Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Jedna cesta k Minkowského metrike

Bakalárska práca

2023 Sebastian Brezina

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Jedna cesta k Minkowského metrike

Bakalárska práca

Študijný program:	Fyzika
Študijný odbor:	Fyzika
Školiace pracovisko:	FMFI.KTF - Katedra teoretickej fyziky
Školiteľ:	doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.

Bratislava, 2023 Sebastian Brezina

64439670

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta:	Sebastian Brezina
Študijný program:	fyzika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor:	fyzika
Typ záverečnej práce:	bakalárska
Jazyk záverečnej práce:	slovenský
Sekundárny jazyk:	anglický

Názov: Jedna cesta k Minkowského metrike
A way to Minkowski metric

Anotácia: Einsteinova špeciálna teória relativity bola publikovaná v slávnom článku z roku 1905. Dnes ju automaticky spájame so štvorrozmerným časopriestorom. O ňom však v tomto článku nie je ani slovo. Ten zaviedol Hermann Minkowski až v roku 1908, teda o tri roky neskôr. Jadrom jeho príspevku ale nie je len púhe spojenie času a priestoru do jedného celku (to by bolo triviálne). Je ním kľúčový postreh, že v tomto časopriestore existuje taký metrický tenzor, voči ktorému sú Lorentzove transformácie (veľmi dôležité v teórii relativity) izometriami. Rôzni inerciálni pozorovatelia tak pozorujú objektívne fakty (udalosti) a vidia ich rôzne, pričom vzťahy medzi týmito rôznymi pohľadmi sa dajú chápať geometricky, prechod od opisu jedného k druhému je izometriou Minkowského metriky (niečo ako „rotácia" v štvorrozmernom časopriestore).

Ak človek dáva dobrý pozor na (tretiackej výberovej) prednáške Matematická fyzika (konkrétne v časti o Killingových rovniciach), zistí, že by vlastne malo byť celkom jednoduché odvodiť tvar tejto metriky zo známych vzorcov z prvého ročníka. Stačí si odvodiť „generátory" všetkých potrebných transformácií (translácií, rotácií a Lorentzových transformácií - aj to je remeslo, ktoré sa na MF učí) a žiadať, aby boli Killingovými poľami hľadanej metriky.

Keď to všetko pekne vyjde, mohlo by nám napadnúť urobiť to isté pre staršiu Galileiho relativitu. Zaviesť v štvorrozmernom priestore (zrejme inú) metriku tak, aby jej izometriami boli Galileiho transformácie (čo sa dalo - a malo - urobiť už pred Einsteinom). A tu čaká prekvapenie - pochopenie, prečo sa to neurobilo.

Cieľ: Cieľom práce je vyššie opísaným spôsobom odvodiť Minkowského metriku. Potom skúsiť zopakovať metódu v galileovskom prípade a okomentovať výsledok výpočtov. A samozrejme všetko pekne a zrozumiteľne spísať.

Literatúra: M.Fecko: Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov, Iris, 2004, 2018

Vedúci:	doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.
Katedra:	FMFI.KTF - Katedra teoretickej fyziky
Vedúci katedry:	doc. RNDr. Tomáš Blažek, PhD.
Dátum zadania:	30.06.2022

Dátum schválenia: 08.08.2022 doc. RNDr. Tomáš Blažek, PhD.

64439670

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

garant študijného programu

....
študent

....
vedúci práce

Čestné vyhlásenie

Vyhlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne s použitím uvedenej literatúry.

. . . .

Sebastian Brezina

Poďakovanie

Veľmi by som sa chcel poďakovať môjmu školiteľovi doc. RNDr. Mariánovi Feckovi, PhD. za všetok venovaný čas a množstvo odborných rád, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce a umožnili mi získať väčší rozhľad. Veľká vďaka patrí aj mojim rodičom za podporu pri štúdiu a pri písaní tejto práce.

Abstrakt

V tejto práci odvodíme Minkowského metriku, objavenú matematikom Hermannom Minkowským okolo roku 1908, používanú na definovanie prirodzenej metrickej štruktúry v Minkowského časopriestore. Minkowského metrika je plne určená (až na násobok konštantou) svojimi izometriami, ktorými sú práve translácie a Lorentzove transformácie, v špeciálnej teórií relativity požívané na transformovanie medzi inerciálnymi vzťažnými sústavami. Celý postup odvodenia Minkowského metriky zopakujeme pre staršiu Galileiho relativitu a matematicky objasníme, prečo sa podobná metrická štruktúra, ktorej izometrie by prirodzene boli translácie a Galileiho transformácie, nezaviedla pred publikovaním špeciálnej teórie relativity v roku 1905 Albertom Einsteinom. Na dosiahnutie týchto cieľov využijeme základy diferenciálnej geometrie a teórie Lieových grúp.

Kľúčové slová: Minkowského metrika, Galileiho metrika, metrický tenzor, izometrie

Abstract

In this theses, we derive the Minkowski metric, discovered by the mathematician Hermann Minkowski around 1908, used to define the natural metric structure on Minkowski spacetime. The Minkowski metric is fully given (up to a multiple of a constant) by its isometries, which are precisely translations and Lorentz transformations, used in the special theory of relativity to transform between inertial reference frames. We repeat the entire approach of deriving the Minkowski metric for the older Galilean relativity and we mathematically clarify why a similar metric structure, whose isometries would naturally be translations and Galilean transformations, was not introduced before the publication of Albert Einstein's special theory of relativity in 1905. To achieve these goals, we will use the basics of differential geometry and Lie groups theory.

Keywords: Minkowski metric, Galilean metric, metric tensor, isometries

Predhovor

Minkowského metrika sa od doby svojho objavenia pred viac než 115 rokmi stala fyzikálnym folklórom. Avšak v čase jej objavu zrejme vyvolala prekvapenie svojím tvarom, kvôli netriviálnej kombinácií kladných a záporných znamienok. Táto kombinácia je prekvapujúca najmä pri porovnaní s euklidovskou metrikou, ktorá štandardne obsahuje len kladné znamienka a je používaná na počítanie „dĺžok v newtonovsko-galileovskej fyzike". V základných kurzoch špeciálnej teórie relativity sa zväčša z rôznych dôvodov postuluje tvar Minkowského metriky a iba stručne sa aj fyzikálne zdôvodní. Navyše sa vôbec neobjasňuje nepoužívanie podobnej metrickej štruktúry v rámci staršej Galileiho relativity.

Hlavným cieľom tejto bakalárskej práce je matematicky odvodiť Minkowského metriku (skratka pre metrický tenzor). Vedľajším cieľom je matematicky vysvetliť, ako to je s prítomnosťou podobnej metriky v bežnom živote a aj v newtonovsko-galileovskej fyzike. Na splnenie týchto cieľov využijeme aparát diferenciálnej geometrie a teórie Lieových grúp.

Obsah

Úvod **1**

1 Matematické pojmy **3**

1.1 Lieova grupa a Lieova algebra 3
1.2 Tenzorové polia na variete 4
1.3 Lieova derivácia a izometrie 5
1.4 Invariantnosť tenzora voči transformácií 6
1.5 Akcia Lieovej grupy a fundamentálne polia 7

2 Lorentzove a Galileiho transformácie **10**

2.1 Časopriestor a transformácie vzťažných sústav 10
2.2 Lorentzove transformácie 10
2.3 Galileiho transformácie 12
2.4 Transformácie IVS tvoria Lieove grupy 13
2.5 Lieove algebry transformácií IVS 13
2.6 2D Lorentzove a Galileiho transformácie 14

3 Hľadanie metrických tenzorov **17**

3.1 Minkowského metrika v 2D časopriestore 17
3.2 Galileiho metrika v 2D časopriestore 19
3.3 Metrika v 2D časopriestore cez lineárnu algebru 20
3.4 Minkowského metrika v 4D časopriestore 21
3.5 Galileiho metrika v 4D časopriestore 22
3.6 Kometrika v 4D časopriestore 24
3.7 Galileovská limita 25

Záver **27**

A Komutovanie s rotačnými maticami **29**

Literatúra **30**

Úvod

V roku 1905 Albert Einstein publikoval špeciálnu teóriu relativity (ŠTR) vybudovanú na dvoch postulátoch - princípe relativity, podľa ktorého sú všetky fyzikálne zákony rovnaké vo všetkých inerciálnych vzťažných sústavách a princípe invariantnosti rýchlosti svetla vo vákuu, podľa ktorého je rýchlosť svetla vo vákuu rovnaká vo všetkých inerciálnych vzťažných sústavách. Tieto postuláty viedli na množstvo nových fyzikálnych dôsledkov, najpopulárnejším z nich je vo všeobecnosti rôzne vnímanie plynutia času pre rôznych inerciálnych pozorovateľov, čo je v priamom rozpore s newtonovsko-galileovským konceptom absolútneho času pre všetkých inerciálnych pozorovateľov.

Okolo roku 1908 sa na celú problematiku pozrel matematik Hermann Minkowski, ktorému sa podarilo interpretovať ŠTR geometricky a vybudovať efektívny matematický aparát pre túto teóriu - štvortenzory. Minkowski prišiel s myšlienkou zaviesť štvorrozmerný priestor - časopriestor, čím spojil čas a priestor do jedného celku. Hlavným Minkowského objavom bolo zistenie, že v tomto štvorrozmernom časopriestore (dnes známeho pod názvom Minkowského časopriestor) prirodzene existuje metrický tenzor (Minkowského metrika), ktorého izometrie sú práve Lorentzove transformácie a translácie, v ŠTR slúžiace na transformovanie medzi inerciálnymi vzťažnými sústavami. Minkowského metrický tenzor má v sebe zakódovanú celú geometriu ŠTR, umožňuje počítať „vzdialenosti" v Minkowského časopriestore a predstavuje ďalšiu užitočnú absolútnu štruktúru v ŠTR.

V mnohých učebniciach a kurzoch ŠTR sa štandardne postuluje Minkowského metrika z rôznych dôvodov a málokedy sa matematicky zdôvodní jej tvar. Ani z originálneho Minkowského článku (pozri [3] s anglickým prekladom [4] s. 39-53) nie je triviálne vidieť vysvetlenie jej tvaru, ktorý je pri porovnaní s euklidovskou metrikou dosť neintuitívny a prekvapujúci.

V tejto práci odvodíme Minkowského metrický tenzor využitím aparátu diferenciálnej geometrie a teórie Lieových grúp. Následne zopakujeme celú myšlienku pre staršiu Galileiho relativitu a ukážeme, prečo sa podobná absolútna štruktúra, ktorej izometrie by boli translácie a Galileiho transformácie, prirodzene nezaviedla už skôr, pred objavením ŠTR.

Práca pozostáva z troch kapitol rozdelených do viacerých podkapitol a jej súčasťou je aj jeden dodatok, v ktorom sa nachádza dôkaz zaujímavého matematického tvrdenia, potrebného v rámci výpočtov.

Prvá kapitola slúži na pripomenutie kľúčových poznatkov z oblasti diferenciálnej geometrie a Lieových grúp pre potreby tejto práce. Cieľom prvej kapitoly nie je ucelený výklad daných pojmov, ale len ich pripomenutie a intuitívne priblíženie čitateľovi.

V druhej kapitole sa pozrieme na transformačné vzťahy medzi inerciálnymi vzťažnými sústavami, a to na Lorentzove a Galileiho transformácie. Táto kapitola má tiež informačný charakter, pričom jej cieľom je pripomenúť tieto transformačné vzťahy a odvodiť pár kľúčových výsledkov, ktoré budeme potrebovať neskôr.

V tretej kapitole naplníme cieľ tejto práce, t.j. odvodíme Minkowského metrický tenzor a ukážeme, ako je to s existenciou metrického tenzora v Galileiho časopriestore. Nad rámec cieľov tejto práce sa pozrieme aj na kometriku a galileovskú limitu.

Na záver zhrnieme všetky naše získané výsledky a porovnáme ich medzi sebou. Tým sa ukáže dôležitosť Minkowského metriky a vysvetlí sa, prečo sa v Galileiho relativite nezaviedla podobná metrika už pred Einsteinom.

1

Matematické pojmy

V tejto kapitole si pripomenieme nevyhnutý matematický aparát slúžiaci na vykonanie všetkých výpočtov v rámci tejto práce a do určitej miery ho intuitívne priblížime čitateľovi. Tiež odvodíme pár kľúčových výsledkov, ktoré budeme potrebovať v nasledujúcich kapitolách. Pre ucelený výklad daných pojmov odporúčame nahliadnuť do literatúry [1] a [7].

1.1 Lieova grupa a Lieova algebra

Grupa je množina s asociatívnou binárnou operáciou medzi prvkami tejto množiny, pričom je uzavretá vzhľadom na túto operáciu. V grupe musí byť prítomný neutrálny prvok a pre každý grupový prvok musí existovať jednoznačný inverzný prvok. V ďalšom budeme pracovať iba s maticovými grupami, v ktorých je asociatívnou binárnou operáciou násobenie matíc a neutrálnym prvkom je jednotková matica.

Hladká varieta (ďalej len *varieta*) M je objekt, ktorý môžeme intuitívne chápať ako n-rozmerný priestor, na ktorom sa vždy dá zaviesť n hladkých lokálnych súradníc $[x^1, \dots, x^n]$, pričom lokálne sa tento priestor podobá na $\mathbb{R}^n$ a celý ho môžeme poskladať z takýchto lokálnych kúskov. Napríklad povrch sféry vieme popísať pomocou dvoch súradníc $[\theta, \varphi]$ a na dostatočne malom úseku sa javí byť ako $\mathbb{R}^2$.

Lieova grupa G je skĺbenie pojmov grupa a varieta do jedného celku, pričom si nesie vlastnosti obidvoch pojmov. To znamená, že grupové prvky teraz tvoria hladkú varietu a môžeme ich určovať pomocou súradníc.

Lieova algebra $\mathcal{G}$ je lineárny priestor s Lieovou zátvorkou, čo je antisymetrické bilineárne zobrazenie spĺňajúce Jacobiho identitu. Lieova algebra je štruktúra existujúca nezávisle od pojmu Lieova grupa, ale každej n-rozmernej Lieovej grupe vieme priradiť jej n-rozmernú Lieovu algebru, ktorá obsahuje veľa dôležitých informácií o svojej Lieovej grupe. To je veľmi dôležitý poznatok, pretože vo všeobecnosti je jednoduchšie pracovať s lineárnymi priestormi ako s varietami. Týmto máme k dispozícií lineárnu štruktúru priradenú k Lieovej grupe, ktorá nesie o nej podstatné informácie. V ďalšom budeme pracovať iba práve s takými Lieovými algebrami, ktoré prislúchajú Lieovým grupám.

Každá Lieova grupa G obsahuje neutrálny prvok a ukazuje sa, že je na nej možné zostrojiť určité významné krivky, ktoré štartujú práve z tohto neutrálneho prvku. Tieto krivky sa nazývajú *jednoparametrické podgrupy* a im prislúchajúce grupové prvky sa dajú vyjadriť ako

$$G(t) = e^{tX} \tag{1.1.1}$$

kde $G(t)$ je prvok grupy G, $t \in \mathbb{R}$ je parameter a X je prvok Lieovej algebry $\mathcal{G}$ prislúchajúcej grupe G určujúci danú jednoparametrickú podgrupu. Prvok $X \in \mathcal{G}$ vypočítame nasledovne

$$X = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 G(t) \tag{1.1.2}$$

V maticových Lieových grupách vieme uvažovaním malých hodnôt parametra $t = \varepsilon$ zjednodušiť výraz (1.1.1) rozvojom exponenciálnej funkcie do prvého rádu ε na

$$G(\varepsilon) = \mathbb{1} + \varepsilon X \tag{1.1.3}$$

Lieovu algebru $\mathcal{G}$ tvorí lineárny priestor, preto v ňom vieme zaviesť bázu E_a a ľubovoľný prvok $X \in \mathcal{G}$ vyjadriť ako[1]

$$X = X^a E_a \tag{1.1.4}$$

Táto lineárnosť nám umožňuje skúmať výraz (1.1.3) iba na báze $\mathcal{G}$, t.j. skúmať jednoparametrické podgrupy tvaru

$$G(\varepsilon) = \mathbb{1} + \varepsilon E_a \tag{1.1.5}$$

1.2 Tenzorové polia na variete

Hladké tenzorové pole (ďalej len *tenzorové pole* alebo *tenzor*) A typu $\binom{p}{q}$ na variete M zapíšeme ako

$$A = A^{\cdots j}_{i\cdots}(x) dx^i \otimes \cdots \otimes \partial_j \tag{1.2.1}$$

pričom tenzorové pole typu $\binom{1}{0}$ sa nazýva vektorové pole V

$$V = V^i(x)\partial_i \tag{1.2.2}$$

[1]Tu už používame *sumačnú konvenciu*, t.j. sumuje sa vždy cez dva rovnaké indexy, pričom jeden musí byť horný a druhý dolný.

Tenzor je objekt definovaný nezávisle od lokálnych súradníc a v rôznych lokálnych súradniciach má vo všeobecnosti rôzne komponenty. Pri prechode z lokálnych súradníc x do $x'(x)$ sa komponenty tenzora typu $\binom{p}{q}$ transformujú nasledovne

$$A'^{i\ldots j}_{k\ldots l}(x') = J^i_r(x)\ldots J^j_s(x)\left(J^{-1}\right)^u_k(x)\ldots\left(J^{-1}\right)^v_l(x)A^{r\ldots s}_{u\ldots v}(x) \tag{1.2.3}$$

kde $J^i_j(x) = \frac{\partial x'^i(x)}{\partial x^j}$ je Jacobiho matica transformácie lokálnych súradníc.

Metrický tenzor g je symetrický nedegenerovaný tenzor typu $\binom{0}{2}$ tvaru

$$g = g_{ij}(x)dx^i \otimes dx^j \tag{1.2.4}$$

ktorý vytvára veľmi dôležitú štruktúru na variete M, umožňujúcu počítať skalárny súčin v každom bode M. Symetričnosť tenzora znamená, že pre jeho komponenty platí $g_{ij} = g_{ji}$ a nedegenerovanosť znamená nesingulárnosť matice komponent[2], t.j. $\det g \neq 0$.

Kometrický tenzor g^{-1} je symetrický nedegenerovaný tenzor typu $\binom{2}{0}$ tvaru

$$g^{-1} = g^{ij}\partial_i \otimes \partial_j \tag{1.2.5}$$

ktorého matica komponent je inverzná ku matici komponent metrického tenzora, t.j. platí pre ňu

$$g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j \tag{1.2.6}$$

1.3 Lieova derivácia a izometrie

Lieova derivácia tenzorového poľa A typu $\binom{p}{q}$ v smere vektorového poľa V je tenzorové pole typu $\binom{p}{q}$, ktorého súradnicové vyjadrenie je[3]

$$\mathcal{L}_V A = \left(V^m A^{\ldots j}_{i\ldots,m} + V^m_{,i}A^{\ldots j}_{m\ldots} + \ldots - V^j_{,m}A^{\ldots m}_{i\ldots}\right)dx^i \otimes \cdots \otimes \partial_j \tag{1.3.1}$$

Tenzorové pole A je *lieovsky invariantné* voči vektorovému poľu V, ak

$$\mathcal{L}_V A = 0 \tag{1.3.2}$$

čo možno, ako vidno z (1.3.1), alternatívne sformulovať cez komponenty ako

$$V^m A^{i\ldots j}_{k\ldots l,m} + V^m_{,k}A^{i\ldots j}_{m\ldots l} + \ldots - V^j_{,m}A^{i\ldots m}_{k\ldots l} = 0 \tag{1.3.3}$$

V každom bode priestoru máme definovaný vektor V a vždy sa vieme pohnúť o malý krok ε v smere tohto vektora do ďalšieho bodu, kde celý proces zopakujeme a

[2]Pracujeme s dvojindexovými tenzormi, preto ich komponenty vieme efektívne zapísať cez matice, ktoré označíme rovnako ako tenzory.

[3]Kde čiarky vo výraze (1.3.1) predstavujú skrátený výraz pre derivovanie, napr. $V^m_{,i} := \partial_i V^m$.

postupne tým na variete vytvoríme krivku. Takáto krivka sa nazýva *integrálna krivka poľa* V a do prvého rádu ε ju zapíšeme ako

$$x^i(t+\varepsilon) = x^i(t) + \varepsilon V^i(x(t)) \tag{1.3.4}$$

zároveň sa týmto postupom celá varieta pokryje integrálnymi krivkami.

Analogicky sa na to môžeme pozrieť pohľadom *toku*, čo je zobrazenie Φ_s variety samej na seba, ktoré bodu na integrálnej krivke priradí iný bod na tej istej integrálnej krivke s parametrom o s väčším.

Izometria je zobrazenie variety samej na seba, ktoré zachováva dĺžky. Tomuto zobrazeniu prislúchajú špeciálne vektorové polia - *Killingove polia* ξ, ktoré získame z podmienky lieovskej invariantnosti pre metrický tenzor g, t.j. riešením Killingových rovníc

$$\mathcal{L}_\xi g = 0 \tag{1.3.5}$$

V tomto prípade môžeme Lieovu deriváciu metrického tenzora fyzikálne interpretovať ako rýchlosť zmeny tenzorového poľa g spôsobenú tokom vektorového poľa ξ deformujúceho varietu (nezachováva sa dĺžka krivky) a ak je Lieova derivácia metrického tenzora nulová, tak tok tohto vektorového poľa nespôsobuje deformáciu, čiže sa jedná o izometriu[4].

1.4 Invariantnosť tenzora voči transformácií

Nech $f : M \to N$ je *difeomorfizmus*[5] variet M a N, pričom na M zavedieme lokálne súradnice $[x^1, \dots, x^n]$ a na N zase $[y^1, \dots, y^n]$. Tenzorové pole A na N vyjadríme ako

$$A = A^{\cdot\cdot\cdot a}_{b\dots}(y) dy^b \otimes \dots \otimes \partial_a \tag{1.4.1}$$

Výraz f^*A nazveme *pull-back* tenzorového poľa A. Pull-back indukuje tenzorové pole na variete M z variety N a vypočítame ho ako

$$f^*A = A^{\cdot\cdot\cdot a}_{b\dots}(y(x)) J^b_i(x) \dots \left(J^{-1}\right)^j_a(x) dx^i \otimes \dots \otimes \partial_j \tag{1.4.2}$$

kde $J^a_i(x) = \frac{\partial y^a(x)}{\partial x^i}$ je Jacobiho matica daného zobrazenia.

Pre naše potreby je odteraz varieta $N = M$ a $y = x'$ (takéto zobrazenie sa nazýva *transformácia*), čím výraz (1.4.2) prejde na

$$f^*A = A^{\cdot\cdot\cdot a}_{b\dots}(x'(x)) J^b_i(x) \dots \left(J^{-1}\right)^j_a(x) dx^i \otimes \dots \otimes \partial_j \tag{1.4.3}$$

kde $J^a_i(x) = \frac{\partial x'^a(x)}{\partial x^i}$ je Jacobiho matica transformácie.

Tenzorové pole A nazveme *invariantné voči transformácií* f, ak

$$f^*A = A \tag{1.4.4}$$

[4]Deformácia je definovaná ako opak izometrie.

[5]f je bijekcia, f a f^{-1} sú hladké a $\dim M = \dim N = n$.

1.5 Akcia Lieovej grupy a fundamentálne polia

Prvkami Lieovej grupy G sme schopní pôsobiť na body variety, pričom tomuto pôsobeniu vieme priradiť vektorové polia - *fundamentálne polia* ξ_X, ktoré nám ukazujú pre všetky prvky X Lieovej algebry $\mathcal{G}$ všetky smery, do ktorých vieme ísť z daného bodu vplyvom pôsobenia Lieovej grupy G.

Prvky Lieovej grupy sa dajú efektívne určovať cez (1.1.1) pomocou jej Lieovej algebry určenej prvkami X. Fundamentálne pole prvku X zapíšeme ako

$$\xi_X = \xi^i_X \partial_i \tag{1.5.1}$$

Fundamentálne polia závisia od X lineárne

$$\xi_{X^a E_a} = X^a \xi_{E_a} \tag{1.5.2}$$

čo nám umožňuje sa vo vzťahu (1.5.1) obmedziť iba na bázu E_a, t.j. ďalej pracovať len s *generátormi* ξ_{E_a}

$$\xi_{E_a} = \xi^i_{E_a} \partial_i \tag{1.5.3}$$

Príkladom[6] akcie Lieovej grupy je *translácia* o vektor T pôsobiaca na variete $\mathbb{R}^n$. V kartézskych súradniciach sú komponenty vektorového poľa T konštantné a každý bod $\mathbb{R}^n$ sa posunie v smere tohto vektorového poľa, preto podľa (1.3.4) dostaneme fundamentálne pole pre translácie v kartézskych súradniciach, ktorého generátory označíme ako

$$\xi^T_i = \partial_i \tag{1.5.4}$$

Ľavú akciu Lieovej grupy G pôsobiacu na variete M každým svojím grupovým prvkom $g \in G$ označíme L_g a definujeme ju ako difeomorfizmus spĺňajúci podmienky

$$L_g : M \to M \qquad L_{g_1 g_2} = L_{g_1} \circ L_{g_2} \qquad L_e = \mathrm{id}_M \tag{1.5.5}$$

kde $g_1, g_2 \in G$ a e je neutrálny prvok G.

Analogicky definujeme *pravú akciu* R_g

$$R_g : M \to M \qquad R_{g_1 g_2} = R_{g_2} \circ R_{g_1} \qquad R_e = \mathrm{id}_M \tag{1.5.6}$$

Ak máme k dispozícií ľavú akciu L_g, tak automaticky máme aj pravú akciu určenú predpisom

$$\hat{R}_g = L_{g^{-1}} \tag{1.5.7}$$

Reprezentáciou $\rho(g)$ Lieovej grupy G v lineárnom priestore V nazveme *ľavú lineárnu akciu.* Ukazuje sa, že v priestore tenzorových polí $\mathcal{T}^p_q(M)$ na variete M môžeme pôsobiť veľmi dôležitou a špeciálnou reprezentáciou tvaru

$$\rho(g) = R^*_g \tag{1.5.8}$$

[6] Tento príklad je zvolený zámerne kvôli potrebe výsledku v ďalších kapitolách.

Odteraz predpokladáme, že prvky g sú určené jednoparametrickou podgrupou (1.1.1).

Odvodenou reprezentáciou $\rho'(X)$ Lieovej algebry $\mathcal{G}$ v priestore tenzorových polí $\mathcal{T}^p_q(M)$ na variete M k reprezentácií (1.5.8) je výraz

$$\rho'(X) = \mathcal{L}_{\xi_X} \tag{1.5.9}$$

kde ξ_X je fundamentálne pole (1.5.1).

Vo všeobecnosti je vzťah medzi $\rho(g)$ a jej prislúchajúcou $\rho'(X)$ určený ako

$$\rho(e^{tX}) = e^{t\rho'(X)} \tag{1.5.10}$$

kde $t \in \mathbb{R}$ je parameter.

Rovnica (1.5.10) sa v našom prípade vyjadrením do prvého rádu ε pre malé hodnoty parametra $t = \varepsilon$ zredukuje na

$$R^*_{\mathbb{1}+\varepsilon X} = \hat{1} + \varepsilon \mathcal{L}_{\xi_X} \tag{1.5.11}$$

Z podmienky (1.4.4) pre transformáciu $f = R_{\mathbb{1}+\varepsilon X}$ dostaneme

$$\mathcal{L}_{\xi_X} A = 0 \tag{1.5.12}$$

čo je podmienka lieovskej invariantnosti tenzorového poľa A voči ξ_X.

Tento výsledok hovorí, že pri hľadaní invariantného tenzorového poľa voči zobrazeniu f, ktoré vzniklo pôsobením Lieovej grupy na variete, sa dá úloha previesť na hľadanie lieovsky invariantného tenzorového poľa voči fundamentálnym poliam danej akcie Lieovej grupy.

Opäť pôsobme transláciou o vektor T na body variety $M = \mathbb{R}^n$, ktoré označíme $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Toto pôsobenie definujeme ako pravú akciu

$$R_T x = x + T \tag{1.5.13}$$

Hľadajme translačne invariantné tenzorové polia A typu $\binom{0}{2}$ voči akcii (1.5.13) v priestore tenzorových polí $\mathcal{T}^0_2(M)$, t.j.

$$R^*_T A = A \tag{1.5.14}$$

Rovnica (1.5.14) vedie podľa (1.4.3) na podmienku

$$A_{ij}(x + T) = A_{ij}(x) \tag{1.5.15}$$

pre všetky vektory T.

Podmienka (1.5.15) je splnená, ak je $A_{ij} = \text{const}$. Analogicky postupujeme aj v prípade tenzorového poľa B typu $\binom{2}{0}$ a dopracujeme sa k rovnakému záveru o konštantnosti komponent, t.j. $B^{ij} = \text{const}$.

Definujme ľavú akciu Lieovej grupy pseudoortogonálnych matíc $O(r,s)$ na body variety $\mathbb{R}^n$ ako

$$L_C x = Cx \tag{1.5.16}$$

kde $C \in O(r,s)$ a $r+s=n$

K ľavej akcii (1.5.16) nájdeme pravú akciu pomocou (1.5.7) ako

$$\hat{R}_C = L_{C^{-1}} \tag{1.5.17}$$

Hľadajme invariantné tenzorové polia A typu $\binom{0}{2}$ voči akcii (1.5.17) v priestore tenzorových polí $\mathcal{T}_2^0(M)$, pričom predpokladajme translačnú invariantnosť A. Chceme

$$\hat{R}_C^* A = A \tag{1.5.18}$$

Rovnica (1.5.18) vedie podľa (1.4.3) na podmienku

$$A_{kl}\left(C^{-1}\right)^k_i\left(C^{-1}\right)^l_j = A_{ij} \tag{1.5.19}$$

pre všetky matice $C \in O(r,s)$.

Analogicky postupujeme aj v prípade translačne invariantného tenzorového poľa B typu $\binom{2}{0}$ a dopracujeme sa k podmienke

$$B^{kl} C^i_k C^j_l = B^{ij} \tag{1.5.20}$$

pre všetky matice $C \in O(r,s)$.

Podmienky (1.5.19) a (1.5.20) sa dajú alternatívne zapísať v maticovom zápise ako

$$A = C^{\mathrm{T}} A C \tag{1.5.21}$$

$$B = C B C^{\mathrm{T}} \tag{1.5.22}$$

Tým sme pre translačne invariantné tenzorové polia A a B dostali podmienky invariantnosti voči lineárnym transformáciám C, ktoré vznikajú pôsobením Lieovej grupy pseudoortogonálnych matíc $O(r,s)$ na variete $\mathbb{R}^n$.

2

Lorentzove a Galileiho transformácie

V tejto kapitole si pripomenieme Lorentzove a Galileiho transformácie, prepojíme ich s matematickými poznatkami z prvej kapitoly a nakoniec odvodíme Lieove algebry a fundamentálne polia týchto transformácií. Tieto výsledky budú pre nás kľúčové pri hľadaní metrických tenzorov v ďalšej kapitole. Pre viac detailov o Lorentzových a Galileiho transformáciách odporúčame nahliadnuť do literatúry [5] a [6].

2.1 Časopriestor a transformácie vzťažných sústav

Časopriestor chápeme ako 4-rozmernú varietu a popíšeme ho (globálnymi) súradnicami $[x^0, x^1, x^2, x^3]$, kde x^0 zodpovedá časovej súradnici a x^1, x^2, x^3 zodpovedajú priestorovým súradniciam.

Z *princípov* ŠTR vyplýva *lineárnosť* transformačných vzťahov medzi inerciálnymi vzťažnými sústavami (IVS) pri použití kartézskych súradníc v týchto IVS. Zavedením súradníc x a x' v časopriestore by sme vo všeobecnosti vytvorili dve vzťažné sústavy, medzi ktorými existuje ľubovoľný transformačný vzťah $x'(x)$, ale podľa predchádzajúceho tvrdenia je tento transformačný vzťah lineárny v prípade IVS a použití kartézskych súradníc. Z *princípu relativity* a *princípu kauzality* vyplýva existencia iba dvoch typov týchto lineárnych transformácií (pozri [5] s. 57, podkapitola 2.11), a to Lorentzove a Galileiho transformácie[1] (ku každej z nich sa pridajú aj translácie).

2.2 Lorentzove transformácie

Lorentzove transformácie (LT), ktoré označíme ako Λ, pozostávajú z rotácií a lorentzovských boostov. Pomocou LT sa pôsobí na body *Minkowského časopriestoru*,

[1] V tejto práci sa nezaoberáme zrkadleniami.

ktorým v kartézskych súradniciach priradíme jednu časovú súradnicu[2] $x^0 := ct$ a tri priestorové súradnice $x^1 := x$, $x^2 := y$ a $x^3 := z$.

Z LT je najznámejší a najčastejšie používaný práve lorentzovský boost v smere osi x, slúžiaci na transformovanie medzi IVS S a S' pohybujúcich sa voči sebe relatívnou rýchlosťou $\vec{v} = (v, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, ktorého tvar je

$$\begin{aligned} ct' &= \frac{ct - \frac{vx}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Vzťah (2.2.1) možno efektívne zapísať cez komponentné vyjadrenie LT Λ ako

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \tag{2.2.2}$$

Lineárnosť LT nám cez (2.2.2) v určitom zmysle umožňuje chápať súradnice v časopriestore ako komponenty vektora, tzv. *štvorvektora* $\mathcal{X} := (x^0, x^1, x^2, x^3)^{\mathrm{T}}$.

Transformovanie rotáciami prebieha iba medzi priestorovými súradnicami. Transformáciu rotáciou označíme ako Λ_R a platí pre ňu

$$\Lambda_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \tag{2.2.3}$$

čo je matica 4×4, kde R je všeobecná rotačná matica 3×3 určená „vektorom" rotácie $\vec{\varphi} = \varphi \vec{n}$, pričom φ je uhol rotácie a $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)^{\mathrm{T}}$ je jednotkový vektor, ktorým je daná os rotácie.

Transformovanie boostom prebieha medzi časovou a priestorovými súradnicami. Boost môže prebiehať v ľubovoľnom smere určenom vektorom okamžitej rýchlosti $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)^{\mathrm{T}}$. Boost v smere x označíme ako Λ_x, v smere y ako Λ_y a v smere z ako Λ_z. Platí pre ne

$$\begin{gathered} \Lambda_x = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Lambda_y = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Lambda_z = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{2.2.4}$$

---

[2]Výhodné je mať časovú súradnicu x^0 rovnakého rozmeru ako zvyšné priestorové súradnice, čo vieme zabezpečiť práve využitím rýchlosti svetla c.

kde $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ a $\beta = v/c$.

Použitím Λ_x vo vzťahu (2.2.2) dostaneme (2.2.1). Matice lorentzovských boostov sú *symetrické* a pre LT Λ platí, že $\det \Lambda = 1$.

2.3 Galileiho transformácie

Galileiho transformácie (GT), ktoré označíme ako G, pozostávajú z rotácií a galileovských boostov. Pomocou GT sa pôsobí na body *Galileiho časopriestoru*, ktorým v kartézskych súradniciach priradíme jednu časovú súradnicu $x^0 := t$ a tri priestorové súradnice $x^1 := x$, $x^2 := y$ a $x^3 := z$.

Z GT je najznámejší a najčastejšie používaný práve galileovský boost v smere osi x, slúžiaci na transformovanie medzi IVS S a S' pohybujúcich sa voči sebe relatívnou rýchlosťou $\vec{v} = (v, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, ktorého tvar je

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Vzťah (2.3.1) možno efektívne zapísať cez komponentné vyjadrenie GT G ako

$$x'^{\mu} = G^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \tag{2.3.2}$$

Lineárnosť GT nám cez (2.3.2) v určitom zmysle opäť umožňuje chápať súradnice v časopriestore ako komponenty štvorvektora $\mathcal{X} = (x^0, x^1, x^2, x^3)^{\mathrm{T}}$.

Transformáciu rotáciou označíme ako G_R a platí pre ňu rovnaký vzťah ako pri LT

$$G_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \tag{2.3.3}$$

Rozdiel medzi GT a LT je v tvare boostu. Boost v smere x označíme ako G_x, v smere y ako G_y a v smere z ako G_z. Platí pre ne

$$G_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad G_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -v & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad G_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.3.4}$$

Použitím G_x vo vzťahu (2.3.2) dostaneme (2.3.1).
Matice galileovských boostov sú *nesymetrické* a pre GT G platí, že $\det G = 1$

2.4 Transformácie IVS tvoria Lieove grupy

V predchádzajúcich podkapitolách tejto kapitoly sme si pripomenuli maticový tvar LT a GT, ktoré predstavujú transformačné vzťahy medzi IVS. Ukazuje sa, že LT a GT tvoria *Lieove grupy.* Čisto intuitívne zdôvodnenie tohto tvrdenia je zhruba nasledovné:

Z fyzikálnej motivácie úlohy prirodzene očakávame, že pôsobením jednej LT (resp. GT) na S spravíme prechod $S \to S'$ a pôsobením ďalšej LT na S' spravíme prechod $S' \to S''$, čím opäť skončíme v IVS. Z toho vyplýva *uzavretosť* vzhľadom na skladanie LT. Toto skladanie je *asociatívne*, pretože v schéme $S \to S' \to S'' \to S'''$ nezáleží na tom, či najprv vykonáme efektívny prechod $S \to S''$, a potom prechod $S'' \to S'''$, alebo najprv vykonáme prechod $S \to S'$, a potom efektívny prechod $S' \to S'''$. Po prechode z S do S' sa musíme vedieť vrátiť z S' späť do S inverznou transformáciou, čo je prirodzená fyzikálna požiadavka, preto vždy *existuje inverzný prvok.* Triviálne vieme spraviť aj prechod z S späť do S cez identitu, preto *existuje neutrálny prvok.* Z tejto úvahy môžeme prirodzene očakávať, že LT a GT tvoria grupy.

LT pozostávajú z boostov a rotácií, ktoré vieme úplne zadať pomocou 6 parametrov daných komponentami dvoch vektor $\vec{v}$ a $\vec{\varphi}$. Vektor okamžitej rýchlosti $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)^{\mathrm{T}}$ určuje smer a tvar boostu. „Vektor" rotácie $\vec{\varphi} = \varphi(n_x, n_y, n_z)^{\mathrm{T}}$ určuje rotáciu okolo osi danej vektorom $\vec{n}$ o uhol φ. Prvky každej z týchto transformačných grúp vieme jednoznačne určiť pomocou 6 súradníc, to z nich potom robí 6-rozmerné Lieove grupy a má zmysel hľadať ich Lieove algebry, ktoré sú tiež 6-rozmerné.

2.5 Lieove algebry transformácií IVS

V predchádzajúcej podkapitole sme sa dozvedeli, že LT a GT tvoria Lieove grupy a ako už vieme z podkapitoly 1.1, má zmysel hľadať ich Lieove algebry. Prvky Lieovej grupy vieme určiť pomocou jednoparametrických podgrúp cez (1.1.5), kde vystupuje báza jej Lieovej algebry, ktorú nájdeme cez (1.1.2) využitím (1.1.4).

Najprv sa pozrieme na prvky Lieovej algebry LT. Vždy štartujeme z jednotkovej matice, preto pre $\Lambda(t)$ tvaru lorentzovských boostov (2.2.4) dostávame podmienky

$$\beta(0) = 0 \qquad \gamma(0) = 0 \tag{2.5.1}$$

Cez (1.1.2) pri zohľadnení podmienok (2.5.1) dostaneme

$$E_x = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.5.2}$$

čo sú 3 lineárne nezávislé prvky Lieovej algebry LT prislúchajúce lorentzovským boostom (2.2.4).

Teraz sa pozrieme na prvky Lieovej algebry GT, pričom postupujeme analogicky. Tým pre $G(t)$ tvaru galileovských boostov (2.3.4) dostávame podmienku

$$v(0) = 0 \tag{2.5.3}$$

Cez (1.1.2) pri zohľadnení podmienky (2.5.3) dostaneme

$$E'_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E'_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E'_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.5.4}$$

čo sú 3 lineárne nezávislé prvky Lieovej algebry GT prislúchajúce galileovským boostom (2.3.4).

Rotácie sú rovnaké pre LT aj GT, preto budú aj prvky ich Lieových algebier prislúchajúce rotáciám rovnaké. Cez (1.1.2) a využitím bázy l_i (pozri dodatok A, alebo [1] s. 259, príklad 11.7.13 časť i) dostaneme

$$e_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.5.5}$$

čo sú 3 lineárne nezávislé prvky Lieových algebier LT a GT prislúchajúce rotáciám.

Lieove grupy LT aj GT sú 6-rozmerné, preto budú aj ich Lieove algebry 6-rozmerné. V Lieovej algebre LT zvolíme 6-ticu prvkov

$$(E_x, E_y, E_z, e_x, e_y, e_z) \tag{2.5.6}$$

táto 6-tica je lineárne nezávislá, preto sa dá použiť ako báza Lieovej algebry LT.

V Lieovej algebre GT zvolíme 6-ticu prvkov

$$\left(E'_x, E'_y, E'_z, e_x, e_y, e_z\right) \tag{2.5.7}$$

táto 6-tica je lineárne nezávislá, preto sa dá použiť ako báza Lieovej algebry GT.

2.6 2D Lorentzove a Galileiho transformácie

Doteraz sme sa venovali 4D LT a GT, čoho dôsledkom bola prítomnosť rotácií v týchto transformáciách. Veľa fyzikálnych dejov sa dá abstrakciou považovať za 1-rozmerné (z priestorového hľadiska), napr. dynamika hmotného bodu na priamke. Pre každého 1-rozmerného pozorovateľa vieme zaviesť 2-rozmerný (ďalej len 2D) časopriestor so súradnicami $[x^0, x^1]$. Výhodou tohto prístupu je zbavenie sa rotácií, čím ostanú len boosty a translácie. LT a GT tvoria Lieove grupy aj v 2D prípade a z podkapitoly 1.5 už vieme, že má zmysel hľadať ich fundamentálne polia.

Pre 2D LT prechodu z S do S' dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma\,(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma\,(x - vt) \end{aligned} \tag{2.6.1}$$

V rovniciach (2.6.1) spravíme rozvoj γ a β do prvého rádu $v = \varepsilon$, čím získame výrazy[3]

$$\begin{aligned} t' &= t - \varepsilon x \\ x' &= x - \varepsilon t \end{aligned} \tag{2.6.2}$$

Z rovníc (2.6.2) využitím (1.3.4) vieme akcii Lieovej grupy 2D LT pôsobiacich v 2D Minkowského časopriestore priradiť generátor fundamentálneho poľa tvaru

$$\xi_L = t\partial_x + x\partial_t \tag{2.6.3}$$

Tento generátor geometricky zodpovedá prúdeniu po hyperbolách.

Pre 2D GT prechodu z S do S' dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - vt \end{aligned} \tag{2.6.4}$$

V rovniciach (2.6.4) spravíme rozvoj do prvého rádu $v = \varepsilon$, čím získame výrazy

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - \varepsilon t \end{aligned} \tag{2.6.5}$$

Z rovníc (2.6.5) využitím (1.3.4) vieme akcii Lieovej grupy 2D GT pôsobiacich v 2D Galileiho časopriestore priradiť generátor fundamentálneho poľa tvaru

$$\xi_G = t\partial_x \tag{2.6.6}$$

Tento generátor geometricky zodpovedá prúdeniu rovnobežnému so smerom osi x a jeho rýchlosť narastá priamo úmerne so vzdialenosťou od osi x.

Podľa (1.5.4) transláciám zodpovedajú generátory fundamentálnych polí tvaru

$$\xi^T_t = \partial_t \qquad \xi^T_x = \partial_x \tag{2.6.7}$$

ktoré množinovo označíme spoločným symbolom ξ_T

$$\xi_T = \{\xi^T_t, \xi^T_x\} \tag{2.6.8}$$

[3]Tu už používame sústavu jednotiek, v ktorej je $c = 1$ a v ďalšom ju vždy použijeme pri práci s fundamentálnymi poliami.

Analogickým postupom ako v predchádzajúcej podkapitole 2.5 vieme nájsť Lieove algebry LT a GT.

Pre 1D Lieovu grupu LT dostaneme bázu jej Lieovej algebry tvaru

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.6.9}$$

Pre 1D Lieovu grupu GT dostaneme bázu jej Lieovej algebry tvaru

$$E' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.6.10}$$

3

Hľadanie metrických tenzorov

V tejto kapitole odvodíme Minkowského metrický tenzor a ukážeme, ako to je s existenciou Galileiho metrického tenzora. Osobitne preskúmame 4D a 2D prípady, pretože 4D prípad slúži na opis fyziky tohto sveta a 2D prípad sa využíva vo veľa fyzikálnych modeloch a za určitých okolností sa dá efektívne použiť ako projekcia 4D prípadu. Vo všetkých výpočtoch riešime trochu všeobecnejšiu úlohu, t.j. hľadáme najvšeobecnejšie lorentzovsky (a translačne) a galileovsky (a translačne) invariantné tenzory typu $\binom{0}{2}$. V 4D prípade sa pozrieme na kometriku a nakoniec preskúmame galileovskú limitu Minkowského metriky.

3.1 Minkowského metrika v 2D časopriestore

V tejto podkapitole odvodíme Minkowského metrický tenzor v 2D Minkowského časopriestore. Najvšeobecnejší translačne a lorentzovsky invariantný tenzor h typu $\binom{0}{2}$ nájdeme pomocou podmienky lieovskej invariantnosti (1.3.3). Od tenzorového poľa h požadujeme, aby bolo lorentzovsky a translačne invariantné (taký chceme mať náš metrický tenzor), t.j. aby jeho izometrie boli translácie ξ_T (2.6.8) a hyperbolické rotácie ξ_L (2.6.3).

Z predchádzajúceho odseku vyplýva, že na určenie tenzora h potrebujeme nájsť 4 neznáme funkcie h_{tt}, h_{tx}, h_{xt} a h_{xx}, ktoré vyhovujú sústave rovníc

$$\xi^m h_{ij,m} + \xi^m_{,i} h_{mj} + \xi^m_{,j} h_{im} = 0 \tag{3.1.1}$$

kde symbolom ξ efektívne označujeme ξ_L a ξ_T.

Tenzorové pole h má vyhovovať sústave (3.1.1) jednotlivo pre ξ_T aj pre ξ_L, preto nezáleží na poradí, v ktorom začneme riešiť danú sústavu rovníc. Výhodne je začať práve s transláciami ξ_T, kvôli neskoršiemu zjednodušeniu danej sústavy rovníc pri riešení s ξ_L.

Komponenty generátorov translácií (2.6.7) sú $(\xi^T_i)^j = 1$ a platí pre ne $(\xi^T_i)^j_{,k} = 0$, čo redukuje (3.1.1) na

$$h_{ij,m} = 0 \tag{3.1.2}$$

odkiaľ dostaneme podmienku

$$h_{ij} = \text{const} \tag{3.1.3}$$

Podmienka (3.1.3) redukuje (3.1.1) na sústavu rovníc tvaru

$$\xi^m_{,i} h_{mj} + \xi^m_{,j} h_{im} = 0 \tag{3.1.4}$$

V sústave (3.1.4) použijeme ξ_L a presumujeme cez sumačné indexy, čím dostaneme[1]

$$\xi^t_{,i} h_{tj} + \xi^x_{,i} h_{xj} + \xi^t_{,j} h_{it} + \xi^x_{,j} h_{ix} = 0 \tag{3.1.5}$$

Pre komponenty ξ_L platí $\xi^t_{,i} = \delta^x_i$ a $\xi^x_{,i} = \delta^t_i$, čo dosadením do (3.1.5) dáva

$$\delta^x_i h_{tj} + \delta^t_i h_{xj} + \delta^x_j h_{it} + \delta^t_j h_{ix} = 0 \tag{3.1.6}$$

do tejto sústavy najprv dosadíme $i = t$, a potom $i = x$. To vedie na rovnice

$$h_{xj} = -\delta^x_j h_{tt} - \delta^t_j h_{tx} \qquad h_{tj} = -\delta^x_j h_{xt} - \delta^t_j h_{xx} \tag{3.1.7}$$

Do rovníc (3.1.7) najprv dosadíme $j = t$, a potom $j = x$. Z toho získame vzťahy $h_{xx} = -h_{tt}$ a $h_{xt} = -h_{tx}$, čo sú podmienky pre komponenty tenzora h.

Tým sme našli hľadaný tenzor h, pre ktorého komponenty platí

$$h = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1.8}$$

kde $a = h_{tt} \in \mathbb{R}$ a $b = h_{tx} \in \mathbb{R}$.

Komponenty tenzora h pozostávajú z lineárnej kombinácie 2 matíc. Prvá matica sa označuje ako η a tvorí komponenty tenzora, ktorý sa v literatúre nazýva *plochý pseudometrický tenzor*. Druhá matica sa označuje[2] ako ε a tvorí komponenty *úplne antisymetrického tenzora*. Metrický tenzor je podľa definície symetrický a nedegenerovaný, vo vzťahu (3.1.8) oba tieto predpoklady spĺňa iba η, preto nutne zvolíme $b = 0$ a podľa konvencie[3] zvolíme $a = 1$.

Tým sme v 2D Minkowského časopriestore odvodili *Minkowského metriku*

$$h = \eta \tag{3.1.9}$$

[1]Kvôli kompaktnosti zápisov používame označenie $\xi = \xi_L$ a odteraz sa v tejto podkapitole nebude používať sumačná konvencia.

[2]ε_{ij} je Levi-Civitov symbol v dvoch rozmeroch.

[3]Voľba $a = 1$ je konvencia a zabezpečíme ňou ortonormovanosť použitej bázy.

3.2 Galileiho metrika v 2D časopriestore

V tejto podkapitole ukážeme, ako to je s existenciou Galileiho metrického tenzora v 2D Galileiho časopriestore. Postupujeme úplne rovnako ako v predchádzajúcej podkapitole. Najvšeobecnejší translačne a galileovsky invariantný tenzor H typu $\binom{0}{2}$ nájdeme cez podmienku lieovskej invariantnosti (1.3.3) a od tenzora H požadujeme, aby jeho izometrie boli translácie ξ_T (2.6.8) a fundamentálne pole ξ_G (2.6.6).

Na určenie tenzorového poľa H potrebujeme nájsť 4 neznáme funkcie H_{tt}, H_{tx}, H_{xt} a H_{xx}, ktoré vyhovujú sústave rovníc

$$\xi^m H_{ij,m} + \xi^m_{,i} H_{mj} + \xi^m_{,j} H_{im} = 0 \tag{3.2.1}$$

kde symbolom ξ efektívne označujeme ξ_G a ξ_T.

Pri riešení (3.2.1) opäť začneme s transláciami ξ_T, ktoré vedú na $H_{ij} = \text{const}$. Táto podmienka zredukuje sústavu (3.2.1) na

$$\xi^m_{,i} H_{mj} + \xi^m_{,j} H_{im} = 0 \tag{3.2.2}$$

V sústave (3.2.2) použijeme ξ_G a presumujeme cez sumačné indexy, čím dostaneme[4]

$$\xi^t_{,i} H_{tj} + \xi^x_{,i} H_{xj} + \xi^t_{,j} H_{it} + \xi^x_{,j} H_{ix} = 0 \tag{3.2.3}$$

Pre komponenty ξ_G platí $\xi^t_{,i} = 0$ a $\xi^x_{,i} = \delta^t_i$, čo dosadením do (3.2.3) dáva

$$\delta^t_i H_{xj} + \delta^t_j H_{ix} = 0 \tag{3.2.4}$$

do tejto sústavy najprv dosadíme $i = t$, a potom $i = x$. To vedie na rovnice

$$H_{xj} = -\delta^t_j H_{tx} \qquad \delta^t_j H_{xx} = 0 \tag{3.2.5}$$

Do rovníc (3.2.5) najprv dosadíme $j = t$, a potom $j = x$. Z toho získame vzťahy $H_{xx} = 0$, $H_{xt} = -H_{tx}$ a $H_{tt} \in \mathbb{R}$, čo sú podmienky pre komponenty tenzora H.

Tým sme našli hľadaný tenzor H, pre ktorého komponenty platí

$$H = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.2.6}$$

kde $a = H_{tt} \in \mathbb{R}$ a $b = H_{tx} \in \mathbb{R}$.

Komponenty tenzora H pozostávajú z lineárnej kombinácie 2 matíc. Prvá matica je singulárna a druhá je antisymetrická. Metrický tenzor je symetrický a nedegenerovaný, preto musíme nutne zvoliť $b = 0$. Koeficient a môžeme voliť ľubovoľne, ale vždy dostaneme singulárnu maticu. To znamená, že v 2D Galileiho časopriestore *neexistuje* Galileiho metrika, ktorej izometrie by boli translácie a GT. Tým sme zistili, prečo sa Galileiho metrika nezaviedla už pred Einsteinom.

[4]Kvôli kompaktnosti zápisov používame označenie $\xi = \xi_G$ a odteraz sa v tejto podkapitole nebude používať sumačná konvencia.

3.3 Metrika v 2D časopriestore cez lineárnu algebru

LT sú lineárne transformácie pôsobiace v Minkowského časopriestore, ktorý je varietou. V každom bode tejto variety máme definovaný lineárny *tangenciálny priestor*, ktorého prvkami sú vektory. Každý n-rozmerný lineárny priestor V nad $\mathbb{R}$ môžeme chápať ako n-rozmernú varietu (pozri [1] s. 30, príklad 1.4.11) a jej tangenciálne priestory môžeme kanonicky stotožniť so samotným V (pozri [1] s. 44, príklad 2.2.13 a pre väčšie detaily pozri [2] s. 28-29, dodatok E). Ukazuje sa, že na základe predchádzajúcich tvrdení môžeme stotožniť Minkowského časopriestor s lineárnym priestorom, čo nám pri výpočtoch umožňuje použiť lineárnu algebru namiesto diferenciálnej geometrie.

Hľadáme translačne a lorentzovsky invariantný tenzor h. Translácie efektívne vyriešime cez lieovskú invariantnosť ako v podkapitole 3.1. Analogickým výpočtom dostaneme $h_{ij} = \text{const}$. Komponenty tenzora h zapíšeme ako

$$h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{3.3.1}$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sú všetko konštanty.

V kanonicky izomorfnom lineárnom priestore požadujeme, aby $C = \Lambda$ vo vzťahu (1.5.21), čo vedie na podmienku

$$h = \Lambda^{\mathrm{T}} h \Lambda \tag{3.3.2}$$

Prvky Λ vyjadríme cez (1.1.5) využitím bázy E (2.6.9), t.j. použijeme

$$\Lambda = \mathbb{1} + \varepsilon E \tag{3.3.3}$$

Dosadením (3.3.3) do (3.3.2) a úpravami do prvého rádu ε získame podmienku

$$hE = -E^{\mathrm{T}} h \tag{3.3.4}$$

Podmienka (3.3.4) vedie na $d = -a$ a $c = -b$, čím pre komponenty h opäť dostaneme

$$h = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3.5}$$

Rovnakou úvahou ako v podkapitole 3.1 prídeme k záveru $h = \eta$. Tým sme opäť našli Minkowského metrický tenzor v 2D Minkowského časopriestore.

Galileiho metrický tenzor hľadáme úplne rovnakým postupom, ako sme v rámci tejto podkapitoly hľadali Minkowského metrický tenzor. Všade kde bolo h, Λ a E teraz napíšeme H, G a E' (2.6.10). Vykonaním potrebných výpočtov sa dopracujeme k

$$H = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3.6}$$

Rovnakou úvahou ako v podkapitole 3.2 prídeme k záveru, že v 2D Galileiho časopriestore neexistuje Galileiho metrický tenzor.

Pre hľadané metrické tenzory sme dostali rovnaké výsledky ako v predchádzajúcich podkapitolách, čo je spôsobené práve lineárnosťou LT a GT. Ak by tieto transformácie neboli lineárne, tak prístup cez lineárne priestory by nebol možný a museli by sme postupovať univerzálne, t.j. využitím Lieovej derivácie. Pri skúmaní vplyvu LT (resp. GT) na tvar hľadanej metriky je maticový prístup jednoduchší pri porovnaní s prístupom cez Lieovu deriváciu. To sa ukáže byť kľúčové práve v 4D časopriestore, kde do hry vstúpia aj rotácie, ktoré by značne skomplikovali výpočty cez Lieovu deriváciu. Preto v nasledujúcich podkapitolách použijeme práve maticový prístup pri skúmaní vplyvu LT (resp. GT) na tvar hľadanej metriky, pričom vplyv translácií aj naďalej preskúmame využitím Lieovej derivácie (je to efektívnejšie).

3.4 Minkowského metrika v 4D časopriestore

V tejto podkapitole odvodíme Minkowského metrický tenzor v 4D Minkowského časopriestore. Hľadáme translačne a lorentzovsky invariantný tenzor h typu $\binom{0}{2}$.

Transláciám zodpovedajú fundamentálne polia (1.5.4), ktoré množinovo opäť označíme ako $\xi_T = \{\xi_t^T, \xi_x^T, \xi_y^T, \xi_z^T\}$. Postup je úplne analogický ako v podkapitole 3.1, len teraz máme až 4 generátory translácií namiesto iba 2. Z dosadenia týchto 4 generátorov do sústavy rovníc (3.1.1) dostaneme $h_{ij} = \text{const}$. Komponenty tenzora h zapíšeme po blokoch do matice rozmeru 4×4

$$h = \begin{pmatrix} a & b^{\mathrm{T}} \\ c & D \end{pmatrix} \tag{3.4.1}$$

kde $a \in \mathbb{R}^{1\times 1}$, $b \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, $c \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ a $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sú všetko konštanty.

V 4D Minkowského časopriestore do hry vstúpia rotácie a lorentzovské boosty v ľubovoľnom smere. Na bližšie určenie tvaru h opäť použijeme

$$h = \Lambda^{\mathrm{T}} h \Lambda \tag{3.4.2}$$

Výhodné je začať so skúmaním vplyvu rotácií (2.2.3) na tvar h. Dosadením (2.2.3) do (3.4.2) a následnými úpravami dostaneme

$$\begin{pmatrix} a & b^{\mathrm{T}} \\ c & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b^{\mathrm{T}} R \\ R^{\mathrm{T}} c & R^{\mathrm{T}} D R \end{pmatrix} \tag{3.4.3}$$

čo môžeme ekvivalentne zapísať ako

$$\begin{aligned} a &= a \\ Rb &= b \\ Rc &= c \\ D &= R^{\mathrm{T}} D R \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Z rovnice pre a dostávame voľnosť $a \in \mathbb{R}$. Z rovníc pre b a c dostávame $b = c = 0$, pretože iba nulový vektor je invariantný voči pôsobeniu všetkých rotačných matíc. Rovnica pre D hovorí, že sa zaoberáme takými maticami D, ktoré komutujú so všetkými rotačnými maticami 3×3. Takéto matice majú tvar $\lambda\mathbb{1}$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$ (pozri dodatok A). Tým sme zistili, že h má diagonálny tvar (preto bolo výhodné začať s rotáciami)

$$h = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \lambda\mathbb{1} \end{pmatrix} \tag{3.4.5}$$

kde $a, \lambda \in \mathbb{R}$.

Tenzor h má byť invariantný voči lorentzovskému boostu v ľubovoľnom smere. Tento boost opíšeme pomocou Lieovej algebry LT (2.5.6). Prvky Λ vyjadríme cez (1.1.5) využitím prvkov E_a (2.5.2), t.j. použijeme

$$\Lambda = \mathbb{1} + \varepsilon E_a \tag{3.4.6}$$

Dosadením (3.4.6) do (3.4.2) a úpravami do prvého rádu ε získame podmienku

$$hE_a = -E_a^{\mathrm{T}} h \tag{3.4.7}$$

Vo výraze (3.4.7) postupne dosadíme $a = x, y, z$, čím získame dodatočnú podmienku $\lambda = -a \in \mathbb{R}$. Potom pre komponenty tenzora h platí

$$h = a\eta \tag{3.4.8}$$

kde $\eta = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ sú komponenty tzv. *plochého pseudometrického tenzora* a $a \in \mathbb{R}$.

Výsledok (3.4.8) hovorí, že v 4D Minkowského časopriestore je najvšeobecnejším translačne a lorentzovsky invariantným tenzorom typu $\binom{0}{2}$ práve ľubovoľný skalárny násobok plochého pseudometrického tenzora η.

Voľbou $a = 1$ získame Minkowského metriku v 4D Minkowského časopriestore

$$h = \eta \tag{3.4.9}$$

Tým sme splnili sľub z úvodu tejto práce, t.j. matematicky sme objasnili jej tvar.

3.5 Galileiho metrika v 4D časopriestore

V tejto podkapitole ukážeme, ako to je s existenciou Galileiho metrického tenzora v 4D Galileiho časopriestore. Hľadáme translačne a galileovsky invariantný tenzor H typu $\binom{0}{2}$. Postupujeme analogicky ako v predchádzajúcej podkapitole.

Z podmienky translačnej invariantnosti opäť zistíme, že $H_{ij} = const$. Komponenty tenzora H zapíšeme po blokoch do matice rozmeru 4×4

$$H = \begin{pmatrix} a & b^{\mathrm{T}} \\ c & D \end{pmatrix} \tag{3.5.1}$$

kde $a \in \mathbb{R}^{1\times1}$, $b \in \mathbb{R}^{3\times1}$, $c \in \mathbb{R}^{3\times1}$ a $D \in \mathbb{R}^{3\times3}$ sú všetko konštanty.

V 4D Galileiho časopriestore do hry vstúpia rotácie a galileovské boosty v ľubovoľnom smere. Na bližšie určenie tvaru H použijeme

$$H = G^{\mathrm{T}} H G \tag{3.5.2}$$

Najprv preskúmame vplyv rotácií (2.3.3) na tvar H. Rotácie (2.3.3) sú rovnaké ako (2.2.3) v prípade LT, preto bude mať aj H diagonálny tvar

$$H = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \lambda\mathbb{1} \end{pmatrix} \tag{3.5.3}$$

Tenzor H má byť invariantný voči galileovskému boostu v ľubovoľnom smere. Tento boost opíšeme pomocou Lieovej algebry GT (2.5.7). Prvky G vyjadríme cez (1.1.5) využitím prvkov E'_a (2.5.4), t.j. použijeme

$$G = \mathbb{1} + \varepsilon E'_a \tag{3.5.4}$$

Dosadením (3.5.4) do (3.5.2) a úpravami do prvého rádu ε získame podmienku

$$H E'_a = -E'^{\mathrm{T}}_a H \tag{3.5.5}$$

Vo výraze (3.5.5) postupne dosadíme $a = x, y, z$, čím získame dodatočné podmienky $\lambda = 0$ a $a \in \mathbb{R}$. Potom pre komponenty tenzora H platí

$$H = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.5.6}$$

kde $a \in$ R.

Tým sme v 4D Galileiho časopriestore našli najvšeobecnejší translačne a galileovsky invariantný tenzor typu $\binom{0}{2}$. Tento tenzor je degenerovaný, preto v 4D Galileiho časopriestore *neexistuje* Galileiho metrika. Teraz sme si objasnili, prečo sa v Galileiho relativite nezaviedla podobná metrická štruktúra už pred Einsteinom.

3.6 Kometrika v 4D časopriestore

Doposiaľ sme odvodili Minkowského metrický tenzor η a dokázali sme neexistenciu Galileiho metrického tenzora, pretože nám vyšiel degenerovaný tenzor (3.5.6).

Podľa vzťahu (1.2.6) vieme k Minkowského metrickému tenzoru η nájsť prislúchajúci kometrický tenzor η^{-1}. Komponenty η^{-1} sú

$$\eta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.6.1}$$

Vzťah (1.2.6) vylučuje existenciu kometriky v prípade neexistencie metriky a opačne. Z toho vyplýva *neexistencia* Galileiho kometrického tenzora. Avšak stále môžeme hľadať najvšeobecnejší translačne a galileovsky invariantný tenzor K typu $\binom{2}{0}$ v 4D Galileiho časopriestore.

Vplyv translácií preskúmame pomocou podmienky lieovskej invariantnosti voči fundamentálnym poliam $\xi_T = \{\xi_t^T, \xi_x^T, \xi_y^T, \xi_z^T\}$. Z (1.3.3) dostávame sústavu rovníc

$$\xi^m K^{ij}_{,m} - \xi^i_{,m} K^{mj} - \xi^j_{,m} K^{im} = 0 \tag{3.6.2}$$

Analogickým postupom ako v podkapitole 3.1 z (3.6.2) dostaneme $K^{ij} = \text{const}$. Komponenty tenzora K zapíšeme po blokoch do matice rozmeru 4×4

$$K = \begin{pmatrix} a & b^{\mathrm{T}} \\ c & D \end{pmatrix} \tag{3.6.3}$$

kde $a \in \mathbb{R}^{1\times 1}$, $b \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, $c \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ a $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sú všetko konštanty.

V 4D Galileiho časopriestore pôsobíme rotáciami a galileovskými boostmi v ľubovoľnom smere. Na bližšie určenie tvaru K použijeme (1.5.22), kde dosadíme $C = G$, t.j.

$$K = GKG^{\mathrm{T}} \tag{3.6.4}$$

Opäť je výhodne začať s preskúmaním vplyvu rotácií (2.3.3) na tvar K. Aj v tomto prípade vedú rotácie (2.3.3) na identický výsledok ako v predchádzajúcej podkapitole. Preto má tenzor K diagonálny tvar

$$K = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \lambda \mathbb{1} \end{pmatrix} \tag{3.6.5}$$

kde $a, \lambda \in \mathbb{R}$.

Tenzor K má byť invariantný voči galileovskému boostu v ľubovoľnom smere. Tento boost opíšeme pomocou Lieovej algebry GT (2.5.7). Prvky G vyjadríme cez (1.1.5) využitím prvkov E'_a (2.5.4), t.j. použijeme

$$G = \mathbb{1} + \varepsilon E'_a \tag{3.6.6}$$

Dosadením (3.6.6) do (3.6.4) a úpravami do prvého rádu ε získame podmienku

$$E'_a K = -K E'^{\mathrm{T}}_a \tag{3.6.7}$$

Vo výraze (3.6.7) postupne dosadíme $a = x, y, z$, čím získame dodatočné podmienky $a = 0$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Potom pre komponenty tenzora K platí

$$K = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.6.8}$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Tým sme v 4D Galileiho časopriestore našli najvšeobecnejší translačne a galileovsky invariantný tenzor typu $\binom{2}{0}$. Tenzor (3.6.8) je degenerovaný, preto podľa očakávania v 4D Galileiho časopriestore neexistuje Galileiho kometrický tenzor.

3.7 Galileovská limita

V rámci ŠTR má rýchlosť svetla c *konečnú* invariantnú hodnotu, ale v rámci Galileiho relativity má c *nekonečnú* invariantnú hodnotu. GT (2.3.2) vieme získať z LT (2.2.2) pomocou *galileovskej limity*[5] $c \to \infty$. Vplyvom tejto limity prejdu boosty (2.2.4) na boosty (2.3.4) a rotačné matice ostanú rovnaké. Tým vzniká prirodzená otázka, či by nebolo možné touto limitou získať Galileiho metrický tenzor za predpokladu znalosti Minkowského metrického tenzora (3.4.9).

Minkowského metrický tenzor má tvar

$$\eta = \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \tag{3.7.1}$$

čo po dosadení za $\eta_{\mu\nu}$ a presumovaní cez sumačné indexy zapíšeme ako

$$\eta = dx^0 \otimes dx^0 - dx^1 \otimes dx^1 - dx^2 \otimes dx^2 - dx^3 \otimes dx^3 \tag{3.7.2}$$

alebo po využití definície súradníc v 4D Minkowského časopriestore ako

$$\eta = c^2 dt \otimes dt - dx \otimes dx - dy \otimes dy - dz \otimes dz \tag{3.7.3}$$

Minkowského kometrický tenzor má tvar

$$\eta^{-1} = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \otimes \partial_\nu \tag{3.7.4}$$

čo môžeme analogickým postupom zapísať ako

$$\eta^{-1} = \frac{1}{c^2} \partial_t \otimes \partial_t - \partial_x \otimes \partial_x - \partial_y \otimes \partial_y - \partial_z \otimes \partial_z \tag{3.7.5}$$

[5] Je to limita prechodu zo ŠTR do Galileiho relativity.

Definujme limity tvaru

$$\tau := \lim_{c\to\infty}\left(\frac{1}{c^2}\eta\right) \qquad D := \lim_{c\to\infty}\left(-\eta^{-1}\right) \tag{3.7.6}$$

Vypočítaním limít (3.7.6) získame tenzory

$$\tau = dt \otimes dt \tag{3.7.7}$$

$$D = \partial_x \otimes \partial_x + \partial_y \otimes \partial_y + \partial_z \otimes \partial_z \tag{3.7.8}$$

Tým sme zistili, že $\tau = H$ pri voľbe $a = 1$ v (3.5.6) a $D = K$ pri voľbe $\lambda = 1$ v (3.6.8). Spočítanie limity $c \to \infty$ pre Minkowského metriku a kometriku vedie na degenerované prípady, čo je v súlade s výsledkami z predchádzajúcich podkapitol.

Ak by sme v 4D Galileiho časopriestore zafixovali súradnice x, y a z, tak výsledok (3.7.7) môžeme chápať ako metrický tenzor čisto pre *čas* - slúžiaci na počítanie časových vzdialenosti v newtonovsko-galileovskej fyzike. Pri zafixovaní t môžeme výsledok (3.7.8) chápať ako kometrický tenzor čisto pre *priestor*, z ktorého vieme dostať metrický tenzor. Tento metrický tenzor je identický s *euklidovským* metrickým tenzorom - slúžiacim na počítanie priestorových vzdialenosti v newtonovsko-galileovskej fyzike.

Takýmto spôsobom vieme v Galileiho relativite zaviesť dva od seba nezávislé metrické tenzory (jeden pre čas a druhý pre priestor) namiesto jedného spoločného metrického tenzora pre čas aj priestor, ako v Einsteinovej relativite.

Záver

Hlavným cieľom tejto práce bolo odvodiť Minkowského metriku v 4D časopriestore. Tento tenzor sme hľadali tak, že sme požadovali, aby bol invariantný voči transláciám a Lorentzovým transformáciám. Vedľajším cieľom bolo zopakovať celý postup pre staršiu Galileiho relativitu a vysvetliť, prečo sa podobná metrika nezaviedla už pred objavením špeciálnej teórie relativity. Tento tenzor sme hľadali tak, že sme požadovali jeho invariantnosť voči transláciám a Galileiho transformáciám.

V práci sme hľadali metrické tenzory samostatne pre 4D a pre 2D časopriestor, pretože 4D prípad popisuje fyziku tohto sveta a 2D prípad je dôležitý vo veľa fyzikálnych modeloch. Trojrozmerný prípad sme vynechali kvôli jeho podobnosti so 4D.

Skúmaný 2D prípad sa ukázal byť jednoduchší kvôli absencií rotácií v Lorentzových a Galileiho transformáciách. Tento prípad bol postačujúci na ukázanie netriviálnej zmeny v znamienkach Minkowského metriky (jej izometrie sú translácie a pseudorotácie) pri porovnaní s euklidovskou metrikou 2D priestoru, ktorej izometrie sú iba translácie a rotácie.

V 2D Minkowského časopriestore sme hľadali najvšeobecnejší translačne a lorentzovsky invariantný tenzor typu $\binom{0}{2}$. Tvar hľadaného tenzora sme určili pomocou podmienky lieovskej invariantnosti voči fundamentálnym poliam translácií a lorentzovských boostov. Výpočty nás doviedli k tenzoru (3.1.8) - určeného lineárnou kombináciou plochého pseudometrického tenzora η a totálne antisymetrického tenzora ε. Z tohto výsledku sme diskutovanou voľbou koeficientov lineárnej kombinácie obdržali Minkowského metrický tenzor, ktorý je rovný plochému pseudometrickému tenzoru η.

Pri odvodení Galileiho metrického tenzora v 2D Galileiho časopriestore sme postupovali úplne rovnako ako v prípade Minkowského metriky, len tentokrát sme požadovali lieovskú invariantnosť voči fundamentálnym poliam translácií a galileovských boostov. Analogické výpočty nás doviedli k najvšeobecnejšiemu translačne a galileovsky invariantnému tenzoru (3.2.6) - určeného lineárnou kombináciou istého degenerovaného tenzora a totálne antisymetrického tenzora. Žiadnou voľbou koeficientov tejto lineárnej kombinácie sme neboli schopní dostať nedegenerovaný symetrický tenzor. Preto v 2D Galileiho časopriestore neexistuje Galileiho metrický tenzor.

Skúmaný 4D prípad sa prítomnosťou rotácií a boostov v ľubovoľnom smere značne skomplikoval. Veľmi efektívne sa ukázalo využitie lineárnosti Lorentzových a Galileiho transformácií, ktorá nám umožnila využiť postupy jednoduchej lineárnej algebry a tým sa vyhnúť použitiu Lieovej derivácie v prípade rotácií a boostov. Lieovu deriváciu sme použili iba na translácie.

V 4D Minkowského časopriestore sme hľadali najvšeobecnejší translačne a lorentzovsky invariantný tenzor typu $\binom{0}{2}$. Tvar hľadaného tenzora sme určili pomocou podmienky lieovskej invariantnosti voči fundamentálnym poliam translácií a efektívnym využitím lineárnej algebry v prípade rotácií a lorentzovských boostov. Výpočty nás doviedli k tenzoru (3.4.8) - určeného ľubovoľným skalárnym násobkom plochého pseudometrického tenzora η. Minkowského metrika v 4D Minkowského časopriestore je rovná plochému pseudometrickému tenzoru η. Tým sme úspešne splnili hlavný cieľ tejto práce.

Pri odvodení Galileiho metrického tenzora v 4D Galileiho časopriestore sme postupovali úplne rovnako ako v prípade 4D Minkowského metriky, ale namiesto lorentzovských boostov sme použili galileovské boosty. Analogické výpočty nás doviedli k najvšeobecnejšiemu translačne a galileovsky invariantnému tenzoru (3.5.6) - určeného ľubovoľným skalárnym násobkom istého degenerovaného tenzora. To znamená, že ani v 4D Galileiho časopriestore neexistuje Galileiho metrický tenzor. Teraz už vieme, prečo sa v Galileiho relativite prirodzene nezaviedla podobná metrická štruktúra ako ta Minkowského už pred Einsteinom. Tým sme úspešne splnili vedľajší cieľ tejto práce.

Nad rámec cieľov tejto práce (kvôli lepšiemu porozumeniu výsledkom) sme v 4D časopriestore hľadali aj kometrické tenzory a preskúmali galileovskú limitu. Určili sme Minkowského kometrický tenzor (3.6.1) a podľa očakávania nám vyšla neexistencia Galileiho kometrického tenzora - dostali sme degenerovaný tenzor (3.6.8). Z vhodne definovanej galileovskej limity Minkowského metrického tenzora sme dostali degenerovaný tenzor (3.7.7), ktorý sme našli (až na ľubovolný násobok) aj pri hľadaní Galileiho metriky. Pri zafixovaní priestorových súradníc môžeme tento výsledok chápať ako metrický tenzor čisto pre čas. Z vhodne definovanej galileovskej limity Minkowského kometrického tenzora sme dostali degenerovaný tenzor (3.7.8), ktorý sme našli (až na ľubovolný násobok) aj pri hľadaní Galileiho kometrického tenzora. Pri zafixovaní časovej súradnice môžeme tento výsledok chápať ako kometrický tenzor čisto pre priestor.

Tieto interpretácie nám v Galileiho časopriestore umožňujú definovať dva od seba nezávislé metrické tenzory - jeden čisto pre čas a druhý čisto pre priestor. Metrický tenzor pre priestor je identický s euklidovským metrickým tenzorom, ktorý sa v rámci newtonovsko-galileovskej fyziky používa na počítanie priestorových vzdialenosti, a metrický tenzor pre čas by sa dal použiť na počítanie časových vzdialeností.

Dodatok A

Komutovanie s rotačnými maticami

V tomto dodatku dokážeme tvrdenie, že všetky matice D spĺňajúce maticovú rovnicu $D = R^{\mathrm{T}} D R$ pre všetky 3×3 rotačné matice R majú tvar $D = \lambda \mathbb{1}$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Rotačné matice R spĺňajú podmienky $RR^{\mathrm{T}} = \mathbb{1}$ a $\det R = 1$, ktoré vymedzujú maticovú Lieovu grupu $SO(3)$. Jej Lieova algebra $so(3)$ je 3-rozmerná a tvoria ju antisymetrické matice C, t.j. $C = -C^{\mathrm{T}}$. Každý prvok $so(3)$ možno zapísať cez lineárnu kombináciu $C = C^i E_i$, kde E_i sú bázové prvky tejto Lieovej algebry. Ako bázu môžeme zvoliť $(E_i)_{jk} = (l_i)_{jk} := -\varepsilon_{ijk}$, t.j. matice

$$l_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad l_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad l_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kľúčovú časť prvkov $SO(3)$ vieme vyjadriť pomocou jednoparametrickej podgrupy na báze l_i cez (1.1.5) ako

$$R(\varepsilon) = \mathbb{1} + \varepsilon l_i$$

Z $D = R^{\mathrm{T}} D R$ úpravami dostaneme $RD = DR$, preto hľadáme také matice D, ktoré komutujú so všetkými rotačnými maticami. Do komutačnej podmienky dosadíme za $R(\varepsilon)$, čím po úpravách do prvého rádu ε dostaneme finálnu podmienku

$$l_i D = D l_i$$

V tejto podmienke postupne dosadíme $i = 1, 2, 3$, tým postupne zistime tvar D. Pre $i = 1$ dostaneme D v tvare

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & D_{23} \\ 0 & -D_{23} & D_{22} \end{pmatrix}$$

z $i = 2$ zistíme, že $D = D_{11} \mathbb{1}$ a z $i = 3$ nedostaneme pre D žiadnu novú podmienku.

Po označení $D_{11} = \lambda \in \mathbb{R}$ dostaneme výsledný tvar

$$D = \lambda \mathbb{1}$$

Literatúra

[1] M. Fecko. *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov*. Iris, 2018.

[2] M. Fecko. „Some useful operators on differential forms on Galilean and Carrollian spacetimes“. In: *SIGMA* 19 (2023), 024, 24 pages.

[3] H. Minkowski. „Raum und Zeit“. In: *Physikalische Zeitschrift* 10 (1909), s. 104–111.

[4] H. Minkowski. *Space and Time: Minkowski's papers on relativity*. editori: F. Lewertoff a V. Petkov. Minkowski Institute Press, 2012, Dostupné na internete: https://www.minkowskiinstitute.org/old/mip/MinkowskiFreemiumMIP2012.pdf.

[5] W. Rindler. *Relativity: Special, General, and Cosmological*. Oxford University Press, 2006.

[6] N.M.J. Woodhouse. *Special Relativity (Springer Undergraduate Mathematics Series)*. Springer, 2002.

[7] P. Zlatoš. *Lineárna algebra a geometria*. Marenčin PT, 2011.