Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Ekonomická analógia pre kalibračné polia

Bakalárska práca

2023
Marián Lukáč

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Ekonomická analógia pre kalibračné polia

Bakalárska práca

Študijný program:	Fyzika
Študijný odbor:	Fyzika
Školiace pracovisko:	Katedra teoretickej fyziky
Školiteľ:	doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.

Bratislava, 2023
Marián Lukáč

81517601

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta:	Marián Lukáč
Študijný program:	fyzika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor:	fyzika
Typ záverečnej práce:	bakalárska
Jazyk záverečnej práce:	slovenský
Sekundárny jazyk:	anglický

Názov: Ekonomická analógia pre kalibračné polia
An economic analogy for gauge fields

Anotácia: Juan Maldacena z IAS v Princetone nepatrí medzi teoretických fyzikov, ktorých treba nejako zvlášť predstavovať. Jeho článok o tzv. AdS/CFT korešpondencii (Maldacenovej dualite) patrí medzi najcitovanejšie články fyziky vysokých energií všetkých čias (prekonal aj článok Stevena Weinberga , ktorý mu vyniesol Nobelovu cenu za Štandardný model). Píšu sa o tom celé populárne knihy. O to viac prekvapuje, keď takýto človek napísal v r.2014 článok zrozumiteľný študentom fyziky na bakalárskej úrovni - práve jeho pochopenie a prerozprávanie je témou tejto bakalárskej práce.

Obsahom jeho článku je pozoruhodná analógia medzi ekonómiou (nič zložité: štáty, ktoré používajú rôzne meny a pri ceste do susedného treba ísť do banky a vymeniť si peniaze v kurze, ktorý banka ponúka, na týchto výmenách dokážu špekulanti zarobiť, ...) a myšlienkami, na ktorých stojí moderná fyzika vysokých energií (kalibračné teórie, kovariantné derivácie, Higgsovo pole ...). Je pôvabné vidieť napríklad interpretáciu jednej z „Maxwellových rovníc" ako podmienku nastavenia výmenných kurzov tak, aby špekulanti nevybrali z banky všetky peniaze a podobne.

V práci uvádza aj pôvodný zdroj inšpirácie - článok K.Younga z American Journal of Physics z r.1999. Treba však uznať, že Maldacenova pridaná hodnota je vysoká, jeho článok je jednoduchší a poučnejší a číta sa lepšie.

Cieľ: Pochopiť podstatnú časť myšlienok a prepočítať im príslušné výpočty zo spomínaného Maldacenovho článku z r.2014. Spísať o tom text, z ktorého by to motivovaní spolužiaci pochopili ľahšie, ako z originálu

Literatúra: J.Maldacena: The symmetry and simplicity of the laws of physics and the Higgs boson
arXiv:1410.6753 [physics.pop-ph]

Vedúci:	doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.
Katedra:	FMFI.KTF - Katedra teoretickej fyziky
Vedúci katedry:	doc. RNDr. Tomáš Blažek, PhD.
Dátum zadania:	01.07.2022

Dátum schválenia: 08.08.2022 doc. RNDr. Tomáš Blažek, PhD.

81517601

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

garant študijného programu

....
študent

....
vedúci práce

Poďakovanie: Chcel by som vyjadriť veľkú vďaku môjmu školiteľovi doc. RNDr. Mariánovi Feckovi, PhD. za množstvo venovaného času a odborných rád, bez ktorých by táto práca nemohla vzniknúť. Ďalej by som chcel poďakovať mojim rodičom a súrodencom za všetku podporu, ktorej sa mi dostávalo počas celého doterajšieho štúdia. Osobitná vďaka patrí môjmu dedkovi, ktorého dôvera vo mňa bola a je obrovskou motiváciou.

Abstrakt

Táto práca sa zaoberá analógiou jednej dôležitej oblasti teoretickej fyziky - teórie kalibračných polí - pomocou modelu, ktorý uvažuje zjednodušenú verziu ekonómie a výmeny finančných mien medzi štátmi. V práci sa ukáže, že pri skúmaní takéhoto modelu a jeho symetrií sa dospeje k matematike, ktorá sa vyskytuje napríklad v niektorých kapitolách diferenciálnej geometrie. Zisk z medzinárodného obchodu s peniazmi sa pri istých zjednodušeniach dá asociovať s objektami, ktoré hrajú dôležitú úlohu pri matematickom opise elektromagnetizmu. Medzinárodný obchod so zlatom sa zase dá prirovnať k fundamentálnej časti teórie Štandardného modelu - Higgsovmu bozónu.

Kľúčové slová: kalibračné teórie, kalibračné polia, Higgsov mechanizmus, ekonomický model, symetria

Abstract

This thesis is showing the analogy of one important area of theoretical physics -theory of gauge fields - with the help of a model that assumes simplified version of economics and the exchange of foreign currencies between states. In the thesis, there will be revealed a connection between this model with its symmetries and a mathematics that can be found in some chapters of differential geometry. Profit from the international monetary market can after certain simplifications be associated with objects which play an important role in the mathematical description of electromagnetism. International gold market on the other hand can be compared to one fundamental part of Standard model theory - Higgs boson.

Keywords: gauge theories, gauge fields, Higgs mechanism, economic model, symmetry

Obsah

Zoznam obrázkov

Úvod

Juan Maldacena je teoretický fyzik pochádzajúci z Argentíny, ktorého hlavným zameraním sú oblasti fyziky, akou je napríklad konformná teória poľa. V roku 2014 ale vyšiel jeho článok [5], spísaný na základe jeho popularizačnej prednášky v Ústave pokročilých štúdií (IAS) v Princetone, ktorý rozoberal tému teórie kalibračných polí. V tomto článku ukazuje, že existuje prepojenie medzi kalibračnými teóriami a istým jednoduchým ekonomickým modelom, teda na základe pomerne jednoduchých analógií sa dá priblížiť koncept kalibračných polí. Tento článok je napísaný takým štýlom, že na jeho pochopenie netreba ovládať zložitú matematiku, ktorá je v teoretickej fyzike bezpodmienečnou požiadavkou. Pomocou pomerne ľahko pochopiteľného modelu Juan Maldacena vysvetľuje, ako sa dajú fundamentálne interakcie prírody chápať ako kalibračné teórie. Pôvodný nápad pochádza od profesora z hongkongskej univerzity Kennetha Younga, ktorý túto problematiku pokročilejším spôsobom opísal v článku [6]. Maldacena ide aj ďalej, pomocou ekonómie naznačuje analógiu toho, ako funguje Higgsov mechanizmus, teda pôvod hmotnosti elementárnych častíc.

Cieľom tejto práce bude pozrieť sa bližšie na niektoré časti jeho článku a ukázať koncept kalibračnej symetrie v praxi na základe spomínanej analógie. V počiatočnej kapitole (označenej číslom nula pre zdôraznenie faktu, že ešte nejde o samotné jadro textu, ale skôr o akési rozšírenie úvodu) si prejdeme niekoľko pojmov, s ktorými sa ďalej v texte bude pracovať. Úplné pochopenie týchto pojmov nie je esenciálne, nakoľko niečo také sa ani nedá dosiahnuť na pár stranách. Význam tejto kapitoly spočíva skôr v tom, že ak chceme niektoré zložité koncepty vysvetľovať cez analógie s čímsi jednoduchším, treba predsa len mať aspoň približnú predstavu o tom, v čom sú tieto koncepty také zložité. V ďalšej kapitole si predstavíme ekonomický model Maldacenu, ako aj pravidlá, ktoré budú pre tento model platiť. Následne tento model využijeme na opis elektromagnetizmu ako kalibračnej teórie. Podobne budeme postupovať aj pre slabú a silnú interakciu, avšak pre tieto prípady už model stráca svoju názornosť, takže tieto paragrafy by mali byť chápané len ako niečo navyše - demonštrácia toho, že ak by sme sa veľmi snažili, analógie sa nájsť dajú. Takisto by mal byť braný aj paragraf, v ktorom na modeli ukážeme, čo sú to vlny a prečo model v takejto podobe ešte nie je dostatočný. Tento nedostatok sa pokúsi odstrániť kapitola 2, kde zavedieme nové pravidlo korešpondujúce v teoretickej fyzike Higgsovmu mechanizmu. V záverečnej kapitole 3 sa pozrieme na dôležité časti práce z trochu formálnejšieho matematického hľadiska. Pomocou matematického postupu ukážeme, že model má naozaj istú kalibračnú symetriu, ktorá je veľmi podobná tej, ktorú má napríklad elektromagnetizmus.

Kapitola 0

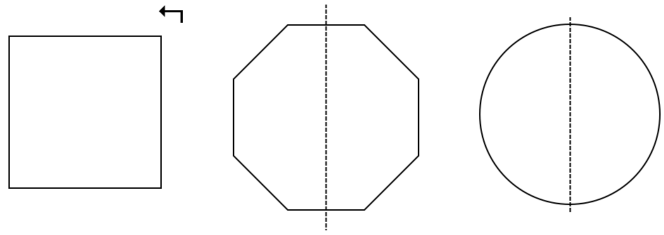
Predprípravy

Predtým, než prejdeme k samotnej téme tejto práce, treba si prejsť a pripomenúť na úvod niekoľko pojmov a urobiť si všeobecný prehľad o tom, s čím sa tu bude pracovať.

0.1 Symetrie

Symetria je široko známy a veľmi intuitívny pojem, avšak na to, aby sme s ním mohli pracovať, je dobré mať tento pojem zrozumiteľne a korektne definovaný. Po takejto dobrej definícii sa môže ukázať, že symetria sa nachádza aj tam, kde by sme ju na prvý pohľad nečakali a ak ju už raz niekde nájdeme, môžeme na tomto náleze ďalej stavať. Ako teda definovať symetriu? Úplne jednoducho – symetria je transformácia, ktorá necháva objekt nezmenený. Uveďme si zopár jednoduchých geometrických príkladov. Štvorec je napríklad symetrický voči rotáciám okolo svojho stredu o 90°. To znamená, že ak podrobíme štvorec rotácii o 90°, výsledkom bude opäť rovnaký štvorec. Zoberme si teraz napríklad pravidelný osemuholník (dopravnú značku STOP, avšak bez týchto štyroch písmen na nej). Takýto objekt bude tiež symetrický voči istým rotáciám, tu sa však pozrime na inú transformáciu, ktorá sa dá spraviť. Konkrétne sa pozrieme na zrkadlenie voči nejakej osi. Náš uvažovaný objekt je symetrický voči zrkadleniu cez ľubovoľnú os spájajúcu dva protiľahlé vrcholy alebo stredy protiľahlých strán. Objektom s veľmi vysokou symetriou je kruh (prípadne jeho zovšeobecnenie do n rozmerov pre ľubovoľné prirodzené číslo n). Kruh je symetrický voči rotácii okolo stredu o ľubovoľný uhol a zároveň voči zrkadleniu cez ľubovoľnú os, ktorá prechádza jeho stredom. Všetky tieto objekty sú pre lepšiu nároznosť zachytené na obrázku 1.

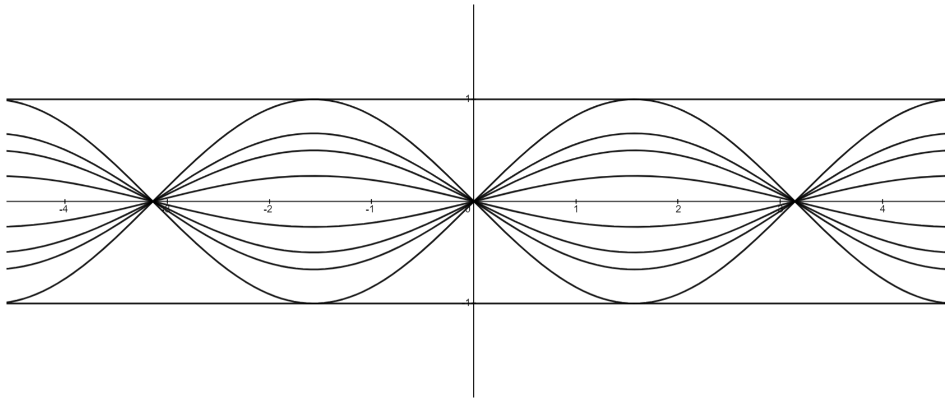
Pozrime sa teraz aj na príklady menej triviálnych symetrií. Ak máme napríklad dvojrozmerný nekonečný Euklidovský priestor, na ktorom je nejaká štruktúra periodická v smere osi x, potom je tento priestor symetrický voči translácii (posunutiu) v smere osi x o ľubovoľný celočíselný násobok tejto periódy. Samozrejme, rovnako dobre môže ísť o periódu v ľubovoľnom smere a k nej prislúchajúcu transláciu pozdĺž osi



Obr. 1: Symetrie v geometrii. Vidíme tri jednoduché príklady objektov symetrických vzhľadom na určitú transformáciu. Ku každému je táto transformácia aj symbolicky zobrazená. Vľavo je štvorec symetrický voči rotáciam o 90°, v strede pravidelný osemuholník so symetriou zrkadlenia a vpravo kruh taktiež so zrkadlením.

určujúcej tento smer. A taktiež sa nemusíme obmedzovať len na dva rozmery, avšak takéto obmedzenie má za následok veľmi jednoduchú názornosť. Jedna takáto periodická štruktúra je na obrázku 2.

Ďalej nahliadnime aj do matematiky a toho, ako sa na symetrie dá pozerať tam. Konkrétne si ukážeme, ako pojem symetrie súvisí s funkciami (jednej premennej – pre jednoduchosť). Zoberme si funkciu $f(x) = 5x^4 + 9x^2 - 3$. Vidíme že zámena $x \to -x$ neovplyvní to, akú hodnotu má funkcia, nakoľko kvadrát a aj každá párna mocnina reálneho čísla je číslo kladné. Takže uvažovaná funkcia je symetrická voči zámene $x \to -x$, inými slovami jej graf je symetrický voči zrkadleniu cez os y (takéto funkcie múdri matematici nazývajú párne). Keby sme si podobne zobrali funkciu $g(x) = cos(x)$, zámena $x \to -x$ funguje rovnako dobre a navyše ešte môžeme spraviť zovšeobecnenie na transformáciu $x \to x + 2\pi k$ pre ľubovoľné $k \in \mathbb{Z}$. Na záver tejto časti sa pozrime, čo všetko sa dá robiť so symetriami. Dodefinujme si tzv. triviálnu (identickú) transformáciu, vzhľadom na ktorú je evidentne hocijaký objekt symetrický. Ľahko vidieť, že ak vykonáme po sebe dve symetrické transformácie na tom istom objekte, výsledkom bude opäť ten istý nezmenený objekt (na uvedených príkladoch je to veľmi jednoducho pozorovateľné). Zároveň je jasné, že ak nejakú konkrétnu symetrickú transformáciu vykonáme „naopak“, ide opäť len o symetriu. Teda ak sa budeme na symetrie pozerať ako na prvky nejakej množiny a na tejto množine definujeme štruktúru násobenia ako skladanie symetrií, to, čo dostaneme, bude tvoriť grupu. Iný zaujímavý pohľad môžeme dostať, ak budeme uvažovať nejaký konkrétny objekt (či to bude geometrický útvar, množina s matematickou štruktúrou alebo kancelárska stolička, na tom teraz



Obr. 2: Symetrické štruktúry. Tu je vyobrazený príklad dvojrozmerného Euklidovského priestoru, na ktorom je periodická štruktúra pozostávajúca z grafov viacerých rôznych variácií funkcie sínus. Ide o jednoduchú štruktúru, vo všeobecnosti by však mohlo ísť o čosi abstraktné.

vôbec nezáleží). Takýto objekt automaticky tvorí jednoprvkovú množinu. Ak si zoberieme symetrie tohto objektu ako jeho zobrazenia na seba, potom máme množinu so špeciálnou štruktúrou, ktorá sa v matematike nazýva kategória a tieto zobrazenia majú oficiálny názov morfizmy. Navyše fakt, že ide o bijektívne (obrátiteľné - ako sa na symetrie patrí) zobrazenia, nám umožňuje hovoriť konkrétnejšie o tzv. grupoide. V tomto paragrafe nešlo ani tak o konkrétne pojmy súvisiace so symetriou, ako skôr o demonštráciu rozsiahlosti tohto pojmu. Vidíme, že so symetriami rôzneho typu sa dá stretnúť všade. Dôležitosť tohto pojmu je absolútne nespochybniteľná. Umožňuje nám na jednej strane mávnutím ruky počítať integrály zo zložitých funkcií, ku ktorým mnohokrát ani neexistuje neurčitý integrál medzi elementárnymi funkciami, a na druhej strane na základe princípov symetrie vieme predpovedať existenciu častíc, z ktorých je zložený náš vesmír a zákony, podľa ktorých sa tieto častice správajú.

0.2 Fundamentálne interakcie

Všetko, čo sa odohráva v našom svete je dôsledkom pôsobenia štyroch síl (interakcií): elektromagnetizmu, slabej interakcie a silnej interakcie, gravitácie. Prvé tri z nich (opísané teóriou Štandardného modelu) sú založené na princípe symetrie, ktorý vo fyzike nazývame kalibračná symetria. Gravitácia je v tomto smere trochu iná. Nieže by sa ako kalibračná teória nedala chápať, ale prinieslo by to so sebou isté špecifiká, na ktoré v prípade ostatných interakcií nenarazíme. S každou interakciou sú asociované častice, ktoré sú „zodpovedné“ za danú interakciu. Občas sa môžeme stretnúť s označením *nosiče interakcie*. Zároveň sú s každou z nich spojené kvantové čísla, teda isté vlastnosti častíc, ktoré určujú, ako sa častice správajú voči pôsobeniu danej interakcie. Povedzme si pár slov o každej z týchto síl.

Začneme s elektromagnetickou. Táto sila pôsobí na všetky elektricky nabité častice. Kvantové číslo, ktoré je priradené k tejto interakcii, je elektrický náboj. Jej nosičom je fotón – častica s nulovým elektrickým nábojom. Vo všeobecnosti vieme každej častici Štandardného modelu priradiť istú antičasticu. Jednou z podmienok tohto priradenia je, že musíme zmeniť elektrický náboj na opačný. Z toho vyplýva, že k fotónu neexistuje iná symetrická antičastica ako fotón samotný. K elektromagnetickej interakcii je priradené elektrické a magnetické pole. Najjednoduchšie je predstaviť si tieto polia ako malé šípky v každom bode priestoru ukazujúce do smeru intenzity týchto polí. Pri takejto predstave elektrické pole pôsobí na nabité častice silou, ktorej smer je v každom bode daný týmito šípkami. Veľkosť tejto sily je daná súčinom náboja častice a intenzity elektrického poľa. Magnetické pole ovplyvňuje len častice, ktoré sú v pohybe a jeho vplyvom je dráha takýchto častíc stáčaná v každom bode kolmo na smer magnetického poľa a zároveň kolmo na smer ich rýchlosti. V špeciálnom prípade homogénneho magnetického poľa sa takto nabitá častica bude pohybovať po kruhovej trajektórii. Elektromagnetické pole teda pôsobí na častice silou (ktorú nazývame Lorentzova):

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B},$$

kde q je náboj danej častice, $\vec{E}$ je intenzita elektrického poľa, $\vec{v}$ je rýchlosť častice a $\vec{B}$ je magnetická indukcia, teda až na konštantu intenzita magnetického poľa. Elektrické a magnetické polia sú navzájom previazané. Ich dynamiku popisujú tzv. Maxwellove rovnice, z ktorých vyplýva, že časový vývoj týchto polí sa musí riadiť vlnovou rovnicou. Takže elektromagnetické pole osciluje a takto sa dokáže presúvať (rýchlosťou c) cez vákuum.

Teraz prejdeme k slabej interakcii (slabej jadrovej sile). Ide o silu zodpovednú za rádioaktívne β-rozpady. So slabou interakciou nemáme bežné každodenné skúsenosti ako s ostatnými silami prírody. Avšak nebyť nej, náš svet by rozhodne nevyzeral tak, ako ho dnes poznáme. Čo sa tým myslí? Slabé jadrové sily sú zodpovedné za syntézu chemických prvkov vo hviezdach. Takže bez nich by sa v našom vesmíre vyskytoval akurát vodík a hélium. Nosičmi slabej interakcie sú tri častice – Z^0, W^+ a W^- bozóny. Náboj W^+ je 1 a náboj W^- je -1 (tento fakt si treba pamätať, ešte s ním budeme pracovať), tieto dva bozóny sú jeden druhému antičasticou. Keďže Z^0 je antičasticou sám sebe, jeho elektrický náboj musí byť (a aj je) nulový. Ak poznáme elektrický náboj, vieme ako sa daná častica správa voči elektromagnetickej interakcii. Aké kvantové čísla však určujú správanie sa častíc v slabej interakcii? Tieto čísla sú dve, ide o slabý hyperspin a slabý hypernáboj. Pre všetky tri nosiče slabej interakcie je prvé z týchto kvantových čísel rovné 1 a druhé 0. Na rozdiel od fotónov, ktorých pokojová hmotnosť je 0, tieto bozóny majú nenulovú pokojovú hmotnosť. A to nie malú – v porovnaní s takým protónom v jadre atómu sú zhruba 90-krát ťažšie (91 v prípade W^+ a W^-, 97 v prípade Z^0). Avšak práve táto obrovská hmotnosť má za následok, že slabá interakcia má veľmi krátky dosah (k tomuto faktu sa ešte vrátime neskôr v jadre textu). Samotné jej nosiče dokážu voľne existovať len zhruba 10^{-25} sekundy. Podobne ako v elektromagnetizme, aj tu máme isté rovnice, ktoré popisujú túto interakciu. Tieto rovnice spájajú elektromagnetizmus a slabé sily do jednej (elektroslabej) teórie, sú však o dosť zložitejšie ako Maxwellove (ide o tzv. Yang-Millsove rovnice).

Treťou a poslednou interakciou, ktorá je zahrnutá v Štandardnom modeli, je silná interakcia (silná jadrová sila). Pomocou nej dokážu vzniknúť viazané stavy protónov a neutrónov, teda jadrá atómov. Túto silu prenášajú častice, ktoré nazývame gluóny. V tomto bode vstupujú do hry nové kvantové čísla – 3 farebné náboje (teda niečo podobné ako v elektromagnetizme, akurát ide o iný typ náboja a nie je iba jeden). Tieto náboje máme v troch rôznych farbách (červená, modrá a zelená) s tým, že ku každej existuje jej antifarebná kamarátka. Gluóny nesú farebný a antifarebný náboj, ktoré sa dajú kombinovať práve toľkými spôsobmi, že dostávame 8 možných gluónov. Avšak samotný fakt, že gluóny sú nabité a tým pádom na seba navzájom pôsobia, má za následok, že silné sily sú krátkodosahové (skutočný dôvod je trochu komplexnejší, avšak jeho pôvod je práve v tomto poznatku), a to napriek nulovej hmotnosti nosičov silnej sily. Fyzika okolo silnej interakcie (kvantová chromodynamika) je rozsiahla a zložitá veda, avšak princíp je jednoduchý – aby nejaký systém mohol existovať, jeho celkový farebný náboj musí byť nulový. Farebne neutrálny systém dokážeme dostať dvomi spôsobmi. Prvý je veľmi intuitívny – akákoľvek farba s príslušnou antifarbou zvonka pôsobí neutrálne. Druhý spôsob tak trochu súvisí s tým, prečo sa tieto kvantové čísla nazývajú práve farby. Ide o akúsi metaforu, ktorou sa autor (Murray Gell-Mann) snažil naznačiť, že podobne ako zložením svetla rôznych frekvencií môžeme dostať biele svetlo, tak aj častice s rôznymi nábojmi sa môžu vyskladať do farebne neutrálneho systému. Čiže ak sa v systéme vyskytuje rovnaký počet červených, modrých a zelených nábojov, efektívny náboj je nulový a systém môže existovať. Je dôležité spomenúť tento princíp, lebo je ním vysvetlené, prečo nemôžeme nájsť kvarky (stavebné jednotky protónov a neutrónov) alebo gluóny ako voľné častice.

Povedzme si zopár viet aj ku gravitačnej sile, ktorá však už nie je súčasťou Štandardného modelu. S touto silou máme asi najrozsiahlejšie skúsenosti, jej prítomnosť cítime vždy a všade, teda ak sme sa práve nerozhodli vycestovať na dovolenku do vesmírnej stanice na obežnej dráhe, kde by sme gravitáciu vôbec necítili (prípadne by ako príklad mohol poslúžiť starý známy padajúci výťah, kde cestujúci necítia efekty gravitačnej sily, nakoľko výťah má rovnaké zrýchlenie ako ľudia v ňom). Na jej opis dokonca pohodlne vystačí do vysokej miery aj klasická fyzika. Gravitácia je silou, ktorá priťahuje hmotné telesá k sebe, avšak nezabúdajme, že aj nehmotné častice cítia efekty gravitácie. Táto sila je v klasickej mechanike popísaná Newtonovym gravitačným zákonom:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r},$$

kde κ je gravitačná konštanta, m_1, m_2 sú hmotnosti telies, ktoré na seba pôsobia a $\vec{r}$ je poloha jedného z telies (predpokladáme, že druhé teleso sa nachádza v bode $\vec{0}$). Z tohto vidíme, že dosah gravitácie je nekonečný. Aj pre gravitačnú silu existuje predpoklad častice, ktorá prenáša túto interakciu. Táto zatiaľ experimentálne nepotvrdená častica dostala názov gravitón. Ak by sa tento predpoklad ukázal správny, gravitón by bol elektricky a farebne neutrálnou nehmotnou časticou. S gravitáciou, ako ju poznáme dnes, nie sú asociované žiadne kvantové čísla ako v prípade ostatných interakcií. Avšak ak by sa niektorá z kvantových teórií gravitácie ukázala byť správnou, potom by mohlo dôjsť k zavedeniu nových kvantových čísel na jej opis.

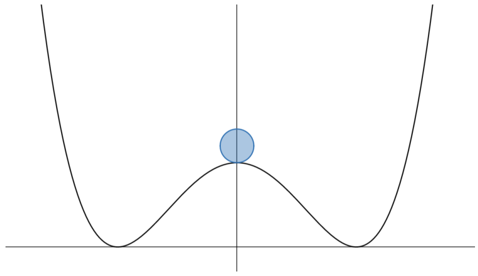
Zhrňme si tie najpodstatnejšie fakty z tejto časti, na ktorých sa ďalej bude stavať. Poznáme štyri fundamentálne interakcie, z ktorých tri majú kalibračnú symetriu. S elektromagnetickou silou je asociovaná jedna častica, ktorá ju prenáša a jedno kvantové číslo, ktoré určuje, ako sa častice správajú pod vplyvom tejto sily. So slabou sú asociované tri nosiče interakcie a 2 kvantové čísla. Silná má 8 nosičov a 3 kvantové čísla.

Poznámka (pre - aspoň miernych - znalcov diferenciálnej geometrie a matematickej fyziky): Povedzme si stručne o symetriách interakcií popísaných Štandardným modelom. K elektromagnetickej je priradená grupa symetrií $U(1)$ reprezentovaná násobením komplexnými číslami s veľkosťou 1, ktorá je jednorozmerná (čo zodpovedá jednému fotónu a jednému elektrickému náboju). Slabá interakcia súvisí s grupou $SU(2)$, ktorá je reprezentovaná násobením špeciálnych unitárnych matíc rozmeru 2×2. Jej dimenzia je 3 (opäť teda vidíme súvislosť s nosičmi interakcie a kvantovými číslami). Silná interakcia má kalibračnú symetriu danú grupou $SU(3)$ (špeciálne unitárne matice 3×3), ktorá je osemrozmerná. Ľudia zbehlí v matematickej fyzike by v tomto bode mali súhlasne prikývnuť.

0.3 Higgsov mechanizmus

Štandardný model obsahuje jednu výnimočnú časticu – Higgsov bozón. K Higgsovmu bozónu je priradené pole jeho pravdepodobnostnej distribúcie v priestore. Častice podliehajúce slabej interakcii majú schopnosť priamo interagovať s Higgsovym poľom. Interakcia s ním im dáva hmotnosť. Tým vznikajú dva typy častíc – hmotné a nehmotné. Medzi hmotné častice radíme všetky fermióny (teda leptóny ako napríklad elektrón a kvarky), tie dokážu interagovať slabo, a zároveň W^+, W^- a Z^0 bozóny, ktoré sú nosičmi tejto interakcie. Do druhej kategórie patria fotóny (žiadne prekvapenie – to, že fotón má nulovú pokojovú hmotnosť, je v podstate bežná vedomosť) a gluóny (teda 8 častíc zodpovedných za silné jadrové sily a za to, že náš svet „drží pokope"). Tieto častice síce neinteragujú priamo s Higgsovym poľom, ale Higgsovo pole aj tak ovplyvňuje

ich správanie. Zoberme si napríklad elektromagnetickú interakciu. Podliehajú jej všetky nabité častice, teda napríklad elektróny. Avšak táto interakcia je sprostredkovaná práve fotónmi, takže, aj keď nepriamo, nehmotné častice sú taktiež istým spôsobom v kontakte s Higgsovym poľom. Podobná úvaha platí aj pre gluóny a silnú interakciu.
Takže keď sa povie „Higgsov mechanizmus“, máme si okamžite predstaviť priradenie hmotnosti istej skupine častíc. Avšak z tohto ešte nevieme, ako tento mechanizmus vlastne funguje. Povedzme si teraz veľmi stručne, o čo vlastne ide (ísť do úplných detailov by si vyžadovalo prejsť veľkou časťou teórie Štandardného modelu elementárnych častíc, avšak to nie je náplňou tejto práce). Základným pojmom je tzv. spontánne narušenie kalibračnej symetrie. Čo to efektívne znamená je, že tvar potenciálu, v ktorom sa Higgsov bozón nachádza, sa zmení. Pôvodne sa jeho minimum nachádzalo v bode, kde bolo Higgsovo pole nulové. Po novom sa minimum vychýli do strán. Potenciál aj naďalej zostane symetrický, avšak už nebude mať jediné globálne minimum, ale celú (nekonečnú) množinu bodov, kde bude mať najmenšiu hodnotu. Všetky tieto body budú mať rovnakú vzdialenosť od stredu. Teda po novom sa Higgsov bozón bude nachádzať „na vrchole kopca“, t.j. v lokálnom maxime potenciálu. Tam sa mu však nebude páčiť, necíti sa tam bezpečne, a tak sa rozhodne radšej premiestniť sa do takej polohy, kde bude cítiť minimálny potenciál. To, čo teraz pozorujeme je, že vákuum (teda stav s minimálnou energiou) už nie je invariantné voči istým symetrickým transformáciám. Konkrétne ide o také transformácie, ktoré zodpovedajú kalibračným bozónom slabej interakcie. Ich hmotnosť sa objaví ako dôsledok interakcie týchto bozónov s Higgsovym poľom, ktoré už nie je homogénne kvôli spontánnemu narušeniu symetrie. Na obrázku 3 je ukázané, ako by zhruba takýto potenciál Higgsovho bozónu mohol vyzerať. Poznamenajme, že odpoveď na otázku, prečo dochádza k spontánnemu narušeniu tohto potenciálu, ešte nebola jednoznačne zodpovedaná. Niektoré teórie tvrdia, že v ranom štádiu vesmíru pri vysokej teplote mal potenciál taký tvar, že jeho minimum sa nachádzalo v strede. Pri ochladení vesmíru sa však tvar potenciálu zdeformoval na taký, aký ho poznáme dnes.
Prípadný záujemca o hlbšie poznanie v oblasti fyziky elementárnych častíc je odporúčaný k populárnej literatúre [1], kde je komplikovaná problematika časticovej fyziky opísaná spôsobom dostupnejším širšiemu publiku, pričom je poskytnutý aj historický kontext.



Obr. 3: Potenciál Higgsovho bozónu. Na tomto obrázku môžme vidieť tvar Higgsovho potenciálu. Gulička v strede reprezentuje Higgsov bozón, ktorý by sa v takomto potenciáli premiestnil do minima vpravo alebo vľavo. Po tomto premiestnení teda celá situácia stratí pôvodnú symetriu.

Kapitola 1

Analógia kalibračných teórií v ekonómii

Kalibračné teórie sú esenciálnou oblasťou teoretickej fyziky, umožňujúcou nové pohľady na to, ako funguje náš svet. Teraz sa pokúsime vysvetliť (alebo aspoň naznačiť), čo sú tieto teórie a ako s nimi vieme narábať. Ide o náročnú tému, ktorej hlboké matematické pochopenie využíva znalosti z diferenciálnej geometrie a sama osebe si vyžaduje pochopenie konceptov ako variety, vektorové polia, diferenciálne formy, konexia, krivosť a mnoho ďalších. Tu však zvolíme iný postup. Namiesto stavania na zložitej matematike sa pozrieme na analógiu s istým jednoduchým ekonomickým modelom. Výsledkom teda prirodzene nebude hlboká znalosť v oblasti kalibračných polí a okamžité pochopenie matematického formalizmu, avšak pri témach na tejto úrovni náročnosti je dobré najprv získať aspoň intuitívnu predstavu o tom, s čím sa chystáme pracovať. Budúci teoretický fyzik je takto potom nielen dobre motivovaný k pravidelnej dochádzke na prednášky z matematickej fyziky, ale už dopredu pozná záver, ku ktorému sa potom dopracuje formálnym spôsobom. Výhodou v tomto postupe je, že ak vieme, čo máme hľadať vo vzorcoch a odvodeniach, často dokážeme vidieť cieľovú rovinku už zo značnej diaľky a neprekvapia nás kroky, ktoré budeme robiť v matematických výpočtoch.

1.1 Ekonomický model

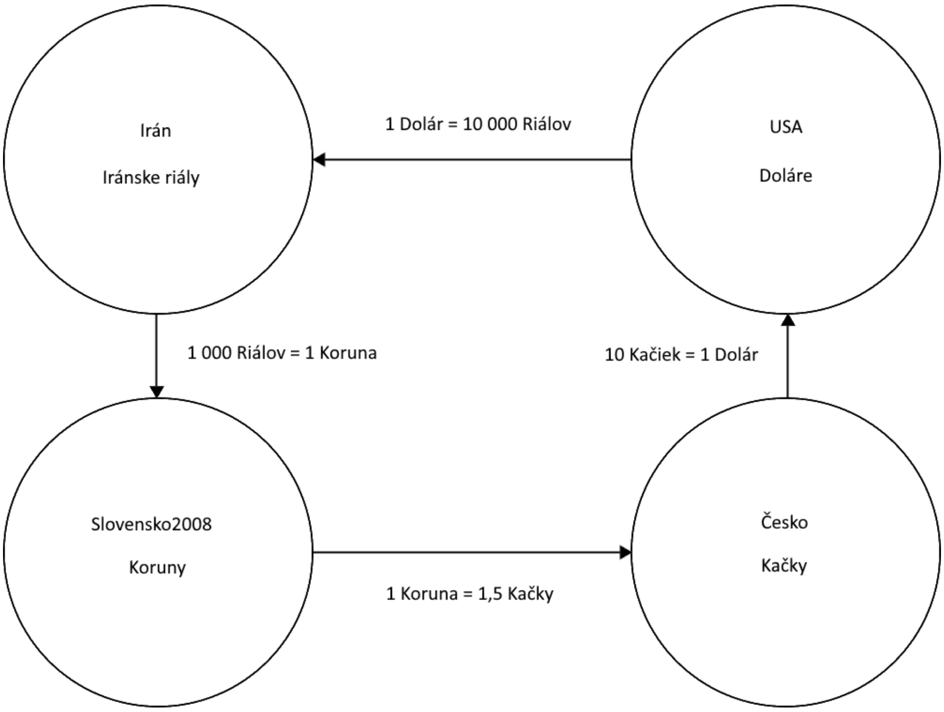
Predstavme si teraz spomínaný ekonomický model, ktorý bude slúžiť na stavanie analógií s kalibračnými teóriami. Majme dvojrozmerný plochý priestor, na ktorom je pravidelná štvorčeková mriežka. V každom bode tejto mriežky (teda na každom prieniku dvoch čiar) bude umiestnený jeden štát, pričom každý štát má svoju vlastnú finančnú menu. Čiary, ktorými sú tieto štáty prepojené, budú reprezentovať mosty, na ktorých sa nachádzajú banky umožňujúce výmenu peňazí podľa stanoveného kurzu. Ak prechádzame z jedného štátu do druhého, musíme si v banke vymeniť všetky peniaze za peniaze štátu, do ktorého smerujeme. Banky sú navzájom nezávislé – kurzy si nastavujú podľa vlastného výberu. Za zmeny peňazí sa neúčtujú žiadne poplatky navyše. Z tohto vidíme, že ak prejdeme z jednej krajiny do druhej a následne sa rozhodneme vrátiť naspäť, náš finančný stav sa nijako nezmení. Ďalej zaveďme podmienku, že z každého štátu smieme prejsť jedine k jeho štyrom susedom (čiže sa pohybujeme len po čiarach našej mriežky). Posledným predpokladom bude, že jediné, čo si môžeme so sebou zobrať pri prechode do nového štátu, sú peniaze (ak sa pokúsime preniesť nejaký iný tovar, hraničná kontrola nám ho zadrží). Neskôr sa pozrieme, čo sa stane, ak od tejto podmienky upustíme.

Takže pravidlá sú jednoduché. Máme štáty rozmiestnené na štvorčekovej mriežke, cestujeme z jedného do druhého a pri každom prechode cez hranice si vymeníme peniaze. Teraz sa v tomto modeli pokúsime nájsť sľubovanú symetriu. Predstavme si, že v niektorej krajine je vysoká inflácia. Ľudia majú na účte milióny jednotiek svojej meny a bežný nákup v potravinách ich stojí rádovo stovky tisícov. Takáto situácia je asi dosť nepraktická pre všetkých obyvateľov daného štátu – s veľkými číslami sa nám ťažko počíta, nevieme dobre odhadovať hodnotu peňazí. Chceli by sme teda, aby sa naša mena ľahšie používala. A riešenie je veľmi jednoduché. Jedného dňa sa miestna vláda rozhodne, že preškáluje svoju menu – zmení jej jednotky. Povedzme teda, že v niektorej krajine majú menu, ktorá obsahuje príliš veľa núl a tamojší premiér rozhodne, že bude vhodné namiesto eur používať koruny, pričom jedna koruna bude mať hodnotu 1000 eur. Takto sa teda efektívne „zbaví“ troch núl v starej mene. Pritom sa samozrejme adekvátne preškálujú ceny v obchodoch a výmenné kurzy. Teda ak sme v starej mene platili v obchode 1000 eur za chlieb, teraz nás bude stáť jednu korunu. A ak sme pri prechode do susedného štátu menili 1500 eur za 1 dolár, teraz budeme meniť 1,5 koruny za jeden dolár. Príkladom takejto redukcie núl bola brazílska zámena jednotiek meny v roku 1994 z cruzeirov na realy, kde zámena bola práve v pomere 1:1000 (teda 1 real = 1000 cruzeirov). Brazília touto zámenou zavŕšila 52-ročnú éru, počas ktorej došlo k redukcii 18 núl v mene. Čo sa však v skutočnosti zmenilo? Objektívne všetko zostalo rovnaké – nikto nezarobil ani nestratil peniaze, neotvorili sa žiadne nové ekonomické možnosti, nezmenila sa hodnota tovaru. Spravili sme túto redukciu len preto, aby sme si „zjednodušili život“. Takže na takúto zámenu sa môžeme pozerať aj ako na kalibračnú symetriu. Symetriu za to, že v súlade s definíciou po transformácii objekty zostali nezmenené a kalibračnú preto, lebo transformujeme jednotky, v ktorých meriame (teda kalibrujeme) hodnotu objektov. Ešte spomeňme, že ide o lokálnu symetriu, nakoľko každý štát môže túto transformáciu vykonať nezávisle od ostatných.

Teraz sa pozrime na „špekulantov“. Týmto názvom budeme označovať obchodníkov (finančníkov, oportunistov), ktorých cieľom je prechádzať medzi jednotlivými štátmi a výmenami peňazí pri prechodoch cez hranice hľadať možný zisk. Na prvý pohľad to znie ako smiešny nápad. Veď ak vycestujeme do nejakej krajiny a vrátime sa naspäť,

pričom v oboch prípadoch urobíme zmenu peňazí, tak nezískame nič. Môžeme byť ešte radi, že v banke sa neplatí nič navyše, lebo inak by sme sa dokonca dostali do straty. Čo sa však stane keď vycestujeme a vrátime sa domov z iného smeru? Teda ak prejdeme po uzavretej slučke podľa našich pravidiel (napríklad spravíme malý štvorcový okruh)? Ukazuje sa, že pri nezávislom nastavení kurzov nielenže dosť pravdepodobne budeme mať či už zisk alebo stratu, ale nájsť okruh, ktorý by nám vrátil pôvodnú sumu môže byť dokonca veľmi náročné. Takže oportunisti si veľmi ľahko prídu na svoje. A ak by sa niektorý okruh ukázal byť stratový, po krátkom zamyslení vidíme, že ak ho prejdeme naopak, budeme na ňom zarábať.
Poznámka (pre znalcov diferenciálnej geometrie a matematickej fyziky): Oportunisti, ktorí zarábajú na výmenách peňazí pozdĺž uzavretého okruhu, zodpovedajú paralelnému prenosu vektorov na varietach. Ak totiž paralelne prenesieme vektor po uzavretej krivke, nie je zaručené, že to, čo na konci dostaneme, bude rovnaký vektor, s akým sme začali. Zoberme si štandardný príklad sféry S^2. Majme napríklad vektor tangenciálneho priestoru viazaného na severný pól, ktorý „pozerá“ v smere nultého poludníka. Pre jednoduchosť môžeme na chvíľu použiť starú dobrú (aj keď nie práve korektnú) predstavu vektora ako šípky. Teraz na tejto sfére zaveďme lineárnu konexiu, ktorá bude definovať paralelný prenos tak, že vektor musí v každom bode sféry zostať dotykový. Spravme nasledovné: vektor prenesieme pozdĺž nultého poludníka až na rovník. Potom sa posunieme o niekoľko poludníkov doprava s tým, že náš vektor smeruje stále k južnému pólu. Teraz sa vráťme naspäť na severný pól. Čo sme takto dostali? Po tomto paralelnom prenose sa „šípka“ reprezentujúca náš vektor pozerá iným smerom ako pôvodná. Takže sme efektívne „zarobili“ (alebo „prerobili“, podľa toho, čo sa definuje ako zisk).

Ukážme si na konkrétnom príklade, ako by mohol takýto oportunista zarábať peniaze ich výmenami v bankách. Povedzme, že niekde v našom nekonečnom dvojrozmernom priestore sa nachádzajú štyri susedné štáty rozmiestnené na vrcholoch štvorca. Pre osobnejší vzťah s príkladom im priraďme aj mená – Slovensko2008 (kde sa bude platiť korunami), Česko (kde sa financie počítajú v kačkách), USA (s finančnou menou dolár) a Irán (kde majú ľudia v peňaženkách „riály“). Tieto názvy nemajú nič spoločné so skutočnými krajinami, čo nás oprávňuje zvoliť si ľubovoľné výmenné kurzy. Nech 1 koruna = 1,5 kačky, 10 kačiek = 1 dolár, 1 dolár = 10 000 riálov a 1000 riálov = 1 koruna. Obrázok 1.1 umožňuje pohľad na to, ako by takáto konfigurácia schématicky vyzerala. Vyberme sa teraz na výlet po takomto okruhu v protismere hodinových ručičiek. Nech začíname s 10 korunami. Najprv za ne teda dostaneme 15 kačiek. Tie v USA vymeníme za 1,5 dolára. S tým prídeme do Iránu, kde nám túto sumu vymenia za 15000 riálov. Keď uzavrieme okruh a vrátime sa na Slovensko2008, na našom účte je odrazu 15 korún. Ak by sme takýto postup zopakovali s ľubovoľnou sumou, vidíme,



Obr. 1.1: Zarábajúci okruh. Tu je zobrazený príklad konfigurácie štyroch štátov s výmennými kurzami, ktorý opakovaným prechádzaním umožňuje finančný zisk. Ziskový faktor je tu 1.5, takže po každom prechode sa množstvo peňazí, ktoré máme znásobí faktorom 1.5.

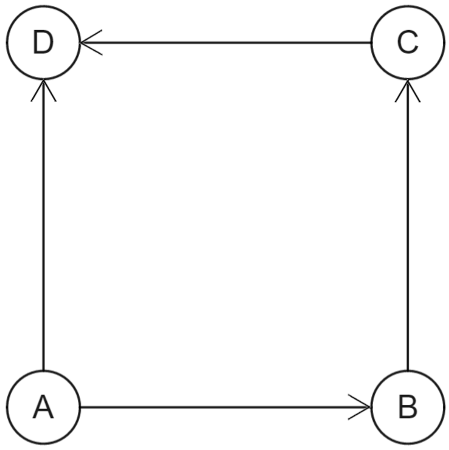
že výsledný zisk by bol 1,5-násobok toho, s čím sme začali (teda budeme hovoriť o ziskovom faktore 1,5 alebo zárobku 50%). Je dobré si uvedomiť, že akákoľvek kalibračná symetria (nastavenie meny v niektorej krajine) neovplyvní náš zisk. Oportunistov nezaujíma aký druh peňazí držia v ruke počas svojho procesu zarábania. Jediné, na čo sa pozerajú, je podiel ich počiatočných a konečných financií, teda to, koľkonásobne viac peňazí majú po každom prejdení okruhu (spomínaný ziskový faktor).

1.2 Elektromagnetizmus ako kalibračná teória

Teraz prišiel čas prezradiť, aká analógia s fyzikou sa vlastne skrýva v tomto modeli. Takáto konfigurácia (rozmiestnenie) krajín v priestore s bankami medzi nimi predstavuje vo fyzike magnetické pole. Oportunisti snažiaci sa zarobiť čo najviac peňazí sa nazývajú elektróny. Elektrón je odborník vo svojom remesle a vždy nájde taký okruh, ktorého ziskový faktor je najväčší. Učene povedané, elektrón (alebo iná rovnako nabitá častica) sa bude v magnetickom poli pohybovať po takej krivke, ktorou maximalizuje tok magnetického poľa cez plochu ňou uzavretú. Symetrická antičastica elektrónu (pozitrón), ktorá má rovnakú hmotnosť a opačný náboj, sa v magnetickom poli bude pohybovať presne naopak. V našej ekonomickej analógii by sme povedali, že ide o „obchodníka“,

ktorý sa úmyselne pokúša prerobiť maximálny možný obnos peňazí (v ekonomickej terminológii nemáme termín, ktorým by bola opísaná takáto profesia, nazývajme ho teda sabotér). V tomto bode poznamenajme, že ak chceme vo fyzike pracovať s takýmto ekonomickým modelom, základná predstava funguje tak, že celá táto štruktúra výmen financií a cestovania prebieha na mikroskopickej úrovni hlboko pod tým, čo dokážeme v dnešnej dobe zaznamenať meracími prístrojmi. To, či je v priestore podobná štruktúra naozaj prítomná, nevieme povedať. Na celú situáciu sa pozeráme „v limite kontinua".
Teraz už je možné aj prezradiť, že v skutočnosti ide nie o dvojrozmernú plochu, ale o poriadny poctivý štvorrozmerný priestor, kde jedna zo súradníc reprezentuje čas. Táto predstava má jediný nedostatok, a to, že čas by tu vystupoval v roli súradnice, v ktorej sa môžeme pohybovať dopredu aj dozadu. To sa prirodzene nezhoduje s bežnou skúsenosťou. Model teda treba chápať buď ako obmedzený v jednom z týchto štyroch rozmerov na pohyb „iba dopredu", alebo jednoducho zostať pri troch rozmeroch. Ak by sme však trvali na tom, že model má zahŕňať aj čas a zostať teda štvorrozmerným, potom sa celá situácia dá chápať nasledovne: V prvom rade sa pozrieme na mapu všetkých štátov, kde sú zaznačené aj výmenné kurzy. Formálne prejdeme po štvorcovom obvode, ktorého dve strany reprezentujú čas. Ak zistíme, že je možný profit, potom existujú dve možnosti. Buď sa viac oplatí „zostať doma", a teda presunúť sa iba do susedného štátu *v budúcnosti*, alebo prejsť do susedného štátu v priestorovom zmysle, tam počkať (teda opäť spraviť presun k susedom po „časovej ceste") a potom sa vrátiť do pôvodného štátu priestorovou cestou. Keďže sme v každom z týchto prípadov skončili s inou sumou peňazí, dá sa hovoriť o zisku a strate. Obrázok 1.2 zachytáva a pomáha lepšie pochopiť opísanú situáciu.

Elektrón sa pohybuje z jedného bodu v časopriestore do ďalšieho a ďalšieho. Na mikroskopickej úrovni by sme povedali, že neustále prechádza z jedného štátu do druhého, pričom zakaždým zveľaďuje svoj majetok. Podobná predstava diskrétnej štruktúry (aj keď nie práve tej, ktorá je tu opísaná) je bežným postupom teoretických fyzikov pri výpočtoch v kalibračných teóriách na mriežke.
Čo takýto opis hovorí o elektromagnetizme ako kalibračnej teórii? Táto interakcia má takú symetriu, k akej by sme sa dopracovali, ak by sa v každom bode časopriestoru nachádzal jeden rozmer navyše – malá kružnica – a symetrie by zodpovedali rotáciám tejto kružnice. Čo sa tým myslí? V ekonomickej analógii by sme povedali, že každý štát si slobodne nastaví menu, vo fyzike by to znamenalo, že v každom bode sa zvolí „nulový uhol" na kružnici a uhol na nej sa bude odčítavať vzhľadom na tento bod. Pritom magnetické potenciály hrajú úlohu výmenných kurzov, teda určujú, ako sa zmení poloha tej ktorej častice v našej extra dimenzii pri prechode do susedného štátu, t.j. vedľajšieho bodu časopriestoru.
Poznámka: Treba upozorniť na jeden *detail*, ktorý nebol jasne vyslovený. V ekonomic-



Obr. 1.2: Čas ako jeden z rozmerov. Na obrázku sú štyri štáty umiestnené na vrcholoch štvorca. Šípky z A do D a z B do C reprezentujú posun v čase, ďalšie dve posun v priestore. Posun v čase chápeme tak, že zotrváme v rovnakom štáte jednotkový čas. Na každej šípke sa nachádza bližšie nešpecifikovaný výmenný kurz. Ak formálne obídeme okruh (keďže v čase nemôžeme ísť naozaj obojsmerne), povedzme začínajúc a končiac v A v protismere hodinových ručičiek a kurzy nám vrátia sumu odlišnú od tej, s ktorou sme začali, potom je obvod ziskový. Ak je ziskový, potom máme dve alternatívne cesty z A do D, pričom na jednej z nich bude väčší zisk.

kej analógii nemáme v hre rovnako ako v elektromagnetizme kružnicu a jej symetrie, ale priamku. Takže grupa symetrií, ktorá sa v modeli skrýva, nemôže byť $U(1)$, ale $GL(1,\mathbb{R})_+$ - grupa kladných čísel s operáciou násobenia. Model však stále funguje veľmi dobre, nakoľko obe tieto grupy sú jednorozmerné. Grupa $U(1)$ ale navyše obsahuje štruktúru 2π-periodicity (ako by sa dalo čakať pre komplexné čísla veľkosti 1 alebo body na jednotkovej kružnici).
Vráťme sa teraz ešte k samotnému modelu, kde si posvietime sa nezávislosť nastavenia výmenných kurzov. Je asi dosť zrejmé, že ak máme náhodne rozhodené kurzy po celom priestore a naraz nám v ňom začnú cirkulovať oportunisti, tak po dostatočne dlhom čase nám z niektorých bánk môžu povyberať všetky peniaze jedného druhu. Napríklad ak bude oportunistický obvod pozostávať z Brazílie, Bolívie a Peru, kde zarábajúce bude práve cestovanie v tomto smere, potom je jasné, že v banke medzi Bolíviou a Peru sa minú peniaze, ktorými sa platí v Bolívii. Ako takejto finančnej kríze zabrániť? V skutočnej ekonómii by išlo o zložitý problém, v našom modeli však budeme predpokladať, že počet oportunistov, ktorí cestujú po určitom zarábajúcom okruhu, je úmerný ziskovému faktoru tohto okruhu. Stačí teda jednoducho prispôsobiť kurzy tak, aby celkový „tok financií“ v danej banke bol rovný nule. Za takýchto podmienok v nemom úžase zisťujeme, že takéto nastavenie kurzov je ekvivalentné Maxwellovým rovniciam! (Matematické odvodenie tu robiť nebudeme, dá sa nájsť v článku [5], ide

však o odvodenie vyžadujúce si vyššie matematické a fyzikálne vedomosti. Samotný fakt, že niečo také sa dá urobiť, je sám osebe ohromujúci.)

1.2.1 Matematické okienko

Predtým, než sa vydáme ďalej na dobrodružné cesty ekonomickým modelom s cieľom odhaľovať ďalšie symetrie kalibračných teórií, stojí za pár minút zdržania urobiť si malú matematickú odbočku. V tejto odbočke si ukážeme, ako by teoretický fyzik formálne zapísal fakt, že nastavenie meny v danej krajine nemá vplyv na celkový zisk, pokiaľ prechádzme po uzavretom okruhu. Teoretického fyzika prirodzene nezaujíma analógia cez ekonomický model, ale fyzika za touto analógiou. My však budeme pozorne sledovať matematické postupy tohto fiktívneho protagonistu a každý krok týchto postupov budeme porovnávať s ekonomickým modelom.

Pracovným nástrojom v tomto okienku bude Stokesova veta, podľa ktorej:

$$\oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_S \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S},$$

pričom musia byť splnené isté požiadavky na hranicu plochy S ako aj na vektorové pole $\vec{A}$ súvisiace s ich hladkosťou, ale ako fyzici predpokladáme, že tieto podmienky sú splnené automaticky (nebudeme uvažovať nespojité vektorové polia ani krivky s nedefinovanou orientáciou a podobne). Plocha S je ľubovoľná plocha, ktorej hranica je ∂S, pokiaľ je dostatočne hladká. Pripomeňme ešte jeden poznatok z elektromagnetizmu, a to, že vychádzajúc z rovnice $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, k magnetickému poľu $\vec{B}$ vieme zadefinovať vektorový potenciál $\vec{A}$ taký, že $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$.

Teraz už sa môžeme pustiť do samotného výpočtu. Majme nabitú časticu, ktorá sa v magnetickom poli pohybuje po nejakej uzavretej krivke. V analógii tu je teda oportunista, ktorý opisuje nejaký uzavretý zarábajúci okruh. Povedali sme, že vo fyzike je zarábanie (výmenné kurzy) ekvivalentné magnetickým potenciálom. Takže zárobok po opísaní okruhu bude po využití Stokesovej vety:

$$\oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_S \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Teraz využijeme vôľu, ktorú poskytuje nastavenie ľubovoľnej meny. Fyzik by povedal, že voľba vektorového potenciálu $\vec{A}$ nie je jednoznačná. Pripočítajme k potenciálu $\vec{A}$ veličinu $\operatorname{grad} f$, teda ekonomicky povedané kalibrujme menu. Potom celkový zárobok bude:

$$\oint_{\partial S} (\vec{A} + \operatorname{grad} f) \cdot d\vec{r} = \int_S \operatorname{rot}(\vec{A} + \operatorname{grad} f) \cdot d\vec{S} = \int_S (\operatorname{rot} \vec{A} + \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)) \cdot d\vec{S} =$$
$$= \int_S \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

Porovnaním začiatku a konca rovnice vidíme, že pridanie veličiny $\mathrm{grad}\, f$ neovplyvnilo veľkosť zárobku. Teraz už jasne vidíme, že nejde o nejako veľmi prekvapivý záver, veď predsa rotácia gradientu musí byť nula. Treba zdôrazniť, že hlavnú úlohu tu hrá uzavretosť obvodu. Tento fakt je pre zmenu lepšie viditeľný cez analógiu s ekonómiou. Ak neuzavrieme obvod, tak nie je možné hovoriť o zisku či strate v takom zmysle, aký sme definovali. Z matematického pohľadu by sme narazili v bode, keď by sme chceli použiť Stokesovu vetu. Pred takouto chybou sa nás snaží chrániť ten malý krúžok na znaku integrálu pripomínajúci nám, že krivku treba naozaj uzavrieť predtým ako na ňu aplikujeme triky z vektorovej analýzy. Výpočty na mriežke, ktorú nám tu poskytol ekomonický model nie sú v skutočnosti žiadnou novinkou pre teoretickú fyziku. Takýto pracovný postup sa naozaj využíva v takzvanej *mriežkovej kalibračnej teórii* (lattice gauge theory) napríklad v kvantovej chromodynamike, fyzike kondenzovaných látok či kozmológii.

Pre úplnú konzistentnosť ešte treba povedať, čo by sa stalo v prípade neuzavreného obvodu. Keby sme integrovali po akejkoľvek krivke gradient funkcie f, za každý integračný krok dostaneme rozdiel funkčných hodnôt v krajných bodoch intervalu:

$$\sum_{i}^{N} \mathrm{grad}\, f = (f(P_1) - f(P_0)) + (f(P_2) - f(P_1)) + \cdots + (f(P_N) - f(P_{N-1}))$$

Vo výsledku by teda zostal rozdiel hodnoty tejto funkcie v konečnom a počiatočnom bode - $f(P_N) - f(P_0)$. Tu je veľmi dobre vidieť, že uzavretie krivky spôsobí rovnosť týchto dvoch členov, a teda pridanie gradientu neovplyvní celkovú hodnotu integrálu. Keď prejdeme k spojitej verzii (teda od sumy k integrálu), v podstate sa nič nezmení. Opäť platí, že:

$$\int_X^Y \mathrm{grad}\, f \cdot d\vec{r} = f(Y) - f(X)$$

Ak by sme integrovali po *najobľúbenejšej krivke matematickej analýzy*, teda osi x, potom vidíme platnosť tohto tvrdenia nad Slnko jasne. Veď ide o starý známy Newtonov-Leibnizov vzorec, podľa ktorého:

$$\int_X^Y \frac{df(x)}{dx} dx = f(Y) - f(X)$$

Gradient tento vzorec len zovšeobecňuje na ľubovoľnú (hladkú) krivku.

Na záver tohto okienka poznamenajme, že *kalibračná vôľa*, ktorá sa objavila v ekonomickom modeli, je pozorovateľná aj v úplne iných prostrediach. A to nielen vo fyzike kalibračných teórií, ktorá tu má spravenú silnú „politickú kampaň“. Čitateľovi túžiacemu po stretnutí sa s inými príkladmi tohto javu sa odporúča nahliadnuť do práce [2] (prípadne do odbornej literatúry uvedenej v tomto texte). Úplne laický výklad sa dá tiež nájsť v článku [4], ktorý bol publikovaný v časopise .týždeň.

1.3 Kalibračná teória slabej interakcie

Podobný ekonomický model ako v prípade elektromagnetizmu vieme vybudovať aj pre slabú interakciu. Nakoľko táto interakcia je vo viacerých bodoch zložitejšia ako elektrina a magnetizmus, je prirodzené, že aj prislúchajúci model naberie na komplexnosti. V úvode sme spomenuli, že so slabou jadrovou silou sú asociované tri nosiče interakcie. V tejto analógii sa to prejaví tým, že miesto peňazí už budeme so sebou na cestách nosiť akýsi trojrozmerný objekt, ktorý sa v bankách zamieňa cez tri rôzne výmenné kurzy. V podstate nie je chybné si predstaviť, že ide o tri rôzne navzájom nezávislé meny, ktoré sa medzi štátmi zamieňajú rovnako ako bežné peniaze, akurát v tomto bode už chýba bežná každodenná skúsenosť a teda mierne strácame na názornosti.
Bez ďalších okolkov rovno prejdime k fyzike, ktorú ukrýva model v tomto prípade. Podobne ako pri elektromagnetizme, aj tu symetrie zodpovedajú rozšíreniu časopriestoru, avšak tentokrát sa k štyrom rozmerom pridajú ešte ďalšie tri. Predstava je asi taká, že v každom bode sa nachádza malá trojrozmerná sféra (budeme sa pridŕžať trefného názvu *slabá sféra*, ktorým tieto tri dodatočné rozmery označil Juan Maldacena vo svojom článku). Ak teda prechádzame z jedného štátu do druhého, výmena peňazí znamená definovanie, ako sa zmení poloha častice v slabej sfére. Z fyzikálneho pohľadu máme tri rozmery navyše za tri nosiče slabej interakcie, ktoré sa transformujú určitým spôsobom pri zmene polohy v časopriestore. Trochu jednoduchší náhľad dostaneme, ak si uvedomíme, že zmenu polohy v slabej sfére treba určiť troma súradnicami – dve určia os rotácie a tretia uhol rotácie okolo tejto osi.
Hodno poznamenať, že pri slabej ako aj elektromagnetickej interakcii nevieme, či tieto pridané dimenzie naozaj existujú. Čo vieme je, že kalibračné symetrie sú také, akoby existovali.
Podobne ako pri elektromagnetizme, aj tu máme rovnice, ktorými je opísané správanie polí prislúchajúcich k slabej interakcii. Tieto rovnice v roku 1954 navrhli Chen Ning Yang a Robert Mills. Avšak Wolfgang Pauli vyjadril nesúhlas s touto teóriou, nakoľko by implikovala existenciu ďalších nehmotných častíc, ktoré v prírode nepozorujeme.

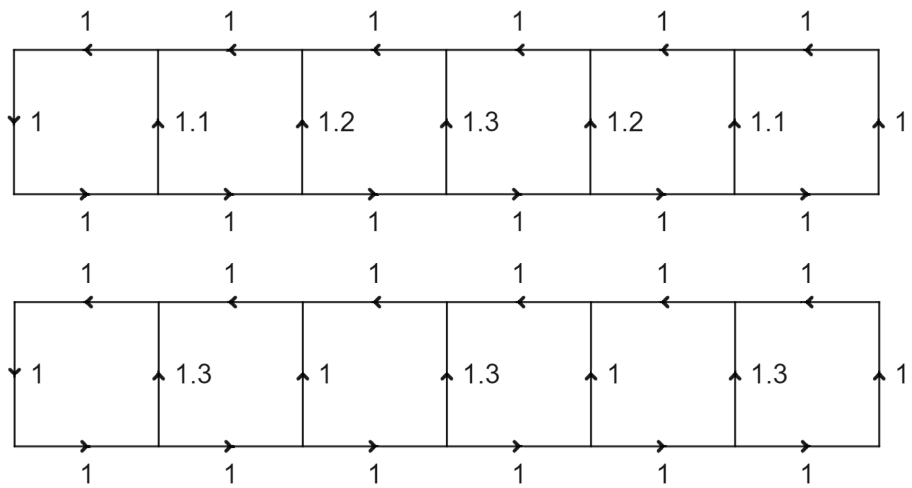
1.4 Stručne k silnej interakcii

Spomeňme, že ďalším zovšeobecnením ekonomického modelu vieme zaviesť aj analógiu pre kalibračnú teóriu silnej interakcie. Podobnou logikou ako pri slabej interakcii by sme teraz zamieňali akýsi osemrozmerný objekt, kde za každý rozmer by sme mali jeden výmenný kurz. Pri dostatočnej fantázii si tento objekt vieme predstaviť ako osem finančných mien, ktoré banky vymieňajú na každej hranici. Teoretická fyzika teda zakročila tam, kde ekonómovia so svojim aparátom už nevystačili a zovšeobecnila financie do viacerých rozmerov. Ako už bolo povedané v úvode, tieto rozmery súvisia s dimenziou grupy $SU(3)$ alebo teda s existenciou ôsmich gluónov. Nuž a rozšírenie časopriestoru, ktoré spravíme v tomto prípade, bude pridanie akejsi malej osemrozmernej „sféry“ do každého bodu, pričom silná interakcia bude invariantná voči voľbe polohy na tejto „sfére“. V teórii Štandardného modelu by sme potom zobrali naraz všetky tieto dodatočné rozmery, ktoré nie je ťažké spočítať a dostať sa k výslednému číslu 12. Spolu so štyrmi rozmermi priestoru, s ktorým sme v priamom kontakte, máme takto 16-rozmerný vesmír!

1.5 Vlny

Predtým, než budeme pokračovať ďalej, pripomeňme si niektoré vlastnosti vĺn. Dôležitým pojmom tu bude vlnová dĺžka. Tento pojem je definovaný veľmi intuitívne ako vzdialenosť dvoch najbližších amplitúd vlny. Pozrime sa teraz na to, ako súvisí energia potrebná na excitáciu vlny s jej vlnovou dĺžkou. V prípade elektromagnetizmu táto závislosť vyzerá tak, že čím väčšia je vlnová dĺžka, tým menej energie je potrebnej na excitáciu vlny. Môžeme použiť nasledujúcu myšlienku pre lepšie zapamätanie tohto faktu. Excitáciou vlny sa myslí, že jej vlnová dĺžka sa zachová, zatiaľ čo jej amplitúda narastie. Ak je vlnová dĺžka veľká, vlna má „menej“ maxím, ktoré treba dvihnúť, ako by to bolo v prípade krátkej vlnovej dĺžky. Hmotnosť častice súvisí s energiou potrebnou na excitáciu „dlhej“ vlny. Tento fakt je spojený so známym vzťahom medzi energiou a hmotnosťou, podľa ktorého $E = mc^2$.

Vložme energiu do nášho ekonomického modelu nasledovne: čím väčší zisk je dostupný, tým väčšiu energiu má systém. Ponúka sa tu jednoduchý argument, a to, že čím je ľahšie zarábať, tým viac sa bankári natrápia, aby túto príležitosť odstránili. Vlnová dĺžka tu bude vystupovať nasledovne: Predstavme si niekoľko ziskových obvodov naukladaných jeden vedľa druhého. Keďže sa chceme dopracovať k vlnám, t.j. nejakým periodickým štruktúram, budeme predpokladať, že aj výmenné kurzy sa budú pravidelne opakovať. Každý z týchto obvodov bude mať prirodzene svoj ziskový faktor. Aj tieto sa musia pravidelne opakovať v systéme. Pritom samozrejme budeme mať nejaké maximá rozostúpené na vzdialenosť určitého počtu obvodov. Túto vzdialenosť budeme chápať ako vlnovú dĺžku. V systéme sa rovnakou logikou musí vyskytovať aj maximálny pravidelne sa opakujúci výmenný kurz. Po krátkom zamyslení vidíme, že väčšia vlnová dĺžka znamená menšie rozdiely v ziskových faktoroch susedných obvodov. Ak budú maximálne kurzy rovnaké v prípade krátkych aj dlhých vĺn, tak budú samotné ziskové faktory menšie. Na obrázku 1.3 je ukázaná takáto konfigurácia pre konkrétne vlnové dĺžky s konkrétnymi výmennými kurzami. Keď sa vrátime k pojmu energie v modeli, celá táto úvaha znamená, že konfigurácie s menším ziskom stoja menej ener-



Obr. 1.3: Vlny. Na tomto obrázku vidíme príklad dvoch konfigurácii, kde sa periodicky opakujú kurzy. Maximálny kurz je v oboch prípadoch rovnajá hodnota 1.3, ale vzdialenosť medzi dvoma mostami, na ktorých je kurz 1.3 je v prvom prípade väčšia ako v druhom. Preto budeme v prvom prípade hovoriť o väčšej vlnovej dĺžke.

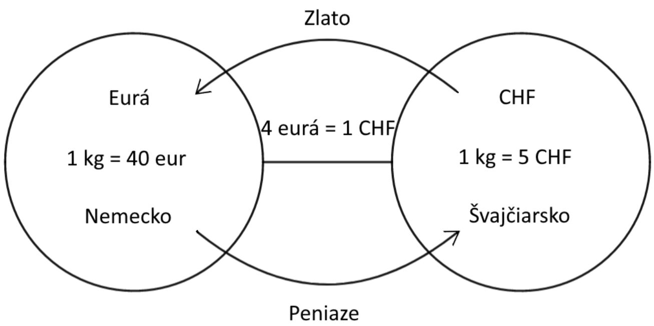
gie. To, že zisk je menší pre veľké vlnové dĺžky, má za následok, že asociovaná častica (fotón) má nulovú pokojovú hmotnosť. Toto je správny záver a správny by bol aj pre verziu slabej interakcie, s ktorou sme pracovali doteraz. Ale kalibračné bozóny slabej interakcie predsa nie sú nehmotné. Čo teraz?

Kapitola 2

Ekonomická analógia Higgsovho mechanizmu

Poďme sa teraz pozrieť, ako upraviť pôvodne postavený ekonomický model tak, aby sa pomocou neho dalo povedať niečo o Higgsovom poli a hmotnosti častíc. V tejto kapitole nie je nutné (a ani možné!) dospieť k hlbokému pochopeniu Higgsovho mechanizmu. Dôležité je len trochu za zoznámiť s týmto konceptom a dostať obraz o ňom do podvedomia, odkiaľ sa možno raz vynorí na prednáške o Štandardnom modeli.
Uvažujme rovnaké pravidlá, aké boli zavedené na začiatku kapitoly, ale, ako už bolo naznačené, vypustíme jedno obmedzenie. Doteraz sme síce so sebou všade nosili peniaze, ale nebolo nič, čo by sa za ne dalo kúpiť. Teraz konečne do hry vstúpi aj jeden tovar - nech je ním zlato. Zlato bude mať v rôznych štátoch rôzne navzájom nezávislé ceny a keď ho nakúpime v niektorom štáte, môžeme ho bez colných poplatkov previezť cez hranice. Takže opäť prechádzame medzi štátmi k ich priamym susedom a pri každom prechode hraníc vymeníme peniaze. Ak sa nám to hodí, môžeme v danom štáte nakúpiť zlato a v nejakom inom ho predať. Asi nie je veľkým prekvapením, že s týmto novým pravidlom sa objavia nové príležitosti na zarábanie. Poďme sa pozrieť, čo presne treba teraz robiť. Uvažujme dva susedné štáty, povedzme Švajčiarsko a Nemecko, pričom franky (CHF), ktorými platia vo Švajčiarsku majú pri výmene v banke 4-násobnú hodnotu nemeckých eur. Nech zlato stojí 40 eur na kilogram v Nemecku a 5 frankov na kilogram vo Švajčiarsku. Ako tu postupovať? Začnime kúpou kilogramu zlata vo Švajčiarsku. Prejdeme cez hranice a na druhej strane zlato predáme za 40 eur. Pri spätnom prechode banka od nás kúpi 40 eur za 10 CHF, ktorými vieme tentokrát už získať dva kilogramy zlata. Celú situáciu môžeme vidieť na obrázku 2.1.

Ziskový faktor tohto obvodu sa teda ukázal byť rovný dvom. To, čo je tu nové, je fakt, že v skutočnosti ani nejde o obvod. Veď sme sa presúvali iba medzi dvoma štátmi. Tak ako pri pôvodnom modeli, aj tu vystupuje istá kalibračná symetria. Opäť sa totiž dajú meny nastaviť ľubovoľne bez toho aby nimi bol ovplyvnený potenciálny



Obr. 2.1: Obchod so zlatom. Takto by mohla vyzerať schéma *obvodu*, ktorého opakovaným prechádzaním by sme zarábali. Šípky ukazujú, ktorým smerom treba čo prevážať, teda zlato sa vozí do Nemecka a peniaze naspäť do Švajčiarska.

biznis. Tu však vystupuje otázka: Aké jednotky jednotlivých mien bude najvhodnejšie vybrať? Predtým sme preškálovaním meny riešili iba problém primnohých núl v cenách a výmenných kurzoch. Čo spravíme teraz je, že zvolíme v každom štáte takú menu, aby v nej cena za kilogram zlata bola jednotková. Môžeme sa pýtať prečo práve takto. Dôvodom je opäť akási „pohodlnosť", ktorú sa tým snažíme dosiahnuť. Ak bude totiž cena zlata v každej krajine jednotka daných financií, potom sa prirodzene kurzy upravia tak, že z nich bude priamo a jednoducho pozorovateľné, kde treba zlato kupovať a kde ho predávať. V predošlom príklade by to teda vyzeralo nasledovne. Keďže Nemecko ohodnotilo zlato na 40 eur, zavedieme tam novú menu – zlaté euro (priraďme mu skratku GE ako „gold euro") a podobne Švajčiari, ktorí zlato vyvážili piatimi frankami na kilogram, prídu s novou menou zlatého franku (skratka GFR). Potom samozrejme 40 eur $=$ 1 GE a 5 CHF $=$ 1 GFR. Ešte treba upraviť kurz medzi GE a GFR. Ak pôvodne 4 eurá boli menené za 1 frank, tak teraz máme 1 GE $=$ 2 GFR. Tu už si stačí raz uvedomiť a navždy pamätať, že ak je kurz rôzny od 1:1, pravidlom zarábania je nakúpiť tam, kde je vidíme väčšie číslo, a predať tam, kde je menšie. V tomto prípade je kurz 1:2 a teda naozaj faktor zisku zostal rovný dvom. Tento fakt je dôležitý, lebo bez neho by sme nemohli hovoriť o symetrii (niekde by asi bola chyba).

Dovolením prevozu zlata ale nastala obrovská zmena v celom modeli. Vráťme sa k úvahe o vlnách, kde sme pomocou periodických obvodov odvodili, že energia potrebná na excitáciu vlny závisí od vlnovej dĺžky. Vyplývalo to z pozorovania, že častejšie sa opakujúce výmenné kurzy (menšia perióda) nám dávala väčší zisk pri prechode obvodom. Avšak teraz už žiadny uzavretý obvod na zarábanie nepotrebujeme. Stačí spraviť kalibračnú transformáciu meny v každom štáte a odhaliť miesta, kde kurzy nie sú v pomere jeden k jednému. Potom už jednoducho stačí chodiť hore-dole medzi dvojicou nejakých štátov, kde máme netriviálny kurz. Ak sa teraz banky rozhodnú pohnúť kurzy zo stavu 1:1, teda fyzikálne povedané excitovať vlnu, bude to stáť energiu, a to aj pre veľké vlnové dĺžky. Spomeňme si, že bolo povedané, že pokles energie potrebnej na excitáciu vlny pri rastúcej vlnovej dĺžke implikuje nulovú pokojovú hmotnosť častice, ktorej takáto vlna prislúcha. Vyslovíme teraz ďalšiu časť tohto tvrdenia. Ak energia potrebná na excitáciu vlny neklesá pri zväčšovaní vlnovej dĺžky, potom častica, ktorej daná vlna prislúcha, je hmotná.

Tento fenomén obchodu so zlatom nám teda pomôže vysvetliť, odkiaľ sa berie hmotnosť bozónov slabej interakcie. V modeli pre elektromagnetizmus však nechceme pokaziť už dosiahnuté správne výsledky. Preto v tomto prípade jednoducho povieme, že prevoz zlata je zakázaný a žiadne zmeny sa takto konať nebudú. Avšak poznamenajme, že takto to nemusí byť vždy. Aj keď už bolo niekoľkokrát spomenuté, že fotón má nulovú pokojovú hmotnosť, nie je to úplná pravda za každých podmienok. Ukážme si jeden zaujímavý príklad, kedy dochádza k neuveriteľnému javu – fotón získa hmotnosť. V prvom rade si tento jav vyžaduje špecifické prostredie, ktoré mu poskytne supravodivý materiál. Pripomeňme len, že vlastnosťou takéhoto materiálu je, že umožňuje vznik tzv. Cooperovych párov elektrónov, ktoré sa v ňom potom pohybujú bez odporu. Takéto správanie je možné vďaka interakcii elektrónov s kryštalickou mriežkou materiálu, ktorej vibrácie prejavujúce sa ako fotóny, sprostredkujú silnú väzbu medzi elektrónmi. Tieto elektróny sa potom pohybujú v pároch bez toho, aby cítili efekty rovnakého náboja. Vzdialenosť medzi elektrónmi v pároch rádovo prevyšuje rozmery atómov a toto spôsobí, že fotóny začnú interagovať s Higgsovym poľom. Hmotnosť, ktorú týmto získajú, sa nazýva Londonova hmotnosť. Tento objav z polovice 20. storočia bol vlastne pôvodnou inšpiráciou k zavedeniu Higgsovho mechanizmu.

Takže tento mechanizmus nám povie, kde sa berie hmotnosť nosičov slabej interakcie. Nebudeme podrobne budovať ekonomický model pre túto interakciu, nakoľko ide len o intuitívne zovšeobecnenie toho, čo sme už raz robili. V tomto prípade by sme museli namiesto zlata uvažovať čosi „trojrozmerné“ v zmysle hodnoty v jednotlivých štátoch tak, aby sme dosiahli korešpondenciu s pôvodným ekonomickým modelom slabej interakcie. Kalibračná transformácia ceny zlata by tu zodpovedala zrovnaniu orientácie „3D-zlata“ vo všetkých slabých sférach (v každom bode časopriestoru) a nulový zisk by znamenal, že poloha v slabej sfére sa pri prechode do susedného štátu nemení. Následne by sme museli spraviť zložité úvahy o energii a vlnách v tomto prípade, avšak výsledok by už nepriniesol žiadne nové fascinujúce odhalenia. Preto v tomto bode jednoducho povieme, že bozóny Z^0, W^+ a W^- cítia prítomnosť Higgsovho poľa, a preto majú nenulovú pokojovú hmotnosť. Takto sme dostali správnu zhodu s experimentom a zároveň máme stále slabú interakciu popísanú kalibračnou symetriou.

Poznámka (alebo skôr upozornenie): Z tohto textu mohol vzniknúť dojem, že vieme krásne opísať elektromagnetizmus pridaním malej kružnice do každého bodu v časopriestore a potom môžeme spokojne prejsť k slabej jadrovej sile a opis tu spraviť pomocou pridania slabej sféry opäť do každého bodu. Avšak v úvode bolo povedané, že bozóny W^+ a W^- majú elektrický náboj 1 a -1. Tento náboj je kvantovým číslom elektromagnetickej interakcie a ako správne kvantové číslo hovorí niečo o správaní sa týchto bozónov v prítomnosti elektromagnetického poľa. To ale znamená, že tieto dve teórie sa nemôžu stavať len tak nezávisle jedna od druhej. Ide totiž o previazané sily, ktoré vo fyzike opisuje tzv. elektroslabá teória. Vo fyzike je dôležité mať na pamäti tento fakt, ale tu bol spomenutý len „z povinnosti".

Kapitola 3

Matematický formalizmus

V tejto kapitole sa pozrieme sa celú problematiku z formálnej matematickej stránky. Cieľom bude ukázať, že ekonomický model je kalibračne invariantný, to jest že škálovanie mien v jednotlivých štátoch nemá vplyv na ekonomické príležitosti poskytované náhodnosťou výmenných kurzov.

3.1 Kalibračná invariantnosť

Majme teda diskrétnu mriežku (na začiatok kvôli prehľadnosti všetkých úvah len dvojrozmernú) a skúsme všetky myšlienky z paragrafov 1.1 a 1.2 pretlmočiť do matematického jazyka. Každý bod nášho priestoru, teda každý bod mriežky si označíme ako $\vec{n} = (n_1, n_2)$ pre nejaké prirodzené čísla $n_1,\ n_2$. Prechod do susedného štátu, teda vedľajšieho bodu mriežky, a výmena peňazí zodpovedá násobeniu faktorom:

$$R_{\vec{n},i} = e^{A_i(\vec{n})},$$

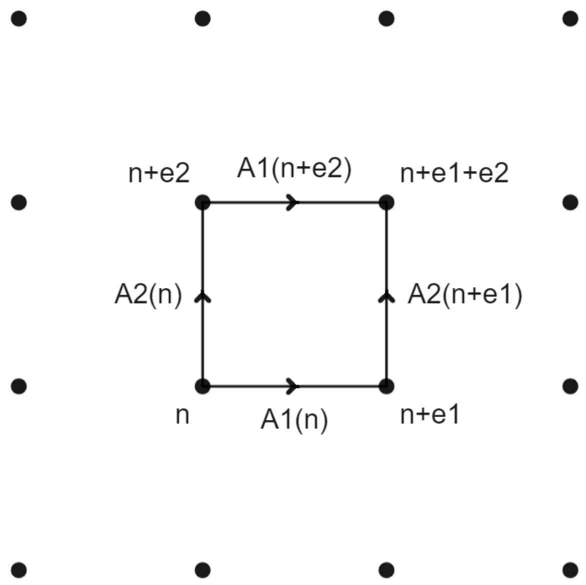
kde veličina $A_i(\vec{n})$, teda logaritmus veličiny $R_{\vec{n},i}$, je zavedená z dôvodov, ktoré vyjdú najavo čoskoro. Celá situácia je zachytená na obrázku 3.1.

Indexy i a j chápeme teda zatiaľ ako jednotku a dvojku, alebo teda uvažujeme iba priestor „natiahnutý“ na osi x a y. Vo všeobecnom prípade by sme samozrejme mohli mať ľubovoľný počet rozmerov a neobmedzovať sa iba na dva. Ak teda zarábame na obchádzaní nejakého obvodu, potom po každom príchode do štartovného bodu sa suma, ktorú sme v tomto bode mali o jeden okruh skôr, zväčší (alebo zmenší) faktorom:

$$R_{\vec{n},i} R_{\vec{n}+\vec{e}_i,j} \frac{1}{R_{\vec{n}+\vec{e}_j,i}} \frac{1}{R_{\vec{n},j}}$$

Označme tento ziskový faktor ako $e^{F_{ij}(\vec{n})}$. Potom máme:

$$\begin{aligned} F_{ij}(\vec{n}) &= A_i(\vec{n}) + A_j(\vec{n}+\vec{e}_i) - A_i(\vec{n}+\vec{e}_j) - A_j(\vec{n}) = \\ &= A_j(\vec{n}+\vec{e}_i) - A_j(\vec{n}) - [A_i(\vec{n}+\vec{e}_j) - A_i(\vec{n})] \end{aligned} \tag{3.1}$$



Obr. 3.1: Zarábajúci okruh v matematickom formalizme. Body predstavujú štáty označené v dvojrozmernom prípade usporiadanými dvojicami prirodzených čísel. Výmenné kurzy sú reprezentované ich logaritmami A_i. Cirkulovaním pozdĺž takéhoto obvodu v správnom smere budeme pri nezávislom nastavení kurzov takmer vždy zarábať.

Prečo je dobrý druhý zápis, uvidíme o chvíľu. Je jasné, že pri zarábaní je faktor $F_{ij}(\vec{n})$ väčší ako 0, z čoho potom vyplýva, že $e^{F_{ij}(\vec{n})}$ je väčšie ako 1 (teda naše peniaze sú násobené faktorom väčším ako 1, čo znie veľmi podobne ako zarábanie).
Pozrime sa teraz, ako matematicky ukázať, že ak sa v niektorom štáte zmení mena a k tomu aj príslušné výmenné kurzy, zarábanie to nijako neovplyvní. Ak pôvodné výmeny peňazí boli reprezentované násobením faktorom $R_{\vec{n},i}$, tak po novom budeme násobiť faktorom:

$$\frac{1}{f_{\vec{n}}} f_{\vec{n}+\vec{e}_i} R_{\vec{n},i}, \tag{3.2}$$

kde $f_{\vec{n}} = e^{\varepsilon(\vec{n})}$ je kalibrácia (nastavenie meny). Prečo práve takto? Spravme jednoduchú úvahu. Majme dva štáty, nazvime ich 1 a 2. Nech sa v štáte 1 platí menou X a v štáte 2 menou Y. Povedzme, že kurz medzi týmito dvoma menami je 1:10, teda za jedno X pri prechode hraníc dostaneme $10Y$. Ak teraz štát 1 kalibruje svoju menu tak, že 1000 X bude hodné $1X'$ - jednej jednotky novej meny (teda prechod k novej mene je delenie tisíckou), potom výmenný kurz prejde na 1:10000, takže za $1X'$ dostávame $10000Y$. Výmenný kurz teda prešiel od násobenia desiatimi na násobenie desiatimi tisícmi. Analogicky by sme ukázali, ako sa správa prenastavenie meny štátu, do ktorého vstupujeme. Tým sme vysvetlili pôvod výrazu 3.2.
Nech teraz kalibrujú svoju menu súčasne 4 štáty sediace vo vrcholoch štvorca, ktorého obvod prechádzame s cieľom zarábať. Potom nový zárobok je daný (v logaritmickej

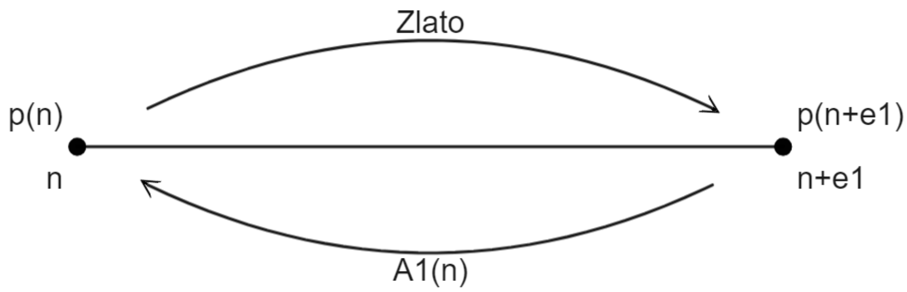
reprezentácii) ako:

$$F'_{ij}(\vec{n}) = A'_j(\vec{n}+\vec{e}_i) - A'_j(\vec{n}) - [A'_i(\vec{n}+\vec{e}_j) - A'_i(\vec{n})] = A_j(\vec{n}+\vec{e}_i) + \varepsilon(\vec{n}+\vec{e}_i+\vec{e}_j) -$$
$$- \varepsilon(\vec{n}+\vec{e}_i) - A_j(\vec{n}) - \varepsilon(\vec{n}+\vec{e}_j) + \varepsilon(\vec{n}) - A_i(\vec{n}+\vec{e}_j) - \varepsilon(\vec{n}+\vec{e}_j+\vec{e}_i) + \varepsilon(\vec{n}+\vec{e}_j) +$$
$$+ A_i(\vec{n}) + \varepsilon(\vec{n}+\vec{e}_i) - \varepsilon(\vec{n}) = A_i(\vec{n}) + A_j(\vec{n}+\vec{e}_i) - A_i(\vec{n}+\vec{e}_j) - A_j(\vec{n}) = F_{ij}(\vec{n})$$

Takže tí, ktorí neverili, teraz už nemôžu pochybovať. Kalibrácia meny naozaj nemá vplyv na celkový zisk či stratu.
Ukážme si, ako je to s obchodom so zlatom. Majme teraz dva susedné štáty s navzájom nezávisle nastavenými cenami zlata. Opäť je medzi nimi nejaký výmenný kurz a my by sme chceli ukázať, že kalibrácia meny tak, aby ceny zlata boli jednotkové s príslušným nastavením kurzu nebude mať vplyv na to, akým faktorom zarábame či prerábame na obchode so zlatom. Cenu zlata v jednotlivých štátoch budeme označovať ako:

$$p(\vec{n}) = e^{\varphi(\vec{n})},$$

kde sme opäť z istých dôvodov zaviedli logaritmus ceny zlata. Situáciu so zlatom zachytáva obrázok 3.2.



Obr. 3.2: Schéma obchodu so zlatom. V plnej zhode s kapitolou 2 dokážeme zarábať na obchode so zlatom, pokiaľ nakupujeme tam, kde je po kalibrácii slabšia mena a predávame v štáte so silnejšou menou. Na tomto obrázku by sme teda kupovali zlato v štáte, ktorý leží v bode $\vec{n}$, ak by $A_1(\vec{n})$, teda logaritmus kurzu bol väčší ako 0.

S kalibráciou ceny zlata je to podobne ako s peniazmi. Ak sa mena kalibruje tak, že ju násobíme faktorom $f(\vec{n})$, potom cena zlata sa násobí tak isto. Takže máme:

$$p(\vec{n}) \to p'(\vec{n}) = f(\vec{n})p(\vec{n})$$

Opäť si môžme ukázať, prečo je to práve takto. Nech sú dva susedné štáty (1 a 2), kde v prvom sa platí v jednotkách X a v druhom v jednotkách Y. Povedzme, že zlato v štáte 1 stojí $2X$ a v štáte 2 zlato stojí $1Y$. Ako v kapitole 2 nastavíme meny v oboch štátoch tak, aby v nich zlato malo jednotkovú cenu. V štáte 2 je to už splnené. Vidíme, že v štáte 1 si to vyžaduje, aby nová mena bola dosiahnutá násobením starej meny

faktorom 1/2. Potom platí $X' = 2X$, lenže $2X$ bola pôvodne cena zlata a teraz zlato stojí $1X'$. Takže vidíme, že cena zlata sa násobí tým istým faktorom, ktorým sa násobí mena štátu.
S týmito vedomosťami teraz môžeme matematicky dokázať kalibračnú invariantnosť obchodu so zlatom. Treba si len uvedomiť, akým vzťahom je daný zisk z takéhoto biznisu. Po krátkom zamyslení vidíme, že faktor, ktorým sa násobí náš majetok po každom uzavretí zlatého okruhu, je daný ako:

$$\frac{p(\vec{n}+\vec{e}_i)}{p(\vec{n})R_{\vec{n},i}} \equiv e^{D_i\varphi(\vec{n})}, \tag{3.3}$$

kde sme zaviedli veličinu $D_i\varphi(\vec{n})$, teda gradient skalárneho poľa φ, ktorý budeme rovnako ako Juan Maldacena nazývať „zlatý gradient“. Pre tento gradient vyplýva prirodzene zo vzťahu 3.3, že:

$$D_i\varphi(\vec{n}) = \varphi(\vec{n}+\vec{e}_i) - \varphi(\vec{n}) - A_i(\vec{n}) \tag{3.4}$$

Pôvod vzťahu 3.3 sa dá ľahko ukázať, ak budeme uvažovať napríklad štát v bode $\vec{n}$ s cenou zlata $p(\vec{n}) = 2$ a štát v bode $\vec{n}+\vec{e}_1$ s cenou zlata $p(\vec{n}+\vec{e}_1) = 5$, medzi ktorými je výmenný kurz 10:1. Potom zarábanie vyžaduje nákup zlata v $\vec{n}$, jeho prevoz do $\vec{n}+\vec{e}_1$, kde je predané za 5 a návrat do $\vec{n}$ za zmeny podľa kurzu, teda 5 za 50. Zarobili sme 25-násobok toho, čo sme mali na začiatku. Lenže k číslu 25 sa dostaneme aj dosadením príslušných hodnôt do vzťahu 3.3.
Ak spravíme kalibrácie mien, potom náš nový zisk je daný vzťahom (opäť budeme pracovať v logaritmickej reprezentácii):

$$D'_i\varphi(\vec{n}) = \varphi'(\vec{n}+\vec{e}_i) - \varphi'(\vec{n}) - A'_i(\vec{n}) = \varphi(\vec{n}+\vec{e}_i) + \varepsilon(\vec{n}+\vec{e}_i) - \varphi(\vec{n}) - \varepsilon(\vec{n}) - A_i(\vec{n}) -$$
$$- \varepsilon(\vec{n}+\vec{e}_i) + \varepsilon(\vec{n}) = \varphi(\vec{n}+\vec{e}_i) - \varphi(\vec{n}) - A_i(\vec{n}) = D_i\varphi(\vec{n})$$

Tým je dokázaná nezávislosť zisku z obchodu so zlatom od kalibrácie ktorejkoľvek meny s príslušným nastavením výmenného kurzu.
Na záver si ešte ukážeme dva zaujímavé fakty, ktorých dôležitosť spočíva v súvislosti medzi ekonomickým modelom a diferenciálnou geometriou.
Po prvé sa pozrime, ako by vyzerala spojitá verzia objektu 3.1. Najprv nenápadne dopíšeme jednotku v podobe veľkosti vektora e_i a e_j do definičného vzťahu:

$$F_{ij}(\vec{n}) = \frac{A_j(\vec{n}+\vec{e}_i) - A_j(\vec{n})}{|\vec{e}_i|} - \frac{A_i(\vec{n}+\vec{e}_j) - A_i(\vec{n})}{|\vec{e}_j|}$$

To už sa na niečo začína podobať, ale tvárme sa, že to zatiaľ nevidíme. Čo sa stane, ak teraz prejdeme do limity kontinua? Jednak premennú $\vec{n}$ nahradíme spojitým $\vec{x}$ a posun v smere x resp. y nebude jednotkový, ale infinitezimálne malý. Takže máme:

$$F_{ij}(\vec{n}) \to F_{ij}(\vec{x}) = \frac{A_j(\vec{x}+h\vec{e}_i) - A_j(\vec{x})}{h|\vec{e}_i|} - \frac{A_i(\vec{x}+h\vec{e}_j) - A_i(\vec{x})}{h|\vec{e}_j|}$$

Tu už sa nedá ignorovať, čo je zrejmé. V limite, keď h pôjde k nule sa z $F_{ij}(\vec{x})$ stane:

$$F_{ij}(\vec{x}) = \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}$$

Ak bude $\vec{A}$ elektromagnetický potenciál (čo bolo úmyslom celý čas), veličina F potom bude tenzor elektromagnetického poľa. Tento tenzor je navyše aj 2-forma, teda spĺňa dve špeciálne podmienky: všetky (dva) indexy má *dolu* a je antisymetrický. To, kde sú indexy netreba nijako zdôrazňovať. To, že je antisymetrický, vidíme z toho, že vymenenie indexov má za následok zmenu znamienka. Neodpustíme si poznámku, že opäť raz do hry vstúpila symetria, čo len potvrdzuje, že tento pojem je hlboko zakorenený v každej oblasti matematiky a fyziky. Tu sme pracovali na dvojrozmernej mriežke, teda indexy i, j nadobúdali hodnoty 1 a 2. Forma F si však už vyžaduje, aby indexy „bežali“ od 0 po 3. Pre porovnanie sa odporúča nazrieť do knihy [3], kde v úlohe 16.3.1 nájdeme presne tento tvar F:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Tu poznamenajme, že indexy potenciálu A sú prirodzene *hore*, keďže ide o vektor(ové pole) a na ich spustenie treba použiť metriku η, čo v konečnom dôsledku prinesie opačné znamienko, teda:

$$A_i = \eta_{i\mu} A^\mu = -A^i$$

Ak by sme teraz vynechali hodnotu indexu 0, potom sa tento výraz dá zapísať ešte jedným spôsobom, a to:

$$\begin{aligned} F_{ij} &= -\partial_i A_j + \partial_j A_i = -\delta_{jn}\delta_{im}\partial_m A_n + \delta_{jm}\delta_{in}\partial_m A_n = (-\delta_{jn}\delta_{im} + \delta_{jm}\delta_{in})\partial_m A_n = \\ &= -\varepsilon_{kji}\varepsilon_{knm}\partial_m A_n = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\partial_m A_n = -\varepsilon_{ijk} \operatorname{rot} \vec{A} \cdot \vec{e}_k = -\varepsilon_{ijk} B_k, \end{aligned}$$

čo je opäť raz zhoda s knihou [3] (konkrétne v úlohe 16.2.1).
No a na záver sa ešte raz pozrime na objekt 3.4. K spojitej verzii sa dostaneme úplne rovnako ako v predošlom prípade. Potom máme:

$$D_i\varphi(\vec{x}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - A_i(\vec{x})$$

Tu nebolo cieľom poukázať na niečo, s čím máme už dlhoročné skúsenosti, ale naopak predstaviť nového aktéra, s ktorým sa každý teoretický fyzik vo svojom živote ešte veľakrát stretne. Jeho meno je kovariantná derivácia poľa φ (a pre zaujímavosť, ani on neunikol záznamu v knihe [3], konkrétne v úlohe 21.1.4).

Záver

Zhrňme teda ešte raz to, čím sa táto práca zaoberala a aké výsledky by bolo dobré si z nej odniesť. V úvodnej kapitole sme naznačili ohromujúcu silu pojmu symetrie vzhľadom k tomu, o aký jednoduchý pojem sa v skutočnosti jedná. Pár vetami sme predstavili fundamentálne interakcie a to, kde sa vyskytujú. Rovnako stručne sme naznačili, čo sa skrýva za pojmom Higgsovho mechanizmu.
Keďže teória elementárnych častíc je zložitá veda, ukázalo sa, že je vhodné niektoré oblasti tejto vedy vysvetliť pomocou analógií s niečím jednoduchším. Týmto jednoduchším prostriedkom je ekonomický model, ktorý v roku 2014 predstavil svetu Juan Maldacena. Pôvodný nápad síce nepochádza priamo od tohto teoretického fyzika, ale bol to práve on, kto tento model priviedol do podoby, ktorou sa zaoberela táto práca. Ekonomický model začína ako štvorčeková sieť na nekonečnej rovnej ploche, kde každý bod prieseku dvoch čiar reprezentuje štát s jeho finančnou menou a čiary, ktorými sú tieto body pospájané, sú mosty s bankami vymieňajúcimi peniaze v súlade s nastavenými kurzami. Po zavedení tohto modelu sme ukázali, že sa v ňom dá nájsť lokálna kalibračná symetria, a to tak, že model je necitlivý na škálovanie mien v jednotlivých štátoch, pokiaľ sa po prechode k novej mene vhodne prenastavia kurzy. Hlavným cieľom tohto modelu bolo ukázať, že prechod cez akýkoľvek uzavretý okruh štátov so zmenou peňazí na každom moste bude pri nezávislom nastavení kurzov viesť buď k zárobku, alebo k strate (vrátenie pôvodnej peňažnej sumy by bola veľká náhoda). V teórií kalibračných polí tento jav zodpovedá paralelnému prenosu vektorov po varietách. Analógia s fyzikou elementárnych častíc, ktorá sa tu skrýva, je taká, že ak by výmenné kurzy predstavovali magnetické pole, potom by sme narazili na istých oportunistov, ktorí by vyhľadávali okruhy s čo najväčším zárobkom. Títo oportunisti sa nazývajú elektróny a výmenné kurzy nesú meno vektorový potenciál magnetického poľa. Kalibrácie mien v jednotlivých štátoch vedú na kalibrácie magnetického potenciálu. Keďže vzťah medzi magnetickým potenciálom a magnetickou indukciou je daný operátorom rotácie, k potenciálu môžme naozaj ľubovoľne pridávať ďalšie členy, pokiaľ sú tieto gradientom nejakej funkcie (vychádzajúc z faktu, že rotácia gradientu je nulová). Ukázali sme, že sa dá urobiť netriviálne, ale nie veľmi komplikované zovšeobecnenie modelu, ktoré by viedlo k analógii so slabou interakciou. Vymieňali by sa tri druhy peňazí namiesto jedného a model by mal opäť kalibračnú symetriu. Podobne by sa dalo pracovať aj so

silnou interakciou.
Ďalej sme naznačili, ako sa modelom dajú opísať vlny prislúchajúce poliam elementárnych častíc. Z tejto časti vyplynula nutnosť upraviť model do podoby, kde je dovolené obchodovať so zlatom. Nakúpime v jednom štáte, prenesieme do druhého, predáme a pri návrate zameníme peniaze. Touto úpravou otvoríme nové možnosti zarábania a po fyzikálnej stránke zavedieme čosi podobné Higgsovmu mechanizmu. Vo fyzike elementárnych častíc sa týmto mechanizmom popisuje pôvod hmotnosti častíc. Opäť narazíme na isté kalibračné symetrie podobné tým predošlým. Teda lepšie povedané, pridanie obchodu so zlatom nepokazí symetrie, ktoré už v modeli boli prítomné predtým.
V záverečnej kapitole sme matematicky korektným spôsobom ukázali, že kalibračná symetria je naozaj prítomná. Použili sme prípad uzavretého okruhu štyroch štátov, kde sme uvažovali nejaké všeobecné výmenné kurzy dané násobením obnosu peňazí, ktorý vymieňame. Potom sme sa pozreli, ako sa zmení celkový zárobok, ak všetky štyri štáty prenastavnia svoju menu a podľa toho aj výmenný kurz. Výsledkom bol rovnaký zárobok, ako pre prípad pôvodnej konfigurácie. Rovnakým postupom sme ukázali, že pridanie obchodu so zlatom túto kalibračnú symetriu nijako neovplyvní - ak sa raz dá zarábať, potom škálovanie mien tento zárobok zachováva. V úplnom závere práce sme poukázali na niekoľko sympatických momentov, kde ekonómia a diferenciálna geometria našli spoločnú reč. (Teda presnejšie povedané, rovnakým jazykom boli opísané diametrálne odlišné prostredia ako zisk z obchodu s peniazmi a magnetické pole. V bežnom živote ľudí zvykne pobaviť, keď narazia na slovo, ktoré má v rozličných jazykoch rôzne významy, ale píše sa rovnako. Ak má teda niekto dostatok zručností v ekonómii aj matematike, toto bola príležitosť aby sa dobre zabavil.)

Literatúra

[1] Sean M. Carroll. *The particle at the end of the universe: the hunt for the Higgs and the discovery of a New World.* Oneworld Publications, London, 2012. OCLC: 819379455.

[2] M. Fecko. Menej tradičné aplikácie modernej diferenciálnej geometrie vo fyzike, habilitačná práca. 2001.
dostupné na stránke
http://davinci.fmph.uniba.sk/~fecko1/habil/habilpraca.pdf.

[3] M. Fecko. *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov.* Iris, 2004, 2008, 2018.

[4] M. Fecko. Padanie mačky a matematická fyzika. *.týždeň*, 4., 2014.
dostupné na stránke
http://davinci.fmph.uniba.sk/~fecko1/referaty/macka_tyzden1.jpg
http://davinci.fmph.uniba.sk/~fecko1/referaty/macka_tyzden2.jpg.

[5] Juan Maldacena. The symmetry and simplicity of the laws of physics and the Higgs boson. *European Journal of Physics*, 37(1):015802, nov 2015.

[6] Kenneth Young. Foreign exchange market as a lattice gauge theory. *American Journal of Physics*, 67:862–868, 10 1999.