UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Cliffordova algebra C(2,0) a grupa Pin(2,0)

BAKALÁRSKA PRÁCA

2023 Martin Kováč

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Cliffordova algebra C(2,0) a grupa Pin(2,0)

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program:	Fyzika
Študijný odbor:	1160 Fyzika
Školiace pracovisko:	Katedra teoretickej fyziky
Vedúci práce:	doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.

Bratislava 2023

Martin Kováč

50765818

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Martin Kováč
Študijný program: fyzika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: fyzika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Cliffordova algebra C(2,0) a grupa Pin(2,0)
Clifford algebra C(2,0) and group Pin(2,0)

Anotácia: Aj keď spinory ako také objavil Cartan, zostali nepovšimnuté a do naozajstnej fyziky sa dostali s fanfárami až cez Paula Diraca v roku 1928, keď na ne narazil „v praxi". Vtedy publikoval svoju slávnu rovnicu. Tá opisovala (plánovane) relativistickú časticu (elektrón) a neplánovane z nej zadarmo vyšlo, že ten elektrón má spin 1/2 (čo bola bomba, lebo experimentálne - cez Sterna-Gerlacha - sa to o elektróne už vedelo). Na túto rovnicu prišiel tak, že sa snažil „faktorizovať" už vtedy známu Kleinovu-Gordonovu rovnicu. T.j. celkom rozumne predpokladal, že istý diferenciálny operátor druhého rádu by mohol byť „súčinom" dvoch po sebe idúcich operátorov prvého rádu. Po ceste sa mu to síce nečakane skomplikovalo, ale to by nebol Dirac, keby potenciálnu šlamastiku nepremenil na úspech.

Cieľom bakalárskej práce by bolo ohmatať si matematiku spojenú s Diracovou rovnicou, ale v jednoduchšom prípade, ako to robil Dirac (a ako sa to robí v učebniciach o elementárnych časticiach). Zjednodušenie bude spočívať v tom, že namiesto 4-rozmerného Minkowského priestoru (kde to celé robil Dirac) budeme uvažovať len 2-rozmernú euklidovskú rovinu. Čiže sa začne faktorizáciou Laplaceovho operátora v rovine (a nie d'Alembertovho operátora v Minkowského priestore).

Tento zjednodušený prípad sa ale bude uvažovať už z moderného pohľadu na vec. Ten spočíva v tom, že existuje čosi s názvom Cliffordova algebra C(p,q) (my budeme potrebovať podrobnosti o C(2,0), ale zrátame si aj C(1,1) a C(0,2)). Ďalej jej reprezentácia v priestore spinorov (tam vznikajú známe gama-matice) a grupy Pin(p,q) a Spin(p,q) - tu sa ale obmedzíme len na (p,q)=(2,0).

Cieľ: V bakalárskej práci by sa zrátali detaily Cliffordových algebier C(2,0), C(1,1) a C(0,2) a Cliffordových grúp Pin(2,0) a Spin(2,0) - to je celkom nenáročné. Vyššou (nepovinnou) ambíciou by bolo podobné zrátanie grúp Pin a Spin pre prípad (0,2) a prípadne ešte o dosť vyššou (1,1).

Literatúra: M.Fecko: Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov, Iris, 2004, 2018

Vedúci: doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.
Katedra: FMFI.KTF - Katedra teoretickej fyziky
Vedúci katedry: doc. RNDr. Tomáš Blažek, PhD.

50765818

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Dátum zadania: 01.07.2022

Dátum schválenia: 08.08.2022

doc. RNDr. Tomáš Blažek, PhD.
garant študijného programu

študent

vedúci práce

Poďakovanie Rád by som sa poďakoval svojmu školiteľovi doc. RNDr. Mariánovi Feckovi, PhD. za jeho čas, pomoc a užitočné rady pri písaní tejto práce.

Abstrakt

Autor:	Martin Kováč
Názov práce:	Cliffordova algebra C(2,0) a grupa Pin(2,0)
Škola:	Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta:	Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra:	Katedra teoretickej fyziky
Vedúci práce:	doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.
Miesto:	Bratislava
Dátum:	19.5.2023
Počet strán:	51
Druh záverečnej práce:	Bakalárska práca

Abstrakt: V tejto práci sa budeme zaoberať úvodom do teórie Cliffordových algebier a ich súvisom s Diracovou rovnicou. Opíšeme, aké algebraické štruktúry sú Cliffordove algebry a ukážeme, že časť Cliffordovej algebry tvorí grupu, ktorá úzko súvisí s ortognálymi grupami. Zdôvodníme potrebu využitia týchto algebier a grúp pri matematickom popise Diracovej rovnice a pri transformáciách spinorov. Následne podrobne popíšeme štruktúru Cliffordových algebier a grúp zodpovedajúcich euklidovskej rovine. S využitím týchto vedomostí explicitne napíšeme Diracovu rovnicu a ukážeme ako sa spinory transformujú pri rotáciách v euklidovskej rovine.

Kľúčové slová: Cliffordove algebry, Cliffordove grupy, Diracova rovnica, Diracov operátor, spinory

Abstract

Author:	Martin Kováč
Title:	Clifford algebra C(2,0) and group Pin(2,0)
University:	Comenius University in Bratislava
Faculty:	Facluty of Mathematics, Physics and Informatics
Department:	Department of Theoretical Physics
Advisor:	doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.
City:	Bratislava
Date:	19.5.2023
Number of pages:	51
Type of thesis:	Bachelor thesis

Abstract: In this thesis, we will deal with the introduction to the theory of Clifford algebras and their connection with the Dirac equation. We will describe what algebraic structures Clifford algebras are and show, that part of the Clifford algebra forms a group that is closely related to orthogonal groups. We will justify the need to use these algebras and groups in the mathematical description of the Dirac equation and in the transformations of spinors. Subsequently, we will describe in detail the structure of Clifford algebras and groups corresponding to the Euclidean plane. Using this knowledge we will explicitly write the Dirac equation and show how spinors transform under rotations in the Euclidean plane.

Keywords: Clifford algebras, Clifford groups, Dirac equation, Dirac operator, spinors

Obsah

Úvod

Začiatkom dvadsiateho storočia, po sformulovaní nerelativistickej kvantovej teórie založenej na Schrödingerovej rovnici sa fyzici zaoberali formuláciou relativistickej kvantovej teórie. Táto snaha vyústila v rokoch 1926 – 1927 v teóriu založenú na relativistickej Kleinovej-Gordonovej rovnici.

Táto rovnica však mala problémy s interpretáciou. To, že išlo o diferenciálnu rovnicu druhého rádu (aj v čase, na rozdiel od Schrödingerovej rovnice, ktorá je prvého rádu v čase) viedlo na prítomnosť riešení so zápornou hustotou pravdepodobnosti [7] a zápornou energiou – to bolo fyzikálne neakceptovateľné. Ďalší jej problém bol, že nepopisovala časticu so spinom, ktorý bol v tej dobe už experimentálne pozorovaný prostredníctvom Stern-Gerlachovho experimentu.

Napriek tomu panoval vo fyzikálnej komunite názor, že Kleinova-Gordonova rovnica je správna, a treba už len skúmať jej dôsledky. Tento názor však nezastával britský teoretický fyzik Paul Dirac, a rozhodol sa ďalej hladať relativistickú rovnicu prvého rádu. To sa mu aj podarilo, a jeho nová rovnica sa stala známa ako Diracova rovnica. Spolu s Diracovou rovnicou tak vstúpil do fyziky a matematiky aj Diracov operátor, ktorý je ústredným operátorom vystupujúcim v tejto rovnici.

Pri odvodzovaní novej Diracovej rovnice sa však vyskytli aj isté problémy. Tie vyústili v to, že Diracova rovnica je maticová, čím do fyziky vstúpili aj objeky nazývané spinory. Vo výsledku však Diracova rovnica správne popisovala správanie častice so spinom $\frac{1}{2}$, napríklad elektrónu. Istá interpretácia tejto rovnice predpovedala existenciu antihmoty – konkrétne existenciu častíc s rovnakou hmotnosťou no opačným elektrickým nábojom ako elektrón, známych ako pozitróny, ktorých existencia bola neskôr experimentálne potvrdená. Táto rovnica taktiež popísala relativistickú korekciu k energetickým hladinám spektra atómu vodíka – jemná štruktúra, poskytla rámec pre rozvoj kvantovej elektrodynamiky a má uplatnenie aj vo fyzike kondenzovaných látok, kde sa používa na popis tzv. diracovskej hmoty – ide o skupinu kondenzovaných látok, ktorá vie byť efektívne popísaná Diracovou rovnicou

Pôvodná Diracova rovnica popisovala spinory v Minkowského časopriestore, no netrvalo dlho, a fyzici sa začali venovať formuláciám Diracovej rovnice v zložitejších priestoroch (napríklad pre zohladenie všeobecnej teórie relativity). Ukazuje sa, že Diracov operátor v týchto zložitejších priestoroch (ktorý má aj zložitejší tvar než ten, s ktorým pracujeme my s tejto práci) má v sebe zakódovaných mnoho informácií o štruktúre týchto priestorov. Na popis týchto operátorov sa používa prístup pomocou Cliffordovej analýzy [6] – teória Cliffordových algebier.

Teória Cliffordových algebier má široké uplatnenie aj v matematike. Okrem popisu Diracovho oprátora poskytuje aj rozšírenie základnej algebry pre prácu s vektormi a vo vyšších dimenziách s objektami nazývanými multivektory, a poskytuje aj nový pohľad na vektorovú analýzu – táto oblasť matematiky sa nazýva geometrická algebra [1].

Hlavným cieľom tejto práce je poskytnúť úvod do teórie Cliffordových algebier, a následne teóriu aplikovať na jednoduchý model – popis Diracovej rovnice a spinorov v euklidovskej rovine.

Práca je rozdelená na dve časti. Prvá časť obsahuje 4 kapitoly, ktoré tvoria hlavnú časť práce. V prvej kapitole si ukážeme, ako vyzerá odvodenie Diracovej rovnice z Kleinovej-Gordonovej rovnice v Minkowského časopriestore. V druhá kapitola má čisto matematický charakter. V nej si vysvetlíme, čo sú to Cliffordove algebry, grupy, a ako Cliffordove grupy súvisia s ortogonálnymi grupami. V tretej kapitole uvedieme formálnu definíciu spinorov pomocou Cliffordových algebier a grúp, a vo štvrtej kapitole si popíšeme ako vyzerá celá situácia v euklidovskej rovine: spravíme podobné odvodenie Diracovej rovnice, ako urobli Dirac v Minkowského časopriestore, uvedieme si podrobnosti o Cliffordových algebrách a grupách v euklidovskej rovine a nakoniec popíšeme spinory a explicitne napíšeme Diracovu rovnicu.

Druhá časť textu obsahuje 3 dodatky. Tie slúžia na pripomenutie vedomostí, ktoré sú už známe pre študenta fyziky tretieho ročníka bakalárskeho stupňa, prevažne z predmetov Matematická fyzika a Algebra a geometria. Dodatky taktiež obsahujú niektoré podrobné výpočty, na ktoré sa odvolávame v prvej časti textu, ale pre lepšiu prehľadnosť, plynulosť a čitateľnosť textu tam nie sú uvedené s podrobnosťami.

Čo sa týka používanej matematickej symboliky, v celom texte používame Einsteinovu sumačnú konvenciu. Tá hovorí, že ak máme v člene nejakého výrazu dva rovnaké indexy, máme cez tieto indexy sčítať v rozsahu vyplývajúcom z kontextu. Napríklad výraz $\sum_{i=1}^{n} a_i e^i \equiv a_i e^i$. V celom texte taktiež používame pre označenie izomorfizmu znak "=".

1 Diracova rovnica a Diracov operátor

V tejto kapitole odvodíme Diracovu rovnicu zo známej Kleinovej-Gordonovej rovnice opisujúcej relativistickú časticu. Definujeme pritom Diracov operátor a zdôvodníme potrebu zavedenia pojmu spinor, ktorý však presnejšie definujeme až v kapitole 3.

Kleinova-Gordonova rovnica pre voľnú časticu má tvar:

$$\left(\Box - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi(\vec{r},t) = 0 \tag{1.1}$$

kde $\Box \equiv \triangle - \partial_t^2 \equiv -\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ je D'Alambertov operátor a $\eta^{\mu\nu}$ sú komponenty metrického tenzora (Dodatok C) v štvorrozmernom Minkowského časopriestore, c – rýchlosť svetla vo vákuu, $\hbar$ – redukovaná Planckova konštanta a $\psi(\vec{r},t)$ – vlnová funkcia častice

Ak položíme $c = \hbar = 1$, dostávame prehľadnejší zápis, s ktorým budeme ďalej pracovať (v ďalšom už nebudeme explicitne písať argumety, akých premenných sú dané objeky funkciou):

$$(\Box - m^2)\psi = 0 \tag{1.2}$$

Diracov prístup spočíval v tom, že sa pokúsil faktorizovať Kleinov-Gordonov diferenciálny operátor druhého rádu $(\Box - m^2)$, t.j. zapísať ho ako "súčin"dvoch operátorov $\hat{A}, \hat{B}$ prvého rádu. Rovnica by po faktorizácii mala tvar:

$$(\Box - m^2)\psi \equiv \hat{A}\hat{B}\psi = 0 \tag{1.3}$$

Potom by sme mohli postulovať "fundamentálnejšiu"rovnicu:

$$\hat{B}\psi = 0 \tag{1.4}$$

Fundamentálnejšia by bola preto, pretože každé riešenie rovnice (1.4) je aj riešenie rovnice (1.3), no opačne to platiť nemusí.

Podľa vzorca $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ by mohli operátory $\hat{A},\ \hat{B}$ vyzerať nasledovne:

$$\hat{A} = \hat{a} + m\hat{1} \qquad \hat{B} = \hat{a} - m\hat{1} \tag{1.5}$$

Rovnica (1.3) prejde na tvar:

$$(\Box - m^2)\psi = (\hat{a} + m\hat{1})(\hat{a} - m\hat{1})\psi = \hat{a}\hat{a}\psi - m\hat{a}\psi + m\hat{a}\psi - m^2\psi = (\hat{a}\hat{a} - m^2)\psi \tag{1.6}$$

Aby návrh operátorov $\hat{A}$, $\hat{B}$ bol správny, musí zrejme platiť:

$$\hat{a}\hat{a} = \Box = -\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \tag{1.7}$$

Z toho vylýva, že operátor $\hat{a}$ musí byť diferenciálny operátor prvého rádu. Úvahy zohladňujúce špeciálnu teóriu relativity – to že priestor a čas tvoria jeden celok, nakoniec priviedli Diraca na ansatz [2]:

$$\hat{a} = i\gamma^\mu\partial_\mu \tag{1.8}$$

kde γ^μ sú neznáme koeficienty. Nemôžu však byť ľubovoľné, pretože musia vyhovovať vzťahu:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \tag{1.9}$$

Pretože my pracujeme s hladkými funkciami $\psi \in C^\infty$, parciálne derivácie komutujú. To nás po menších úpravách privedie k podobnej rovnici, ale s prehodenými indexmi pri koeficientoch γ^μ:

$$\gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\mu\partial_\nu = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \tag{1.10}$$

Sčítanie rovníc (1.9), (1.10) nás privedie ku základnej rovnici pre koeficienty γ^μ:

$$(\gamma^\nu\gamma^\mu + \gamma^\nu\gamma^\mu)\partial_\mu\partial_\nu = 2\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \tag{1.11}$$

$$\gamma^\nu\gamma^\mu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \tag{1.12}$$

Vzťah (1.12) nám okrem iného hovorí aj to, že koeficienty γ^μ nemôžu byť čísla. Ako príklad si zoberme hodnoty indexov (μ, ν) také, že $\mu \neq \nu$:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} = 0 \qquad \text{t.j.} \qquad \gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu \qquad \forall\mu,\nu\ \mu \neq \nu \tag{1.13}$$

Túto podmienku čísla nesplĺňajú, pretože tie komutujú. Dirac si však uvedomil, že vzťah (1.12) možu splniť štvorcové matice. Aby však rovnica $\hat{B}\psi = 0$ dávala aj s maticami stále zmysel, ψ nesmie byť skalárne pole- číslo (zobrazenie $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$), ale "stĺpček"(usporiadaná n-tica skalárnych funkcií) takého rozmeru, koľko majú dané matice riadkov (alebo stĺpcov).

Matice γ^μ sa nazývajú gama-matice. Výraz:

$$\partial\!\!\!/ = \gamma^\mu\partial_\mu \tag{1.14}$$

je Diracov operátor. Diracova rovnica má tvar:

$$(i\partial\!\!\!/ - m\hat{1})\psi = 0 \tag{1.15}$$

Pri ďalšej matematickej analýze Diracovej rovnice sa ukázuje, že relativistická invariantnosť rovnice si vyžaduje, aby sa stĺpček ψ transformoval pomocou spinorovej reprezentácie (Dodatok C) grupy $SO(1,3)$ (v skutočnosti ide o reperezentáciu jej nakrývajúcej grupy $\mathrm{Spin}\,(1,3)$ a ako reprezentácia grupy $SO(1,3)$ je dvojznačná). Stĺpčeky ψ sa nazývajú spinory. Ich podrobnejšej definícii a spinorovej reprezentácii sa budeme venovať v tretej kapitole.

2 Cliffordove algebry a grupy

Cliffordove algebry a grupy úzko súvisia s Diracovou rovnicou, pretože práve bázove prvky istého podpriestoru Cliffordovej algebry spĺňajú vzťah $e^a e^b + e^b e^a = 2\eta^{ab}$, čo je analóg vzťahu, ktorý musia spĺňať gama-matice. Určité prvky Cliffordovej algebry tvoria aj grupu, pričom táto grupa je práve tá, ktorá nakrýva grupu $SO(p,q)$, a poskytuje nám spinorovú reprezentáciu. V tejto kapitole si všeobecne popíšeme Cliffordove alegebry a grupy.

2.1 Cliffordove algebry $C(p,q)$

Cliffordova algebra $C(L,g)$ je reálna konečnorozmerná asociatívna algebra s jednotkou (Dodatok B), ktorá je kanonicky zviazaná s dvojicou (L,g), kde L je lineárny priestor a g je metrický tenzor v tomto priestore.

Formálne Cliffordovu algebru dostaneme faktorizáciou čisto kovariantnej tenzorovej algebry $T_{(.)}(L) = \bigoplus\limits_{r=0}^{\infty} T_r^0(L)$ podľa konkrétneho obojstranného ideálu J generovaného prvkami tvaru (Dodatok B):

$$\alpha \otimes \alpha - g(\alpha,\alpha) \qquad \alpha \in L^*,\ g(\alpha,\alpha) = g^{ab}\alpha_a\alpha_b \tag{2.1.1}$$

Po uvažovanej faktorizácii dostávame faktoralgebru, ktorej prvky sú triedy ekvivalencie pôvodnej algebry $T_{(.)}(L)$. Násobenie v tejto algebre spĺňa vzťah:

$$[e^a][e^b] + [e^b][e^a] = 2g^{ab}[1] \tag{2.1.2}$$

Výslednú faktoralgebru nazývame Cliffordova algebra:

$$C(L,g) := T_{(.)}(L)/J \tag{2.1.3}$$

Keď pracujeme iba s výslednou faktoralgebrou – Cliffordovou algebrou, zátvorky označujúce triedy ekvivalencie nepíšeme, a ostáva iba kľúčový vzťah – bilineárny a asociatívny Cliffordov súčin:

$$e^a e^b + e^b e^a = 2g^{ab} \tag{2.1.4}$$

Všeobecný prvok Cliffordovej algebry má tvar:

$$u = \tilde{u} + \tilde{u}_a e^a + \tilde{u}_{ab} e^a e^b + \tilde{u}_{abc} e^a e^b e^c + \dots \qquad \tilde{u}, \tilde{u}_a, \tilde{u}_{ab}, \dots \in \mathbb{R} \tag{2.1.5}$$

Násobenie je bilineárne, takže pri násobení dvoch všeobecných prvkov násobíme každý člen prvého s každým členom druhého, a na zjednodušenie využívame Cliffordov súčin (2.1.4). Uveďme si príklad:

$$
\begin{aligned}
(3+e^1e^2)(2e^1+4e^2e^3) &= 6e^1+12e^2e^3+2e^1e^2e^1+4e^1e^2e^2e^3 && (2.1.6)\\
&= 6e^1+12e^2e^3-2e^2e^1e^1+4e^1g^{22}e^3 && (2.1.7)\\
&= (6e^1-2g^{11}e^2)+(12e^2e^3+4g^{22}e^1e^3) && (2.1.8)\\
&\in C^1(L,g)\oplus C^2(L,g) && (2.1.9)
\end{aligned}
$$

V poslednom kroku sme do zátvoriek usporiadali výrazy, ktoré zahŕňajú rovnaký počet vynásobených prvkov e^a a členy obsahujúce súčiny viacerých e^a sme zapísali v poradí so stúpajúcimi hodnotami indexov (napríklad sme napísali e^1e^3 a nie $-e^3e^1$) – to je vždy možné využitím Cliffordovho súčinu. Priestor, ktorý má bazové prvky takého tvaru, že to je súčin p kusov vzostupne usporiadaných e^a sme označili $C^p(L,g)$.

Výsledok, ku ktorému sme sa pri tomto príkalde dopracovali vieme zovšeobecniť nasledovne:

Cliffordova algebra $C(L,g)$ sa dá rozdeliť na priamy súčet podpriestorov:

$$C(L,g)=\sum_{p=0}^{n} C^p(L,g) \tag{2.1.10}$$

kde $n=\dim(L)$. Poznamenajme, že vzťah (2.1.10) je platný len pre $C(L,g)$ ako lineárny priestor.

Báza v jednotlivých podpriesoroch vyzerá nasledovne:

$$
\begin{aligned}
&C^0(L,g)=\mathbb{R} && 1 && && (2.1.11)\\
&C^1(L,g)=L^* && e^a && a=1,\dots,n && (2.1.12)\\
&C^2(L,g) && e^ae^b && a<b && (2.1.13)\\
&C^3(L,g) && e^ae^be^c && a<b<c && (2.1.14)\\
&\cdots && \cdots && \cdots && (2.1.15)\\
&C^n(L,g) && e^1\dots e^n && && (2.1.16)
\end{aligned}
$$

Výsledná algebra $C(L,g)$ má rozmer 2^n, kde n je rozmer pôvodného lineárneho priestoru L.

Od teraz sa budeme zaujímať iba o prípady, keď si za dvojicu (L, g) zobrieme $(\mathbb{R}^n, \eta^{ab})$, kde η^{ab} je metrický tenzor v $\mathbb{R}^n$ so signatúrou (p, q), $p + q = n$. Takúto Cliffordovu algebru budeme označovať $C(p, q)$. Aby sme sa trochu zorientovali, poďme sa pozrieť, ako konkrétne vyzerajú Cliffordove algebry s s najnižšími hodnotami (p, q).

V prípade $(p, q) = (0, 0)$ máme 0-rozmerné L, preto sa celá tenzorová algebra redukuje na $\mathbb{R}$: $T_{(.)}(L) = \mathbb{R}$. Duálny priestor L^* má rovnaký rozmer ako pôvodný priestor L, čo znamená, že je triviálny: L^* obsahuje iba jeden prvok: $\{0\}$. Náš ideál J je preto tiež triviálny: $J = \{0\}$, a faktorizácia podľa triviálneho ideálu dáva pôvodný priestor. Takže výsledkom je:

$$C(0, 0) = T_{(.)}(L) = \mathbb{R} \tag{2.1.17}$$

Presuňme sa k prípadu $(p, q) = (0, 1)$. Máme 1-rozmerný lineárny priestor L a k nemu taktiež 1-rozmerný duálny priestor L^* s jedným bázovým kovektorom e^1. Cliffordov súčin sa redukuje iba na vzťah: $e^1e^1 = -1$. Všeobecný prvok algebry $u \in C(0, 1)$ má tvar: $u = a + be^1,\ a, b \in \mathbb{R}$. Lineárna kombinácia a násobenie všeobecných prvkov vyzerá nasledovne:

$$(a + be^1) + \lambda(\tilde{a} + \tilde{b}e^1) = (a + \lambda\tilde{a}) + (b + \lambda\tilde{b})e^1 \tag{2.1.18}$$

$$(a + be^1)(\tilde{a} + \tilde{b}e^1) = \tilde{a}a + a\tilde{b}e^1 + b\tilde{a}e^1 + b\tilde{b}e^1e^1 \tag{2.1.19}$$

$$= (a\tilde{a} - b\tilde{b}) + (a\tilde{b} + b\tilde{a})e^1 \qquad a, \tilde{a}, b, \tilde{b}, \lambda \in \mathbb{R} \tag{2.1.20}$$

Vzťah $e^1e^1 = -1$ aj vzťahy pre sčítanie a násobenie sú nám veľmi povedomé. Stačí totiž spraviť zámenu $e^1 \leftrightarrow i$, kde i je imaginárna jednotka (i^2=1), a máme základné vzťahy pre narábanie s komplexnými číslami, takže $a + be^1 \leftrightarrow a + bi$ je izomorfizmus dvojrozmernej algebry $C(0, 1)$ s algebrou komplexných čísel $\mathbb{C}$ chápanou ako dvojrozmerná algebra nad $\mathbb{R}$.

Izomorfizmy pre signatúry $(2, 0),\ (1, 1),\ (0, 2)$ sú nasledovné (Dodatok A):

$$C(2, 0) = \mathbb{R}(2) \qquad C(1, 1) = \mathbb{R}(2) \qquad C(0, 2) = \mathbb{H} \tag{2.1.21}$$

$\mathbb{R}(n)$ je algebra reálnych $n \times n$ matíc a $\mathbb{H}$ je algebra kvaterniónov (Dodatok B).

Bez dôkazu ešte uvedieme, že platí izomorfizmus: $C(1, 0) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

Taktiež platí, že Cliffordove algebry pre všetky možné hodnoty (p, q) sú izomorfné maticovým algebrám, nad poliami $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ a $\mathbb{H}$, prípadne priame súčty a tenzorové súčiny (Dodatok B) týchto maticových algebier.

2.2 Cliffordove grupy $\mathrm{Pin}\,(p,q)$ a $\mathrm{Spin}\,(p,q)$

Cliffordova algebra $C(p,q)$ je asociatívna algebra s jednotkou, a je uzavretá voči súčinu – to algebra musí byť. Preto by sme sa mohli pýtať, či Cliffordova algebra nie je aj grupa (Dodatok C). Odpoveď je záporná, pretože nie pre každý prvok z $C(p,q)$ existuje inverzný. Ako príklad si vezmime prvok $u = e^1 + e^2 \in C(1,1)$. Inverzný prvok u^{-1} hľadajme v tvare všeobecného prvku: $u^{-1} = a + be^1 + ce^2 + de^1e^2,\ \ a,b,c,d \in \mathbb{R}$. u^{-1} musí zrejme spĺňať rovnicu:

$$(e^1 + e^2)(a + be^1 + ce^2 + de^1e^2) = 1 \tag{2.2.1}$$

$$(b - c) + e^1(a + d) + e^2(d + a) + e^1e^2(c - b) = 1 \tag{2.2.2}$$

Koeficienty b, c musia spĺňať rovnice:

$$b - c = 1 \qquad \wedge \qquad b - c = 0 \tag{2.2.3}$$

Je zrejmé, že tieto rovnice nemajú riešenie, pretože si protirečia.

Pre niektoré prvky však inverzný prvok existuje. Tieto prvky potom tvoria grupu. My sa nebudeme zaoberať najvšeobecnejšou grupou, ktorú tieto prvky tvoria, ale jej istou podgrupou. Prvky tejto podgrupy, ktorá sa označuje $\mathrm{Pin}\,(p,q)$ vyzerjú nasledovne:

> Uvažujme tie prvky $\alpha \in C^1(p,q) = L^*$, ktoré sú normované na jednotku, t.j. $g(\alpha,\alpha) = \pm 1$. Prvok grupy $\mathrm{Pin}\,(p,q)$ definujeme ako konečný súčin prvkov α:

$$u = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k \in \mathrm{Pin}\,(p,q) \qquad g(\alpha_j,\alpha_j) = \pm 1 \qquad j = 1,\dots,k \tag{2.2.4}$$

Prvky daného typu skutočne tvoria grupu (Dodatok B). Existencia inverzného prvku vyplýva z toho, že $\alpha_j\alpha_j = g(\alpha_j\alpha_j) = \pm 1$ a preto $\alpha_j^{-1} = \pm\alpha_j$. Pre všeobecný prvok máme: $(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k)^{-1} = \pm\alpha_k\dots\alpha_2\alpha_1$

Prvky, ktoré obsahujú párny počet súčiniteľov tvoria podgupu grupy $\mathrm{Pin}\,(p,q)$. Táto podgrupa sa označuje $\mathrm{Spin}\,(p,q) \subset \mathrm{Pin}\,(p,q)$:

$$v = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{2k-1}\alpha_{2k} \in \mathrm{Spin}\,(p,q) \qquad k \in \mathbb{N} \tag{2.2.5}$$

2.3 Dvojlistové nakrytie $\mathrm{Pin}\,(p,q) \to O(p,q)$

Teraz si popíšeme, ako súvisia Cliffordove grupy $\mathrm{Pin}\,(p,q)$, $\mathrm{Spin}\,(p,q)$ s ortogonálnymi grupami $O(p,q)$, $SO(p,q)$ (Dodatok C). Tento vzťah uvidíme pomocou nasledovnej reprezentácie grupy $\mathrm{Pin}\,(p,q)$ v lineárnom priestore $C^1(p,q) = L^*$.

Vezmime ľubovoľný prvok $u \in \mathrm{Pin}\,(p,q)$ a pomocou neho zadefinujme lineárne zobrazenie:

$$\varphi_u : C^1(p,q) \to C^1(p,q) \qquad\qquad \varphi_u(\beta) = u\beta u^{-1} \tag{2.3.1}$$

Najprv si objasníme, čo sa deje s (ko)vektorom β, ak u je súčinom iba jedného normovaného prvku α: $u = \alpha$. Vektor β rozložme na $\beta_{\|} = \lambda\alpha$ – časť rovnobežnú s α, a $\beta_{\perp}$ – časť kolmú na α. Potom:

$$\beta = \beta_{\|} + \beta_{\perp} \to \varphi_\alpha(\beta) = \alpha\beta\alpha^{-1} = \alpha(\beta_{\|} + \beta_{\perp})\alpha^{-1} = \lambda\alpha\alpha\alpha^{-1} + \alpha\beta_{\perp}\alpha^{-1} \tag{2.3.2}$$

$$= \lambda\alpha - \beta_{\perp}\alpha\alpha^{-1} \tag{2.3.3}$$

$$= \beta_{\|} - \beta_{\perp} \tag{2.3.4}$$

Pri výpočte sme použili identitu:

$$\alpha\beta_{\perp} = \alpha_a e^a \beta_{\perp b} e^b = \alpha_a \beta_{\perp b}(-e^b e^a + 2\eta^{ab}) = -\beta_{\perp}\alpha + 2g(\alpha, \beta_{\perp}) = -\beta_{\perp}\alpha \tag{2.3.5}$$

Výsledok (2.3.4) nám hovorí, že zobrazenie $\varphi_\alpha(\beta)$ je zrkadlenie (ortogonálna transformácia) vektoru β voči vektoru α. Pripomeňme si, že ortogonálne transformácie sú rotácie a zrkadlenia, a taktiež ich ľubovoľné zloženie je ortogonálna transformácia (ortogonálne transformácie tvoria grupu).

Aká to dopadne pre všeobecné $\varphi_u(\beta)$? Ľahko sa ukáže, že zobrazenie $\varphi_u(\beta)$ je reprezentácia, t.j.:

$$\varphi_u(\beta) = \varphi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}(\beta) = \varphi_{\alpha_1}\varphi_{\alpha_2}\ldots\varphi_{\alpha_k}(\beta) \tag{2.3.6}$$

Zobrazenie $\varphi_u(\beta)$ je iba zloženie viacerých zrkadlení – je to ortogonálna transformácia.

Z lineárnej algebry [5] vieme, že ľubovoľná rotácia sa dá realizovať ako zloženie párneho počtu zrkadlení. Preto ak reprezentáciu $\varphi_u(\beta)$ zúžime iba na $u \in \mathrm{Spin}\,(p,q)$, toto zobrazenie je párnym počtom zrkadlení – je to rotácia – špeciálna ortgonálna transformácia.

Ukázali sme, že zobrazenie φ_u vykonáva v priestore $C^1(p,q)$ ortogonálnu transformáciu. My však vieme, že ortogonálne transformácie sú vykonávané pomocou ortogonálnych matíc. To nás vedie k myšlienke, aby sme prvku $u \in \mathrm{Pin}\,(p,q)$ priradili ortogonálnu maticu $A \in O(p,q)$. Toto zobrazenie zadefinujeme na báze, (a lineárne rozšírime na všeobecný prvok) nasledujúcim spôsobom:

$$\pi : \mathrm{Pin}\,(p,q) \to O(p,q) \tag{2.3.7}$$

$$\pi(u) = A \tag{2.3.8}$$

$$ue^a u^{-1} =: (A^{-1})^a_b e^b \tag{2.3.9}$$

Poznamenajme, že vo vzťahu nevystupuje priamo matica A, ale inverzná matica. Je to tak preto, aby platilo: $\pi(uv) = \pi(u)\pi(v)$. Priamo s maticou A by totiž platilo: $\pi(uv) = \pi(v)\pi(u)$.

Zobrazenie π je surjektívny homomorfizmus grúp, $\mathrm{Pin}\,(p,q)$ a $O(p,q)$, avšak nejde o izomorfizmus. Problém je v tom, že zobrazenie π nie je injektívne – jeho jadro obsahuje dvojprvkovú podgrupu $(1,-1) \subset \mathrm{Spin}\,(p,q)$. To znamená, že π je dvojlistové nakrytie, a teda každý prvok v $O(p,q)$ má práve dva vzory v $\mathrm{Pin}\,(p,q)$. Rovnaký vzťah dvojlistového nakrytia platí aj medzi podgrupami $\mathrm{Spin}\,(p,q)$ a $SO(p,q)$.

3 Spinory, spinorová reprezentácia

V časti 2.1 sme uviedli, a pre niektoré konktrétne hodnoty signatúry (p, q) aj ukázali, že Cliffordove algebry sú izomorfné maticovým algebrám. Tieto matice vedia prirodzene pôsobiť na elementy lineárnych priestorov $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{H}^n$. To znamená, že izomorfizmy Cliffordových algebier s maticovými algebrami sú zároveň ich reprezentácie, v týchto lineárnych priestoroch.

V kapitole 1 sme uviedli požiadavku, aby na spinor ψ pôsobili gama-matice, ktoré spĺňajú Cliffordov súčin. Relativistická invariantnosť zas požaduje, aby sa stĺpček ψ transformovala pomocou reprezentácie grupy $\mathrm{Spin}\,(1, 3)$, ktorá nakrýva grupu $SO(1, 3)$ (to ukazuje podrobnejšia matematická analýza, ktorej sa nebudeme venovať). Každý prvok grupy $\mathrm{Spin}\,(p, q)$ je však aj prvkom Cliffordovej algebry $C(p, q)$.

Tieto fakty sú motiváciou k definícii pojmu spinor: spinory sú elementy priestorov $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{H}^n$ – teda elementy priestorov, na ktoré pôsobia maticové reprezentácie Cliffordových algebier – ktoré sa transformujú pomocou reprezentácie grupy $\mathrm{Spin}\,(p, q)$. Pôsobenie prvkov z Cliffordových algebier je v lineárnom priestore štruktúra navyše (podobne, ako keď do lineárneho priestoru pridáme metrický tenzor).

Poznamenajme, že spinory nie sú vektory. Ide o to, že nie každá n-tica čísel je vektor. V definícii vektora hrá totiž úlohu aj to, akým spôsobom sa komponenty vektora transformujú pri zámene súradíc. A kedže komponenty spinora sa transformujú pomocou spinorovej reprezentácie a vektor nie, spinor nie je vektor.

Aj keď neuvádzame, prečo sa komponenty spinorov transformujú práve pomocou reprezentácie grupy $\mathrm{Spin}\,(p, q)$, je podstatné, že ide zároveň aj o dvojznačnú reprezentáciu grupy $SO(p, q)$, ktorá popisuje symetrie nášho sveta (pre vhodne zvolenú dvojicu (p, q)). Takže to, že spinory sa budú transformovať pomocou reprezentácie grupy $SO(p, q)$ dáva dobrý fyzikálny zmysel. Túto reprezentáciu grupy $SO(p, q)$ nazývame spinorová reprezentácia. Tá funguje tak, že prvku z $SO(p, q)$ vieme priradiť dva vzory v $\mathrm{Spin}\,(p, q)$, a pre tie už reprezentácie máme. Vzniká tu však zdanlivý problém: dvojznačnosť reprezentácie znamená dve možnosti pre transformáciu spinora. Ukazuje sa však, že obe transformácie sú rovnocenné, a je iba vecou konvencie, ktorá sa použije, pretože oba transformované spinory reprezentujú ten istý fyzikálny stav.

Aby sme odlíšili kedy hovoríme o reprezentácii grupy $\mathrm{Spin}\,(p, q)$ a kedy o reprezentácii $SO(p,q)$, zavedieme nasledujúce označenia. Reperezentáciu grupy $\mathrm{Spin}\,(p,q)$ budeme označovať ρ a reprezetáciu $SO(p,q)$ budeme označovať $\hat{\rho}$, pričom platí:

$$\hat{\rho} = \rho \circ \pi^{-1} \tag{3.1}$$

kde zobrazeniu π^{-1} rozumieme tak, že prvku z $SO(p,q)$ sa priradí jeden z dvoch vzorov zo $\mathrm{Spin}\,(p,q)$. Pretože zobrazenie π^{-1} je dvojznačné, je dvojznačná aj reprezetácia $\hat{\rho}$.

Ako sme už uviedli, Cliffordove grupy $\mathrm{Pin}\,(p,q)$ a $\mathrm{Spin}\,(p,q)$ sú podmnožiny Cliffordovej algebry. Takže reprezentácia Cliffordovej algebry nám zadarmo poskytuje aj reprezentáciu jej grúp.

Každý prvok z Cliffordovej algebry $C(p,q)$ sa dá napísať ako lineárna kombinácia súčinov bázy e^a podpriestoru $C^1(p,q)$. Preto nám stačí zaujímať sa o reprezentáciu bázy e^a (napríklad $\rho(5e^3e^8e^{27}) = 5\rho(e^3)\rho(e^8)\rho(e^{27})$). Obrazy bázy e^a voči reprezentácii ρ:

$$\gamma^a := \rho(e^a) \tag{3.2}$$

sa nazývajú gama-matice.

Pre gama-matce platia identity:

$$\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^b = 2\eta^{ab} \tag{3.3}$$

$$\rho(u)\gamma^a\rho(u^{-1}) = (A^{-1})^a_b\gamma^b \tag{3.4}$$

Prvý z uvedených vzťahov je ρ-obrazom Cliffordovho súčinu (2.1.4), druhý je ρ-obrazom vzťahu (2.3.9) definujúci dvojlistové nakrytie medzi Cliffordovými a ortogonálnymi grupami.

V prípade signatúry $(p,q) = (3,0)$, t.j. v obyčajnom Euklidovskom priestore platí, že Cliffordova algebra je izomorfná algebre komlexných 2×2 matíc: $C(3,0) = \mathbb{C}(2)$. Spinory sú potom dvojkomponentné komplexné stĺpčeky. Vďaka tomu, že Pauliho matice spĺňajú vzťah $\sigma_a\sigma_b + \sigma_b\sigma_a = 2\delta_{ab}$ a 8-prvková množina matíc $\{\mathbb{I},\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \sigma_1\sigma_2,\ \sigma_1\sigma_3,\ \sigma_2\sigma_3,\ \sigma_1\sigma_2\sigma_3\}$ tvorí bázu v $\mathbb{C}(2)$, vzhľadom na ktorú tento izomorfizmus funguje, sú Pauliho matice špeciálne gama-matice. To by nemalo byť veľmi prekvapivé, pretože so spinormi v 3-rozmernom euklidovskom priestore aj s Pauliho maticami sme sa už stretli na predmete Kvantová teória (1) pri štúdiu spinu.

4 Diracova rovnica v euklidovskej rovine

V tejto kapitole sa budeme venovať konkrétnemu prípadu Diracovej rovnice v euklidovskej rovine. Začneme tým, že napíšeme modifikáciu Kleinovej-Gordonovej rovnice v euklidovskej rovine a analogickým postupom ako Dirac prídeme k zavedeniu pojmov gama-matice a spinoru. Pokračovať budeme tým, že stručne uvedieme výsledky o Cliffordovej algebre $C(2,0)$ a Cliffordových grupách $\mathrm{Pin}\,(2,0)$ a $\mathrm{Spin}\,(2,0)$. Podrobnosti o týchto výpočtoch sa nachýdzajú v Dodatku A. Nakoniec popíšeme gama-matice a spinory, a explicitne napíšeme Diracovu rovnicu v rovine.

4.1 Odvodenie Diracovej rovnice v rovine

V euklidovskej rovine má modifikovaná Kleinova-Gordonova rovnica tvar:

$$(\triangle - m^2)\Psi \equiv \hat{A}\hat{B}\psi = 0 \tag{4.1.1}$$

kde $\triangle = \partial_i\partial_i = \delta^{ij}\partial_i\partial_j$ je Laplaceov operátor a δ^{ij} sú komponenty metrického tenzora v rovine.

Podobne ako v Minkowského časopriestore, aj tu budú mať operátory $\hat{A}, \hat{B}$ tvar:

$$\hat{A} = \hat{a} + m\hat{1} \qquad\qquad \hat{B} = \hat{a} - m\hat{1} \tag{4.1.2}$$

Operátor $\hat{a}$ musí spĺňať vzťah:

$$\hat{a}\hat{a} = \triangle = \delta^{ij}\partial_i\partial_j \tag{4.1.3}$$

Inšipirovaný Diracom použijeme ansatz: $\hat{a} = \gamma^a\partial_a$. Po dosadení do rovnice (4.1.3) dostávame pre koeficienty γ^a rovnakú podmienku, ako dostal Dirac:

$$\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = 2\delta^{ab} \tag{4.1.4}$$

Diracova rovnica má tvar:

$$(\partial\!\!\!/ - m\hat{1})\psi = 0 \qquad\qquad \partial\!\!\!/ \equiv \gamma^a\partial_a \tag{4.1.5}$$

Od rovnice (4.1.5) požadujeme rotačnú invariantnosť, a preto sa stĺpček ψ musí transformovať podľa spinorovej reprezentácie grupy $SO(2)$.

4.2 Cliffordova algebra $C(2,0)$

V Cliffordovej algebre $C(2,0)$ sa Cliffordov súčin redukuje na nasledovné vzťahy:

$$e^1e^1 = 1 \qquad e^2e^2 = 1 \qquad e^2e^1 = -e^1e^2 \tag{4.2.1}$$

Na báze si zadefinujme zobrazenie χ nasledovne:

$$\chi : C(2,0) \to \mathbb{R}(2) : \tag{4.2.2}$$

$$\chi(1) = \mathbb{I} \tag{4.2.3}$$

$$\chi(e^1) = \sigma_1 \tag{4.2.4}$$

$$\chi(e^2) = \sigma_3 \tag{4.2.5}$$

$$\chi(e^1e^2) = \sigma_1\sigma_3 = -i\sigma_2 \tag{4.2.6}$$

kde $\sigma_i,\ i = 1,2,3$ sú Pauliho matice.

Zobrazenie χ na všeobecnom prvku je lineárne rozšírenie:

$$\chi(a_je^j) := a_j\chi(e^j) \tag{4.2.7}$$

Zobrazenie χ zobrazuje bázu na bázu, takže ide o bijekciu. Taktiež platí vzťah:

$$\chi(uv) = \chi(u)\chi(v) \qquad u, v \in C(2,0) \tag{4.2.8}$$

To znamená, že zobrazenie χ je izomorfizmus:

$$C(2,0) = \mathbb{R}(2) \tag{4.2.9}$$

4.3 Cliffordove grupy $\mathrm{Pin}\,(2,0)$ a $\mathrm{Spin}\,(2,0)$

Všeobecný prvok $u \in \mathrm{Pin}\,(2,0)$ má tvar konečného súčinu prvkov $\alpha_j \in C^1(2,0)$ normovaných na jednotku:

$$u = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k \qquad g(\alpha_j,\alpha_j) = 1 \qquad j = 1,\ldots,k \tag{4.3.1}$$

Venujme chvíľu pozornosť jednému prvku $\alpha_j = \alpha$. Všeobecný prvok α má nasledovný tvar:

$$\alpha = ae^1 + be^2 \qquad a, b \in \mathbb{R} \tag{4.3.2}$$

Aby bol prvok α normovaný, pre koeficienty a, b dostávame podmienku:

$$a^2 + b^2 = 1 \tag{4.3.3}$$

To znamená, že koeficienty a, b môžeme parametrizovať uhlom ϕ:

$$a = \cos\phi \qquad\qquad b = \sin\phi \qquad\qquad \alpha(\phi) = e^1\cos\phi + e^2\sin\phi \tag{4.3.4}$$

Ak vynásobíme dva prvky typu α dostaneme nový prvok:

$$\alpha(\phi)\alpha(\psi) = \cos(\psi - \phi) + e^1e^2\sin(\psi - \phi) = \beta(\psi - \phi) \tag{4.3.5}$$

Tu sme zaviedli označenie:

$$\beta(\phi) = \cos\phi + e^1e^2\sin\phi \tag{4.3.6}$$

Súčinom dvoch prvkov typu α sme získali nový prvok typu β. Zaujímavé však je že v grupe $\mathrm{Pin}\,(2,0)$ existujú iba prvky typu α a β – neexistujú žiadne iné. Toto tvrdenie vyplýva z nasledujúcich vzťahov:

$$\alpha(\phi)\alpha(\psi) = \beta(\psi - \phi) \tag{4.3.7}$$

$$\alpha(\phi)\beta(\psi) = \alpha(\phi + \psi) \tag{4.3.8}$$

$$\beta(\phi)\alpha(\psi) = \alpha(\psi - \phi) \tag{4.3.9}$$

$$\beta(\phi)\beta(\psi) = \beta(\phi + \psi) \tag{4.3.10}$$

Zo vzťahu (4.3.10) explicitne vidíme aj to, že podgrupa $\mathrm{Spin}\,(2,0)$ je skutočne uzavretá vzhľadom na súčin.

Grupa $\mathrm{Pin}\,(2,0)$ je veľmi podobná grupe $O(2)$. Aj v grupe $O(2)$ existujú iba dva typy prvkov:

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \qquad\qquad \det[R(\phi)] = 1 \tag{4.3.11}$$

$$Z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ -\sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \qquad\qquad \det[Z(\phi)] = -1 \tag{4.3.12}$$

$R(\phi)$ je známa rotačná matica o uhol ϕ v rovine, a $Z(\phi)$ je zrkadlenie okolo osi x zložené s rotáciou o uhol $(-\phi)$. Násobenie v grupe $O(2)$ je:

$$Z(\phi)Z(\psi) = R(\psi - \phi) \tag{4.3.13}$$

$$Z(\phi)R(\psi) = Z(\phi + \psi) \tag{4.3.14}$$

$$R(\phi)Z(\psi) = Z(\psi - \phi) \tag{4.3.15}$$

$$R(\phi)R(\psi) = R(\phi + \psi) \tag{4.3.16}$$

Násobenie v grupe $O(2)$ je identické ako v grupe $\mathrm{Pin}\,(2,0)$ ak spravíme zámenu: $\alpha(\phi) \leftrightarrow Z(\phi)$, $\beta(\phi) \leftrightarrow R(\phi)$. Zadefinujme preto zobrazenie τ:

$$\tau : Pin(2,0) \to O(2) \tag{4.3.17}$$

$$\tau[\alpha(\phi)] = Z(\phi) \tag{4.3.18}$$

$$\tau[\beta(\phi)] = R(\phi) \tag{4.3.19}$$

Pretože násobenie v grupách $\mathrm{Pin}\,(2,0)$ a $O(2)$ je prakticky totožné, zobrazenie τ je homomorfizmus. Obrazom zobrazenia τ je celé $O(2)$, pretože pre každé $Z(\phi)$, $R(\phi)$ existuje vzor. Jadro tohto zobrazenia je jednoprvková množina $\{1\} \in \mathrm{Spin}\,(2,0)$. Dokopy to znamená, že zobrazenie τ je izomorfizmus:

$$\mathrm{Pin}\,(2,0) = O(2) \tag{4.3.20}$$

Zúženie zobrazenia τ na podgrupu $\mathrm{Spin}\,(2,0)$ dáva aj izomorfizmus:

$$\mathrm{Spin}\,(2,0) = SO(2) \tag{4.3.21}$$

Aj v prípade signatúry $(p,q) = (2,0)$ platí, že grupa $\mathrm{Spin}\,(2,0)$ dvojlistovo nakrýva grupu $SO(2)$. Konkrétne, ak uvažujeme prvok $\beta(\phi) = \cos\phi + e^1e^2\sin\phi \in \mathrm{Spin}\,(2,0)$, potom vzťah (2.3.9) dáva maticu $A = R(2\phi)$ (Dodatok A). Jednému obrazu $R(\phi) \in SO(2)$ preto zodpovedajú 2 vzory: $\beta\left(\frac{\phi}{2}\right)$, $\beta\left(\frac{\phi}{2} + \pi\right) \in \mathrm{Spin}\,(2,0)$:

$$\pi\left[\beta\left(\frac{\phi}{2}\right)\right] = R(\phi) \qquad \pi\left[\beta\left(\frac{\phi}{2} + \pi\right)\right] = R(\phi + 2\pi) = R(\phi) \tag{4.3.22}$$

Ešte poznamenajme, že medzi grupami $\mathrm{Spin}\,(2,0)$ a $SO(2)$ nastala situácia, že sú medzi nimi dve význačné zobrazenia: izomorfizmus a dvojlistové nakrytie. Nie je v tom však žiaden matematický spor.

4.4 Diracova rovnica, spinory a gama-matice v rovine

Cliffordova algebra $C(2,0)$ je izomorfná s algebrou reálnych 2×2 štvorcových matíc. Podľa definície z kapitoly 3 sú preto spinory v rovine dvojkomponentné reálne stĺpčeky. Explicitný tvar gama-matíc v rovine je podľa vzťahu (3.2) nasledovný:

$$\gamma^1 = \rho(e^1) = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.4.1}$$

$$\gamma^2 = \rho(e^2) = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.4.2}$$

Teraz môžeme napísať explicitný tvar Diracovho operátora a Diracovej rovnice v rovine. Diracov operátor je:

$$\not{\partial} = \gamma^a \partial_a = \sigma_1 \partial_x + \sigma_3 \partial_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_y \tag{4.4.3}$$

Diracova rovnica:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_y - m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{r}) \\ \psi_2(\vec{r}) \end{pmatrix} = 0, \qquad \psi_1, \psi_2 \in \mathbb{R} \tag{4.4.4}$$

Rotačná invariantnosť rovnice si vyžaduje, aby sa stĺpček $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ transformoval pomocou spinorovej reprezentácie grupy $SO(2)$. Nás však zaujíma, ako sa transformuje celé spinorové pole (spinor definovaný v každom bode roviny). Táto transformácia vyzerá podľa [4] tak, že ide o súčasné miešanie komponent pomocou sinorovej reprezetácie a rotáciu argumentu. To znamená, že ak prejdeme k otočenému stavu o uhol ϕ, spinorové pole sa transformuje nasledovne:

$$\psi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{r}) \\ \psi_2(\vec{r}) \end{pmatrix} \to \psi^{'}(\vec{r}) = \hat{\rho}[R(\phi)]\psi[R(-\phi)\vec{r}] \tag{4.4.5}$$

Ako sme uviedli, reprezentácia $\hat{\rho}$ je dvojznačná. Pre vzory, ktoré nakrývajú rotačnú maticu $R(\phi)$ máme dve možnosti:

$$\pi^{-1}[R(\phi)] = \begin{cases} \beta\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ \beta\left(\frac{\phi}{2} + \pi\right) \end{cases} \tag{4.4.6}$$

Potom s využitím izomorfizmu $\mathrm{Spin}\,(2,0) = SO(2)$ a vzťahu (4.4.6) dostaneme pre reprezentáciu $\hat{\rho}$:

$$\hat{\rho}[R(\phi)] = \rho[\pi^{-1}[R(\phi)]] = \begin{cases} \rho\left[\beta\left(\frac{\phi}{2}\right)\right] = R\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ \rho\left[\beta\left(\frac{\phi}{2}+\pi\right)\right] = R\left(\frac{\phi}{2}+\pi\right) \end{cases} \tag{4.4.7}$$

Tu priamo vidíme spomínanú nejednoznačnosť, pretože máme na výber až dva spôsoby, ako sa môže spinor transformovať. Rozdiel v týchto transformáciach je v tom, že jedna otočí spinor o uhol π viac ako druhá. To znamená, že tieto dva možné spinory sa líšia iba komplexnou fázou $e^{i\pi} = -1$. Avšak pri počítaní merateľných fyzikálnych veličín vstupuje spinor ψ, (podobne ako vlnová funkcia) do vzťahov "kvadraticky"(t.j. vstupuje tam spinor, aj spinor hremitovsky združený), kde na fáze $e^{i\pi}$ nezáleží. Inak povedané, spinory:

$$\psi' = R\left(\frac{\phi}{2}\right)\psi \tag{4.4.8}$$

$$\psi'' = R\left(\frac{\phi}{2}+\pi\right)\psi = -\psi' \tag{4.4.9}$$

opisujú ten istý fyzikálny stav.

S podobnou nejednoznačnosťou sme sa už stretli v trojrozmernom euklidovskom prietore na predmete Kvantová teória (1). Tam sme určili, že vlastné spinory odpovedajúce operátorom priemetu spinu do osi $\vec{n}$, prislúchajúce vlastným hodnotám $\frac{\hbar}{2}$ resp. $-\frac{\hbar}{2}$ sú [3]:

$$s_1(\phi,\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\phi}{2}}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{resp.} \qquad s_2(\phi,\theta) = \begin{pmatrix} -e^{-i\frac{\phi}{2}}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\phi}{2}}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{4.4.10}$$

kde θ, ϕ sú uhly vo sférických súradniciach.

Os $\vec{n}$ tu charakterizuje natočenie fyzikálneho systému. Natočenie systému je identické pre dvojicu uhlov (ϕ,θ) aj pre dvojicu $(\phi+2\pi,\theta)$, no vlastné spinory nie sú identické, líšia sa fázou. Ako príklad si uvedieme spinor s_1:

$$s_1(\phi,\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\phi}{2}}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{4.4.11}$$

$$s_1(\phi+2\pi,\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi+2\pi}{2}}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\phi+2\pi}{2}}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}}e^{-i\pi}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\phi}{2}}e^{i\pi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\phi}{2}}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{4.4.12}$$

$$= -s_1(\phi,\theta) \tag{4.4.13}$$

Ale ako sme už uviedli, a na Kvantovej teórii už mnoho krát počuli: na fáze nezáleží (ale na relatívnej fáze už áno).

Záver

V práci sme poskytli úvod do teórie Cliffordových algebier a uviedli sme ich jednoduchú aplikáciu – popis Diracovej rovnice v euklidovskej rovine.

Uviedli sme, aké algebraické štruktúry vo všeobecnosti Cliffordove algebry sú a ako ich vieme formálne dostať faktorizáciou kovariantnej tenzorovej algbry. Ďalej sme zistili, že istá podmnožina prvkov Cliffordovej algebry tvorí aj grupu. Tá sa nazýva $\mathrm{Pin}\,(p,q)$ a jej podgrupa $\mathrm{Spin}\,(p,q)$. O týchto grupách sme ukázali, že úzko súvisia s ortoganálnymi grupami, a to tak, že ich dvojlistovo nakrývajú. Následne sme sa dopracovali k výsledku, že reprezentácie bázových prvkov istého podpriestoru Cliffordovej algebry nám poskytujú gama-matice, ktoré majú dôležitú úlohu v Diracovej rovnici. Reprezentácie grupy $\mathrm{Spin}\,(p,q)$ nám zasa poskytujú transformácie spinorov potrebné na to, aby bola rovnica invariantná (relativisticky, alebo rotačne).

V ďalšej časti práce sme spočítali podrobnosti o Cliffordovej algebre a grupách v euklidovskej rovine. Vyšlo nám, že platia izomorfizmy: $C(2,0) = \mathbb{R}(2)$, $\mathrm{Pin}\,(2,0) = O(2)$ a $\mathrm{Spin}\,(2,0) = SO(2)$. S využitím týchto vedomostí sme už ľahko vedeli napísať explicitný tvar Diracovej rovnice, a tiež sme zistili, ako sa majú spinory transformovať pri rotáciách v rovine

Dúfame, že táto práca poskytla úvod a inšpirovala čitateľa k ďalšiemu skúmaniu teórie Cliffordových algebier.

Dodatok A – Izomorfizmy Cliffordových algebier

A.1 Izomorfizmus $C(2,0) = \mathbb{R}(2)$

Tvrdíme, že pre Cliffordovu algebru $C(2,0)$ platí izomorfizmus:

$$C(2,0) = \mathbb{R}(2) \tag{A.1.1}$$

Dôkaz začneme tým, že si ukážeme, že za bázu E v $\mathbb{R}(2)$ možno zvoliť prvky:

$$E = \{\mathbb{I}, \sigma_1, \sigma_3, -i\sigma_2\} \tag{A.1.2}$$

kde σ_i $i = 1, 2, 3$ sú Pauliho matice. Všeobecný prvok $v \in \mathbb{R}(2)$ má tvar:

$$v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R} \tag{A.1.3}$$

Podľa nami navrhovanej bázy E má všeobecný prvok $\tilde{v} \in \mathbb{R}(2)$ tvar:

$$\tilde{v} = \alpha\mathbb{I} + \beta\sigma_1 + \gamma\sigma_3 - \delta i\sigma_2 \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \tag{A.1.4}$$

$$\tilde{v} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \gamma & \beta - \delta \\ \beta + \delta & \alpha - \gamma \end{pmatrix} \tag{A.1.5}$$

Ak sa pýtame, či E je skutočne báza, tak otázka znie, či možno všeobecný prvok $v \in \mathbb{R}(2)$ zapísať ako lineárnu kombináciu prvkov bázy E, teda či je možné zvoliť koeficienty $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tak, aby platilo:

$$v = \tilde{v} \tag{A.1.6}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \gamma & \beta - \delta \\ \beta + \delta & \alpha - \gamma \end{pmatrix} \tag{A.1.7}$$

Táto rovnosť matíc je ekvivalentná štyrom rovniciam pre koeficienty $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$a = \alpha + \gamma \tag{A.1.8}$$

$$b = \beta - \delta \tag{A.1.9}$$

$$c = \beta + \delta \tag{A.1.10}$$

$$d = \alpha - \gamma \tag{A.1.11}$$

Ide o sústavu štyroch rovníc o štyroch neznámych, jej riešenie je nasledovné:

$$\alpha = \frac{a+d}{2} \tag{A.1.12}$$
$$\beta = \frac{c+b}{2} \tag{A.1.13}$$
$$\gamma = \frac{a-d}{2} \tag{A.1.14}$$
$$\delta = \frac{c-b}{2} \tag{A.1.15}$$

Týmto sme ukázali, že E skutočne tvorí bázu v $\mathbb{R}(2)$.

Uvažujme teraz zobrazenie χ zadefinované na báze nasledovne:

$$\chi : C(2,0) \to \mathbb{R}(2) : \tag{A.1.16}$$
$$\chi(1) = \mathbb{I} \tag{A.1.17}$$
$$\chi(e^1) = \sigma_1 \tag{A.1.18}$$
$$\chi(e^2) = \sigma_3 \tag{A.1.19}$$
$$\chi(e^1e^2) = \sigma_1\sigma_3 = -i\sigma_2 \tag{A.1.20}$$

Zobrazenie sa na všeobecný prvok dodefinuje lineárne pomocou rozkladu do bázy, t.j.:

$$\begin{aligned}\chi(u) = \chi(a + be^1 + ce^2 + de^1e^2) &= a\chi(1) + b\chi(e^1) + c\chi(e^2) + d\chi(e^1e^2) \\ &= a\mathbb{I} + b\sigma_1 + c\sigma_3 - di\sigma_2\end{aligned} \tag{A.1.21}$$

Ukážeme si, že zobrazenie χ je izomorfizmus. To že ide o bijekciu vyplýva z toho, že uvažované algebry $C(2,0)$ a $\mathbb{R}(2)$ majú rovnaký rozmer a existuje aj inverzné zobrazenie. Skutočne, obrátením vzťahu (A.1.21) máme:

$$\chi^{-1} : \mathbb{R}(2) \to C(2,0) \tag{A.1.22}$$
$$\chi^{-1}(a\mathbb{I} + b\sigma_1 + c\sigma_2 - di\sigma_2) = a + be^1 + ce^2 + de^1e^2 \tag{A.1.23}$$

Ešte treba ukázať, že χ je homomorfizmus, t.j. že platí:

$$\chi(uu') = \chi(u)\chi(u') \qquad u, u' \in C(2,0) \tag{A.1.24}$$

Začnime počítať:

$$u = a + be^1 + ce^2 + de^1e^2 \qquad u' = a' + b'e^1 + c'e^2 + d'e^1e^2 \tag{A.1.25}$$

$$uu' = (a + be^1 + ce^2 + de^1e^2)(a' + b'e^1 + c'e^2 + d'e^1e^2) \tag{A.1.26}$$

$$= (aa' + bb' + cc' - dd') + (ab' + ba' + dc' - cd')e^1 \tag{A.1.27}$$

$$+ (ac' + bd' + ca' - db')e^2 + (ad' + bc' + da' - cb')e^1e^2 \tag{A.1.28}$$

Pri výpočte sme využili Ciffordov súčin v algebre $C(2,0)$ ($g^{ab} = \delta^{ab}$):

$$e^1e^1 = 1 \qquad e^2e^2 = 1 \qquad e^2e^1 = -e^1e^2 \tag{A.1.29}$$

Pre $\chi(uu')$ platí:

$$\chi(uu') = (aa' + bb' + cc' - dd')\mathbb{I} + (ab' + ba' + dc' - cd')\sigma_1 \tag{A.1.30}$$

$$+(ac' + bd' + ca' - db')\sigma_3 - (ad' + bc' + da' - cb')i\sigma_2$$

Nasleduje pravá strana rovnice (A.1.24):

$$\chi(u) = a\mathbb{I} + b\sigma_1 + c\sigma_3 - di\sigma_2 \qquad \chi(u') = a'\mathbb{I} + b'\sigma_1 + c'\sigma_3 - d'i\sigma_2 \tag{A.1.31}$$

$$\chi(u)\chi(u') = (a\mathbb{I} + b\sigma_1 + c\sigma_3 - di\sigma_2)(a'\mathbb{I} + b'\sigma_1 + c'\sigma_3 - d'i\sigma_2) \tag{A.1.32}$$

$$= (aa' + bb' + cc' - dd')\mathbb{I} + (ab' + ba' + dc' - cd')\sigma_1$$

$$+(ac' + bd' + ca' - db')\sigma_3 - (ad' + bc' + da' - cb')i\sigma_2$$

Pri výpočte sme použili vzťahy pre Pauliho matice:

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\mathbb{I} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{A.1.33}$$

Porovnaním vzťahov (A.1.30) a (A.1.32) vidíme, že platí:

$$\chi(uu') = \chi(u)\chi(u') \tag{A.1.34}$$

Splnenie vzťahu (A.1.34) spolu s faktom že χ je bijekcia nám dáva, že χ je izomorfizmus. Výsledne môžeme písať:

$$C(2,0) = \mathbb{R}(2) \tag{A.1.35}$$

A.2 Izomorfizmus $C(1,1) = \mathbb{R}(2)$

Pre Cliffordovu algebru $C(1,1)$ ukážeme, že platí (podobne ako v prípade $C(2,0)$, no pomocou odlišného izomorfizmu):

$$C(1,1) = \mathbb{R}(2) \tag{A.2.1}$$

Na začiatok si ukážeme, že aj prvky:

$$\mathcal{E} = \{\mathbb{I}, \sigma_1, i\sigma_2, -\sigma_3\} \tag{A.2.2}$$

tvoria bázu v $\mathbb{R}(2)$.

V prípade $C(2,0)$ sme ukázali (Dodatok A), že za bázu v $\mathbb{R}(2)$ možno zobrať $E = \{\mathbb{I}, \sigma_1, \sigma_3, -i\sigma_2\}$. Pre všeobecný bázový prvok priestoru platí, že ako ho nahradíme jeho nenulovým násobkom z poľa, nad ktorým je priestor definovaný, tak aj tento nový prvok bude bázový (jedniná vec, ktorá sa môže pokaziť je ortonormovanosť bázy.). Preto ak v báze E spravíme zámenu:

$$-i\sigma_2 \leftrightarrow i\sigma_2 \qquad\qquad \sigma_3 \leftrightarrow -\sigma_3 \tag{A.2.3}$$

dostaneme z množiny E množinu $\mathcal{E}$, čo znamená že aj $\mathcal{E}$ je báza v $\mathbb{R}(2)$.

Teraz skonštruujeme zobrazenie κ definované na báze:

$$\kappa : C(1,1) \to \mathbb{R}(2) \tag{A.2.4}$$

$$\kappa(1) = \mathbb{I} \tag{A.2.5}$$

$$\kappa(e^1) = \sigma_1 \tag{A.2.6}$$

$$\kappa(e^2) = i\sigma_2 \tag{A.2.7}$$

$$\kappa(e^1e^2) = \sigma_1 i\sigma_2 = -\sigma_3 \tag{A.2.8}$$

Pre všeobecný prvok $v \in C(1,1)$ je zobrazenie κ lineárnym rozšírením:

$$\kappa(v) = \kappa(a + be^1 + ce^2 + de^1e^2) = a\kappa(1) + b\kappa(e^1) + c\kappa(e^2) + d\kappa(e^1e^2) = \tag{A.2.9}$$

$$= a\mathbb{I} + b\sigma_1 + ic\sigma_2 - d\sigma_3 \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R} \tag{A.2.10}$$

Automaticky vieme skonštruovať aj inverzné zobrazenie:

$$\kappa^{-1} : \mathbb{R}(2) \to C(1,1) \tag{A.2.11}$$

$$\kappa^{-1}(a\mathbb{I} + b\sigma_1 + ic\sigma_2 - d\sigma_3) = a + be^1 + ce^2 + de^1e^2 \tag{A.2.12}$$

Pretože algebry $C(1,1)$ a $\mathbb{R}(2)$ majú rovnaký rozmer a existuje inverzné zobrazenie, κ je bijekcia.

Teraz ukážeme, κ zachováva štruktúru násobenia:

$$\kappa(vv') = \kappa(v)\kappa(v') \qquad\qquad v, v' \in C(1,1) \tag{A.2.13}$$

Začneme s výpočtom výrazu vv'. Pri tomto výpočte budeme potrebovať vedieť, ako konkrétne vyzerá Cliffordov súčin. Metrický tenzor má signatúru $(1,-1)$, preto Cliffordov súčin vyzerá nasledovne:

$$e^1e^1 = 1 \qquad\qquad e^2e^2 = -1 \qquad\qquad e^2e^1 = -e^1e^2 \tag{A.2.14}$$

Násobok dvoch všeobecných prvkov je:

$$\begin{aligned} vv' &= (a + be^1 + ce^2 + de^1e^2)(a' + b'e^1 + c'e^2 + d'e^1e^2) \\ &= (aa' + bb' + dd' - cc') + (ab' + ba' + cd' - dc')e^1 \\ &+ (ac' + bd' + ca' - db')e^2 + (ad' + bc' + da' - cb')e^1e^2 \end{aligned} \tag{A.2.15}$$

Po zobrazení zobrazením κ dostaneme:

$$\begin{aligned} \kappa(vv') &= (aa' + bb' + dd' - cc')\mathbb{I} + (ab' + ba' + cd' - dc')\sigma_1 \\ &+ (ac' + bd' + ca' - db')(i\sigma_2) + (ad' + bc' + da' - cb')(-\sigma_3) \end{aligned} \tag{A.2.16}$$

Výrazy $\kappa(v)$ a $\kappa(v')$ majú tvar:

$$\kappa(v) = a\mathbb{I} + b\sigma_1 + c(i\sigma_2) + d(-\sigma_3) \qquad \kappa(v') = a'\mathbb{I} + b'\sigma_1 + c'(i\sigma_2) + d'(-\sigma_3) \tag{A.2.17}$$

Pri výpočte výrazu $\kappa(v)\kappa(v')$ opäť využijeme vzťah pre Pauliho matice (A.1.33):

$$\begin{aligned} \kappa(v)\kappa(v') &= [a\mathbb{I} + b\sigma_1 + c(i\sigma_2) + d(-\sigma_3)][a'\mathbb{I} + b'\sigma_1 + c'(i\sigma_2) + d'(-\sigma_3)] \\ &= (aa' + bb' + dd' - cc')\mathbb{I} + (ab' + ba' + cd' - dc')\sigma_1 \\ &+ (ac' + bd' + ca' - db')i\sigma_2 + (ad' + bc' + da' - cb')(-\sigma_3) \end{aligned} \tag{A.2.18}$$

Výrazy (B.16) a (B.18) sa rovnajú:

$$\kappa(vv') = \kappa(v)\kappa(v') \tag{A.2.19}$$

Spolu s faktom, že κ je bijekcia, máme, že κ je izomorfizmus:

$$C(1,1) = \mathbb{R}(2) \tag{A.2.20}$$

A.3 Izomorfizmus $C(0,2) = \mathbb{H}$

V algebre $C(0,2)$ má Cliffordov súčin tvar:

$$e^1e^1 = -1 \qquad e^2e^2 = -1 \qquad e^2e^1 = -e^1e^2 \tag{A.3.1}$$

Bázove prvky e^1 a e^2 sa pri násobení správajú akoby imaginárne jednotky ($i^2 = -1$), t.j. ich násobok samých so sebou je rovný -1. To platí aj pre bázový prvok e^1e^2:

$$(e^1e^2)(e^1e^2) = -e^1(e^2e^2)e^1 = -e^1(-1)e^1 = -1 \tag{A.3.2}$$

Máme teda štyri bázové prvky: jednotku, a tri prvky ktoré sa správajú ako imaginárne jednotky. Avšak presne takéto bázové prvky má aj algebra kvaterniónov (Dodatok H). Skonštrujme preto zobrazenie definované na báze a lineárne rozšírené na všeobecný prvok:

$$\omega : C(0,2) \to \mathbb{H} \tag{A.3.3}$$

$$\omega(1) = 1 \tag{A.3.4}$$

$$\omega(e^1) = i \tag{A.3.5}$$

$$\omega(e^2) = j \tag{A.3.6}$$

$$\omega(e^1e^2) = k \tag{A.3.7}$$

Na všeobecnom prvku $w = a + be^1 + ce^2 + de^1e^2 \in C(0,2),\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$ funguje zobrazenie ω nasledovne:

$$\omega(w) = \omega(a + be^1 + ce^2 + de^1e^2) = a\omega(1) + b\omega(e^1) + c\omega(e^2) + d\omega(e^1e^2) \tag{A.3.8}$$

$$= a + bi + cj + dk \tag{A.3.9}$$

Inverzné zobrazenie je:

$$\omega^{-1} : \mathbb{H} \to C(0,2) \tag{A.3.10}$$

$$\omega^{-1}(a + bi + cj + dk) = a + be^1 + ce^2 + de^1e^2 \tag{A.3.11}$$

Pretože obe algebry majú rovnaký rozmer, a existuje inverzné zobrazenie, ide o bijekciu.

Ak zavedieme označenie:

$$i = e_1 \qquad j = e_2 \qquad k = e_3 \tag{A.3.12}$$

tak algebra kvaterniónov $\mathbb{H}$ je definovaná tak, že jej bázové prvky spĺňajú vzťah:

$$e_a e_b = -\delta_{ab} + \epsilon_{abc} e_c \qquad a, b = 1, 2, 3 \tag{A.3.13}$$

Ak ešte označíme $e^1 e^2 = e^3$, môžeme zapísať zobrazenie ω v kompaktnej forme:

$$\omega : C(0, 2) \to \mathbb{H} \qquad \omega(e^a) = e_a \qquad \omega(1) = 1 \tag{A.3.14}$$

Aby bolo ω izomorfizmus, musí platiť:

$$e^a e^b = -\delta^{ab} + \epsilon_{abc} e^c \qquad a, b = 1, 2, 3 \tag{A.3.15}$$

Vzťah (A.3.15) je ω^{-1} obrazom vzťahu (A.3.13). Poďme overiť, že tento vzťah platí. Začneme násobením rovnakých bázových prvkov:

$$e^a e^a = -1 = -\delta^{aa} + \epsilon_{aac} e^c \qquad a, c = 1, 2, 3 \tag{A.3.16}$$

Vzťah (A.3.16) uvažujeme bez použitia sumečnej konvencie. Ďalej zmiešané súčiny:

$$e^1 e^2 = e^3 = -\delta_{12} + \epsilon_{123} e^3 \tag{A.3.17}$$

$$e^2 e^1 = -e^1 e^2 = -e^3 = -\delta_{21} + \epsilon_{213} e^3 \tag{A.3.18}$$

$$e^1 e^3 = e^1(e^1 e^2) = -e^2 = -\delta_{13} + \epsilon_{132} e^2 \tag{A.3.19}$$

$$e^3 e^1 = e^1 e^2 e^1 = -e^2 e^1 e^1 = e^2 = -\delta_{31} + \epsilon_{312} e^2 \tag{A.3.20}$$

$$e^2 e^3 = e^2(e^1 e^2) = -e^1 e^2 e^2 = e^1 = -\delta_{23} + \epsilon_{231} e^1 \tag{A.3.21}$$

$$e^3 e^2 = (e^1 e^2) e^2 = -e^1 = -\delta_{32} + \epsilon_{321} e^1 \tag{A.3.22}$$

Ukázali sme, že násobenie v $C(0, 2)$ spĺňa vzťah (A.3.15) a preto možno algebru $C(0, 2)$ stotožniť sa algebrou kvaterniónov $\mathbb{H}$:

$$C(0, 2) = \mathbb{H} \tag{A.3.23}$$

A.4 Izomorfizmus $\mathrm{Pin}\,(2, 0) = O(2)$ a $\mathrm{Spin}\,(2, 0) = SO(2)$

Ako sme uviedli v hlavnej časti textu, grupa $\mathrm{Pin}\,(2, 0)$ je izomorfná grupe $O(2)$ a grupa $\mathrm{Spin}\,(2, 0)$ grupe $SO(2)$. V tejto časti sa pozrieme na podrobnosti o týchto grupách, aj o izomorfizme, ktorý medzi nimi funguje. Začnime grupou $\mathrm{Pin}\,(2, 0)$.

Všeobecný prvok $u \in \mathrm{Pin}\,(2,0)$ má tvar konečného súčinu prvkov $\alpha_j \in C^1(2,0)$ normovaných na jednotku:

$$u = \alpha_1 \dots \alpha_k \qquad g(\alpha_j, \alpha_j) = 1 \qquad j = 1, \dots, k, \qquad g^{ab} = \delta^{ab} \tag{A.4.1}$$

Prvok α_j budeme uvažovať vo všeobecnom tvare:

$$\alpha_j = ae^1 + be^2 \qquad a, b \in \mathbb{R} \tag{A.4.2}$$

Prvok α_j však musí byť normovaný, čo nám dá podmienku pre koeficienty a, b:

$$g(\alpha_j, \alpha_j) = g(ae^1 + be^2, ae^1 + be^2) = a^2 g(e^1, e^1) + abg(e^1, e^2) + bag(e^2, e^1) + b^2 g(e^2, e^2) \tag{A.4.3}$$

$$= a^2 g_{11} + abg_{12} + bag_{21} + b^2 g_{22} = a^2 + b^2 \stackrel{!}{=} 1 \tag{A.4.4}$$

Z tejto podmienky vyplýva, že koeficienty a, b a teda aj prvok α_j môžeme parametrizovať uhlom $\phi \in \mathbb{R}$:

$$a = \cos\phi \qquad b = \sin\phi \qquad \alpha_j \equiv \alpha(\phi) = e^1 \cos\phi + e^2 \sin\phi \tag{A.4.5}$$

Už vieme, ako vyzerá jeden typ prvku z grupy $\mathrm{Pin}\,(2,0)$. Nás však zaujíma, ako vyzerá všeobecný prvok, ktorý je súčinom prvkov $\alpha(\phi)$ pre rôzne hodnoty ϕ. Začnime súčinom dvoch prvkov:

$$\alpha(\phi)\alpha(\psi) = (e^1 \cos\phi + e^2 \sin\phi)(e^1 \cos\psi + e^2 \cos\psi) \tag{A.4.6}$$

$$= \cos\phi \sin\psi + e^1 e^2 \cos\phi \sin\psi + e^2 e^1 \sin\phi \cos\psi + \sin\phi \sin\psi \tag{A.4.7}$$

$$= \cos(\psi - \phi) + e^1 e^2 \sin(\psi - \phi) \equiv \beta(\psi - \phi) \tag{A.4.8}$$

V poslednom kroku sme zaviedli označenie:

$$\beta(\phi) = \cos\phi + e^1 e^2 \sin\phi \tag{A.4.9}$$

Nasleduje $\alpha(\phi)\beta(\psi)$:

$$\alpha(\phi)\beta(\psi) = (e^1 \cos\phi + e^2 \sin\phi)(\cos\psi + e^1 e^2 \sin\psi) \tag{A.4.10}$$

$$= e^1 \cos\phi \cos\psi + e^1 e^1 e^2 \cos\phi \sin\psi + e^2 \sin\phi \cos\psi + e^2 e^1 e^2 \sin\phi \sin\psi \tag{A.4.11}$$

$$= e^1(\cos\phi \cos\psi - \sin\phi \sin\psi) + e^2(\cos\phi \sin\psi + \sin\phi \cos\psi) \tag{A.4.12}$$

$$= e^1 \cos(\phi + \psi) + e^2 \sin(\phi + \psi) = \alpha(\phi + \psi) \tag{A.4.13}$$

Ďalej $\beta(\phi)\alpha(\psi)$:

$$\beta(\phi)\alpha(\psi) = (\cos\phi + e^1e^2\sin\phi)(e^1\cos\psi + e^2\sin\psi) \tag{A.4.14}$$

$$= e^1(\cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\psi) + e^2(\cos\phi\sin\psi - \sin\phi\cos\psi) \tag{A.4.15}$$

$$= e^1\cos(\psi-\phi) + e^2\sin(\psi-\phi) = \alpha(\psi-\phi) \tag{A.4.16}$$

Nakoniec $\beta(\phi)\beta(\psi)$:

$$\beta(\phi)\beta(\psi) = (\cos\phi + e^1e^2\sin\phi)(\cos\psi + e^1e^2\sin\psi) \tag{A.4.17}$$

$$= \cos\phi\cos\psi + e^1e^2\cos\phi\sin\psi + e^1e^2\sin\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi \tag{A.4.18}$$

$$= \cos(\phi+\psi) + e^1e^2\sin(\phi+\psi) = \beta(\phi+\psi) \tag{A.4.19}$$

Z predchádzajúcich výpočtov vyplýva, že v grupe $\mathrm{Pin}\,(2,0)$ existujú iba dva typy prvkov: $\alpha(\phi)$ a $\beta(\phi)$

1. Ak násobíme párny počet prvkov typu α (nech ich je $2k, k \in \mathbb{N}$), súčin každých dvoch susedných prvkov dá prvok typu β a ich posupné násobenie dá prvok typu β:

$$u_{(2k)} = \underbrace{\alpha_1\alpha_2}_{\beta_1}\dots\underbrace{\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}}_{\beta_k} = \beta_1\beta_2\dots\beta_k = \beta_{12}\dots\beta_k = \beta_{(1\dots k)} \tag{A.4.20}$$

2. Ak násobíme nepárny počet (nech ich je $2k+1$), vynásobenie prvých $2k$ prvkov dá prvok typu β, takže ostane iba násobenie typu $\beta\alpha$, o čom sme ukázali, že je prvok typu α:

$$u_{(2k+1)} = \underbrace{\alpha_1\alpha_2}_{\beta_1}\dots\underbrace{\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}}_{\beta_k}\alpha_{2k+1} = \beta_{1\dots k}\alpha_{2k+1} = \alpha_{(2k+1)} \tag{A.4.21}$$

Bod 1. nám explicitne ukazuje aj to, že podgrupa $\mathrm{Spin}\,(2,0)$ ktorej prvky sú súčinom párneho počtu prvkov typu α je skutočne uzavretá na súčin, pretože násobenie prvkov typu β dá vždy prvok typu β. Táto podgrupa skutočne obsahuje aj jednotku: je to prvok $\beta(0+2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$.

Teraz podrobne preskúmame grupu $O(2)$. Pripomeňme si, že ide o maticovú grupu, ktorej prvky sú matice rozmeru 2×2, ktoré spĺňajú rovnicu:

$$A^TA = \mathbb{I} \qquad\qquad A \in O(2) \tag{A.4.22}$$

Ak pridáme aj požiadavku $\det(A) = 1$, dostávame definíciu pre prvok z grupy $SO(2)$, ktorá je podgrupou grupy $O(2)$:

$$(A')^T A' = \mathbb{I} \qquad \det(A') = 1 \qquad A' \in SO(2) \tag{A.4.23}$$

Nech všeobecný prvok $A \in O(2)$ má tvar:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ a, b, c, d \in \mathbb{R} \tag{A.4.24}$$

Definičný vzťah dáva:

$$A^T A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{A.4.25}$$

Koeficienty a, b, c, d musia spĺňať rovnice:

$$a^2 + c^2 = 1 \tag{A.4.26}$$

$$b^2 + d^2 = 1 \tag{A.4.27}$$

$$ab + cd = 0 \tag{A.4.28}$$

Po ich vyriešení dostávame 4 možné tvary matice A:

$$A_{(1)} = \begin{pmatrix} a & -\sqrt{1-a^2} \\ \sqrt{1-a^2} & a \end{pmatrix}, \ \det A_{(1)} = 1 \tag{A.4.29}$$

$$A_{(2)} = \begin{pmatrix} a & \sqrt{1-a^2} \\ -\sqrt{1-a^2} & a \end{pmatrix}, \ \det A_{(2)} = 1 \tag{A.4.30}$$

$$A_{(3)} = \begin{pmatrix} a & -\sqrt{1-a^2} \\ -\sqrt{1-a^2} & -a \end{pmatrix}, \ \det A_{(3)} = -1 \tag{A.4.31}$$

$$A_{(4)} = \begin{pmatrix} a & \sqrt{1-a^2} \\ \sqrt{1-a^2} & -a \end{pmatrix}, \ \det A_{(4)} = -1 \tag{A.4.32}$$

Ak zavedieme parametrizáciu uhlom $\phi \in \mathbb{R} : a = \cos\phi$, matice majú tvar:

$$A_{(1)} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \tag{A.4.33}$$

$$A_{(2)} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \tag{A.4.34}$$

$$A_{(3)} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ -\sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \tag{A.4.35}$$

$$A_{(4)} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \tag{A.4.36}$$

V skutočnosti majú matice A iba 2 tvary, pretože matice typu $A_{(2)}$ a $A_{(4)}$ dostaneme z matíc typu $A_{(1)}$ a $A_{(3)}$ voľbou uhla $\phi = -\psi$:

$$A_{(1)}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \overset{\phi=-\psi}{=} \begin{pmatrix} \cos(-\psi) & -\sin(-\psi) \\ \sin(-\psi) & \cos(-\psi) \end{pmatrix} \tag{A.4.37}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} = A_{(2)}(\psi) \tag{A.4.38}$$

$$A_{(3)}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ -\sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \overset{\phi=-\psi}{=} \begin{pmatrix} \cos(-\psi) & -\sin(-\psi) \\ -\sin(-\psi) & -\cos(-\psi) \end{pmatrix} \tag{A.4.39}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ \sin\psi & -\cos\psi \end{pmatrix} = A_{(4)}(\psi) \tag{A.4.40}$$

Matice typu $A_{(1)}(\phi)$, pre ktoré platí $\det A = 1$ tvoria podgrupu $SO(2)$.

Teraz sa pozrieme, aké zobrazenia reprezentujú tieto matice v rovine $\mathbb{R}^2$. Ukážeme si to na báze:

$$A_{(1)}(\phi)e_1 = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} \tag{A.4.41}$$

$$A_{(1)}(\phi)e_2 = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} \tag{A.4.42}$$

Vidíme že matica $A_{(1)}(\phi)$ otáča vektory $u \in \mathbb{R}^2$ o uhol ϕ okolo počiatku, preto ju budeme nazývať rotačná matica, a budeme ju značiť $R(\phi)$:

$$A_{(1)}(\phi) \equiv R(\phi) \tag{A.4.43}$$

Maticu $A_{(3)}(\phi)$ vieme zapísať nasledovne:

$$A_{(3)}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ -\sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.4.44}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(-\phi) & -\sin(-\phi) \\ \sin(-\phi) & \cos(-\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = R(-\phi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.4.45}$$

Matica $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ pôsobí na vektor $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tak, že necháva x-ovú zložku vektora nezmenenú, a zložku y obracia na $(-y)$. Geometricky to znamená zrkadlenie podľa osi danej vektorom e_1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \tag{A.4.46}$$

Zistili sme, že matica $A_{(3)}(\phi)$ pôsobí na vektor $u \in \mathbb{R}^2$ tak, že ho najskôr zozrkadlí podľa osi danej vektorom e_1, a potom otočí o uhol $(-\phi)$ okolo počiatku. Ďalej budeme pre matice $A_{(3)}(\phi)$ používať označenie:

$$A_{(3)}(\phi) \equiv Z(\phi) \tag{A.4.47}$$

Teraz preskúmame, ako dopadne násobenie matíc $R(\phi)$ a $Z(\phi)$. Začneme násobením dvoch matíc $Z(\phi)$, $Z(\psi)$:

$$Z(\phi)Z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ -\sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ -\sin\psi & -\cos\psi \end{pmatrix} \tag{A.4.48}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\psi & -\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\cos\psi \\ -\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\psi & \sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\psi \end{pmatrix} \tag{A.4.49}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\psi-\phi) & -\sin(\psi-\phi) \\ \sin(\psi-\phi) & \cos(\psi-\phi) \end{pmatrix} = R(\psi-\phi) \tag{A.4.50}$$

Tento výsledok nám hovorí, že zloženie dvoch zobrazení, ktoré sú (zrkadlenie+rotácia) dáva čistú rotáciu.

Súčin $Z(\phi)R(\psi)$ vyzerá nasledovne:

$$Z(\phi)R(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ -\sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \tag{A.4.51}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi & -\cos\phi\sin\psi - \sin\phi\cos\psi \\ -\sin\phi\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \sin\phi\sin\psi - \cos\phi\cos\psi \end{pmatrix} \tag{A.4.52}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\phi+\psi) & -\sin(\phi+\psi) \\ -\sin(\phi+\psi) & -\cos(\phi+\psi) \end{pmatrix} = Z(\phi+\psi) \tag{A.4.53}$$

Ak teda zložíme zobrazenia (zrkadlenie+rotácia)(rotácia), teda v hre je nepárny počet zrkadlení, výsledkom je (zrkadlenie+rotácia).

Ďalej nasleduje $R(\phi)Z(\psi)$:

$$R(\phi)Z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ -\sin\psi & -\cos\psi \end{pmatrix} \tag{A.4.54}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\psi & -\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\cos\psi \\ \sin\phi\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & -\sin\phi\sin\psi - \cos\phi\cos\psi \end{pmatrix} \tag{A.4.55}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\psi-\phi) & -\sin(\psi-\phi) \\ -\sin(\psi-\phi) & -\cos(\psi-\phi) \end{pmatrix} = Z(\psi-\phi) \tag{A.4.56}$$

Ešte vypočítajme súčin $R(\phi)R(\psi)$:

$$R(\phi)R(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \tag{A.4.57}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi & -\cos\phi\sin\psi - \sin\phi\cos\psi \\ \sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\psi & -\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\psi \end{pmatrix} \tag{A.4.58}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\phi+\psi) & -\sin(\phi+\psi) \\ \sin(\phi+\psi) & \cos(\phi+\psi) \end{pmatrix} = R(\phi+\psi) \tag{A.4.59}$$

Posledným výpočtom sme ukázali, že zloženie dovch rotácií je rotácia, čo sme vedeli už dávno. Zároveň sme ukázali, že podgrupa $SO(2)$ je skutočne uzavretá na súčin. Keď už máme vyšetrené, ako vyzerá násobenie v grupe $O(2)$, všimnime si, že násobenie v grupe

$\mathrm{Pin}\,(2,0)$ vyzerá veľmi podobne:

$$\mathrm{Pin}\,(2,0) : \alpha(\phi)\alpha(\psi) = \beta(\psi - \phi) \qquad \alpha(\phi)\beta(\psi) = \alpha(\phi + \psi) \qquad \beta(\phi)\beta(\psi) = \beta(\phi + \psi) \tag{A.4.60}$$

$$O(2) : Z(\phi)Z(\psi) = R(\psi - \phi) \quad Z(\phi)R(\psi) = Z(\phi + \psi) \quad R(\phi)R(\psi) = R(\phi + \psi) \tag{A.4.61}$$

Preto skonštruujme zobrazenie:

$$\tau : \mathrm{Pin}\,(2,0) \to O(2) \tag{A.4.62}$$

$$\tau[\alpha(\phi)] = Z(\phi) \tag{A.4.63}$$

$$\tau[\beta(\phi)] = R(\phi) \tag{A.4.64}$$

Zobrazenie τ je homomorfizmus:

$$\tau[\alpha(\phi)\alpha(\psi)] = \tau[\beta(\psi - \phi)] = R(\psi - \phi) = Z(\phi)Z(\psi) = \tau[\alpha(\phi)]\tau[\alpha(\psi)] \tag{A.4.65}$$

$$\tau[\alpha(\phi)\beta(\psi)] = \tau[\alpha(\phi + \psi)] = Z(\phi + \psi) = Z(\phi)R(\psi) = \tau[\alpha(\phi)]\tau[\beta(\psi)] \tag{A.4.66}$$

$$\tau[\beta(\phi)\alpha(\psi)] = \tau[\alpha(\psi - \phi)] = Z(\psi - \phi) = R(\phi)Z(\psi) = \tau[\beta(\phi)]\tau[\alpha(\psi)] \tag{A.4.67}$$

$$\tau[\beta(\phi)\beta(\psi)] = \tau[\beta(\phi + \psi)] = R(\phi + \psi) = R(\phi)R(\psi) = \tau[\beta(\phi)]\tau[\beta(\psi)] \tag{A.4.68}$$

Obrazom tohto zobrazenia je celé $O(2)$, pretože každý prvok $Z(\phi), R(\psi) \in O(2)$ vieme dostať zobrazením vhodného prvku $\alpha(\phi), \beta(\psi) \in \mathrm{Pin}\,(2,0)$:

$$Im(\tau) = O(2) \tag{A.4.69}$$

Do jadra zobrazenia τ patria tie prvky, ktoré sa zobrazia na jednotkovú maticu $\mathbb{I} = R(2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$: to je neutrálny prvok grupy $O(2)$. Na túto maticu sa zobrazí prvok $\beta(2k\pi)$, pretože $\tau[\beta(2k\pi)] = R(2k\pi) = R(0)$. Takže jadro zobrazenia τ obsahuje iba jeden prvok:

$$Ker(\tau) = \beta(0) = \cos 0 + e^1 e^2 \sin 0 = 1 \tag{A.4.70}$$

Ukázali sme, že τ je homomorfizmus, a zároveň bijekcia, čo znamená, že ide o izomorfizmus:

$$\mathrm{Pin}\,(2,0) = O(2) \tag{A.4.71}$$

Zúženie zobrazenia τ na podgupu $\mathrm{Spin}\,(2,0)$:

$$\tau|_{\mathrm{Spin}\,(2,0)} : \mathrm{Spin}\,(2,0) \to SO(2) \tag{A.4.72}$$

$$\tau|_{\mathrm{Spin}\,(2,0)}[\beta(\phi)] = R(\phi) \tag{A.4.73}$$

dáva aj izomorfizmus medzi grupami $\mathrm{Spin}\,(2,0)$ a $SO(2)$.

A.5 Nakrytie $\mathrm{Spin}\,(2,0) \to SO(2)$

Pozrime sa ešte, ako konkrétne vyzerá dvojlistové nakrytie medzi grupami $\mathrm{Spin}\,(2,0)$ a $SO(2)$. Vzťah (2.3.9) pre $u = \beta(\phi)$ dáva:

$$ue^1u^{-1} = \beta(\phi)e^1[\beta(\phi)]^{-1} = (\cos\phi + e^1e^2\sin\phi)e^1(\cos\phi - e^1e^2\sin\phi) \tag{A.5.1}$$

$$= e^1(\cos^2\phi - \sin^2\phi) - e^2(2\cos\phi\sin\phi) = e^1\cos 2\phi - e^2\sin 2\phi = (A^{-1})^1_b e^b \tag{A.5.2}$$

$$ue^2u^{-1} = \beta(\phi)e^2[\beta(\phi)]^{-1} = (\cos\phi + e^1e^2\sin\phi)e^1(\cos\phi - e^1e^2\sin\phi) \tag{A.5.3}$$

$$= e^1(2\cos\phi\sin\phi) + e^2(\cos^2\phi - \sin^2\phi) = e^1\sin 2\phi + e^2\cos 2\phi = (A^{-1})^2_b e^b \tag{A.5.4}$$

Z toho máme:

$$(A^{-1})^1_1 = \cos 2\phi \qquad (A^{-1})^2_1 = \sin 2\phi \tag{A.5.5}$$

$$(A^{-1})^1_2 = -\sin 2\phi \qquad (A^{-1})^2_2 = \cos 2\phi \tag{A.5.6}$$

Teraz vieme napísať maticu A^{-1} a z nej dostaneme maticu A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ -\sin 2\phi & \cos 2\phi \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \cos 2\phi & -\sin 2\phi \\ \sin 2\phi & \cos 2\phi \end{pmatrix} = R(2\phi) \tag{A.5.7}$$

Dodatok B – Používané štruktúry

B.6 Lineárne priestory

Priamy súčet dvoch lineárnych priestorov V, W (uvažujeme nad $\mathbb{R}$, prípadne nad $\mathbb{C}$) označujeme $V \oplus W$. Aj $V \oplus W$ je lineárny priestor, ktorého prvkami sú usporiadané dvojice $(v, w),\ v \in V,\ w \in W$. Lineárna kombinácia je daná po zložkách:

$$(v, w) + \lambda(v', w') = (v + \lambda v', w + \lambda w') \qquad v, v' \in V \qquad w, w' \in W \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \mathbb{C} \tag{B.1.1}$$

Ak máme dva vektorové priestory V, W vieme z nich urobiť aj ďalší priestor: ich tenzorový súčin $V \otimes W$. Ide o priestor bilineárnych zobrazení $V^* \times W^* \to \mathbb{R}$. Špeciálny element tohto priestoru má tvar $v \otimes w$ a platí:

$$(v \otimes w)(a, b) = \langle a, v\rangle \langle b, w\rangle \qquad v \in V,\ w \in W \qquad a \in V^*,\ b \in W^* \tag{B.1.2}$$

Všeobecný element je lineárnou kombináciou takýchto špeciálnych.

Uvažujme teraz iba jeden lineárny priestor V a jeho podpriestor $W \subset V$. Vo V môžeme zaviesť ekvivalenciu:

$$\hat{v} \sim v \Leftrightarrow \hat{v} = v + w \qquad w \in W,\ v \in V \tag{B.1.3}$$

Triedy ekvivalencie $[v]$ taktiež tvoria lineárny priestor. Nazýva sa faktorpriestor a označuje sa V/W. Lineárna štruktúra vo faktorpriestore je zavedená pomocou reprezentantov ($[v_1] + \lambda[v_2] = [v_1 + \lambda v_2]$), no je od reprezentantov nezávislá- aj keď zvolíme iných reprezentantov, dostaneme rovnaký výsledok. Výsledný faktorpriestor má rozmer $\dim(V) - \dim(W)$.

B.7 Asociatívne algebry

Algebra $\mathcal{A}$ vznikne z lineárneho priestoru tým, že sa doň pridá ďalšia binárna operácia $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ (násobenie), ktoré je bilineárna:

$$a, b \to ab \qquad a, b, ab \in \mathcal{A} \tag{B.2.1}$$

$$a(b + \lambda c) = ab + \lambda ac \qquad (b + \lambda c)a = ba + \lambda ca \tag{B.2.2}$$

Existuje viacero typov algebier. Vo fyzike sme sa doteraz stretli s unitálnymi algebrami (obsahujú jednotku), asociatívnymi či Lieovými algebrami. V tomto dodatku sa budeme venovať práve asociatívnym algebrám.

O asociatívnej algebre hovoríme, ak v nej je asociatívne násobenie, t.j. ak platí:

$$a(bc) = (ab)c = abc \qquad a, b, c \in \mathcal{A} \tag{B.2.3}$$

Jednou z mnohých asociatívnych alegebier je úplná maticová algebra $\mathbb{R}(n)$ všetkých reálnych štvorcových matíc rozmeru $n \times n$ s bežným maticovým násobením.

Reálne čísla $\mathbb{R}$, komplexné čisla $\mathbb{C}$ a kvaternióny $\mathbb{H}$ taktiež tvoria algebry nad $\mathbb{R}$.

Algebra komplexných čísiel $\mathbb{C}$ má rozmer 2. Bázu tvoria vektory $(1, i)$, $ii = -1$.

Algebra kvaterniónov $\mathbb{H}$ má rozmer 4. Báza v $\mathbb{H}$ je $(1, e_1 = i, e_2 = j, e_3 = k)$. Táto algebra je definovaná násobením bázových prvkov:

$$e_a e_b = -\delta_{ab} + \epsilon_{abc} e_c \qquad a = 1, 2, 3 \tag{B.2.4}$$

Tento vzťah vraví, že že vektory e_a sa vlastne správajú ako tri imaginárne jednotky.

Podalgebra $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ je podpriestor, ktorý je uzavretý aj voči násobeniu. Špeciálnou podalgebrou je ideál $\mathcal{I}$. Ideál je taká podalgebra, pre ktorú platí, že násobenie ľubovoľného prvku $a \in \mathcal{A}$ ľubovoľným prvkom $i \in \mathcal{I}$ dá výsledok už v $\mathcal{I}$. Ideál môže byť ľavý ($ia = i' \in \mathcal{I}$), pravý ($ai = i'' \in \mathcal{I}$) a obojstranný- ľavý a pravý zároveň.

Ak máme v algebre $\mathcal{A}$ podpriestor, vieme vytvoriť faktorpriestor. Avšak ak máme v algebre $\mathcal{A}$ obojstranný ideál $\mathcal{I}$, faktorpriestor $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ je dokonca algebra- faktoralgebra. Násobenie sa vo faktoralgebre zavádza pomocou reprezentantov ($[a][b] := [ab]$), no je od reprezentantov nezávilé.

B.8 Cliffordove grupy $\mathrm{Pin}\,(p, q)$

V tomto odstavci si ukážeme, že konečné súčiny prvkov $\alpha_j \in C^1(p, q)$ normované na jednotku skutočne tvoria grupu:

$$u = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \in \mathrm{Pin}\,(p, q) \qquad g(\alpha_j, \alpha_j) = \pm 1,\ j = 1, \dots, k \tag{B.3.1}$$

1. Uzavretosť voči súčinu:

$$u = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \qquad v = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_l \qquad u, v \in \mathrm{Pin}\,(p, q) \tag{B.3.2}$$

$$uv = \alpha_1 \dots \alpha_k \beta_1 \dots \beta_l \in \mathrm{Pin}\,(p, q) \qquad g(\alpha_j, \alpha_j) = \pm 1 \qquad g(\beta_j, \beta_j) = \pm 1 \tag{B.3.3}$$

   Povedané slovne: súčin dvoch prvkov z grupy $\mathrm{Pin}\,(p, q)$ je tiež konečný súčin prvkov typu α a teda patrí do grupy.

2. Inverzný prvok:

$$g(\alpha,\alpha) = g(\alpha_a e^a, \alpha_b e^b) = \alpha_a\alpha_b g(e^a, e^b) = \alpha_a\alpha_b g^{ab} = \alpha_a\alpha_b\frac{1}{2}(e^a e^b + e^b e^a) \tag{B.3.4}$$

$$= \frac{1}{2}\alpha_a\alpha_b e^a e^b + \frac{1}{2}\underbrace{\alpha_a\alpha_b e^b e^a}_{\alpha_b\alpha_a e^b e^a = \alpha_a\alpha_b e^a e^b} = \alpha_a\alpha_b e^a e^b = \alpha_a e^a \alpha_b e^b = \alpha\alpha = \pm 1 \tag{B.3.5}$$

$$\Rightarrow \alpha^{-1} = \pm\alpha \tag{B.3.6}$$

Výpočet ukazuje, že inverzný prvok k prvku α je vďaka normovaniu samotné α, alebo $-\alpha$. Z toho vyplýva:

$$(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k)^{-1} = \pm\alpha_k\ldots\alpha_2\alpha_1 \tag{B.3.7}$$

Takže ku každému prvku existuje inverzný prvok.

3. Neutrálny prvok $e = 1$:

$$1u = u1 = u \qquad \forall u \in \mathrm{Pin}\,(p,q) \tag{B.3.8}$$

Jednotka je neutrálny prvok. Tento prvok vieme získať ako súčin ľubovoľného prvku z grupy, a jeho inverzného.

B.9 Tenzorová a Cliffordova algebra

Všetky tenzory spolu tvoria ∞-rozmernú asociatívnu algebru, nazývanú tenzorová algebra $T(L)$. Ako lineárny priestor to je priamy súčet všetkých priestorov $T^p_q(L)$:

$$T(L) = \bigoplus_{\substack{r=0\\ s=0}}^{\infty} T^r_s(L) \tag{B.4.1}$$

Násobenie $\otimes$ je lineárnym rozšírením pre $\otimes$ na homogénnych členoch (členoch s fixným $\binom{p}{q}$), t.j.:

$$\underbrace{(k+v+\alpha+\ldots)}_{\in T(L)} \otimes \underbrace{(q+w+\beta+\ldots)}_{\in T(L)} = k\otimes q + k\otimes w + \cdots + v\otimes q + v\otimes w + \cdots \tag{B.4.2}$$

Uvažujme teraz čisto kovariantnú tanzorovú algebru $T_{(.)}(L)$:

$$T_{(.)}(L) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} T^0_r(L) \tag{B.4.3}$$

Z tejto algebry dostaneme Cliffordovu algebru faktorizáciou podľa vhodného obojstranného ideálu J generovaného prvkami tvaru:

$$\alpha \otimes \alpha - g(\alpha, \alpha) \qquad \alpha \in L^*,\ g(\alpha, \alpha) = g^{ab}\alpha_a\alpha_b \tag{B.4.4}$$

To znamená, že ideál J tvoria všetky tie prvky, ktoré sú súčtom členov:

$$t_1 \otimes (\alpha \otimes \alpha - g(\alpha, \alpha)) \otimes t_2 \qquad t_1, t_2 \in T_{(.)}(L), \alpha \in L^* \tag{B.4.5}$$

Ten istý ideál je generovaný aj prvkami tvaru:

$$\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha - 2g(\alpha, \beta) \qquad \alpha, \beta \in L^* \tag{B.4.6}$$

Skutočne, ak v tvare (B.4.4) zvolíme $\alpha = \beta + \gamma,\ \beta, \gamma \in L^*$, máme:

$$\underbrace{\alpha \otimes \alpha - g(\alpha, \alpha)}_{\in J} = (\beta + \gamma) \otimes (\beta + \gamma) - g(\beta + \gamma, \beta + \gamma) \tag{B.4.7}$$

$$= \underbrace{\beta \otimes \beta - g(\beta, \beta)}_{\in J} + \underbrace{\gamma \otimes \gamma - g(\gamma, \gamma)}_{\in J} + (\beta \otimes \gamma + \gamma \otimes \beta - 2g(\beta, \gamma)) \tag{B.4.8}$$

To znamená, že aj výraz $\beta \otimes \gamma + \gamma \otimes \beta - 2g(\beta, \gamma)$ musí patriť do ideálu J.

Na druhej strane, ak v tvare (B.4.6) zvolíme $\beta = \alpha$, máme priamo tvar (B.4.4).

Jednoduchým výpočtom si ukážeme, že trieda ekvivalencie prvku z ideálu sa vo faktoralgebre správa ako nula:

$$[t] + [j] = [t + j] = [t] \ \Rightarrow [j] = 0 \qquad j \in J \tag{B.4.9}$$

Súčin vo faktoralgebre $T_{(.)}(L)/J$ je indukovaný súčinom z pôvodnej algebry:

$$[t \otimes u] = [t][u] \tag{B.4.10}$$

Pozrime sa, ako vyzerá nula v $T_{(.)}(L)/J$:

$$[t \otimes (\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha - 2g(\alpha, \beta)) \otimes u] = [t][\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha - 2g(\alpha, \beta)][u] = 0 \tag{B.4.11}$$

$$\Rightarrow [\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha - 2g(\alpha, \beta)] = 0 \tag{B.4.12}$$

$$[\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha - 2g(\alpha, \beta)] = [\alpha_a e^a \otimes \beta_b e^b + \beta_b e^b \otimes \alpha_a e^a - 2\alpha_a\beta_b g^{ab}] \tag{B.4.13}$$

$$= \alpha_a\beta_b[e^a \otimes e^b + e^b \otimes e^a - 2g^{ab}] = 0 \tag{B.4.14}$$

$$[e^a \otimes e^b + e^b \otimes e^a - 2g^{ab}] = [e^a][e^b] + [e^b][e^a] - 2g^{ab}[1] = 0 \tag{B.4.15}$$

Vzťah (E.12) napísaný bez zátvoriek označujúcich triedy ekvivalencie nazývame Cliffordov súčin:

$$e^a e^b - e^b e^a - 2g^{ab} = 0 \tag{B.4.16}$$

Dodatok C – Často používané pojmy

Grupa – Grupa je množina s binárnou operáciou ktorú nazývame násobenie, pričom toto násobenie je asociatívne, a vzhľadom na toto násobenie existuje neutrálny prvok. Ku každému prvku v grupe musí existovať inverzný prvok, a táto množina musí byť vzhľadom na násobenie uzavretá- ak do grupy patria nejaké dva prvky, tak do nej patrí aj ich súčin.

Ortognlne grupy – Ortognálna grupa $O(p,q)$ je maticová grupa, ktorej prvky spĺňajú vzťah:

$$A^T \eta A = \eta \qquad A \in O(p,q) \tag{C.1}$$

kde η je metrický tenzor so signatúrou (p,q). Tieto matice reprezetujú zobrazenia, vektorového priestoru V samého do seba, ktoré zachovávajú skalárny súčin:

$$\eta(Av, Aw) = \eta(v, w) \qquad v, w, Av, Aw \in V \tag{C.2}$$

Homomorfizmus – Homomorfizmus h dvoch algebier $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, resp. grúp G, G' je zobrazenie, ktoré rešpektuje štruktúru (sčítanie, násobenie) daných algebier, resp. grúp v zmysle:

$$h(ab) = h(a)h(b) \qquad h(a + \lambda b) = h(a) + \lambda h(b) \tag{C.3}$$

$$a, b \in \mathcal{A} \text{ resp. } G \qquad h(a), h(b) \in \mathcal{A}' \text{ resp. } G' \tag{C.4}$$

Podmienka pre zachovanie sčítania (druhý výraz (C.3)) je požadovaná iba v prípade homomorfizmu algebier, pretože grupy nemajú štruktúru sčítania.

Izomorfizmus – Izomorfizmus je bijektívny homomorfizmus.

Dvojlistov nakrytie – Dvojlistové nakrytie je surjektívny homomorfizmus, ktorého jadro obsahuje práve dva prvky.

Reprezentcia – Reprezentácia ρ algebry A je zobrazenie, ktoré každému prvku algebry a priradí lineárny operátor $\rho(a)$ (lineárne zobrazenie vektorového priestoru samého do seba) v určitom vektorovom priestore V. Toto zobrazenie zároveň rešpektuje aj štruktúru algebry – jej operácie sčítania a násobenia, a to nasledovne:

$$\rho(a + \lambda b) = \rho(a) + \lambda \rho(b) \qquad \rho(ab) = \rho(a)\rho(b) \quad a, b \in A \tag{C.5}$$

$$\rho(a)(v + \lambda' w) = \rho(a)(v) + \lambda' \rho(a)(w) \qquad v, w \in V \quad \rho(a)(v), \rho(a)(w) \in V \tag{C.6}$$

Pre grupu je repreznetácia definovaná podobne, ale požaduje sa kompatibilita iba so štruktúrou násobenia.

Metrick tenzor – Špeciálnym, a vo fyzike veľmi dôležitým tenzorom je metrický tenzor. Pomocou neho vieme dvom vektorom priradiť číslo- ich skalárny súčin, a tiež vieme vektorom a krivkám priradiť dĺžku. Metrický tenzor (metrika) je symetrický nedegenerovaný tenzor typu $\binom{0}{2}$:

$$[g(v,w) = g(w,v)] \Leftrightarrow [g_{ab} = g_{ba}] \qquad \text{symetričnosť} \tag{C.7}$$

$$[(g(v,w) = 0\ \forall w) \Rightarrow v = 0] \Leftrightarrow [\det(g_{ab}) \neq 0] \qquad \text{nedegenerovanosť} \tag{C.8}$$

Výberom vhodnej bázy e_a sa dá matica zložiek metrického tenzora previesť na kanonický tvar:

$$g_{ab} = \eta_{ab} = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{p}\underbrace{-1,\ldots,-1}_{q}) \qquad g = g_{ab}e^a \otimes e^b \tag{C.9}$$

kde $p + q = n = \dim(L)$ V takomto prípade hovoríme o metrickom tenzore signatúry (p,q).

Tenzor nazvaný kometrický tenzor (kometrika) je tenzor typu $\binom{2}{0}$, t.j $g^{-1} \in T^2_0$. Je definovaný tak, že jeho komponenty sú prvky inverznej matice k matici g_{ab}, t. j.:

$$g^{-1} = g^{ab}e_a \otimes e_b \qquad g^{ab}g_{bc} = \delta^a_c \tag{C.10}$$

Zoznam použitej literatúry

[1] Chris Doran, Anthony Lasenby: *Geometric algebra for Physicists*, Cambridge University Press, 2007

[2] Dirac P. A. M.: *The quantum theory of the electron*, Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, Volume 117, Issue 778, 1928, dostupné na internete: https://royalsocietypublishing.org/doi/epdf/10.1098/rspa.1928.0023

[3] Ján Pišút, Ladislav Gomolčák, Vladimír Černý: *Úvod do kvantovej mechaniky*, Alfa, 1983

[4] Marián Fecko: *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov*, Iris, 2018

[5] Pavol Zlatoš: *Lineárna algebra a geometria: Cesta z troch rozmerov s presahmi do príbuzných oborov*, Albert Marenčin, 2011

[6] Thomas Friedrich: *Dirac operators in Riemannian Geometry*, American Mathematical Society, 2000

[7] Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Kleinova–Gordonova rovnice [online]