UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Galileovsky invariantné tenzory

BAKALÁRSKA PRÁCA

2022

Filip VARHANÍK

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Galileovsky invariantné tenzory

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program:	Fyzika
Študijný odbor:	Fyzika
Školiace pracovisko:	FMFI.KTF - Katedra teoretickej fyziky
Vedúci práce:	doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.

Bratislava 2022

Filip VARHANÍK

65633883

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta:	Filip Varhaník
Študijný program:	fyzika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor:	fyzika
Typ záverečnej práce:	bakalárska
Jazyk záverečnej práce:	slovenský
Sekundárny jazyk:	anglický

Názov: Galileovsky invariantné tenzory
Galilei-invariant tensors

Anotácia: Z teoretickej mechaniky (z časti o lineárnej pružnosti) je známe, ako vyzerajú homogénne a izotropné tenzory. Sú poskladateľné z Kroneckerovych symbolov a Levi-Civitovych symbolov. Homogenita a izotropia sú vlastne invariantnosti voči istým grupám, a to voči transláciám a rotáciám. Tie tvoria spolu tzv. euklidovskú grupu (translácie a rotácie sú jej podgrupy). Vyššie spomínané tenzory sú teda invariantné voči euklidovskej grupe.
Od čias Galileiho však vieme, že fyzikálne zákony by mali byť invariantné aj voči transformácii, ktorou je prechod do sústavy pozorovateľa, ktorý sa oproti nejakému referenčnému inerciálnemu pohybuje rovnomerne a priamočiaro. (Táto predstava je známa ako Galileiho princíp relativity.) Fyzikálne zaujímavá grupa symetrie sa tak prirodzene rozširuje na tzv. Galileiho grupu, v ktorej je euklidovská grupa len podrupou. Tá ale pôsobí prirodzene v 4-rozmernom časopriestore. Galileovsky invariantné tenzory sú tak isté tenzory v tomto 4-rozmernom časopriestore (teda isté štvortenzory).
Štvortenzory sú oveľa známejšie v kontexte Einsteinovej (nie Galileovej) relativity (kde hrá úlohu Galileiho grupy tzv. Poincarého - alebo tiež nehomogénna Lorentzova - grupa). Táto práca tak umožní potenciálnemu záujemcovi porovnať isté aspekty starej galileovskej relativity s novšou einsteinovskou v jednotnom jazyku 4-rozmerného časopriestoru.
Potrebné výpočty sú v konečnom dôsledku prevažne z lineárnej algebry, zíde sa vedieť niečo aj zo základov Lieových grúp a algebier, úplne stačí úroveň získaná napríklad na výberovom predmete Matematická fyzika pre 3FYZ.

Cieľ: Systematicky nájsť všetky galileovsky invariantné tenzory do rangu 2 vrátane a spísať o tom text zrozumiteľný motivovaným spolužiakom.

Literatúra: M.Fecko: Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov, Iris 2004, 2009, 2018

Vedúci:	doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.
Katedra:	FMFI.KTF - Katedra teoretickej fyziky
Vedúci katedry:	doc. RNDr. Tomáš Blažek, PhD.
Dátum zadania:	05.10.2021

Dátum schválenia: 05.10.2021

prof. RNDr. Jozef Masarik, DrSc.
garant študijného programu

65633883

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

....

študent

....

vedúci práce

Poďakovanie Rád by som poďakoval môjmu školiteľovi doc. RNDr. Mariánovi Feckovi, PhD. za jeho čas, ktorý mi v procese tvorby tejto práce venoval, za jeho trpezlivosť a smerovanie, ktoré mi pomohlo vytvoriť si lepší obraz o tom, ako sa majú písať odborné práce.

Abstrakt

Autor: Filip Varhaník
Názov práce: Galileovsky invariantné tenzory
Škola: Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta: Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra: FMFI.KTF - Katedra teoretickej fyziky
Vedúci práce: doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.
Miesto: Bratislava
Dátum: 18.5.2022
Počet strán: 50
Druh záverečnej práce: Bakalárska práca

Cieľom tejto práce je nájsť všetky galileovsky invariantné tenzory do rangu 2 vrátane. V úvode definujeme pojem tenzorového poľa na variete, následne charakterizujeme galileovskú transformáciu ako štruktúru na galileovskom časopriestore a jej pôsobenie na tenzorových poliach pomocou aparátu reprezentácie grupy v priestore tenzorových polí $\mathcal{T}^p_q(M)$. Pomocou vhodnej reprezentácie odvodíme podmienku invariantnosti tenzorov vzhľadom na pôsobenie grupy a jej infinitezimálnu verziu zapíšeme pomocou Lieovej derivácie. Potom nájdeme samotné galileovsky invariantné tenzory a na záver kvalitatívne tieto výsledky analyzujeme.

Kľúčové slová: Tenzor, invariantný tenzor, galileovský časopriestor, Lieova derivácia

Abstract

Author: Filip Varhaník
Title: Galilei-invariant tensors
University: Comenius University in Bratislava
Faculty: Faculty of Mathematics, Physics and Informatics
Department: Department of Theoretical Physics
Advisor: doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.
City: Bratislava
Date: 18.5.2022
Number of pages: 50
Type of thesis: Bachelor thesis

The goal of the thesis is to find all Galilei-invariant tensors up to the rank of 2 included. In the introduction we define the concept of tensor field on a manifold, thereafter we specify the Galilean transformation as a structure on a Galilean spacetime and its action on tensor fields with the help of representations of a group in the space of tensor fields $\mathcal{T}^p_q(M)$. Using a proper representation, we derive a condition for a tensor to be invariant with respect to the action of the group and write down its infinitesimal version using Lie derivative. We then find the Galilei-invariant tensors and in the summary of the thesis we qualitatively analyse the results.

Keywords: Tensor, invariant tensor, Galilean spacetime, Lie derivative

Obsah

Predhovor

Najprv sa budeme zaoberať pojmom samotného tenzora, pričom cieľom bude prepojiť to, ako si tenzor väčšinou predstavuje študent bakalárskeho stupňa fyziky (maticový zápis) s jeho skutočnou definíciou. Tento pojem následne rozvinieme definovaním tenzorového poľa na variete.

Ďalšia kapitola bude kľúčová, budeme v nej popisovať galileovský časopriestor, teda priestor, na ktorom je definovaná štruktúra galileovskej transformácie. Popíšeme, ako presne galileovská transformácia na body časopriestoru pôsobí, pričom túto transformáciu následne s pojmom Galileovej grupy. Ďalej ukážeme, že Galileova grupa patrí medzi *Lieove* grupy. grúp. Nielen to, ukážeme, že Lieovej grupe sa dá priradiť špeciálny vektorový priestor - Lieova algebra - ktorá danú grupu do veľkej miery popisuje, a zároveň sa s ňou vo všeobecnosti pracuje jednoduchšie ako s grupou. Najmä vlastnosti Lieovej algebry sa budú vo veľkom využívať pozdĺž celej práce.

Ďalším cieľom bude ukázať, že ak časopriestor budeme chápať ako varietu, budeme vedieť pomocou aparátu reprezentácii grúp rozumne zadefinovať, ako Galileova grupa pôsobí na tenzorové polia na galileovskom časopriestore. Ako veľmi užitočný pojem sa tu ukáže *odvodená reprezentácia*, spojením vedomostí o nej spolu s vedomosťami o Lieových algebrách totiž budeme vedieť zmysluplne zadefinovať podmienku invariantnosti tenzorových polí voči pôsobeniu ľubovoľnej Lieovej grupy.

Pokračovať budeme kapitolou, v ktorej zadefinujeme dva dôležité pojmy - akcia grupy na množine a pull-back tenzorového poľa. To nám dovolí korektne definovať reprezentáciu Lieovej grupy na priestore tenzorových polí.

Pripravení výsledkom z predošlej časti využijúc vzťahy prepajájúce Lieovu grupu a jej zodpovedajúcu Lieovu algebru nájdeme príslušnú odvodenú reprezentáciu. Ako sa ukáže, táto odvodená reprezentácia sa dá elegantne zapísať pomocou *Lieovej derivácie*, ktorú si bližšie popíšeme a objasníme jej význam. Tým si efektívne vybudujeme všetok potrebný matematický aparát, aby sme samotné galileovsky invariantné tenzory našli, čo bude cieľom ďalšej kapitoly.

Na záver budeme diskutovať o tom, či sú naše výsledky logické a v zhode s očakávaniami. Ako totiž vyjde najavo, viacero z tenzorov je uhádnuteľných ešte pred samotnými výpočtami, alebo počas výpočtov - ukážeme si totiž, že ak je nejaký tenzor invariantný, indukuje sa tým celá množina ďalších invariantných tenzorov. Zaujímavým výsledkom napríklad bude, že v galileovskom časopriestore (narozdiel od Minkowského časopriestoru) neexistuje invariantná metrika.

1 Tenzory

1.1 Úvod

Na tieto matematické objekty študent fyziky za prvé dva roky štúdia z času na čas narazí. Napríklad v podobe tenzoru zotrvačonosti, ktorý sa niekedy zvykne spomenúť v prváckej mechanike a ďalej sa o ňom diskutuje v teoretickej mechanike. V rámci osnovy tohto predmetu ďalej študent narazí napríklad na tenzor deformácie, ktorý (ako už názov naznačuje), popisuje zmenu relatívnych vzdialeností bodov kontinua pri pôsobení vonkajšej sily. Ďalším príkladom je tenzor C_{ijkl}, ktorý spája už spomínaný tenzor deformácie s tenzorom napätia, a je tým pádom kľúčovým prvkom v tenzorovej formulácii Hookovho zákona.

Tenzor zotrvačnosti aj tenzor deformácie sme vtedy vedeli identifikovať s nejakou maticou, keďže obom tenzorom prináležali dva indexy, rovnako, ako je to v prípade matíc, v prípade tenzora C_{ijkl} síce identifikácia s maticou zlyhávala, ale do istej miery sme si tento objekt stále vedeli predstaviť ako $81 = 3^4$ čísel, ktoré nám ho popisujú. My sa teraz zadefinujeme a ukážeme, že v prípadoch tenzorov momentu zotrvačnosti a deformácie je identifikácia s maticou zmysluplná, avšak nie úplna.

1.2 Vektory, duálny priestor a kovektory

Vektor je pojem, ktorý sa vo fyzike využíva veľmi často, a to napriek tomu, že takýto základný matematický objekt sa dá definovať mnohými rôznymi spôsobmi, ktoré na prvý pohľad vôbec nie sú identické. Nám momentálne postačí, že vektor je prvok vektového priestoru, ktorý (kým ho bližšie nešpecifikujeme) ďalej budeme označovať L. Obmedzíme sa na konečnorozmerné vektorové priestory, takže nebude problém zaviesť v tomto vektorovom priestore konečnú bázu, ktorú označíme e_a, $a = 1, 2, \dots, \dim L$. Ako vieme, ľubovoľný vektor z L vieme zapísať ako lineárnu kombináciu bázových prvkov, a tak pre ľubovoľný $v \in L$ platí:

$$v = v^a e_a \tag{1}$$

pričom uvažujeme Einsteinovu sumačnú konvenciu. Ako si môžeme všimnúť, jeho komponentám sme priradili horný, nie dolný index. Nestalo sa tak iba z kozmetických dôvodov, význam tohoto zápisu sa však plne ukáže až po rozobratí zvyšných bodov tohto paragrafu, ktorými sú duálny priestor a kovektory.

Duálny priestor (skrátene duál) vždy úzko súvisí s nejakým vektorovým priestorom L, širší názov tak prirodzene je duálny priestor k vektorovému priestoru L. Prvky duálu sa nazývajú *kovektory.* Ak si nejaký všeobecný kovektor označíme ako α, vieme ho popísať ako zobrazenie:

$$\alpha : L \to \mathbb{R} \tag{2}$$

Od tohto zobrazenia však budeme požadovať linearitu vzhľadom na jeho argumenty, teda ak v, w sú vektory a λ je reálne číslo, musí platiť:

$$\alpha(v + \lambda w) = \alpha(v) + \lambda\alpha(w) \tag{3}$$

Dá sa overiť, že ak na tomto priestore zavedieme lineárnu kombináciou kovektorov α, β ako:

$$(\alpha + \mu\beta)(v) := \alpha(v) + \mu\beta(v) \tag{4}$$

bude aj takéto zobrazenie lineárne vzhľadom na jeho argumenty, a tak kovektory tvoria lineárny priestor: duál, ktorý označujeme L^*.

Ďalej by sme duálu radi priradili nejakú bázu. Bez dôkazu uvedieme, že dimenzia duálu je rovnaká, ako dimenzia pôvodného vektorového priestoru. Ak si túto bázu označíme e^a (všimnime si, že tentokrát je pri bázových prvkoch index hore a nie dole, čiže opačne ako pri vektoroch), dá sa táto báza definovať nasledovným vzťahom:

$$e^a(e_b) = \delta^a_b \tag{5}$$

Pozrime sa, či takáto definícia vôbec dáva zmysel. e^a je bázový prvok L^*, čiže kovektor, ktorý aplikujeme na e_b, čiže bázový prvok L, teda vektor. Podľa definície kovektora by sme mali dostať číslo, čo sa aj potvrdilo, dostávame Kroneckerovu deltu. Študent bakalárskeho stupňa v odbore fyzika je zväčša zvyknutý písať Kroneckerovu deltu ako δ_{ab}. Ako však vidíme, vo vzťahu vyššie je jeden index hore, druhý dole. Jedno z poučení tejto práce, tak ako sa naznačilo už pri diskusii o vektoroch, je, že pri tenzorovom počte záleží na polohe indexov, či už bazových prvkov, alebo komponent, pričom platí, že počet voľných indexov hore a počet dole na ľavej strane rovnice je rovnaký, ako na pravej strane rovnice. Takže, na ľavej strane rovnice máme jeden index hore (konkrétne a), a jeden index dole (konkrétne b). Tým pádom na pravej strane rovnice sa toto musí zachovať, a píšeme Kroneckerovu deltu v tvare δ^a_b. To, že takto definované e^a bude bázou však hneď jasné vôbec nie je. Mohlo by sa napríklad stať, že pre rôzne a budú e^a lineárne závislé. To, že sa tak nestane, však necháme bez dôkazu, nie je to pre našu prácu dôležité. Nakoniec uvedieme, že kvôli tomu, že L^* je lineárny priestor, vieme ľubovoľný kovektor napísať ako:

$$\alpha = \alpha_a e^a \tag{6}$$

Než prejdeme ku samotným tenzorom, ostáva nám spomenúť poslednú vec. Keďže L^* je vektorový priestor, môžeme aj k nemu vytvoriť duál, ktorý označíme L^{**}. Prvky L^{**} sú podľa definície duálu potom zobrazenia, ktoré vezmú kovektory (prvky L^*, resp. prvky "o stupeň nižšieho duálu") a vyhodia reálne číslo. Teraz príde na rad tvrdenie, že medzi vektorovými priestormi L a L^{**} existuje *kanonický izomorfizmus*. Rozoberme si, čo to znamená. *Izomorfizmus* je vo všeobecnosti zobrazenie medzi dvoma množinami, ktoré je bijektívne a zachováva štruktúru týchto množín. V prípade vektorových priestoru je touto štruktúrou uzavretosť vzhľadom na lineárne kombinácie, a tak izomorfizmy vektorových priestorov sú bijektívne lineárne zobrazenia. Medzi dvoma množinami však izomorfizmov môže existovať viacero. To, že nejaký z nich je *kanonický* znamená, že je v nejakom ohľade špeciálny, konkrétne v tomto prípade tým, že na svoje vyjadrenie nepotrebuje, aby sme v priestoroch L, L^* a ani L^{**} vybrali nejakú bázu. S týmto na pamäti je potom rozumné stotožniť samotné vektory s prvkami L^{**}, a teda chápať vektory ako zobrazenia:

$$v : L^* \to \mathbb{R} \tag{7}$$

Po tomto komentári už môžeme definovať tenzor A ako zobrazenie:

$$A : \underbrace{L \times ... \times L}_{q} \times \underbrace{L^* \times ... \times L^*}_{p} \to \mathbb{R} \tag{8}$$

Tenzor je teda zobrazenie, ktorého vstupmi je q vektorov a p kovektorov, pričom výstupom je reálne číslo. Od tohto zobrazenia však navyše vyžadujeme multilinearitu, teda linearitu vo svojich argumentoch pri zafixovaní všetkých ostatných. Ako môžeme vidieť, táto definícia sa na prvý pohľad s maticovou formou zápisu tenzora prepája iba veľmi ťažko. Avšak ako uvidíme za chvíľu, prepojenie, a to dosť silné, tu je.

Všimnime si teraz zaujímavú vec. Ak položíme $q = 1$ a $p = 0$, dostávame lineárne zobrazenie:

$$A : L \to \mathbb{R} \tag{9}$$

to je však kovektor. A teraz opačne, $q = 0$ a $p = 1$:

$$A : L^* \to \mathbb{R} \tag{10}$$

a to je vektor. Ako vidíme, tenzor je v skutočnosti len rozšírením pojmu vektor a kovektor. Je to napokon prirodzené, keďže jeho definičným oborom je kartézsky súčin vektorových priestorov L a L^*, teda priestorov, ktorého prvkami sú vektory a kovektory.

1.3 Terminológia okolo tenzorov a komponenty tenzora

Tenzorom vieme priradiť rang (označme ho n), ktorý definujeme ako:

$$n = p + q \tag{11}$$

Vektory aj kovektory sú potom tenzory prvého rangu. Tenzorom rovnako vieme priradiť akého sú typu, rovnako na základe parametrov p a q. Hovoríme, že tenzory sú typu $\binom{p}{q}$. Napríklad, vektor je tenzor typu $\binom{1}{0}$, kovektor je tenzor typu $\binom{0}{1}$. Zaoberajme sa teraz chvíľu tenzormi typu $\binom{0}{2}$. Podľa definície sú to zobrazenia, ktoré vezmú dva vektory, a vyhodia reálne číslo. Takéto niečo sme však už mali. Na lineárnej algebre sa takéto zobrazenie nazývalo bilineárna forma, pričom ak táto bilineárna forma bola kladne definitná a symetrická, išlo o skalárny súčin, ktorý nám je už dobre známy. Zisťujeme tak, že bilineárna forma je v skutočnosti len konkrétnym typom tenzora. Teraz prichádza kľúčový moment, a to fakt, že bilineárnej forme (označme ju B) sme vedeli prideliť maticu, konkrétne tak, že sme ju aplikovali na bázu priestoru $L \times L$, teda:

$$B_{ij} = B(e_i, e_j) \tag{12}$$

Analogicky by sme teda vedeli prideliť maticu ľubovoľnému tenzoru rangu 2. Pri tenzoroch rangu 1 úlohu matice plnili komponenty (reálne čísla) vektora a kovektora, predtým označované v^a, α_a. Pri tenzoroch všeobecného rangu sa tento názov zachová, a budeme tak môcť hovoriť o *komponentách* tenzora. Tie sa pre všeobecný tenzor typu $\binom{p}{q}$ vypočítajú analogickým rozšírením vzťahu pre komponenty bilineárnej formy:

$$A^{a_1 a_2 \ldots a_p}_{b_1 b_2 \ldots b_q} = A(e_{b_1}, e_{b_2}, \ldots, e_{b_q}, e^{a_1}, e^{a_2}, \ldots, e^{a_p}) \tag{13}$$

Na záver tejto sekcie treba uviesť ešte veľmi dôležitý fakt. Uvažujme dva tenzory typu $\binom{p}{q}$, označme ich A, B. Ak zadefinujeme lineárnu kombináciu tenzorov rovnakého typu nasledovne:

$$(A + \lambda B)(v_1, \ldots, \alpha_1, \ldots) := A(v_1, \ldots, \alpha_1, \ldots) + \lambda B(v_1, \ldots, \alpha_1, \ldots) \tag{14}$$

kde v_i a α_i nie sú komponenty ani bázové prvky, ale všeobecné vektory a kovektory, potom takéto tenzory tvoria vektorový priestor, ktorý označíme $T^p_q(L)$. Zatiaľ teda máme, aký tvar majú komponenty tenzora typu $\binom{p}{q}$, teda prvku vektorového priestoru $T^p_q(L)$. Na to, aby sme vedeli napísať jeho celý tvar však ešte potrebujeme bázu priestoru $T^p_q(L)$.

1.4 Tenzorový súčin a báza priestoru $T^p_q(L)$

Na nájdenie bázy tohto priestoru budeme potrebovať zadefinovať operáciu tenzorového súčinu. To je zobrazenie, ktoré sa definuje nasledovne:

$$\otimes : T^{p_1}_{q_1}(L) \times T^{p_2}_{q_2}(L) \rightarrow T^{p_1+p_2}_{q_1+q_2}(L) \tag{15}$$

Ako vidíme, toto zobrazenie berie ako vstupy dva tenzory, ktoré môžu, ale nemusia byť rovnakého typu, pričo výsledkom je opäť tenzor, tentokrát rangu rovnému súčtu rangov vstupných tenzorov. To, ako presne tenzorový súčin funguje na argumentoch, ukážeme na príklade tenzorov A a B, pričom A bude typu $\binom{1}{1}$ a B typu $\binom{1}{2}$:

$$(A \otimes B)(u, v, w, \alpha, \beta) := A(u, \alpha)B(v, w, \beta) \tag{16}$$

kde u, v, w označuje vektory a α, β označuje kovektory. Rozoberme si, čo táto definícia hovorí. Podľa definície je $A \otimes B$ tenzor typu $\binom{1+1}{1+2}$, teda tenzor typu $\binom{2}{3}$. To znamená, že ako vstup potrebuje 3 vektory a 2 kovektory, preto sme zvolili vstup práve ako (u, v, w, α, β). Operácia tenzorového súčinu je potom definovaná tak, že najprv naplníme tenzor A postupne takým počtom vektorov a kovektorov, akého je A typu, a následne to isté spravíme s tenzorom B pomocou zvyšných argumentov. Podľa definície tenzora ako takého by sme následne mali dostať reálne číslo. Avšak $A(u, \alpha) \in \mathbb{R}$ a rovnako $B(v, w, \beta) \in \mathbb{R}$, a teda definícia tenzorového súčinu je korektná, keďže výstupom je násobenie dvoch reálnych čísel, čo je opäť reálne číslo.

Teraz príde krok, ktorý je síce veľmi dôležitý, ale necháme ho bez dôkazu, keďže ten pre naše ciele nie je kľúčový. Uvažujme vektorový priestor $T^p_q(L)$, bázu priestoru L označíme ako e_a, bázu priestoru L^* ako e^a. Potom tvrdíme, že bázou priestoru $T^p_q(L)$ je nasledovný výraz:

$$e^{b_1} \otimes e^{b_2} \otimes \ldots \otimes e^{b_q} \otimes e_{a_1} \otimes e_{a_2} \otimes \ldots \otimes e_{a_p} \tag{17}$$

To nám ale umožňuje vyjadriť ľubovoľný tenzor typu $\binom{p}{q}$ ako:

$$A = A^{a_1 a_2 \ldots a_p}_{b_1 b_2 \ldots b_q} e^{b_1} \otimes e^{b_2} \otimes \ldots \otimes e^{b_q} \otimes e_{a_1} \otimes e_{a_2} \otimes \ldots \otimes e_{a_p} \tag{18}$$

Všimnime si, že takéto vyjadrenie je konzistentné s vyjadrením kovektora ako $\alpha = \alpha_a e^a$ a vektora ako $v = v^a e_a$. Novým zistením je, že napríklad bilineárnu formu vieme vyjadriť ako:

$$B = B_{b_1 b_2} e^{b_1} \otimes e^{b_2} \tag{19}$$

a tenzor typu $\binom{1}{2}$ ako:

$$A = A^{a_1}_{b_1 b_2} e^{b_1} \otimes e^{b_2} \otimes e_{a_1} \tag{20}$$

Poslednou poznámkou je konvencia, ktorú si čitateľ mohol všimnúť, a to že v rámci bázy priestoru $T^p_q(L)$ je zvykom najprv písať kovektory, a po nich vektory. Toto poradie je skutočne arbitrárne, avšak my sa ho ďalej budeme držať. Teraz už je prepojenie medzi tenzormi druhého rangu a maticami zrejmé - keďže sa jedná o bilineárne zobrazenia, vieme im prisúdiť maticu, ktorá zodpovedá komponentám tohto tenzora, avšak celý tenzor dostaneme až po pripojení spomínanej matice k báze priestoru $T^p_q(L)$ v podobe tenzorového súčinu príslušných bázových prvkov priestorov L a L^*. Vyššie uvedená teória nám navyše spojila tenzory nielen s maticami, ale vo všeobecnosti s ich komponentami, teda súborom reálnych čísel, ktoré nám tieto tenzory v značnej miere definujú.

1.5 Tenzorové polia

Odbočme teraz na chvíľu a predstavme si bodový elektrický náboj. Ako vieme, vytvára sa okolo neho radiálne elektrické pole. To v praxi znamená, že každému bodu priestoru, v ktorom pracujeme, vieme priradiť vektor. Dôležité je, že v rôznych bodoch priestoru smer aj veľkosť tohoto vektora môžu byť, a aj sú, odlišné, čo je popísané vzťahom pre elektrickú intenzitu od bodového náboja. Pre nás bude podstatné, že v tomto prípade vlastne používame koncept *vektorového poľa*. Čo bude ešte dôležitejšie, to sa bude dať zovšeobecniť na *tenzorové pole*. Príklad s elektrickým nábojom popisuje situáciu, v ktorej vektory priraďujeme bodom priestoru $\mathbb{R}^3$. Všeobecne sa tenzorové polia však nepriradzujú bodom $\mathbb{R}^3$, ale bodom tzv. *variety*. To je pojem, ktorý sa vo veľkom využíva napríklad v diferenciálnej geometrii, a momentálne nám nepôjde o jej presnú definíciu, čitateľ si ju však môže predstaviť ako priestor, pričom v okolí ľubovoľného bodu tohto priestoru sa dajú zaviesť lokálne súradnice, čiže tieto okolia vieme popisovať pomocou bodov priestoru $\mathbb{R}^n$, kde n je dimenzia danej variety. Príkladmi jednorozmernej variety sú napr. kružnica, priamka..., príkladmi dvojrozmernej variety povrch gule, rovina... Bližšie neurčenú varietu budeme označovať písmenom M. Tenzorové pole A typu $\binom{p}{q}$ na variete M je teda zobrazenie, ktorého vstupom je q vektorových polí a p kovektorových polí a výstupom je reálne číslo závislé od toho, kde na variete sa nachádzame, takže efektívne je výstupom funkcia na variete. Dá sa to rovnako predstaviť tak, že každému bodu variety je priradený tenzor, jeho vstupmi sú vektory a kovektory, a výstupom je reálne číslo, tak nám opäť vzniká funkcia na variete. Tak ako tenzory, rovnako aj tenzorové polia tvoria lineárny priestor, pričom teraz ho budeme značiť $\mathcal{T}^p_q(M)$, kde M špecifikuje na akej variete je dané tenzorové pole definované. Čo sa týka komponent tenzorového poľa, tie teraz budú môcť byť závislé na súradniciach, ktoré na variete definujeme, teda zo samotných komponent sa stávajú funkcie. Ako to však bude s bázou priestoru tenzorových polí $\mathcal{T}^p_q(M)$?

1.5.1 Báza priestoru $\mathcal{T}^p_q(M)$

Keď sme diskutovali o báze tenzorov v lineárnej algebre, dopracovali sme sa k istému vzťahu, kde vystupovali bázové prvky vektorových priestorov L a L^* v tvare e_a a e^a prepojené tenzorovým súčinom. Tenzorové pole má v skutočnosti analogický tvar, našim cieľom tak bude výrazy e_a a e^a bližšie špecifikovať.

Ako už bolo spomínané na začiatku, popísať, čo je to vektor, nie je vôbec také triviálne, ako sa môže zdať. Existuje viacero definícii, a na to, aby ich človek plne pochopil, musí mať základné vedomosti z diferenciálnej geometrie. Našim cieľom nebude tieto definície vysvetliť, naopak iba poskytnúť iný intuitívny pohľad na to, čo sa pod vektorom dá chápať.

Uvažujme teda varietu M. Každému bodu tejto variety nech je priradený nejaký vektor. Ďalej uvážme, že na našej variete je definovaná funkcia f. Zvoľme si teraz nejaký bod variety Q. V tomto bode sa môžeme pýtať, čomu je rovná smerová derivácia funkcie f v smere vektora zodpovedajúceho bodu Q. Ukáže sa, že je veľmi užitočné stotožniť daný vektor práve s diferenciálnym operátorom, ktorý z funkcie f vyrobí jej smerovú deriváciu v bode Q, resp. pre všetky body Q tak dostaneme vektorové pole. Bázové prvky tohto vektorého poľa potom budú prepojené s posunom pozdĺž súradníc x^i a definujú sa ako:

$$e_i := \frac{\partial}{\partial x^i} \equiv \partial_i \tag{21}$$

Je úplne pochopiteľné, že ak čitateľ nemal základný kurz diferenciálnej geometrie, takáto definícia predstavuje značný myšlienkový skok, ktorý môže pôsobiť mätúco. V takom prípade je najlepšie takúto definíciu iba prijať ako fakt, prípadne sa zamyslieť, že prepájať vektor, ktorý v istom zmysle vypovedá o smere, so smerovou deriváciou je rozumné, a pod symbolom ∂_i vidieť niečo, čo vypovedá o "báze možnej zmeny smeru".

Ostáva nám ešte popísať bázový prvok všeobecného kovektorového poľa. Na to nám pomôže nasledovná definícia: Uvažujme funkcie $f : M \to \mathbb{R}$ a vektorové pole V na M. Definujme potom nasledovné zobrazenie:

$$\langle df, V\rangle = Vf \tag{22}$$

kde $\langle df, V\rangle$ je operácia *binárneho spárenia* a zodpovedá aplikácii df na V. Potom je zrejmé, že výsledkom je opäť funkcia, pretože vieme rozpísať:

$$Vf = V^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{23}$$

čo je len lineárna kombinácia funkcii. Po ďalšej analýze by sme došli na to, že toto zobrazenie je lineárne vo V. To ale znamená, že df je kovektorové pole.

Dosaďme teraz za funkciu f priamo súradnice nášho priestoru, a pozrime sa, ako toto zobrazenie pôsobí na báze priestoru vektorových polí:

$$\langle dx^i, \partial_j \rangle = \partial_j x^i = \delta_i^j \tag{24}$$

Dostali sme Kroneckerovu deltu, čo znamená, že podľa definície z kapitoly o tenzoroch je dx^i duálnou bázou ku ∂_i. To je ale veľký krok, pretože sme tým získali nástroj na popísanie ľubovoľného tenzorového poľa typu $\binom{p}{q}$ definovaného na M ako:

$$A = A^{a_1 a_2 \ldots a_p}_{b_1 b_2 \ldots b_q}(x) dx^{b_1} \otimes dx^{b_2} \otimes \ldots \otimes dx^{b_q} \otimes \partial_{a_1} \otimes \partial_{a_2} \otimes \ldots \otimes \partial_{a_p} \tag{25}$$

2 Galileovská transformácia

2.1 Úvod

Teraz sa dostávame ku prvému slovu v názve tejto práce, a to "galileovsky". O čo vlastne ide? Názvom tejto kapitoly je galileovská transformácia, čo znamená, že budeme presne definovaným (galileovským) spôsobom transformovať prvky nejakej množiny. Konečným cieľom bude popísať matematický aparát, ktorým budeme môcť galileovsky transformovať tenzorové polia, teda našou množinou bude lineárny priestor $\mathcal{T}^p_q(M)$. Samotná galileovská transformácia však z definície pôsobí na prvky galileovského časopriestoru, ktorého súradnice budeme značiť $(t, \vec{r})$. Toto označenie má svoj konkrétny zmysel, t bude označovať čas a $\vec{r}$ je polohový vektor. Galileovské transformácie sú vo všeobecnosti kompozíciou translácii, rotácii a tzv. *galileovských boostov* (ďalej len boostov). Tie sa realizujú nasledovne:

$$(t, \vec{r}) \mapsto (t, \vec{r} + \vec{v}t) \tag{26}$$

kde $\vec{v}$ je konštantný vektor rýchlosti. Spomeňme si teraz na 1. Newtonov pohybový zákon: Ak na teleso v inerciálnej vzťažnej sústave nepôsobí žiadna sila, toto teleso ostáva v pokoji alebo rovnomernom priamočiarom pohybe. Všimnime si, že galileovský boost popisuje práve prechod od jedného pozorovateľa k druhému, pričom druhý sa oproti prvému pohybuje konštantnou rýchlosťou. Z toho vyplýva, že ak 1. Newtonov pohybový zákon platí v sústave spojenej s prvým pozorovateľom, musí nutne platiť aj v sústave spojenej s druhým pozorovateľom. Zákony mechaniky sú teda *invariantné voči galileovským boostom*, čo je ekvivalentné s tvrdením, že zákony mechaniky majú rovnakú formuláciu v ktorejkoľvek inerciálnej sústave - tvrdenie známe ako princíp relativity Newtonovej mechaniky [1].

Vráťme sa teraz ku jej matematickému vyjadreniu. Vzťah (26) sa dá zapísať aj maticovo:

$$\begin{pmatrix} t' \\ \vec{r}\,' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vec{v} & \mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \vec{r} \end{pmatrix} \tag{27}$$

Vyššie uvedenú maticu označíme ako:

$$g \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vec{v} & \mathbb{I} \end{pmatrix} \tag{28}$$

[1] pozri [5], str. 51,52

2.2 Pohľad cez grupy

Na maticu danú vzťahom (28), resp. matice pre rôzne $\vec{v}$ sa dá pozerať aj ako na prvky *grupy*. Grupa je definovaná ako množina, na ktorej je zavedená binárna operácia $\circ$, pričom táto operácia je asociatívna. Ďalej musí platiť, že grupa je vzhľadom na operáciu $\circ$ uzavretá. V grupe taktiež musí existovať *neutrálny prvok* e, pričom pre ľubovoľný grupový prvok g platí:

$$g \circ e = e \circ g = e \tag{29}$$

Nakoniec, ku každému grupovému prvku g existuje inverzný prvok g^{-1}, pričom:

$$g \circ g^{-1} = g{-}1 \circ g = e \tag{30}$$

Uveďme, že odteraz budeme pracovať iba s grupami, ktorých prvky sú matice, teda *maticovými grupami*. V takýchto grupách je neutrálnym prvkom prirodzene jednotková matica.

Ako sa ukazuje, matice dané vzťahom (28) nielen že tvoria grupu, ale táto grupa vykazuje isté zaujímavé vlastnosti. Vektory rýchlosti $\vec{v}$ totiž dokážeme spojito meniť. Nielen to, pri krátkej analýze by sme zistili, že operácia maticového násobenia na takejto grupe je hladkým zobrazením, teda že ak budeme chápať komponenty vektora $\vec{v}$ oboch matíc, ktoré sú vstupmi pre maticové násobenie, ako premenné, a prvky výslednej matice ako funkcie, tak tieto funkcie budú mať spojité všetky derivácie vzhľadom na tieto komponenty. Grupy, ktorých binárna operácia toto spĺňa, sa nazývajú tzv. *Lieove grupy.*

Treba pridať ešte dôležitý komentár. Hoci samotné matice zodpovedajúce boostom tvoria grupu, tá sa dá chápať iba ako podgrupa ešte väčšej grupy, ktorá má názov Gal(3). Číslo 3 preto, lebo Galileova grupa štandardne pôsobí v priestore, kde vektor $\vec{r}$ je trojrozmerný, teda efektívne v priestore $\mathbb{R}^4$ - jeden rozmer navyše za súradnicu zodpovedajúcu času. Je jednoduché nahliadnuť, že priestor $\mathbb{R}^4$ je varietou, pretože súradnicami tejto variety sú jeho samotné body. V našich výpočtoch budeme pracovať s štvorrozmerným galileovským časopriestorom, teda priestorom $\mathbb{R}^4$, avšak teóriu potrebnú na korektný opis matematického aparátu, ktorý je v tejto práci využívaný, budeme robiť pomocou všeobecnej variety M.

Tak ako boosty tvoria podgrupu, rovnako tvoria podgrupu translácie a rotácie, pričom translácie sa realizujú ako:

$$(t, \vec{r}) \mapsto (t + s, \vec{r} + \vec{a}) \tag{31}$$

kde s je konštanta a $\vec{a}$ je konštantný vektor. Pre rotáciu platí:

$$t \mapsto t \tag{32}$$

$$\vec{r} \mapsto \mathbf{R}\vec{r} \tag{33}$$

kde $\mathbf{R}$ je ľubovoľná rotačná matica (teda ortogonálna matica s determinantom rovným jednej). Táto poznámka je dôležitá, pretože neskôr budeme rozoberať, ako na tenzory pôsobí celá grupa Gal(3), a nie len jej podgrupa zodpovedajúca boostom. Treba uviesť, že všeobecná kompozícia translácie, rotácie a boostu sa dá zapísať ako jedna matica. Na túto maticu sa ešte budeme odvolávať, a budeme ju označovať *galileovská matica*, avšak nebudeme ju tu uvádzať, keďže jej konkrétny tvar pre nás nie je dôležitý. Matici popísanú vzťahom (28) budeme označovať ako *matica boostu*.

2.3 Vyjadrenie grupového prvku pomocou exponenty

Zafixujme teraz vektor rýchlosti a uvažujme maticu g v tvare:

$$g(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p\vec{v} & \mathbb{I} \end{pmatrix} \tag{34}$$

kde $p \in \mathbb{R}$ je parameter. Všimnime si tri veci. Jednak všetky matice $g(p)$ majú tvar zodpovedajúci matici g zo vzťahu (28), teda $g(p)$ sú skutočne grupovými prvkami. Ďalej prvok $g(0)$ je jednotkovou maticou, a teda neutrálnym prvkom grupy. Nakoniec, vyššie uvedené matice spĺňajú vzťah:

$$g(p+s) = g(p)g(s) \tag{35}$$

pre fixovanú rýchlosť, čo sa dá jednoducho overiť, takéto matice tým pádom tvoria tzv. *jednoparametrickú podgrupu*. Vzťah (35) spolu s podmienkou $g(0) = \mathbb{I}$ vlastne predstavuje rovnicu s počiatočnou podmienkou, pričom jej riešením je:

$$g(p) = e^{pX} \tag{36}$$

kde $X \equiv \frac{dg}{dp}(0)$. Pre matice zodpovedajúce boostom vieme tvar pre maticu X jednoducho odvodiť, a to podľa predpisu zderivovaním každého elementu matice g podľa parametra p. Dostávame:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \vec{v} & 0 \end{pmatrix} \tag{37}$$

Uveďme ešte, že exponenta v rovnici (36) sa dá rozvinúť do Taylorovho radu v parametri p. Jednoducho sa však dá overiť, že maticové násobenie X^2 nám dá nulovú maticu, a tak z exponenty ostane len absolútny a lineárny člen, teda $g(p)$ sa dá prepísať na:

$$g(p) = \mathbb{I} + pX \tag{38}$$

Tvar exponenty sa nám však v ďalších výpočtoch ešte zíde, a tak si ho ponecháme. Ak sa budeme zaujímať iba o okolie jednotky grupy, jednoducho premenujeme p na $\epsilon << 1$ a vyjadríme:

$$g(\epsilon) = \mathbb{I} + \epsilon X \tag{39}$$

Je však zrejmé, že *ľubovoľný* grupový prvok v okolí jednotkovej matice sa dá popísať vzťahom (39) - k jednotkovej matici pričítam veľmi malú maticu ϵX, čo znamená, že jednoparametrické podgrupy okolie jednotky grupy plne pokrývajú. Týmto sme si pripravili pôdu na výpočty, ktoré vykonáme o niečo neskôr.

3 Pôsobenie grupy na tenzoroch

3.1 Úvod

V predošlej kapitole sme rozobrali, ako pomocou galileovej transformácie vieme pôsobiť na prvky galileovského časopriestoru. V tejto kapitole tento koncept rozšírime, a to tak, že prvky Galileovej grupy budú môcť nanovo pôsobiť na prvky nejakého vektorového priestoru. Pripomeňme, že aj $\mathcal{T}^p_q(M)$ je vektorový priestor, a tak efektívne popíšeme aparát, ktorým budeme vedieť galileovsky transformovať tenzorové polia.

3.2 Reprezentácia

Spomínaný aparát sa nazýva *reprezentácia.* Jedná sa o nasledovné zobrazenie:

$$\rho : G \mapsto \mathrm{Aut}V \tag{40}$$

ktoré navyše spĺňa podmienku:

$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2) \tag{41}$$

čomu sa povie, že ρ je *homomorfizmus.* V prvom rade môžeme vidieť, že sa nejedná o jedno zobrazenie, ale celú triedu. Reprezentácii je totiž viacero, teda ľubovoľné zobrazenie, ktoré má štruktúru vyššie uvedenú nazývame reprezentáciou. Čo však reprezentácia vlastne robí? Najprv vezme prvok nejakej grupy G (my budeme uvažovať Galileovu grupu, a tak vstupom pre ρ bude galileovská matica). Výstupom potom bude prvok grupy Aut V - grupa tzv. *automorfizmov* vektorového priestoru V. O ňom si teraz povieme viac, keďže sme ho doteraz nespomínali.

Grupa Aut V sa skladá zo zobrazení $f : V \mapsto V$, pričom tieto zobrazenia sú izomorfizmy. Na zopakovanie, reprezentácia grupy ρ je teda homomorfizmus, ktorý vezme grupový prvok a vráti nám zobrazenie f, pričom f:

1. Pôsobí na prvky vektorového priestoru V a vracia nám prvky vektorového priestoru V

2. Je bijektívne

3. Je lineárne

Ak za V vezmeme priestor $\mathcal{T}^p_q(M)$, vidíme, že pomocou vhodnej reprezentácie môžeme zobrať prvok Galileovej grupy a dostať zobrazenie, ktoré ide z priestoru $\mathcal{T}^p_q(M)$ opäť do priestoru $\mathcal{T}^p_q(M)$, teda zobrazenie, ktoré vezme tenzorové pole a vráti nám opäť tenzorové pole, zmenené na základe toho, aký bol vstupný grupový prvok, čo je presne to, čo sme chceli.

3.3 Odvodená reprezentácia

Vráťme sa kúsok dozadu. Keď sme rozoberali Lieove grupy, zistili sme, že prvok Lieovej grupy v okolí jednotky sa dá zapísať ako $g(\epsilon) = \mathbb{I} + \epsilon X$, z čoho automaticky vyplýva, že X vieme vyjadriť ako $X = \frac{dg}{d\epsilon}(0)$. Čo sme nepovedali je fakt, že prvky X tvoria vektorový priestor. Pre prípad podgrupy boostov a jej zodpovedacim maticiam X je to celkom zrejmé, avšak tento fakt platí aj pre všetky iné Lieove grupy. Tento vektorový priestor dostal svoje špeciálne pomenovanie, a nazýva sa *Lieova algebra*. Vyznačuje sa tým, že sa na ňom prirodzene vytvára štruktúra komutátora, v našej práci však nebude potrebná, tak sa jej bližšie venovať nejdeme. Prečo ju však teraz spomíname? V predošlej podkapitole sme si rozobrali, že existujú zobrazenia ρ z grupy do automorfizmov V. To platí teda aj pre Lieove grupy, a ako už vieme, každej Lieovej grupe vieme prisúdiť jej Lieovu algebru. Ako sa ukáže neskôr, bude výhodné nájsť zobrazenie, ktoré je indukované danou reprezentáciou ρ, je rovnako homomorfizmus, avšak neberie prvky Lieovej grupy, ale práve prvky Lieovej algebry. Takéto zobrazenie sa nazýva *odvodená reprezentácia* (ďalej takéto zobrazenia budeme označovať ako ρ'). V tomto prípade však ρ' bude prvky Lieovej algebry zobrazovať do End V, čo je tzv. *priestor endomorfizmov vektorového priestoru* V. Tento priestor je tvorený zobrazeniami f', pričom:

1. $f' : V \mapsto V$

2. f' je lineárne

Nevyžadujeme teda už ich bijektívnosť, tak ako to bolo v prípade automorfizmov. Ako sme už povedali, ρ' má byť indukovaná reprezentáciou ρ, a to tak, aby aj toto zobrazenie bolo homomorfizmus - tentokrát však pôjde o homomorfizmus Lieových algebier, nie Lieových grúp. To vedie na vzťah, ktorý sem uvedieme bez dôkazu, takto definovaná odvodená reprezentácia však homomorfizmom bude. Ak uvážime $\epsilon << 1$, bude platiť:

$$\rho(\mathbb{I} + \epsilon X) = \mathbb{I} + \epsilon \rho'(X) \tag{42}$$

Má takýto vzťah vôbec zmysel? Ako vieme z minulej kapitoly, prvý rád rozvoja grupového prvku pomocou exponenty dá $\mathbb{I} + \epsilon X$, teda grupový prvok, na ktorý pôsobí reprezentácia ρ, ktorá má brať grupový prvok, takže ľavá strana je v poriadku. Na pravo máme odvodenú reprezentáciu ρ', ktorá pôsobí na X, teda prvok Lieovej algebry, tak, ako to má byť. Vyššie uvedený vzťah využijeme v nasledovnej kapitole.

3.4 Invariantnosť tenzorových polí voči pôsobeniu grupy

Teraz sa dostávame k druhému slovu v názve tejto práce, a to "invariantné". Synonymom by mohlo byť slovo "nemenné". Ako teraz vidíme, cieľom tejto práce bude nájsť tenzorové polia, ktoré sa nezmenia pod pôsobením Galileovej grupy. Na začiatok sa ponúka celkom prirodzená definícia tohto fenoménu, a to:

$$\rho(g)A = A \tag{43}$$

kde A je tenzorové pole, a $\rho(g)$ je reprezentácia aplikovaná na *všeobecný* prvok grupy Gal(3), teda všeobecnú galileovskú maticu. To je dôležité, pretože ak sa tenzorové pole pod pôsobením jedného grupového prvku nezmení, ale pod druhým áno, nebudeme ho považovať za invariantné. Teraz prichádza na rad netriviálny krok, a to že grupový prvok g zapíšeme ako $g = \mathbb{I} + \epsilon X$. Tento krok je netriviálny, pretože tak ako sme vyššie zdôraznili, my chceme, aby bolo tenzorové pole invariantné voči pôsobeniu ľubovoľného grupového prvku, avšak $g = \mathbb{I} + \epsilon X$ je prvok nutne z okolia jednotky danej grupy, zodpovedajúci malej transformácii. Tu pomôže intuitívna predstava, že ľubovoľnú galileovskú transformáciu vieme vyskladať z infinitezimálne malých transformácii aplikovaných po sebe (konkrétne napríklad s rotáciou sa to dá predstaviť skutočne názorne). Keď teda tenzorové pole bude invariantné voči malým transformáciám, bude invariantné aj voči pôsobeniu ľubovoľného grupového prvku. Potom s čistým svedomím môžeme písať:

$$\rho(\mathbb{I} + \epsilon X)A = (\mathbb{I} + \epsilon\rho'(X))A = A + \epsilon\rho'(X)A \tag{44}$$

kde sme využili rovnicu (42). Výsledný výraz však z podmienky invariantnosti má byť rovný samotnému A, teda:

$$A + \epsilon\rho'(X)A \stackrel{!}{=} A \Rightarrow \rho'(X)A \stackrel{!}{=} 0 \tag{45}$$

Dostávame tak asi najkľúčovejší vzťah tejto práce, a to síce, že ak chceme, aby bolo tenzorové pole invariantné voči pôsobeniu nejakej Lieovej grupy, tak vlastne požadujeme, aby odvodená reprezentácia pustená na tenzorové pole bola rovná nule (pre *každý* prvok zodpovedajúcej Lieovej algebry):

$$\rho'(X)A = 0 \tag{46}$$

V ďalších kapitolách sa teda pustíme do hľadania reprezentácie, ktorá bude pôsobiť na priestore $\mathcal{T}^p_q(M)$ a jej zodpovedajúcej odvodenej reprezentácie. To spolu s podmienkou invariantnosti nás vo výsledku povedie na podmienky pre komponenty všeobecného tenzorového poľa A, čím toto všeobecné pole obmedzíme a nájdeme tak galileovsky invariantné tenzorové polia.

4 Pátranie po vhodnej reprezentácii

4.1 Akcia grupy na množine

Ako sme povedali, sme na ceste nájsť vhodnú odvodenú reprezentáciu, ktorá by po pustení na prvok Lieovej algebry zodpovedajúcej grupe Gal(3) vedela pôsobiť na prvky vektorového priestoru $\mathcal{T}^p_q(M)$, teda tenzorové polia. Na to však budeme musieť zadefinovať viacero pojmov, ktoré si v nasledovných kapitolách ujasníme. Jedným z nich je tzv. *akcia grupy na množine*. Uvažujme grupu G a množinu Ω. Budeme sa zaujímať o zobrazenia f také, že:

$$f : G \times \Omega \mapsto \Omega \tag{47}$$

Dá sa to chápať aj tak, že sa jedná o zobrazenie f indukované prvkom grupy G (označme ho f_g), ktoré pôsobí z množiny do množiny, teda:

$$f_g : \Omega \mapsto \Omega \tag{48}$$

Akciou grupy G na množine M potom označujeme zobrazenie f_g, ktoré je buď homomorfizmus alebo *antihomomorfizmus*. Antihomomorfizmus sme síce ešte nespomínali, pre takéto zobrazenia však úplne prirodzene bude platiť:

$$f_{g_1 g_2} = f_{g_2} \circ f_{g_1} \tag{49}$$

Antihomomorfizmy grupy G sa nazývajú *pravá akcia* - označenie R_g a homomorfizmy grupy G *ľavá akcia* - označenie L_g.

Uvážme $\Omega = \mathbb{R}^4$. Je jednoduché ukázať, že ak za akciu vezmeme násobenie zľava regulárnou maticou A rozmerov 4×4, tak sa bude jednať o ľavú akciu, zatiaľ čo násobenie zľava maticou A^{-1} bude pravá akcia. Skutočne, ak označíme $\mathbf{x}$ prvok $\mathbb{R}^4$:

$$R_{A_1 A_2}\mathbf{x} = (A_1 A_2)^{-1}\mathbf{x} = A_2^{-1} A_1^{-1}\mathbf{x} = R_{A_2} A_1^{-1}\mathbf{x} = R_{A_2} R_{A_1}\mathbf{x} \tag{50}$$

Tento fakt sa nám ešte zíde neskôr. Teraz sa posunieme trochu ďalej. Pripomeňme, že prvotným cieľom je nájsť reprezentáciu grupy v priestore $\mathcal{T}^p_q(M)$. Hľadajme najprv odpoveď na jednoduchšiu otázkou, čo môže byť reprezentáciou v priestore funkcii na variete M - označme ho $\mathcal{F}(M)$? Táto otázka je s našou hlavnou otázkou do veľkej miery prepojená, pretože (čo sme doteraz nespomenuli), funkcie sú v skutočnosti tenzorové polia typu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sedí to s definíciou? Podľa nej by vstupmi malo byť 0 vektorov, 0 kovektorov, a výsledkom by mala byť funkcia. A tak aj je. Tak teda poďme na to. Prvky $\mathcal{F}(M)$ označíme písmenom ψ a navrhneme nasledovný tvar:

$$(\rho(g)\psi)\mathbf{x} := \psi(R_g \mathbf{x}) \tag{51}$$

To, že takto definované $\rho(g)$ je automorfizmom $\mathcal{F}(M)$ nemusí byť vidno hneď, ale je tomu tak, pričom toto tvrdenie necháme bez dôkazu. To, že sa naozaj jedná o homomorfizmus, sa dá ukázať krátkym výpočtom:

$$
\begin{aligned}
(\rho(g_1 g_2)\psi)(\mathbf{x}) &= \psi(R_{g_1 g_2}\mathbf{x}) && (52)\\
&= \psi(R_{g_2} R_{g_1}\mathbf{x}) && (53)\\
&= (\rho(g_2)\psi)(R_{g_1}\mathbf{x}) && (54)\\
&= (\rho(g_1)\rho(g_2)\psi)(\mathbf{x}) && (55)
\end{aligned}
$$

Ak teda vezmeme ľubovoľnú grupu pôsobiacu sprava na M, vieme jej priradiť reprezentáciu v priestore $\mathcal{F}(M)$. Na to, aby sme sa posunuli zase o niečo ďalej, zadefinujeme teraz pojem *pull-backu*.

4.2 Pull-back tenzorového poľa

Definujme najprv, čo je to pull-back nejakej funkcie. Majme dve variety: M a N a hladké zobrazenie f:

$$f : M \mapsto N \tag{56}$$

Majme navyše nasledovnú funkciu ψ:

$$\psi : N \mapsto \mathbb{R} \tag{57}$$

Potom má zmysel definovať zobrazenie:

$$\psi \circ f : M \mapsto \mathbb{R} \tag{58}$$

Toto zobrazenie sa nazýva pull-back funkcie ψ a označuje sa nasledovne:

$$\psi \circ f \equiv f^* \psi \tag{59}$$

Koncept pull-backu sa však dá rozšíriť aj na tenzorové polia vyšších rangov. V prípade vektorových polí má zmysel hovoriť o niečom príbuznom, pričom to niečo dostalo názov *push-forward*. Nebudeme tu uvádzať priamo definíciu, keďže tá by musela nadväzovať na už spomínané definície vektora, ktoré sme tu z dobrých dôvodov neuvádzali. Pôjde tak iba o kvalitatívny popis. Ak máme na variete M nejakú krivku, túto krivku vieme pomocou zobrazenia daného vzťahom (56) zobraziť na varietu N. Na variete M sa dá vektor v nejakom bode pôvodnej krivky chápať ako dotyčnica k tejto krivke. Po zobrazení na varietu N sa krivka zmení, a tak sa zmení aj dotyčnica v danom zobrazenom bode krivky. Budeme mať teda dva vektory, pričom ak toto urobím pre každý bod M, budem mať dve vektorové polia. Zobrazenie, ktoré tieto dve vektorové polia medzi sebou prevádza je práve push-forward vektorového poľa na M (označme toto pole V) a označuje sa $f_* V$. Rozdiel oproti funkciám je v tom, že na zavedenie push-forwardu už vyžadujeme, aby f bolo tzv. *difeomorfizmus* (izomorfizmus medzi varietami).

Nakoniec budeme potrebovať ešte pull-back kovektorového poľa. Bez dlhších diskusii sa táto operácia na kovektorovom poli α dá zadefinovať nasledovne [2]:

$$\langle f^*\alpha, V\rangle := \langle \alpha, f_* V\rangle \tag{60}$$

v ktorej je popísané, ako vlastne pull-back kovektorového poľa pôsobí na všeobecné vektorové pole V, pričom rovnako ako v prípade pull-backu funkcii sa tu difeomorfnosť zobrazenia f nevyžaduje. Táto definícia má zmysel, pretože pull-back aj push-forward zachovávajú typ daného tenzorového poľa. Táto definícia pre nás nebude nijako kľúčová, potrebujeme len vedieť, že také niečo existuje a má to zmysel.

Dostávame sa tak ku hlavnému bodu tohto paragrafu, a to definícii pull-backu tenzorového poľa typu $\binom{p}{q}$. Ten je definovaný nasledovne [3]:

$$(f^*A)(V_1, ..., V_q, \alpha_1, ..., \alpha_p) := A(f_*V_1, ..., f_*V_q, (f^{-1})^*\alpha_1, ..., (f^{-1})^*\alpha_p) \tag{61}$$

Môžme si všimnúť, že ak by sme chceli vyjadriť pull-back tenzorového poľa A, ktoré je typu $\binom{0}{q}$, nebudeme v skutočnosti vyžadovať difeomorfnosť zobrazenia f. Tá bude potrebná až v prípade $p \neq 0$, na vyjadrenie pull-backu tenzora v tomto prípade je totiž nutná existencia zobrazenia f^{-1}.

4.3 Reprezentácia grupy v $\mathcal{F}(M)$ a $\mathcal{T}^p_q(M)$ v jazyku pull-backu

Vráťme sa teraz do časti 4.1 a pripomeňmne si, aký tvar mala reprezentácia $\rho(g)$ v priestore funkcii $\mathcal{F}(M)$. Platilo tam:

$$(\rho(g)\psi)(\mathbf{x}) := \psi(R_g\mathbf{x}) \tag{62}$$

My už ale toto vieme prepísať, pretože platí:

$$\psi(R_g\mathbf{x}) \equiv (\psi \circ R_g)(\mathbf{x}) \equiv (R_g^*\psi)\mathbf{x} \tag{63}$$

A teda vidíme, že vtedy nájdená reprezentácia sa dá elegantne (teraz už bez jej aplikácie na argument $\psi(\mathbf{x})$) zapísať pomocou pull-backu na funkciách ako:

$$\rho(g) := R_g^* \tag{64}$$

Toto zobrazenie má po správnosti byť difeomorfné, čo aj je, pretože ku R_g existuje inverzné zobrazenie $(R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}$, čo sa dá jednoducho overiť.

[2]pozri [1], úloha 3.1.3
[3]pozri [1], úloha 3.1.6

Trik je v tom, že $\rho(g)$ definovaná vzťahom (64) vie pôsobiť nielen na funkcie, ale na ľubovoľné tenzorové polia, ak využijeme definíciu pull-backu tenzorového poľa - vzťah (61). To znamená, že sme našli vhodnú reprezentáciu grupy v priestore $\mathcal{T}^p_q(M)$:

$$\rho(g) = R^*_g \tag{65}$$

kde $\rho(g)$ už teraz pôsobí v priestore tenzorových polí, a nie funkcii.

5 Pátranie po odvodenej reprezentácii ku R_g^*

5.1 Tok vektorového poľa

Jedným z pojmov, ktoré budeme potrebovať, je tok vektorového poľa. Majme varietu M a na nej nejaké vektorové pole. Ak začneme v nejakom bode tejto variety (označme ho napr. Q), môžeme v každom bode infinitezimálne veľkým krokom nasledovať vektory daného vektorového poľa a posúvať sa tak po variete. Na variete nám tak vznikne krivka, ktorú si označíme $\gamma(p)$. Tok vektorového poľa potom bude nasledovné zobrazenie:

$$\Phi_p : M \mapsto M \tag{66}$$

dané predpisom:

$$\Phi_p(Q) = \gamma(p) \tag{67}$$

Dá sa overiť, že takéto zobrazenie má vlastnosť:

$$\Phi_{p+s} = \Phi_p \circ \Phi_s \tag{68}$$

Odbočme teraz na chvíľu a rozviňme nasledovnú myšlienku: Uvažujme grupu G a v nej jednoparametrickú podgrupu tvaru $g(p) = e^{pX}$ (takýto tvar sme používali aj v tretej kapitole). Ďalej uvažujme bod Q patriaci variete M. Ďalej majme pravú akciu:

$$R_g : M \mapsto M, \qquad g \in G \tag{69}$$

Ak teraz budeme pôsobiť akciou R_g na bod Q postupne všetkými možnými $g(p) = e^{pX}$, budeme dostávať rôzne body variety M. Inými slovami, jednoparametrická podgrupa v G nám pomocou akcie R_g a bodu $Q \in M$ generuje krivku v M. Ako vidíme, akcia R_g sa tu správa ako tok: Vezme bod Q, a priradí mu bod krivky v závislosti od toho, aké p zvolíme (resp. celú krivku, ak vezmeme všetky možné p). Môžme preto označiť:

$$R_{exp(pX)} \equiv \Phi_p^X \tag{70}$$

čo popisuje tok zodpovedajúci konkrétnemu prvku Lieovej algebry. Pomocou vlastností pravej akcie a exponenty nie je zložité ukázať, že naozaj platí:

$$R_{exp(p+s)X} = R_{exp(pX)} \circ R_{exp(sX)} \tag{71}$$

tak, ako to má pri toku byť. Tok sme však doteraz spájali s nejakým vektorovým poľom. Ako sme povedali, jednoparametrická podgrupa spolu s pravou akciou generujú krivky na M. Každému bodu týchto kriviek tu vieme priradiť vektor, ktorý bude hovoriť, kam sa z daného bodu krivky posunúť tak, aby som opäť skončil na tej istej krivke. A tak nám vzniká vektorové pole, ktoré bude závisieť od toho, ktorým prvkom X Lieovej algebry bolo generované. Takéto vektorové pole sa nazýva *fundamentálne pole akcie* R_g a označuje sa

ξ_X. Úvahy v tomto paragrafe sa za chvíľu ukážu ako kľúčové pri zostrojovaní vhodnej odvodenej reprezentácie, na to však potrebujeme zadefinovať ďalší pojem, a tou je *Lieova derivácia*.

5.2 Lieova derivácia

Majme varietu M a na nej vektorové pole V. Ako vieme, zodpovedá mu tok $\Phi_p : M \mapsto M$. Okrem toho uvažujme bod Q, ktorému je priradený tenzor A. Bod Q spolu s jeho okolím však môžeme pomocou toku Φ_p ľubovoľne posúvať, a tak by nás zaujímalo, ako bude vyzerať tenzor A v novom, posunutom bode. Spomeňme si, že presne toto sa dalo vyjadriť pomocou pull-backu tenzora. Ten sa vtedy vykonával pomocou zobrazenia f, ktoré pracovalo medzi varietami M a N. Na jednej strane teda budeme mať tenzor A, na druhej $\Phi_p^* A$. Nás bude zaujímať, ako veľmi sa tenzor A (resp. tenzorové pole, ak tak urobím pre každé Q) po zapôsobení pull-backu zmení v porovnaní s parametrom p, teda niečím, čo charakterizuje veľkosť posunu po krivke indukovanej vektorovým poľom V. Výraz takéhoto typu by mohol mať tvar:

$$\frac{\Phi_p^* A - A}{p} \tag{72}$$

pričom nás bude zaujímať táto zmena iba lokálne, budeme ju tak vedieť vyhodnotiť pre každý bod nášho priestoru. Tento výraz sa tak zmení na niečo, čo sa nazýva Lieova derivácia tenzorového poľa A v smere vektorového poľa V [4]:

$$\mathcal{L}_V A := \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\Phi_\epsilon^* A - A}{\epsilon} \tag{73}$$

a ako vidíme, má štruktúru klasickej derivácie tak, ako ju poznáme, avšak tentokrát nezachytáva lokálnu zmenu funkčných hodnôt, ale zmenu tenzorových polí. Neskôr sa nám zíde ešte iný tvar tohto výrazu - keď Lieovu deriváciu zoberieme ako zobrazenie, ktorému však neposkytneme argument, môžeme písať:

$$\mathcal{L}_V = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\Phi_\epsilon^* - \mathbb{1}}{\epsilon} \tag{74}$$

kde $\mathbb{1}$ je jednotkový operátor. Majúc na pamäti $\epsilon \to 0$, túto rovnosť vieme upraviť na:

$$\Phi_\epsilon^* = \mathbb{1} + \epsilon \mathcal{L}_V \Rightarrow \mathcal{L}_V = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \Phi_\epsilon^* \tag{75}$$

[4] pozri [1], kapitolu 4.2

Bez dôkazu teraz uvedieme niekoľko vlastností Lieovej derivácie, ktoré budeme v neskorších výpočtoch používať [5]. Uvažujme konštantu λ, funkciu ψ, vektorové polia V, W a tenzorové polia A, B. Potom platí:

$$\mathcal{L}_V \psi = V\psi \tag{76}$$
$$\mathcal{L}_V W = [V, W] \tag{77}$$
$$\mathcal{L}_V \circ d = d \circ \mathcal{L}_V \tag{78}$$
$$\mathcal{L}_V (A + \lambda B) = \mathcal{L}_V A + \lambda \mathcal{L}_V B \tag{79}$$
$$\mathcal{L}_{V+\lambda W} = \mathcal{L}_V + \lambda \mathcal{L}_W \tag{80}$$
$$\mathcal{L}_V (A \otimes B) = (\mathcal{L}_V A) \otimes B + A \otimes (\mathcal{L}_V B) \tag{81}$$

Venujme sa teraz chvíľu výrazu (78). Zobrazenie d sa nazýva *gradient*, a jeho úlohou je výroba kovektorových polí z funkcii. Samé o seba sme ho doteraz uvedené nemali, avšak ak si spomenieme na bázu všeobecného kovektorového poľa, vystupoval v nej výraz dx^i. To je v skutočnosti gradient aplikovaný na konkrétnu funkciu - súradnice, a ako vieme, takýto výraz tvorí bázu kovektorových polí, čiže sám je kovektorovým poľom, tak, ako to má pri pôsobení gradientu na funkciu byť. Vzťah (78) potom hovorí, že gradient komutuje s Lieovou deriváciou, čo v praxi znamená, že my síce nemáme presne definované, ako pôsobí Lieova derivácia na kovektorové polia, avšak ani to nebudeme potrebovať, pretože pomocou vzťahu (78) budeme vedieť prevádzať Lieovu deriváciu kovektorového poľa na Lievou deriváciu funkcii, ako sa bližšie ukáže vo výpočtovej časti tejto práce. Ďalšou dôležitou vlastnosťou gradientu, ktorú budeme neskôr využívať je, že po aplikovaní na konštantu vráti nulu.

5.3 Vyjadrenie odvodenej reprezentácie ku R_g^* pomocou Lieovej derivácie

Od nájdenia žiadanej odvodenej reprezentácie sme už iba kúsok, máme totiž všetok potrebný matematický aparát, ostáva ju už len hrubou silou nájsť. Momentálne sme v stave, že máme reprezentáciu, a potrebujeme k nej odvodenú, takže by sa nám zišiel vzťah, ktorý tieto dve reprezentácie spája. Takýto vzťah sme mali v kapitole 3.3 ako rovnicu (42):

$$\rho(\mathbb{I} + \epsilon X) = \mathbb{I} + \epsilon \rho'(X) \tag{82}$$

platnú pre $\epsilon << 1$. V skutočnosti tento vzťah platí pre ľubovoľné ϵ (premenujme tento parameter na p), len ho musíme upraviť. Ako si môžeme všimnúť, obe strany sú len rozvojom exponenty do prvého rádu. Skutočný definičný vzťah medzi reprezentáciou a odvodenou reprezentáciou má totiž tvar:

$$\rho(e^{pX}) = e^{p\rho'(X)} \tag{83}$$

Keď túto rovnicu zderivujeme podľa p a položíme $p = 0$, dostaneme priamo:

[5] pozri [1], kapitolu 4.3

$$\rho'(X) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\right|_{p=0} \rho(e^{pX}) \tag{84}$$

Uvažujúc $\rho(g) = R_g^*$ píšeme:

$$\rho'(X) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\right|_{p=0} \rho(e^{pX}) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\right|_{p=0} R^*_{exp(pX)} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\right|_{p=0} (\Phi_p^X)^* \tag{85}$$

kde sme využili, že R_g^* sa dá zapísať ako tok. Takýto výraz sme už však mali v kapitole 5.2, a je rovný Lieovej derivácii, takže nakoniec dostávame:

$$\rho'(X) = \mathcal{L}_V \tag{86}$$

Aké je však pole V, v smere ktorého robíme Lieovu deriváciu? Toto pole má vyvolávať tok Φ_r^X. Avšak presne takéto pole sme si definovali v kapitole 5.1 a nazývame ho fundamentálne pole akcie R_g. Výsledným vzťahom teda je:

$$\rho'(X) = \mathcal{L}_{\xi_X} \tag{87}$$

Tento výsledok spojíme s podmienkou (46) a dostávame tak finálny vzťah:

$$\boxed{\mathcal{L}_{\xi_X} A = 0} \tag{88}$$

Tenzorové pole tak A bude invariantné voči pôsobeniu Galileovej grupy za predpokladu, že Lieova derivácia v smere fundamentálneho pola akcie R_g, kde g zodpovedá prvkom Galileovej grupy, pustená na tenzorové pole A bude rovná nule.

6 Pátranie po fundamentálnom poli galileovskej transformácie

Je zrejmé, že poslednou úlohou predtým, než sa pustíme do samotných výpočtov, je nájsť explicitný tvar fundamentálneho poľa zodpovedajúceho galileovskej transformácii. Tu je treba uviesť, že tak, ako sme naznačili v kapitole 3, Galileova grupa sa neskladá iba z boostov, ale opisuje skladanie boostov, rotácii a translácii. Ľubovoľný prvok grupy Gal(3) (označme ho g) tak vieme napísať ako:

$$g = g_1 \circ g_2 \circ g_3 \tag{89}$$

pričom g_1 zodpovedá translácii, g_2 rotácii a g_3 boostu. Je teda zrejmé, že ak bude nejaké tenzorové pole invariantné voči pôsobeniu každého z týchto grupových prvkov, bude invariantné voči pôsobeniu ľubovoľného prvku grupy Gal(3). Naša úloha sa tak zvrháva na nájdenie fundamentálnych polí troch akcii zodpovedajúcich translácii, rotácii a boostu. My sa teraz obmedzíme iba na boosty, ktoré sú (ako už vieme) popísané nasledovnou maticou:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vec{v} & \mathbb{I} \end{pmatrix} \tag{90}$$

Už vieme, že Galileova grupa vie transformovať body priestoru $\mathbb{R}^4$ pomocou akcie. Spomeňme si teraz na reprezentáciu v priestore funkcii na variete M a položme $M = \mathbb{R}^4$. Overili sme, že vhodná reprezentácia má nasledovný tvar:

$$(\rho(g)\psi)\mathbf{x} = \psi(R_g\mathbf{x}) \tag{91}$$

Uvažujme teraz grupové prvky v okolí jednotky grupy, potom platí:

$$g = \mathbb{I} + \epsilon X \tag{92}$$

Ľavá strana rovnice (91) má potom tvar:

$$(\rho(g)\psi)\mathbf{x} = (\rho(\mathbb{I} + \epsilon X)\psi)\mathbf{x} \tag{93}$$

Teraz využijeme vzťah (42) a upravujeme ďalej:

$$(\rho(\mathbb{I} + \epsilon X)\psi)\mathbf{x} = (\psi + \epsilon\rho'(X)\psi)\mathbf{x} \tag{94}$$

Položíme $\rho'(X) = \mathcal{L}_{\xi_X}$ a skombinovaním so vzťahom (76) môžeme ľavú stranu rovnice (91) písať ako:

$$(\rho(g)\psi)\mathbf{x} = (\psi + \xi_X\psi)\mathbf{x} = \psi(\mathbf{x}) + \xi_X\psi(\mathbf{x}) \tag{95}$$

Teraz upravujme pravú stranu rovnice (91). Ako sme ukázali v paragrafe 4.1, v prípade maticových grúp môžeme ako pravú akciu použiť násobenie maticou A^{-1}. Potom vieme písať:

$$\psi(R_g\mathbf{x}) = \psi(g^{-1}\mathbf{x}) \tag{96}$$

Je jednoduché ukázať, že pre $\epsilon << 1$ platí:

$$g = \mathbb{I} + \epsilon X \Rightarrow g^{-1} = \mathbb{I} - \epsilon X \tag{97}$$

Potom:

$$\psi(g^{-1}\mathbf{x}) = \psi((\mathbb{I} - \epsilon X)\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x} - \epsilon X\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) - \epsilon(X\mathbf{x})^i \partial_i \psi(\mathbf{x}) \tag{98}$$

Porovnaním so vzťahom (95) dostávame:

$$\xi_X = -X^i_j x^j \partial_i \tag{99}$$

My však maticu X odvodenú od pogrupy boostov poznáme - vzťah (37), a tak môžeme písať:

$$\xi_X = -v_x t\partial_x - v_y t\partial_y - v_z t\partial_z \tag{100}$$

kde používame označenie súradníc $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, x, y, z)$ a uvažujeme $\vec{v} \equiv (v_x, v_y, v_z)$. Podmienka invariantnosti potom prechádza do tvaru:

$$\mathcal{L}_{-v_x t\partial_x - v_y t\partial_y - v_z t\partial_z} A \stackrel{!}{=} 0 \tag{101}$$

Podľa vzťahu (80) však platí:

$$\mathcal{L}_{-v_x t\partial_x - v_y t\partial_y - v_z t\partial_z} = (-v_x \mathcal{L}_{t\partial_x} - v_y \mathcal{L}_{t\partial_y} - v_z \mathcal{L}_{t\partial_z}) A \stackrel{!}{=} 0 \tag{102}$$

Tento vzťah má však platiť pre ľubovoľný vektor rýchlosti, a tak keď postupne zvolíme $\vec{v} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 0)$, $\vec{v} = (0, 0, 1)$, dostaneme kompaktný vzťah:

$$\mathcal{L}_{t\partial_i} A \stackrel{!}{=} 0 \tag{103}$$

kde $i = 1, 2, 3$. My však budeme hľadať tenzorové polia invariantné voči celej Galileovej grupe, a tak nás rovnako zaujímajú fundamentálne polia zodpovedajúce transláciám a rotáciám. Uvedieme ich sem bez odvádzania [6].

Pre translácie budeme mať:

$$\mathcal{L}_{\partial_\mu} A \stackrel{!}{=} 0 \tag{104}$$

pričom $\mu = 0, 1, 2, 3$, a pre rotácie:

$$\mathcal{L}_{x^i\partial_j - x^j\partial_i} A \stackrel{!}{=} 0 \tag{105}$$

pričom $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$.

[6] pozri [1], úlohu 4.6.10

7 Výpočet galileovsky invariantných tenzorov

7.1 Úvodné poznámky

Najprv drobný komentár: ako si čitateľ iste všimol, názov tejto práce sú galileovsky invariantné tenzory, nie tenzorové polia. Ak aj použijeme slovo tenzor, stále pod týmto výrazom budeme mať na mysli tenzorové pole, ide iba o skrátený názov.

Ďalej bude dôležitých pár vzťahov, ktoré tenzory invariantné voči pôsobeniu nejakej grupy spĺňajú, pričom ich sem len uvedieme, keďže všetky sa dajú pomerne ľahko odvodiť z identít (76) - (81). Majme tenzory A, B,vektorové pole V a konštanty λ_1, λ_2. Potom:

$$\mathcal{L}_V A = 0 \ \wedge \ \mathcal{L}_V B = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_V(A \otimes B) = 0 \tag{106}$$
$$\mathcal{L}_V A = 0 \ \wedge \ \mathcal{L}_V B = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_V(\lambda_1 A + \lambda_2 B) = 0 \tag{107}$$

čo znamená, že ak sú tenzory A, B invariantné voči pôsobeniu nejakej grupy, potom sú rovnako invariariantné aj tenzory $A \otimes B$ a $\lambda_1 A + \lambda_2 B$.

7.2 Homogenita tenzorov

Ako uvidíme, bude výhodné od tenzorových polí najprv vyžadovať ich homogenitu, následne izotrópnosť, a až potom invariantnosť vzhľadom na galileovské boosty, pričom budeme hľadať galileovsky invariantné tenzory po rang 2 vrátane. Hoci budeme vyšetrovať izotrópnosť a invariantnosť vzhľadom na boosty pre tenzory každého typu samostatne, podmienka homogenity sa dá vyšetriť pre tenzorové pole všeobecného typu. Uvažujme teda tenzorové pole typu $\binom{p}{q}$. Podmienka homogenity má tvar $\mathcal{L}_{\partial_\mu} A = 0$. Počítajme, kedy táto podmienka bude splnená:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\partial_\mu} A &= \mathcal{L}_{\partial_\mu}(A^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q} dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_q} \otimes \partial_{a_1} \otimes \dots \otimes \partial_{a_p}) \\
&= \partial_\mu(A^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q}) dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_q} \otimes \partial_{a_1} \otimes \dots \otimes \partial_{a_p} \\
&+ A^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q} \mathcal{L}_{\partial_\mu}(dx^{b_1}) \otimes \dots \otimes dx^{b_q} \otimes \partial_{a_1} \otimes \dots \otimes \partial_{a_p} \\
&+ \dots + A^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q} dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_q} \otimes \partial_{a_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_{\partial_\mu}(\partial_{a_p}) \\
&= \partial_\mu(A^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q}) dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_q} \otimes \partial_{a_1} \otimes \dots \otimes \partial_{a_p} \\
&+ A^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q} d(\partial_\mu x^{b_1}) \otimes \dots \otimes dx^{b_q} \otimes \partial_{a_1} \otimes \dots \otimes \partial_{a_p} \\
&+ \dots + A^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q} dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_q} \otimes \partial_{a_1} \otimes \dots \otimes [\partial_i, \partial_{a_p}]
\end{aligned} \tag{108}$$

V prechode z prvého na druhý riadok sme využili vzťah (76) a Lieovu deriváciu v smere poľa ∂_μ aplikovanú na komponenty tenzorového poľa sme zapísali ako priame aplikovanie ∂_μ na komponenty. Ďalej sme využili vzťah (81) a aplikovali Lieovu deriváciu v zmysle Leibnizovho pravidla. Je dôležité upozorniť, že sme v tomto zmysle s celým tvarom tenzorového poľa A pracovali, ako keby bol medzi jeho komponentami a bázovým prvkom dx^{b_1} tenzorový súčin. Ten tam v skutočnosti dopísať môžme, pretože aj komponenty tenzorového poľa sú v len funkcie, teda tenzorové polia typu $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, a postupovať tak v súlade so vzorcom (81). Rovnako sme využili vzťahy (77) a (78). Tieto štyri identity budeme vo výpočtoch používať veľmi často, takže už ich využitie opäť komentovať nebudeme. Keďže komutátor súradnicových polí je rovný nule, platí:

$$[\partial_\mu, \partial_{a_1}] = \ldots = [\partial_i, \partial_{a_p}] = 0 \tag{109}$$

Lieovu deriváciu aplikovanú na A tak vieme prepísať do tvaru:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\partial_\mu} A &= \partial_\mu (A^{a_1 \ldots a_p}_{b_1 \ldots b_q}) dx^{b_1} \otimes \ldots \otimes dx^{b_q} \otimes \partial_{a_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{a_p} \\
&+ A^{a_1 \ldots a_p}_{b_1 \ldots b_q} d(\partial_\mu x^{b_1}) \otimes \ldots \otimes dx^{b_q} \otimes \partial_{a_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{a_p} \\
&+ \ldots + A^{a_1 \ldots a_p}_{b_1 \ldots b_q} dx^{b_1} \otimes \ldots \otimes d(\partial_\mu x^{b_q}) \otimes \partial_{a_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{a_p} \\
&= \partial_\mu (A^{a_1 \ldots a_p}_{b_1 \ldots b_q}) dx^{b_1} \otimes \ldots \otimes dx^{b_q} \otimes \partial_{a_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{a_p} \\
&+ A^{a_1 \ldots a_p}_{b_1 \ldots b_q} d(\delta^{b_1}_\mu) \otimes \ldots \otimes dx^{b_q} \otimes \partial_{a_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{a_p} \\
&+ \ldots + A^{a_1 \ldots a_p}_{b_1 \ldots b_q} dx^{b_1} \otimes \ldots \otimes d(\delta^{b_q}_i) \otimes \partial_{a_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{a_p}
\end{aligned} \tag{110}$$

Avšak Kroneckerova delta je konštanta, a tak využitím, že gradient aplikovaný na konštantu je rovný nule, nám ostane iba jeden člen:

$$\mathcal{L}_{\partial_\mu} A = \partial_\mu (A^{a_1 \ldots a_p}_{b_1 \ldots b_q}) dx^{b_1} \otimes \ldots \otimes dx^{b_q} \otimes \partial_{a_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{a_p} \stackrel{!}{=} 0 \tag{111}$$

Aby takýto výraz bol rovný nule, musí platiť:

$$\partial_\mu A^{a_1 \ldots a_p}_{b_1 \ldots b_q} \stackrel{!}{=} 0 \tag{112}$$

a teda derivácia komponent tenzorového poľa vzhľadom na všetky 4 súradnice musí byť rovná nule. Tým dostávame finálny výsledok, a síce:

$$A^{a_1 \ldots a_p}_{b_1 \ldots b_q} = const. \tag{113}$$

Konštantnosť komponent skúmaných tenzorov budeme bez ďalšieho komentovania využívať vo všetkých nasledujúcich výpočtoch.

7.3 Tenzory typu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Izotrópnosť:

$$\mathcal{L}_{x^i\partial_j - x^j\partial_i} A = (x^i\partial_j - x^j\partial_i)A = x^i\partial_j A - x^j\partial_i A \stackrel{!}{=} 0 \tag{114}$$

Tento výraz je však rovný nule automaticky, keďže A nezávisí na žiadnej zo súradníc x^i a tak nám podmienka izotrópnosti tenzorové pole A nijako bližšie neurčila.

Invariantnosť vzhľadom na galileovský boost:

$$\mathcal{L}_{x^0\partial_i} A = x^0\partial_i A \stackrel{!}{=} 0 \tag{115}$$

Tento výraz je opäť rovný nule automaticky kvôli konštantnosti A. Záver:

$$\boxed{A = const.} \tag{116}$$

teda jediné galileovsky invariantné funkcie sú konštantné funkcie.

7.4 Tenzory typu $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Izotrópnosť:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{x^i\partial_j - x^j\partial_i}(A_k dx^k + A_0 dx^0) &= A_k \mathcal{L}_{x^i\partial_j - x^j\partial_i} dx^k + A_0 \mathcal{L}_{x^i\partial_j - x^j\partial_i} dx^0 \\ &= A_k d(\mathcal{L}_{x^i\partial_j - x^j\partial_i} x^k) + A_0 d(\mathcal{L}_{x^i\partial_j - x^j\partial_i} x^0) \\ &= A_k d(x^i\delta^k_j - x^j\delta^k_i) \\ &= A_j dx^i - A_i dx^j = 0 \Rightarrow A_j dx^i = A_i dx^j \end{aligned} \tag{117}$$

pričom = v prvom riadku môžeme písať vďaka vzťahu (79). V prechode z druhého na tretí riadok sme využili, že $\partial_i x^0 = 0$, keďže $i = 1, 2, 3$. Ďalej využijeme, že fundamentálne polia zodpovedajúce rotáciam spĺňajú uvažovaný tvar len v prípade, že $i \neq j$, v tom prípade sú ale dx^i a dx^j lineárne nezávislé, a rovnica môže byť splnená len v prípade, že:

$$A_i = 0, i = 1, 2, 3 \tag{118}$$

Na konštantu A_0 však nie je kladená žiadna obmedzujúca podmienka, a tak dostávame predbežný tvar hľadaného kovektora:

$$A = A_0 dx^0 \tag{119}$$

pričom A_0 je konštanta.

Invariantnosť vzhľadom na galileovský boost:

$$\mathcal{L}_{x^0\partial_i}(A_0 dx^0) = A_0 \mathcal{L}_{x^0\partial_i} dx^0 = A_0 d(\mathcal{L}_{x^0\partial_i} x^0) = A_0 d(x^0 \partial_i x^0) \tag{120}$$

Aj tento výraz je rovný nule automaticky, lebo aplikujeme i-tu parciálnu deriváciu na x^0, avšak $i = 1, 2, 3$. Záver:

$$\boxed{A = dt} \tag{121}$$

kde používame fyzikálne relevantnejší zápis, keďže index 0 zodpovedá súradnici t, teda času. Rovnako vynechávame konštantu A_0 v zmysle vzťahu (107). Invariantné tenzory konkrétneho typu tak budeme určovať až na konštantu.

7.5 Tenzory typu $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Najprv komentár: Ako vieme, tenzory typu $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ sa nazývajú vektory. V kontexte galileovského (aj Minkowského) časopriestoru ich však voláme *štvorvektory*.

Izotrópnosť:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{x^i\partial_j - x^j\partial_i}(A^k\partial_k + A^0\partial_0) &= A^k[x^i\partial_j - x^j\partial_i, \partial_k] + A^0[x^i\partial_j - x^j\partial_i, \partial_0] \\
&= A^k((x^i\partial_j - x^j\partial_i)\partial_k - \partial_k(x^i\partial_j - x^j\partial_i)) + \\
&= A^k(x^i\partial_j\partial_k - x^j\partial_i\partial_k - \delta^i_k\partial_j - x^i\partial_k\partial_j \\
&+ \delta^j_k\partial_i + x^j\partial_k\partial_i) = A^j\partial_i - A^i\partial_j \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow A^j\partial_i = A^i\partial_j
\end{aligned} \tag{122}$$

kde sme využili jednak, že súradnicové polia spolu komutujú a druhak, že $A^0[x^i\partial_j - x^j\partial_i, \partial_0] = 0$. Ďalej bude dobré mať na pamäti, že platí:

$$[x^i\partial_j - x^j\partial_i, \partial_k] = \delta^j_k\partial_i - \delta^i_k\partial_j \tag{123}$$

Keďže ∂_i a ∂_j sú lineárne nezávislé, rovnicu (122) splníme iba tak, že bude platiť $A^i = 0$, a teda máme:

$$A^k = 0, k = 1, 2, 3 \tag{124}$$

Dostávame tak homogénny a izotrópny vektor:

$$A = A^0\partial_0 \tag{125}$$

pričom A^0 je konštanta.

Invariantnosť vzhľadom na galileovský boost:

$$\mathcal{L}_{x^0\partial_i}(A^0\partial_0) = A^0[x^0\partial_i, \partial_0] = -A^0\partial_i \stackrel{!}{=} 0 \tag{126}$$

Rovnicu vyššie splníme jedine tak, že bude platiť $A^0 = 0$. Záver:

Galileovsky invariantný štvorvektor neexistuje

7.6 Tenzory typu $\binom{0}{2}$

Izotrópnosť:

Na začiatok pár komentárov: tenzory typu $\binom{0}{2}$ majú nasledovný tvar:

$$A = A_{\mu\nu} dx^{\mu} \otimes dx^{\nu}, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \tag{127}$$

To je však ekvivalentné so zápisom:

$$A = A_{ij} dx^i \otimes dx^j + A_{i0} dx^i \otimes dx^0 + A^{0j} dx^0 \otimes dx^j + A_{00} dx^0 \otimes dx^0 \tag{128}$$

kde $i, j = 1, 2, 3$. Ak budeme vyžadovať nulovosť Lieovej derivácie v smere generátorov rotácii aplikovanej na tenzor A v tvare (128), pomocou vzťahu (79) dostaneme:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{x^i\partial_j - x^j\partial_i} A = \mathcal{L}_{x^i\partial_j - x^j\partial_i}(A_{kl} dx^k \otimes dx^l) + \mathcal{L}_{x^i\partial_j - x^j\partial_i}(A_{k0} dx^k \otimes dx^0) \\ + \mathcal{L}_{x^i\partial_j - x^j\partial_i}(A_{0l} dx^0 \otimes dx^l) + \mathcal{L}_{x^i\partial_j - x^j\partial_i}(A_{00} dx^0 \otimes dx^0) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \tag{129}$$

V tomto momente si môžeme položiť otázku, či je táto podmienka ekvivalentná so štyrmi nasledovnými podmienkami:

$$\mathcal{L}_{x^i\partial_j - x^j\partial_i}(A_{kl} dx^k \otimes dx^l) \stackrel{!}{=} 0 \tag{130}$$

$$\mathcal{L}_{x^i\partial_j - x^j\partial_i}(A_{k0} dx^k \otimes dx^0) \stackrel{!}{=} 0 \tag{131}$$

$$\mathcal{L}_{x^i\partial_j - x^j\partial_i}(A_{0l} dx^0 \otimes dx^l) \stackrel{!}{=} 0 \tag{132}$$

$$\mathcal{L}_{x^i\partial_j - x^j\partial_i}(A_{00} dx^0 \otimes dx^0) \stackrel{!}{=} 0 \tag{133}$$

Je zrejmé, že tieto podmienky budú ekvivalentné iba v prípade, že všetky štyri členy vo vzťahu (129) sú lineárne nezávislé. Ak teda chceme postupovať rozdelením podmienky invariantnosti na viacero podmienok aplikovaných iba na časti skúmaného tenzora, je nutné po aplikovaní Lieovej derivácie skontrolovať, či sú výsledné tenzory lineárne nezávislé. Vopred prezradíme, že vo všetkých výpočtoch, ktoré vykonáme, tomu tak bude, takže tento postup môžeme použiť.

Obmedzme sa teraz na podmienku (130). Na vyriešenie, kedy túto podmienku splníme, zvolíme myšlienkou identický, avšak technicky iný postup. Podmienku invariantnosti sme doteraz spájali s nulovosťou Lieovej derivácie, ktorú sme vyjadrovali v jej kompletnom, abstraktnom tvare. Lieova derivácia aplikovaná na tenzor je však opäť iba tenzor, ktorému vieme priradiť jeho komponenty. K rovnakým výsledkom sa tak dostaneme aj postupom, keď budeme jednoducho požadovať nulovosť *komponent* Lieovej derivácie príslušného tenzora, je totiž zrejmé, že potom bude nulová aj celá Lieova derivácia. Pre tenzor každého typu sa dá zostaviť rovnica pre komponenty tohto tenzora, ktorá je ekvivalentom nulovosti Lieovej derivácie v smere daného poľa, a tým pádom je ekvivalentom invariantnosti daného tenzora voči pôsobeniu zodpovedajúcej grupy. Pre tenzorové polia typu $\binom{0}{2}$ má daná rovnica tvar:

$$(\xi_a)^k A_{ij,k} + (\xi_a)^k_{,i} A_{kj} + (\xi_a)^k_{,j} A_{ik} = 0 \tag{134}$$

kde ξ_a je a-ty generátor daného fundamentálneho poľa, a $(\xi_a)^k$ je jeho k-ta komponenta. Konkrétne pre rotácie majú tieto generátory tvar:

$$\xi_a = \epsilon_{ajk} x^j \partial_k \Rightarrow (\xi_a)^k = \epsilon_{ajk} x^j \tag{135}$$

Pravdou je, že doteraz sme generátory rotácii uvažovali v tvare $x^i \partial_j - x^j \partial_i$, nie je však ťažké dokázať, že tieto tvary sú ekvivalentné. Pri zápise pomocou Levi-Civitovho symbolu je veľmi dôležité si uvedomiť, že index a nadobúda hodnoty $1, 2, 3$, a nie $a = 0$, pretože rotácie pôsobia iba na súradnice (x, y, z). Index k po správnosti prebieha cez všetky hodnoty $k = 0, 1, 2, 3$, avšak $(\xi_a)^0 = 0 \; \forall a$, práve preto, lebo rotácie ovplyvňujú iba súradnice (x, y, z), a nie čas, tým pádom môžeme efektívne uvažovať $k = 1, 2, 3$, rovnako tak indexy i, j. To, akú obmedzujúcu podmienku dostaneme pre A_{i0}, A_{0i} a A_{00} vyšetríme samostatne.

Rovnicu (134) prepíšeme do nasledovného tvaru, pričom prvý z troch členov položíme rovný nule, keďže $A_{ij} = const.$:

$$\partial_i(\epsilon_{alk} x^l A_{kj}) + \partial_j(\epsilon_{alk} x^l A_{ik}) \stackrel{!}{=} 0 \tag{136}$$

Upravíme ďalej:

$$\epsilon_{alk}\delta^l_i A_{kj} + \epsilon_{alk}\delta^l_j A_{ik} = \epsilon_{aik} A_{kj} + \epsilon_{ajk} A_{ik} \stackrel{!}{=} 0 \tag{137}$$

Prenásobíme členom δ^a_i:

$$\epsilon_{iik} A_{kj} + \epsilon_{ijk} A_{ik} = \epsilon_{ijk} A_{ik} \stackrel{!}{=} 0 \tag{138}$$

Prenásobíme členom ϵ_{ljm} a využijeme vzťah medzi Kroneckerovou deltou a Levi-Civitovým antisymetrickým symbolom:

$$\begin{gathered}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ljm} A_{ik} = \epsilon_{jki}\epsilon_{jml} A_{ik} = (\delta_{km}\delta_{il} - \delta_{kl}\delta_{im}) A_{ik} = A_{lm} - A_{ml} \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow A_{lm} = A_{ml}\end{gathered} \tag{139}$$

Záverom teda je, že komponenty tenzora A sú v indexoch $1, 2, 3$ symetrické. Tento výsledok využijeme vo výpočtoch za chvíľu. Vráťme sa k pôvodnej rovnici pre izotrópnosť:

$$\epsilon_{aik}A_{kj} + \epsilon_{ajk}A_{ik} = 0 \tag{140}$$

a prenásobme ju faktorom ϵ_{ail}:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ail}\epsilon_{aik}A_{kj} + \epsilon_{ail}\epsilon_{ajk}A_{ik} &= (\delta_{ii}\delta_{lk} - \delta_{ik}\delta_{li})A_{kj} + (\delta_{ij}\delta_{lk} - \delta_{ik}\delta_{lj})A_{ik} \\
&= (3\delta_{lk} - \delta lk)A_{kj} + (\delta_{ij}\delta_{lk} - \delta_{ik}\delta_{lj})A_{ik} \\
&= 3A_{lj} - A_{lj} + A_{jl} - A_{ii}\delta_{jl} \overset{!}{=} 0
\end{aligned} \tag{141}$$

Teraz využijeme symetriu získanú vyššie v podobe $A_{lj} = A_{jl}$, ďalej využijeme, že A_{ii} je len akási konštanta (konštanta, pretože všetky komponenty sú konštantné ako dôsledok homogenity daného tenzora), a dostávame:

$$3A_{lj} = A_{kk}\delta_{lj} \Rightarrow A_{ij} = C_1\delta_{ij} \tag{142}$$

kde C_1 je konštanta. Opäť treba pripomenúť, že toto platí pre $i, j = 1, 2, 3$, zvyšné prípady ideme vyriešiť teraz, už opäť pomocou použitia abstraktnej formy Lieovej derivácie:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{x^i\partial_j - x^j\partial_i}(A_{k0}dx^k \otimes dx^0) &= A_{k0}(d(\mathcal{L}_{x^i\partial_j - x^j\partial_i}x^k) \otimes dx^0 \\
&\quad + dx^k \otimes d(\mathcal{L}_{x^i\partial_j - x^j\partial_i}x^0) \\
&= A_{k0}(d((x^i\partial_j - x^j\partial_i)x^k) \otimes dx^0 \\
&\quad + dx^k \otimes d((x^i\partial_j - x^j\partial_i)x^0)
\end{aligned} \tag{143}$$

Druhý člen je rovný nule, lebo aplikujeme ∂_i a ∂_j na x^0, pričom $i, j = 1, 2, 3$. Tým pádom píšeme ďalej:

$$A_{k0}(d(x^i\delta_j^k - x^j\delta_i^k) \otimes dx^0) = (A_{j0}dx^i - A_{i0}dx^j) = 0 \Rightarrow A_{j0}dx^i = A_{i0}dx^j \tag{144}$$

Keďže $i \neq j$, dx^i a dx^j sú lineárne nezávislé, a tým pádom sa rovnica dá splniť iba tak, že:

$$A_{i0} = 0 \tag{145}$$

Úplne analogicky sa dopracujeme ku výsledku:

$$A_{0i} = 0 \tag{146}$$

Posledným výpočtom ku izotrópnosti je:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{x^i\partial_j - x^j\partial_i}(A_{00}dx^0 \otimes dx^0) &= A_{00}(d(\mathcal{L}_{x^i\partial_j - x^j\partial_i}x^0) \otimes dx^0 \\
&\quad + dx^0 \otimes d(\mathcal{L}_{x^i\partial_j - x^j\partial_i}x^0) \\
&= A_{00}(d((x^i\partial_j - x^j\partial_i)x^0) \otimes dx^0 \\
&\quad + dx^0 \otimes d((x^i\partial_j - x^j\partial_i)x^0)
\end{aligned} \tag{147}$$

Oba členy sú rovné nule automaticky, lebo aplikujeme ∂_i a ∂_j na x^0, pričom $i, j = 1, 2, 3$. Tým pádom pre konštantu A_{00} nedostávame žiadnu obmedzujúcu podmienku, a do ďalších výpočtov ju premenujeme na $A_{00} \equiv C_2$.

Po aplikovaní podmienok homogenity a izotrópnosti tak dostávame predbežný tvar invariantného tenzora typu $\binom{0}{2}$:

$$A = C_1 \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j + C_2 dx^0 \otimes dx^0 = C_1 dx^i \otimes dx^i + C_2 dx^0 \otimes dx^0 \tag{148}$$

Teraz aplikujeme invariantnosť vzhľadom na galileovský boost:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{x^0\partial_k}(C_1 dx^i \otimes dx^i + C_2 dx^0 \otimes dx^0) &= C_1((\mathcal{L}_{x^0\partial_k} dx^i) \otimes dx^i + dx^i \otimes (\mathcal{L}_{x^0\partial_k} dx^i)) \\ &+ C_2((\mathcal{L}_{x^0\partial_k} dx^0) \otimes dx^0 \\ &+ dx^0 \otimes (\mathcal{L}_{x^0\partial_k} dx^0)) \\ &= C_1(d(x^0\partial_k x^i) \otimes dx^i + dx^i \otimes d(x^0\partial_k x^i)) \\ &+ C_2(d(x^0\partial_k x^0) \otimes dx^0 \\ &+ dx^0 \otimes d(x^0\partial_k x^0)) \end{aligned} \tag{149}$$

Druhý člen je rovný nule, pretože aplikujeme ∂_k na x^0, pričom $k = 1, 2, 3$. Čo sa týka prvého členu:

$$C_1(\delta^i_k dx^0 \otimes dx^i + \delta^i_k dx^i \otimes dx^0) = C_1(dx^0 \otimes dx^k + dx^k \otimes dx^0) \overset{!}{=} 0 \tag{150}$$

Odtiaľto už je vidno, že na splnenie rovnice je potrebné, aby $C_1 = 0$. Na konštantu C_2 však žiadna obmedzujúca podmienka uložená nebola, a tak záverom je, že galileovsky invariantný tenzor typu $\binom{0}{2}$ existuje, a má tvar:

$$\boxed{A = dt \otimes dt} \tag{151}$$

7.7 Tenzory typu $\binom{2}{0}$

Izotrópnosť:
Čo sa týka aplikovania podmienky izotrópnosti na skúmaný tenzor, z komponentného vyjadrenia Lieovej derivácie dostaneme pre A^{ij} úplne rovnakú podmienku, ako v prípade tenzorov typu $\binom{0}{2}$, za predpokladu, že $i, j = 1, 2, 3$, jediná zmena bude v polohe indexov, a tak môžeme písať:

$$A^{ij} = C_1 \delta^{ij} \tag{152}$$

Samozrejme, konštanta C_1 tentokrát môže byť iná ako predtým, čo však vôbec nie je dôležité, keďže platí vzťah (107). Vyšetrime teraz izotrópnosť ešte pre zvyšné časti skúmaného tenzora, teda tie, ktorých komponenty aspoň z časti zodpovedajú súradnici s indexom 0, teda času:

$$\mathcal{L}_{x^i\partial_j - x^j\partial_i}(A^{k0}\partial_k \otimes \partial_0) = A^{k0}([x^i\partial_j - x^j\partial_i, \partial_k] \otimes \partial_0 + \partial_k \otimes [x^i\partial_j - x^j\partial_i, \partial_0]) \quad (153)$$

Keďže $i, j = 1, 2, 3$, tak $x^i\partial_j$ aj $x^j\partial_j$ komutujú s ∂_0 a tým pádom je druhý člen vo výraze vyššie nulový. Píšeme tak ďalej:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{x^i\partial_j - x^j\partial_i}(A^{k0}\partial_k \otimes \partial_0) &= A^{k0}[x^i\partial_j - x^j\partial_i, \partial_k] \otimes \partial_0 \\ &= A^{k0}(\delta^j_k\partial_i - \delta^i_k\partial_j) \otimes \partial_0 \\ &= (A^{j0}\partial_i - A^{i0}\partial_j) \otimes \partial_0 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow A^{j0}\partial_i = A^{i0}\partial_j\end{aligned} \quad (154)$$

Dostávame podmienku štruktúrou rovnakú, ako pri vyšterovaní izotrópnosti vektorov, a teda musí platiť:

$$A^{i0} = 0 \quad (155)$$

Analogicky dostaneme:

$$A^{0i} = 0 \quad (156)$$

Ostáva vyšetriť:

$$\mathcal{L}_{x^i\partial_j - x^j\partial_i}(A^{00}\partial_0 \otimes \partial_0) = A^{00}([x^i\partial_j - x^j\partial_i, \partial_0] \otimes \partial_0 + \partial_0 \otimes [x^i\partial_j - x^j\partial_i, \partial_0]) \quad (157)$$

Vďaka komutovaniu ∂_0 so všetkými prítomnými členmi je tento výraz rovný nule automaticky, a tak A^{00} nie je nijako obmedzená, označíme ju opäť ako $A^{00} \equiv C_2$. Momentálne má hľadaný tenzor tvar:

$$A = C_1\delta^{ij}\partial_i \otimes \partial_j + C_2\partial_0 \otimes \partial_0 = C_1\partial_i \otimes \partial_i + C_2\partial_0 \otimes \partial_0 \quad (158)$$

Invariantnosť vzhľadom na galileovský boost:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{x^0\partial_k}(C_1\partial_i \otimes \partial_i + C_2\partial_0 \otimes \partial_0) &= C_1\mathcal{L}_{x^0\partial_k}(\partial_i \otimes \partial_i) + C_2\mathcal{L}_{x^0\partial_k}(\partial_0 \otimes \partial_0) \\ &= C_1([x^0\partial_k, \partial_i] \otimes \partial_i + \partial_i \otimes [x^0\partial_k, \partial_i]) \\ &+ C_2([x^0\partial_k, \partial_0] \otimes \partial_0 + \partial_0 \otimes [x^0\partial_k, \partial_0]) \\ &= -C_2(\partial_k \otimes \partial_0 + \partial_0 \otimes \partial_k) \stackrel{!}{=} 0\end{aligned} \quad (159)$$

Vidíme, že na konštantu C_1 nie je uložená žiadna obmedzujúca podmienka (členy pri nej sú rovné nulu, pretože vstupy komutátora vzájomne komutujú). Aby však bola rovnica vyššie splnená, konštanta C_2 musí byť rovná nule. Záverom je, že galileovsky invariantný tenzor typu $\binom{2}{0}$ existuje a má tvar:

$$\boxed{A = \partial_i \otimes \partial_i} \quad (160)$$

7.8 Tenzory typu $\binom{1}{1}$

Izotrópnosť:

Analogicky ku tenzorom typu $\binom{0}{2}$ a $\binom{2}{0}$ máme pre $i, j = 1, 2, 3$:

$$A_i^j = C_1 \delta_i^j \tag{161}$$

Výpočty pre zvyšné časti tenzora:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{x^i\partial_j - x^j\partial_i}(A_0^k dx^0 \otimes \partial_k) &= A_0^k (d(x^i \partial_j x^0 - x^j \partial_i x^0) \otimes \partial_k \\ &\quad + dx^0 \otimes [x^i \partial_j - x^j \partial_i, \partial_k]) \\ &= A_0^k dx^0 \otimes (\delta_k^j \partial_i - \delta_k^i \partial_j) \\ &= dx^0 \otimes (A_0^j \partial_i - A_0^i \partial_j) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \tag{162}$$

Použitím rovnakej logiky ako už viacerokrát dostávame $A_0^i = 0$. Ďalej:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{x^i\partial_j - x^j\partial_i}(A_k^0 dx^k \otimes \partial_0) &= A_k^0 (d(x^i \partial_j x^k - x^j \partial_i x^k) \otimes \partial_0 \\ &\quad + dx^k \otimes [x^i \partial_j - x^j \partial_i, \partial_0]) \\ &= A_k^0 (d(x^i \partial_j x^k - x^j \partial_i x^k) \otimes \partial_0 \end{aligned} \tag{163}$$

$$\begin{aligned} &= (A_j^0 dx^i - A_i^0 dx^j) \otimes \partial_0 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow A_j^0 dx^i = A_i^0 dx^j \Rightarrow A_i^0 = 0 \end{aligned} \tag{164}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{x^i\partial_j - x^j\partial_i}(A_0^0 dx^0 \otimes \partial_0) &= A_0^0 (d(x^i \partial_j x^0 - x^j \partial_i x^0) \otimes \partial_0 \\ &\quad + dx^0 \otimes [x^i \partial_j - x^j \partial_i, \partial_0]) \end{aligned} \tag{165}$$

Prvý člen je rovný nule kvôli $\partial_i x^0 = \partial_j x^0 = 0$, druhý člen je rovný nule kvôli tomu, že ∂_0 komutuje s $x^i \partial_j$ aj s $x^j \partial_i$. Výraz je teda automaticky rovný nule, a tým pádom nemáme obmedzujúcu podmienku pre $A_0^0 \equiv C_2$. Hľadaný tenzor má teda zatiaľ tvar:

$$A = C_1 \delta_i^j dx^i \otimes \partial_j + C_2 dx^0 \otimes \partial_0 = C_1 dx^i \otimes \partial_i + C_2 dx^0 \otimes \partial_0 \tag{166}$$

Invariantnosť vzhľadom na galileovský boost:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{x^0\partial_k}(C_1 dx^i \otimes \partial_i + C_2 dx^0 \otimes \partial_0) &= C_1 (d(x^0 \delta_k^i) \otimes \partial_i + dx^i \otimes [x^0 \partial_k, \partial_i]) \\ &\quad + C_2 (d(x^0 \partial_k x^0) \otimes \partial_0 + dx^0 \otimes [x^0 \partial_k, \partial_0]) \\ &= C_1 dx^0 \otimes \partial_k + C_2 dx^0 \otimes [x^0 \partial_k, \partial_0] \\ &= C_1 dx^0 \otimes \partial_k + C_2 dx^0 \otimes (-\partial_k) \\ &= C_1 dx^0 \otimes \partial_k - C_2 dx^0 \otimes \partial_k \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \tag{167}$$

Táto rovnica je očividne splnená iba v prípade, že platí $C_1 = C_2$. Keď uvážime, že invariantný je aj ľubovoľný násobok už invariantného tenzora, dostávame záver, že galileovsky invariantný tenzor typu $\binom{1}{1}$ existuje a má tvar:

$$\boxed{A = dx^i \otimes \partial_i + dx^0 \otimes \partial_0} \tag{168}$$

7.9 Diskusia výsledkov

V prvom rade uveďme, že galileovská invariantnosť konštantných funkcii je zrejmá. Ak si predstavím, že každému bodu priestoru $\mathbb{R}^4$ zodpovedá rovnaká hodnota, nezáleží na tom, či tieto hodnoty otočím alebo posuniem (či už transláciou alebo boostom), stále budem mať všade tú istú hodnotu.

Čo sa týka invariantnosti tenzora $dt \otimes dt$, tá podľa vzťahu (106) priamo vyplýva z galileovskej invariantnosti tenzora dt - teda keby sme našli invariantný tenzor dt a nenašli by sme $dt \otimes dt$, znamenalo by to, že sme niekde urobili chybu. Hlavným výsledkom výpočtov invariantnosti tenzorov typu $\binom{0}{2}$ teda nie je, že $dt \otimes dt$ je invariantný, ale že to je *jediný* (až na násobenie konštantou) invariantný tenzor tohto typu. Tento tenzor je však degenerovaný, čo nás vedie k záveru, že neexistuje galileovský invariantná metrika. Z toho vyplýva, že v galileovskom časopriestore nemá zmysel operácia merania vzdialeností medzi dvoma bodmi časopriestoru - dvaja pozorovatelia, ktorý sa oproti sebe hýbu nenulovou rýchlosťou, namerajú rôznu vzdialenosť medzi dvoma tými istými bodmi. V tom sa galileovský časopriestor líši od Minkowského - tam totiž existuje metrika invariantná voči Poincarého transformácii, tzv. *Minkowského metrika.*

Všimnime si taktiež, že hoci $\partial_i \otimes \partial_i$ je invariantný, ∂_i nie je. Vzťah (106) je teda skutočne len implikáciou, nie ekvivalenciou.

Tenzor A daný vzťahom (168) sa dá rovnako zapísať ako $A = dx^\mu \otimes \partial_\mu$, $\mu = 0, 1, 2, 3$. Takýto tenzor má svoj špeciálny názov - nazýva sa jednotkový tenzor a označuje sa symbolom $\hat{1}$. Už sme zvyknutí, že zobrazenie s prívlastkom *jednotkové* má špeciálne vlastnosti, rovnako tak pre tento tenzor platí, že ak máme vektor v a kovektor α, potom:

$$\hat{1}(v, \cdot) = v \tag{169}$$

$$\hat{1}(\cdot, \alpha) = \alpha \tag{170}$$

Zároveň platí, že ak máme difeomorfizmus f, potom $f^*\hat{1} = \hat{1}$. Tento tenzor je teda invariantný voči pull-backu konaného ľubovoľným difeomorfizmom, a teda je invariantný aj voči pôsobeniu Lieovej derivácie v smere ľubovoľného vektorového poľa. Tým pádom sme tenzor daný vzťahom (168) mohli a galileovsky invariantný označiť okamžite, bez vykonania výpočtov.

Po týchto komentároch uvádzame výsledky, ku ktorým by sme sa bez výpočtov skutočne nedostali:

1. Galileovsky invariantný štvorvektor neexistuje

2. Tenzor dt je galileovsky invariantný

3. Tenzor $\partial_i \otimes \partial_i$, $i = 1, 2, 3$ je galileovsky invariantný

Záver

V tejto práci sme najprv popísali, čo sú to tenzory, a ako sa definuje ich invariantnosť voči nejakej transformácii. Skúmali sme, aké tenzory nájdeme, keď touto transformáciou bude galileovská transformácia. Tie si vie čitateľ predstaviť nasledovne: majme dvoch pozorovateľov, medzi ktorých vzťažnými sústavami vieme prechádzať galileovskou transformáciou. Títo pozorovatelia sa tak prirodzene nachádzajú v časopriestore. Bodom tohto časopriestoru nech je priradené nejaké tenzorové pole (napr. pole tenzorov deformácie). Každý pozorovateľ vie určiť, aká bude báza priestoru $\mathcal{T}_q^p(\mathbb{R}^4$ v zmysle paragrafu 1.5.1 v závislosti od súradníc zavedených v jeho vzťažnej sústave. Je teda zrejmé, že táto báza bude iná pre oboch pozorovateľov. Nech k tomu ešte obaja majú prístroj, ktorý má schopnosť nejakým záhadným spôsobom merať komponenty tenzorového poľa deformácie. Každý pozorovateľ vie spojením komponent daného tenzorového poľa a bázy priestoru $\mathcal{T}_q^p(\mathbb{R}^4$ určiť toto tenzorové pole. Ak by obom pozorovateľom toto tenzorové pole vyšlo rovnaké, tak povieme, že toto tenzorové pole je galileovsky invariantné.

Samotná galileovská transformácia sa dá komponovať z troch nezávislých transformácii: translácii, rotácii a galileovských boostov, pričom tieto tri transformácie spolu tvoria tzv. Galileovu grupu Gal(3). Na popis invariantnosti tenzorových polí sa ukázal ako kľučový pojem Lieovej derivácie, ktorú sme definovali a popísali jej význam. Následne sme formulovali samotnú podmienku invariantnosti tenzorových polí a explicitne ju zapísali pre vyššie spomínané tri transformácie galileovského časopriestoru. To nás viedlo na riešenie rovníc, ktoré tieto podmienky indukovali, po systematickom riešení týchto rovníc sme tak vedeli určiť galileovsky invariantné tenzory do rangu 2 vrátane.

Vzťahy (106) a (107) nám však výsledky ešte rozšírili. Vďaka vzťahu (107) vieme, že galileovsky invariantných tenzorov je nekonečne veľa, zatiaľ čo vzťah (106) nám umožňuje určiť invariantné tenzory aj vyšších rangov. Vďaka tomuto vzťahu je totiž zrejmé, že tenzory $dt \otimes dt \otimes dt$, $dt \otimes dt \otimes dt \otimes dt$, ... budú rovnako galileovsky invariantné, tak ako aj napr. tenzor $dt \otimes (\partial_i \otimes \partial_i)$, $i = 1, 2, 3$. Ako vidíme, vďaka formulácii invariantnosti pomocou Lieovej derivácie a niekoľkých jej identít sme získali množstvo zaujímavých výsledkov takpovediac "zadarmo".

Pri analýze výsledkov sme spomenuli, že viaceré z nich sa dali predpovedať v podstate okamžite - či už za použitia "sedliackeho rozumu", alebo zo znalostí vlastností napr. jednotkového tenzora. Kvalitatívnemu opisu, prečo sú galileovsky invariantné tenzory, na ktoré sme skutočne museli dôjsť výpočtami (teda dt a $\partial_i \otimes \partial_i$) sme sa zámerne vyhli. Zodpovedať túto otázku je totiž ďaleko nad rámec našic možností, a vyžadovalo by si to skutočne do hĺbky rozumieť povahe týchto tenzorov, a ich fyzikálnemu významu, čo nebolo našim cieľom.

Je namieste podotknúť, že existuje bakalárska práca [2], ktorej autor je M. Kádek. Tá sa zaoberá podobnou úlohou, a síce hľadaním homogénnych a izotrópnych tenzorov. Rozdiel našej práce oproti tejto je najmä v nasledovných bodoch: Za prvé, autor sa v práci [2] zaoberá tenzormi, nie tenzorovými poľami. Už z toho je vidno, že celá matematika použitá v tejto práci bude iná, keďže v našej sa vo veľkom používali pojmy ako gradient a vektorové pole, rovnako ako ich vzťahy s Lieovou deriváciou, zatiaľ čo v práci [2] tomu tak nie je. Za druhé, táto práca okrem homogenity a izotrópnosti skúma aj invariantnosť vzhľadom na galileovské boosty, čo automaticky implikuje, že skúmame tenzory v časopriestore - táto potreba sa v práci [2] prirodzene vytráca, keďže translácie a rotácie nemajú nijaký vplyv na súradnicu zodpovedajúcu času, takže namiesto časopriestoru má zmysel hovoriť iba o priestore.

Literatúra

[1] M. Fecko: *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov*, Iris 2004, 2009, 2018

[2] M. Kádek: *Homogénne a izotropné tenzory*, 2011, dostupné na internete: https://davinci.fmph.uniba.sk/ fecko1/bakalar/2011_kadek_praca.pdf

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Galilean_transformation

[4] P. Zlatoš: *Lineárna algebra a geometria*, 2011

[5] V. Hajko, J. Daniel-Szabó: *Základy fyziky*, VEDA 1980

[6] R. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands: *Feynmanovy přednášky z fyziky - revidované vydání - 1.díl*, Fragment 2000