13}z' + \hat{c}_1 && (5.21)\\
y &= k_{20}t' + k_{21}x' + k_{22}y' + k_{23}z' + \hat{c}_2 && (5.22)\\
z &= k_{30}t' + k_{31}x' + k_{32}y' + k_{33}z' + \hat{c}_3 && (5.23)
\end{aligned}
$$

Keď potom zoberieme do úvahy aj nenulový koeficient Γ^z_{tt}, takmer všetky rovnice dané vzťahom (5.9) ostanú bezo zmeny okrem nasledovných troch:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial x'}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + g\right) && (5.24)\\
0 &= \frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial y'}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + g\right) && (5.25)\\
0 &= \frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial z'}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial z'}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + g\right) && (5.26)
\end{aligned}
$$

Tieto tri rovnice pridávajú pre súradnicu z podmienku (analogicky ako rovnica (5.13) v dvojrozmernom prípade), že okrem jej časti, ktorá bude po druhej derivácii podľa času vynulovaná musí obsahovať aj závislosť od t, pre ktorú platí:

$$
\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -g \qquad (5.27)
$$

To vedie k celkovému riešeniu:

$$
\begin{aligned}
t &= t' && (5.28)\\
x &= k_{10}t' + k_{11}x' + k_{12}y' + k_{13}z' + \hat{c}_1 && (5.29)\\
y &= k_{20}t' + k_{21}x' + k_{22}y' + k_{23}z' + \hat{c}_2 && (5.30)\\
z &= -\frac{gt'^2}{2} + k_{30}t' + k_{31}x' + k_{32}y' + k_{33}z' + \hat{c}_3 && (5.31)
\end{aligned}
$$

Keď teraz chceme vyjadriť nové súradnice (t', x', y', z') ako funkcie súradníc (t, x, y, z) ide vlastne o riešenie sústavy:

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & t\\
k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} & x - \hat{c}_1\\
k_{20} & k_{21} & k_{22} & k_{23} & y - \hat{c}_2\\
k_{30} & k_{31} & k_{32} & k_{33} & \left(z + \frac{gt^2}{2}\right) - \hat{c}_3
\end{array}\right)
$$

Vidíme, že pokiaľ je pravý dolný 3×3 podblok matice lineárne nezávislý, takúto sústavu vieme vyriešiť. Riešením budú nové súradnice x',y' a z' ako lineárne kombinácie členov t, x, y a $\left(z + \frac{gt^2}{2}\right)$ v súčte s novými konštantami c_1,c_2 a c_3. Tým sme teda našli v časopriestore $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ súradnice, v ktorých sú všetky koeficienty konexie vynulované.

Sú dané vzťahmi:

$$t' = t \tag{5.32}$$

$$x' = \lambda_{10}t + \lambda_{11}x + \lambda_{12}y + \lambda_{13}\left(z + \frac{gt^2}{2}\right) + c_1 \tag{5.33}$$

$$y' = \lambda_{20}t + \lambda_{21}x + \lambda_{22}y + \lambda_{23}\left(z + \frac{gt^2}{2}\right) + c_2 \tag{5.34}$$

$$z' = \lambda_{30}t + \lambda_{31}x + \lambda_{32}y + \lambda_{33}\left(z + \frac{gt^2}{2}\right) + c_3 \tag{5.35}$$

Môžeme si všimnúť, že nové priestorové súradnice predstavujú afinné transformácie tých pôvodných, avšak s tým, že súradnica z je v nich nahradená nasledovným výrazom:

$$z \to \left(z + \frac{gt^2}{2}\right) \tag{5.36}$$

Fyzikálne možno tento výsledok interpretovať tak, že ide o súradnice pozorovateľa, ktorý padá voľným pádom v gravitačnom poli. Bez prítomnosti gravitačného poľa by sa zjavne všetci pozorovatelia pohybovali vzhľadom na seba rovnomerne a priamočiaro, pričom ich súradnicové sústavy sú ekvivalentne platné. Preto, ako sme zistili riešením rovníc (5.19), zodpovedajú prechodu od nulovým k nulovým koeficientom konexie práve afinné súradnicové transformácie. V prípade, ktorým sme sa zaoberali pôsobí gravitačné pole dané potenciálom zo vzťahu (5.7). Prechodom do súradníc padajúceho pozorovateľa prostredníctvom zámeny z-ovej súradnice (5.36) sme však našli súradnicovú sústavu, v ktorej pole *nepôsobí*. Situácia, v ktorej sú všetky hmotné objekty urýchľované s konštantným zrýchlením v smere osi z je potom po takejto zmene súradnicovej sústavy ekvivalentná situácii, kedy hmotné objekty vôbec gravitačným poľom urýchľované nie sú. V takejto novej sústave tak môžeme robiť afinné transformácie súradníc, výsledkom ktorých budú stále nulové koeficienty konexie. Pri takomto rozložení gravitačného potenciálu teda nedochádza k zakriveniu časopriestoru.

5.4 Rovnice poľa Newtonovej-Cartanovej teórie

Podobne ako tomu je vo všeobecnej teórii relativity, aj v Newtonovej-Cartanovej teórii možno zaviesť rovnice poľa. Tieto rovnice vyjadrujú súvislosť medzi zakrivením časopriestoru a zdrojmi tohoto zakrivenia. Vo všeobecnej teórii relativity ich nazývame Einsteinove rovnice a vystupuje v nich Einsteinov tenzor odvodený z Ricciho tenzora a tenzor energie-hybnosti [5]. V Newtonovej-Cartanovej teórii je ich tvar o čosi jednoduchší. V súvislosti s Newtonovým gravitačným zákonom sme odvodili klasický vzťah medzi gravitačným potenciálom Φ a hustotou hmotnosti ρ daný Poissonovou rovnicou (3.12). Môžeme si uvedomiť, že Laplaceov operátor aplikovaný na gravitačný potenciál $\triangle\Phi$, ktorý v nej vystupuje predstavuje zároveň aj jedinú nenulovú zložku Ricciho tenzora (5.6). Spojenie vzťahov (3.12) a (5.6) nám tak umožňuje zapísať Ricciho tenzor pomocou hustoty hmotnosti ρ ako:

$$R_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 4\pi G\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.37}$$

Vzťah (5.37) predstavuje rovnice poľa Newtonovej-Cartanovej teórie. Hovorí, že zakrivenie časopriestoru reprezentované Ricciho tenzorom je spôsobené rozložením hmotných objektov v priestore daným funkciou hustoty hmotnosti ρ. Časopriestor môže mať nenulové zakrivenie dané Riemannovým tenzorom krivosti aj na miestach, kde sa zdroj zakrivenia nenachádza, avšak Ricciho tenzor je nenulový len v miestach s nenulovou hustotou ρ. Zakrivenie časopriestoru je teda *generované* na miestach s nenulovou hustotou hmotnosti. Newtonovu-Cartanovu teóriu gravitácie tak možno chápať ako opis zakrivenia časopriestoru vplyvom prítomnosti hmotných telies v ňom. Pokiaľ poznáme rozloženie hmotnoti v priestore, môžeme zistiť, ako je časopriestor zakrivený a v takto zakrivenom časopriestore sa hmotné body budú pohybovať rovnomerne a priamočiaro.

6 Metrika Cartanovho časopriestoru

Než našu diskusiu o Newtonovej-Cartanovej teórii uzavrieme, patrilo by sa povedať pár slov aj o metrike časopriestoru $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Musíme však priznať, že názov tejto časti práce nie je úplne presný. Metrika v pravom zmysle slova, na akú sme zvyknutí na riemannovských varietách, teda taká, ktorá je daná jedným nedegenerovaným metrickým tenzorom, sa totiž v časopriestore Newtonovej-Cartanovej teórie zaviesť nedá. Avšak ako ukážeme, je možné na našej variete $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ zaviesť dva degenerované tenzory, z ktorých každý bude na nej plniť funkciu akejsi čiastočnej metriky. Prvý bude tenzor typu $\binom{2}{0}$, ktorý bude pôsobiť v trojrozmernom priestore v akomkoľvek fixovanom čase t. Ten druhý z nich bude tenzorom typu $\binom{0}{2}$ a umožní merať dĺžky časových intervalov medzi dvomi udalosťami, ktoré sú vďaka Newtonovmu absolútnemu času pevne dané nezávisle od priestorových súradníc či pohybového stavu pozorovateľa. Fyzikálne možno túto neexistenciu nedegenerovaného metrického tenzora vysvetliť tým, že v časopriestore Newtonovej-Cartanovej teórie sú čas a priestor fundamentálne odlišné, a teda Newtonov pohľad nedáva priestor definícii niečoho ako vzdialenosť udalostí v časopriestore.

6.1 Invariantnosť voči Galileiho transformáciám

Od metriky v Newtonovom-Cartanovom časopriestore požadujeme, aby bola invariantná voči Galileiho transformáciám. Galileiho transformácie súradníc časopriestoru predstavujú priestorové rotácie, časové zmeny priestorových súradníc a priestorové posunutia [2]. Našou požiadavkou teda chceme vyjadriť, že by sa vzdialenosti v časopriestore nemali zmeniť, pokiaľ sa pozorovateľ otočí, alebo zmení svoj pohybový stav. Galileiho transformácie súradníc majú nasledovný tvar:

$$t' = t \tag{6.1}$$

$$x'^i = R^i_j x^j + v^i t + x^i_0 \quad \text{pre } R \in SO(3) \tag{6.2}$$

Jakobiho maticu Galileiho transformácie J potom môžeme vyjadriť ako:

$$J^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v^1 & R^1_1 & R^1_2 & R^1_3 \\ v^2 & R^2_1 & R^2_2 & R^2_3 \\ v^3 & R^3_1 & R^3_2 & R^3_3 \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

Majme teda na našej variete kometriku reprezentovanú tenzorom typu $\binom{2}{0}$, ktorý nazveme $h = h^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$. Podmienkou, ktorá pre neho vyplýva z našej požiadavky invariantnosti voči Galileiho transformáciám je:

$$h(\mathrm{d}x^\mu, \mathrm{d}x^\mu) = h(J^\mu_\alpha \mathrm{d}x^\alpha, J^\nu_\beta \mathrm{d}x^\beta) \tag{6.4}$$

Pre komponenty tenzora h teda musí platiť:

$$h^{\mu\nu} = J^\mu_\alpha J^\nu_\beta h^{\alpha\beta} \tag{6.5}$$

Tým dostávame pre jednotlivé komponenty nasledovné rovnice (vďaka symetrii h platí: $h^{\mu\nu} = h^{\nu\mu}$):

$$h^{00} = h^{00} \tag{6.6}$$
$$h^{i0} = v^i h^{00} + R^i_j h^{j0} \tag{6.7}$$
$$h^{ij} = v^i v^j h^{00} + 2v^i R^j_k h^{k0} + R^i_k R^j_l h^{kl} \tag{6.8}$$

Keďže požadujeme splnenie týchto podmienok pre ľubovoľné v^i, jediným riešením tejto sústavy je položiť:

$$h^{\mu 0} = 0 \tag{6.9}$$
$$h^{ij} = \delta^{ij} \tag{6.10}$$

Môžeme si všimnúť, že prvé dve rovnice (6.6) a (6.7) tak budú nulové. Keďže matica R je z grupy $SO(3)$, a teda spĺňa rovnosť: $R^T R = \mathbb{I}$, rovnica (6.8) dá identitu: $\delta^{ij} = \delta^{ij}$.

6.2 Tenzory h a τ

Na základe podmienky invariantnosti voči Galileiho transformáciám sme teda našli kometriku danú tenzorom h s komponentami:

$$h^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.11}$$

K nemu by sa nám žiadalo nájsť aj príslušný metrický tenzor. Keďže je však tenzor h degenerovaný, nemožno hľadať metrický tenzor bežným spôsobom, čiže na základe podmienky $h^{\mu\nu} h_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$. Matica $h^{\mu\nu}$ má nulový determinant, a teda zodpovedajúcu k nej inverznú maticu $h_{\nu\rho}$ nájsť nevieme. Tento problém môžeme obísť tak, že metrický tenzor opäť nájdeme na základe podmienky invariantnosti voči Galileiho transformácii danej maticou J. Takýto metrický tenzor potom označíme $\tau = \tau_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$. Požiadavka, ktorú by mal tenzor τ spĺňať bude mať tvar:

$$\tau_{\mu\nu} = J^\alpha_\mu J^\beta_\nu \tau_{\alpha\beta} \tag{6.12}$$

Pre komponenty τ tak dostávame rovnice:

$$\tau_{00} = \tau_{00} - v^i v^j \tau_{ij} - v^i \tau_{i0} - v^i \tau_{0i} \tag{6.13}$$
$$\tau_{0i} = R^k_i \tau_{0k} + v^j R^k_i \tau_{jk} \tag{6.14}$$
$$\tau_{ij} = R^k_i R^l_j \tau_{kl} \tag{6.15}$$

Splnenie podmienok daných týmito vzťahmi opäť požadujeme pre ľubovoľné v^i. Tak zisťujeme, že riešením týchto rovníc je tenzor, ktorý má nulové všetky komponenty až na jednu, konkrétne τ_{00}, ktorú potom možno zvoliť ľubovoľne. Z praktických dôvodov je rozumné zvoliť $\tau_{00} = 1$, čím dostávame na variete $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ druhý zo sľúbených dvoch tenzorov τ daný komponentne ako:

$$\tau_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.16}$$

Tenzory h a τ dané vzťahmi (6.11) a (6.16) predstavujú v priestore $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ štruktúru, ktorá síce nie je klasickou metrikou, ale umožňuje realizovať aspoň niektoré operácie, na ktoré sme zvyknutí metriku využívať, ako napríklad priraďovanie dĺžok časovým intervalom pomocou tenzora τ.

Záver

Cieľom tejto práce bolo oboznámiť čitateľa s Newtonovou-Cartanovou teóriou gravitácie. Ide o teóriu, ktorá kombinuje predstavu známu zo štandardnej formulácie všeobecnej teórie relativity opisujúcu gravitáciu ako geometriu štvorrozmerného časopriestoru s klasickými predpoveďami Newtonovej teórie. V prvej časti práce sme prostredníctvom kovariantnej derivácie ukázali ako danej trajektórii hmotného bodu priradiť jeho zrýchlenie. Na základe toho sme potom boli v druhej časti práce schopní definovať na variete geodetiky ako rovné čiary, po ktorých sa pohybuje hmotný bod s nulovým zrýchlením. Odvodili sme rovnicu pre geodetiky a oboznámili sa s ich tvarom v euklidovských priestoroch. V tretej časti sme si v krátkosti pripomenuli Newtonov gravitačný zákon a odvodili Poissonovu rovnicu, ktorá predstavuje klasický opis vzťahu medzi gravitačným potenciálom a hustotou hmotnosti. Newton opísal gravitáciu ako silové pole v trojrozmernom euklidovskom priestore. Vo štvrtej časti sme sa oboznámili s Cartanovým nápadom zaviesť štruktúru lineárnej konexie v štvorrozmernom časopriestore $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ tak, aby trajektórie pohybujúcich sa hmotných bodov opísané Newtonom v tomto časopriestore zodpovedali v štvorrozmernom zmysle rovnomernému priamočiaremu pohybu. Cartan tak obišiel, rovnako ako Einstein, potrebu definovať pre vysvetlenie gravitačných javov silové pôsobenie. V súvislosti so zavedenou štruktúrou lineárnej konexie sa možno baviť aj o krivosti variety opísanej Riemannovým tenzorom krivosti a Ricciho tenzorom. Tvar týchto dvoch tenzorov v časopriestore $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ sme odvodili v piatej časti. Následne sme pomocou Poissonovej rovnice pre gravitačný potenciál našli súvislosť medzi Ricciho tenzorom a hustotou hmotnosti, ktorú opisujú rovnice poľa Newtonovej-Cartanovej teórie. V poslednej, šiestej časti sme uviedli základné vlastnosti „metriky“ časopriestoru Newtonovej-Cartanovej teórie.

Newtonova-Cartanova teória gravitácie je klasickým opisom gravitačných javov ako dôsledkov zakrivenia časopriestoru. Napriek tomu, že všeobecná teória relativity poskytuje presnejšie predpovede, jej klasická limita často býva pre vysvetlenie skúmaných javov postačujúca. Ukazuje sa, že existujú prípady, v ktorých je jej geometrický opis užitočnejší, než ten využívajúci silové vektorové pole. Preto ani dnes nie je problém nájsť moderné práce, ktoré na Cartanovu reformuláciu Newtonovho klasického opisu gravitácie nadväzujú. V neposlednom rade ide aj o teóriu, ktorá rozširuje naše obzory tým, že nás núti sa zamyslieť nad konceptom časopriestoru a robí z neho niečo, čo už nie je typické len pre relativistický opis gravitácie. To z nej robí zaujímavú tému pre každého (nielen) teoretického fyzika.

Dodatky

A Lineárna konexia a kovariantná derivácia

V niektorých situáciách je potrebné porovnať vektory z dvoch rôznych bodov x a y variety M, čiže z dvoch rôznych vektorových priestorov T_xM a T_yM. Zatiaľ čo v euklidovských priestoroch a v kartézskych súradniciach možno akémukoľvek vektoru v ktoromkoľvek bode variety priradiť vektor v inom bode s rovnakými komponentami a tvrdiť, že ide o paralelné vektory, vo všeobecnom prípade je to zložitejšie. Pre tento účel je možné na variete zaviesť *štruktúru lineárnej konexie*, ktorú značíme ∇.

Majme teda varietu (M, ∇). Štruktúra lineárnej konexie na variete M znamená, že každému vektorovému poľu W na M môžeme priradiť operátor ∇_W, ktorý nazývame *kovariantná derivácia* v smere poľa W s vlastnosťami:

1. ∇_W je lineárny operátor na tenzorovej algebre zachovávajúci stupeň:

$$\nabla_W : T^p_q(M) \to T^p_q(M)$$
$$\nabla_W(A + \lambda B) = \nabla_W A + \lambda \nabla_W B \quad \text{pre } A, B \in T^p_q(M)\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}$$

2. ∇_W pôsobí na tenzorovom súčine podľa Leibnizovho pravidla:

$$\nabla_W(A \otimes B) = \nabla_W A \otimes B + A \otimes \nabla_W B \quad \text{pre } A, B \in T^p_q(M)$$

3. ∇_W pôsobí na stupni $\binom{0}{0}$ (t.j. na funkciách) nasledovne:

$$\nabla_W \Psi = W\Psi \quad \text{pre } \Psi \in T^0_0(M)$$

4. ∇_W komutuje s kontrakciou:

$$\nabla_W \circ C = C \circ \nabla_W \quad \text{pre ľubovoľnú kontrakciu C}$$

5. ∇_W je F-lineárny voči vektorovému poľu W:

$$\nabla_{(W+fV)} = \nabla_W + f\nabla_V \quad \text{pre } V, W \in T^1_0(M)\ ;\ f \in F(M)$$

Keďže podľa uvedených vlastností je operátor ∇_W deriváciou tenzorovej algebry komutujúcou s kontrakciou, stačí nám poznať jeho pôsobenie na tenzoroch typu $\binom{0}{0}$ (ktoré už poznáme z postulovaných vlastností) a typu $\binom{1}{0}$ a budeme vedieť ako pôsobí na celej tenzorovej algebre [5]. Pôsobenie ∇_W na vektoroch (a z neho odvodené pôsobenie na kovektoroch) vyjadrujeme prostredníctvom koeficientov konexie $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$, ktoré sú závislé od bázy.

Pokiaľ máme súradnicovú bázu ∂_μ pôsobenie ∇_W na bázových vektoroch a kovektoroch vyzerá nasledovne:

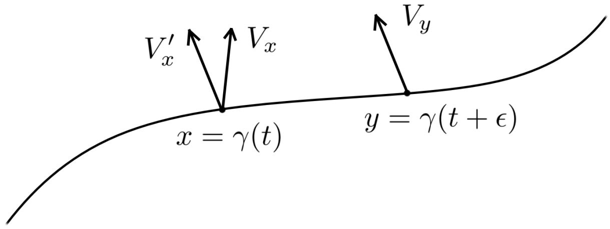
$$\nabla_{\partial_\mu}\partial_\nu \equiv \nabla_\mu \partial_\nu = \Gamma^\rho_{\nu\mu}\partial_\rho \tag{A.1}$$

$$\nabla_{\partial_\mu} dx^\nu \equiv \nabla_\mu dx^\nu = -\Gamma^\nu_{\rho\mu} dx^\rho \tag{A.2}$$

V tejto práci budú koeficienty $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ vyjadrené vždy v súradnicovej báze. Pri zmene súradníc z x^α na x'^μ platí pre koeficienty konexie prechodový vzťah:

$$\Gamma'^\mu_{\nu\rho} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\rho}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\nu \partial x'^\rho} \tag{A.3}$$

Koeficienty $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ (ako funkcie súradníc variety) sú potom tým, čo pre danú varietu definuje paralelný prenos, teda spôsob akým je po krivke prenesený vektor z jedného bodu do druhého. Pre potreby tejto práce je postačujúce rozumieť významu kovariantnej derivácie vektorových polí. Pre vektorové pole V je kovariantná derivácia $\nabla_W V$ vektorové pole, ktorého hodnota v bode x je daná rozdielom vektora V_x v danom bode a vektora V'_x preneseného z infinitezimálne vzdialeného bodu v smere integrálnej krivky vektorového poľa W predelená touto infinitezimálnou zmenou parametra (Obrázok 1).



Obrázok 1

Krivka γ je integrálna krivka poľa W. $\nabla_W V$ v bode x bude v tomto prípade $\lim_{\epsilon\to 0}\frac{V'_x - V_x}{\epsilon}$.

V euklidovskom priestore a v kartézskych súradniciach sú všetky koeficienty konexie $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ nulové, čo vysvetľuje spomínanú jednoduchosť paralelného prenosu za týchto podmienok. Viac o spôsobe ako sa na konkrétnych varietách hľadajú koeficienty konexie a bližšie detaily o paralelnom prenose a kovariantnej derivácii čitateľ v prípade záujmu môže nájsť napríklad v 15. kapitole knihy [5].

B Torzia konexie

So štruktúrou lineárnej konexie súvisí aj pojem *torzia konexie*. Pokiaľ uvažujeme varietu so štruktúrou lineárnej konexie (M, ∇), predpisom:

$$T(U, V) = \nabla_U V - \nabla_V U - [U, V] \tag{B.1}$$

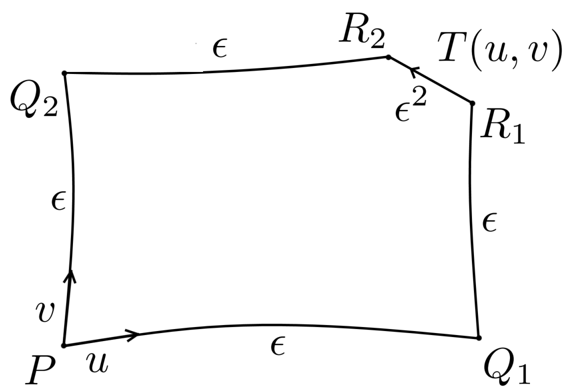
je na nej daný tenzor typu $\binom{1}{2}$, ktorý nazývame tenzor torzie. Môžeme si všimnúť, že pokiaľ zameníme vektorové vstupy U a V, dostávame $T(V, U) = -T(U, V)$. Tento tenzor je teda antisymetrický vzhľadom na dvojicu dolných indexov:

$$T^{\mu}_{\nu\rho} = -T^{\mu}_{\rho\nu} \tag{B.2}$$

Komponety tenzora torzie možno vyjadriť ako:

$$T^{\mu}_{\nu\rho} = \Gamma^{\mu}_{\rho\nu} - \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} \tag{B.3}$$

Pokiaľ máme v bode P na M dva vektory u a v, bod P a vektor u jednoznačne definujú geodetiku. Keď po tejto geodetike paralelne prenesieme vektor v o infinitezimálnu hodnotu parametra ϵ dostaneme vektor v' v bode Q_1. Bod Q_1 a vektor v' taktiež jednoznačne definujú geodetiku. V smere tejto geodetiky sa následne môžeme opäť posunúť o rovnakú parametrickú vzdialenosť, čím sa dostaneme do bodu R_1. Následne potom môžeme tento postup zopakovať s tým, že zameníme vektory u a v. Príslušné dva body nazveme Q_2 a R_2. Vo všeobecnom prípade sa body R_1 a R_2 nemusia zhodovať. Možno ukázať, že pokiaľ sa chceme z bodu R_1 dostať do bodu R_2, bude k tomu potrebný ešte posun v smere vektora $T(u, v)$ o parametrickú vzdialenosť ϵ^2 (Obrázok 2) [5].



Obrázok 2
Krok o ϵ^2 v smere vektora $T(u, v)$ uzatvára rovnobežník z geodetík.

Našou prirodzenou predstavou je, že pokiaľ sa pohneme rovno (čiže po geodetike) v jednom smere a následne tiež rovno (t.j. po inej geodetike) v inom smere o rovnakú vzdialenosť, malo by platiť, že sa dostaneme na to isté miesto nezáležiac na tom v akom poradí tieto kroky urobíme. Častou požiadavkou pri závádzaní štruktúry lineárnej konexie na variete preto býva nulovosť tenzora torzie. Na základe vzťahu (B.3) potom z toho vyplýva, že koeficienty konexie musia byť symetrické vzhľadom na dvojicu dolných indexov.

$$\Gamma^{\mu}_{\rho\nu} = \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} \tag{B.4}$$

Viac o geometrickom význame torzie a dôsledkoch jej (ne)nulovosti sa čitateľ môže dozvedieť napríklad v časti 15.8 knihy [5].

C Tenzor krivosti a Ricciho tenzor

Pokiaľ je na variete M zavedená štuktúra lineárnej konexie, a teda je na nej umožnený paralelný prenos tenzorov, tak sa možno baviť aj o jej krivosti. Pri paralelnom prenose vektora z jedného bodu variety do druhého závisí tvar výsledného paralelne preneseného vektora aj od cesty, po ktorej sa tento prenos uskutočňuje. Pokiaľ vektor prenesieme po uzavretej ceste výsledný paralelne prenesený vektor nemusí byť vo všeobecnom prípade s pôvodným vektorom v tom istom bode variety zhodný. Rozdiel medzi pôvodným a paralelne preneseným je spôsobený zakrivením variety. Tento jav môžeme využiť, aby sme zakrivenie variety odhalili a zaviedli nej tenzor, ktorý nám umožní zistiť akým spôsobom a v ktorých rozmeroch je varieta zakrivená. Tento tenzor budeme nazývať *Riemannov tenzor krivosti* (alebo len tenzor krivosti).

Kým definujeme tenzor krivosti, zavedieme ešte jeden operátor, ktorý pri tejto definícii využijeme. Paralelný prenos všeobecného tenzora možno uskutočniť pomocou *operátora paralelného prenosu* späť (čiže v opačnom smere než v akom narastá parameter) po krivke γ o parametrickú vzdialenosť t, ktorý značíme τ_t^γ. Podobne ako v prípade lieovského prenosu a Lieovej derivácie pre operátor paralelného prenosu platí, že ho možno zapísať ako exponentu kovariantnej derivácie. Pokiaľ je γ integrálna krivka vektorového poľa W, pre operátor paralelného prenosu platí:

$$\tau_t^\gamma = e^{t\nabla_W} \equiv \hat{1} + t\nabla_W + \frac{t^2}{2!}\nabla_W\nabla_W + ... \tag{C.1}$$

Pomocou takto definovaného operátora teraz môžeme uskutočniť paralelný prenos vektora po jednej špecifickej uzavretej krivke. Nech U a V sú vektorové polia na M. Uvažujme teda uzavretú krivku vytvorenú z piatich častí. Prvou z nich je posun o infinitezimálny parameter ϵ v smere integrálnej krivky vektorového poľa U, následne posun o rovnakú hodnotu parametra v smere poľa V, potom posun o hodnotu $-\epsilon$ v smere poľa U a taktiež o $-\epsilon$ v smere poľa V. Ako vieme z diferenciálnej geometrie, k uzavretiu tejto krivky (do druhého rádu) ešte potrebujeme posun o hodnotu parametra $-\epsilon^2$ v smere vektorového poľa $[U, V]$. Operátor paralelného presunu vektora po takejto krivke z bodu P do toho istého bodu P nazvime $\tau_{P,P}$. S využitím vzťahu (C.1) zisťujeme, že tento operátor možno s presnosťou do druhého rádu zapísať ako:

$$\tau_{P,P} = \hat{1} - \epsilon^2 R(U, V) \tag{C.2}$$

V tomto vzťahu predstavuje $R(U, V)$ operátor krivosti daný ako:

$$R(U, V) = \nabla_U\nabla_V - \nabla_V\nabla_U - \nabla_{[U,V]} \equiv [\nabla_U, \nabla_V] - \nabla_{[U,V]} \tag{C.3}$$

Operátor krivosti teda vyjadruje v danom bode variety rozdiel medzi pôvodným vektorom a tým, ktorý bol do neho paralelne prenesený po uzavretej krivke danej poľami U a V. Možno ukázať, že operátor krivosti je F-lineárny vzhľadom na oba vektorové vstupy, a že prostredníctvom neho možno definovať tenzor typu $\binom{1}{3}$, ktorý nazývame tenzor krivosti [5]:

$$R(W,U,V,\alpha) = \langle \alpha, R(U,V)W \rangle \equiv \langle \alpha, ([\nabla_U, \nabla_V] - \nabla_{[U,V]})W \rangle \tag{C.4}$$

V súradnicovej báze určíme komponenty tenzora krivosti ako:

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^{\mu}_{\nu\rho,\sigma} + \Gamma^{\xi}_{\nu\sigma}\Gamma^{\mu}_{\xi\rho} - \Gamma^{\xi}_{\nu\rho}\Gamma^{\mu}_{\xi\sigma} \tag{C.5}$$

Tenzor krivosti nám teda umožňuje získať na základe zavedených koeficientov konexie informáciu o krivosti variety. Na základe tenzora krivosti možno definovať aj ďalší tenzor nesúsi informáciu o zakrivení variety. Tento tenzor nazývame *Ricciho tenzor* a získame ho kontrakciou tenzora krivosti:

$$R_{\mu\nu} = R^{\xi}_{\mu\xi\nu} \tag{C.6}$$

Ďalšie informácie o tenzore krivosti, Ricciho tenzore a geometrii zakrivených priestorov sa možno dozvedieť napríklad v časti 15.5 knihy [5].

Literatúra

[1] Cosimo Bambi. *Introduction to general relativity.* Springer Verlag, Singapore, 2018.

[2] Jason Bennett. A pedagogical review of gravity as a gauge theory, 2021.
Dostupné na:
https://arxiv.org/pdf/2104.02627.pdf.

[3] Élie Cartan. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie). *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3e série, 40:325–412, 1923.

[4] Élie Cartan. Sur les variétés à connexion affine, et la théorie de la relativité généralisée (première partie) (suite). *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3e série, 41:1–25, 1924.

[5] Marián Fecko. *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov.* Iris, 2018.

[6] Peter Havas. Four-Dimensional Formulations of Newtonian Mechanics and Their Relation to the Special and the General Theory of Relativity. *Rev. Mod. Phys.*, 36:938–965, 1964.

[7] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation.* Freeman & Co., 1973.

[8] Alexander Tolish. General relativity and the newtonian limit. 2010.
Dostupné na:
https://www.math.uchicago.edu/ may/VIGRE/VIGRE2010/REUPapers/Tolish.pdf.