

Zadanie témy bakalárskej práce

Školiteľ: Doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.

Katedra / Pracovisko: Katedra teoretickej fyziky

Názov práce: Cliffordova algebra $C(2,0)$ a grupa $\text{Pin}(2,0)$

Popis zadania:

Aj keď *spinory* ako také objavil Cartan, zostali nepovšimnuté a do naozajstnej fyziky sa dostali s fanfárami až cez Paula Diraca v roku 1928, keď na ne narazil „v praxi“. Vtedy publikoval svoju slávnu rovnicu. Tá opisovala (plánovane) relativistickú časticu (elektrón) a neplánovane z nej zadarmo vyšlo, že ten elektrón má spin $1/2$ (čo bola bomba, lebo experimentálne - cez Sterna-Gerlacha - sa to o elektróne už vedelo). Na túto rovnicu prišiel tak, že sa snažil „faktorizovať“ už vtedy známu Kleinovu-Gordonovu rovnicu. T.j. celkom rozumne predpokladal, že istý diferenciálny operátor druhého rádu by mohol byť „súčinom“ dvoch po sebe idúcich operátorov prvého rádu. Po ceste sa mu to síce nečakane skomplikovalo, ale to by nebol Dirac, keby potenciálnu šlamastiku nepremenal na úspech.

Cieľom bakalárskej práce by bolo ohmatať si matematiku spojenú s Diracovou rovnicou, ale v jednoduchšom prípade, ako to robil Dirac (a ako sa to robí v učebniciach o elementárnych časticach). Zjednodušenie bude spočívať v tom, že namiesto 4-rozmerného Minkovského priestoru (kde to celé robil Dirac) budeme uvažovať len 2-rozmernú euklidovskú rovinu. Čiže sa začne faktorizáciou Laplaceovho operátora v rovine (a nie d'Alembertovho operátora v Minkovského priestore).

Tento zjednodušený prípad sa ale bude uvažovať už z moderného pohľadu na vec. Ten spočíva v tom, že existuje čosi s názvom Cliffordova algebra $C(p,q)$ (my budeme potrebovať podrobnosti o $C(2,0)$, ale zrátame si aj $C(1,1)$ a $C(0,2)$). Ďalej jej reprezentácia v priestore spinorov (tam vznikajú známe gama-maticy) a grupy $\text{Pin}(p,q)$ a $\text{Spin}(p,q)$ - tu sa ale obmedzíme len na $(p,q)=(2,0)$.

Cieľ práce:

V bakalárskej práci by sa zráтали detaily Cliffordových algebier $C(2,0)$, $C(1,1)$ a $C(0,2)$ a Cliffordových grup $\text{Pin}(2,0)$ a $\text{Spin}(2,0)$ - to je celkom nenáročné. Vyššou (nepovinnou) ambíciou by bolo podobné zráatanie grup Pin a Spin pre prípad $(0,2)$ a prípadne ešte o dosť vyššou $(1,1)$.

Vhodné pre záujemcu, ktorý plánuje chodiť na predmet Matematická fyzika (Cliffordove algebry sa ale v tomto predmete priamo nepreberajú). Väčšinou sa používa lineárna algebra (taká, aká sa učí a je kľúčová v predmete MF).