Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Noetherovej veta s bakalárskou matematikou

Bakalárska práca

2023

Ľuboš Ravas

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Noetherovej veta s bakalárskou matematikou

Bakalárska práca

Študijný program:	Fyzika
Študijný odbor:	Fyzika
Školiace pracovisko:	Katedra teoretickej fyziky
Školiteľ:	Doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.

Bratislava, 2023
Ľuboš Ravas

57369903

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Ľuboš Ravas
Študijný program: fyzika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: fyzika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Nötherovej veta s bakalárskou matematikou
Noether theorem with undergraduate mathematics

Anotácia: Nötherovej veta z roku 1918 dnes patrí do zlatého fondu teoretickej fyziky. Vznikla na objednávku Davida Hilberta a Alberta Einsteina, keď im nebolo jasné, ako to je v nedávno vzniknutej všeobecnej teórii relativity so zachovaním energie. Emmy Nötherová sa na to pozrela a odvtedy máme jej vetu. (Presnejšie dve.) Objavila, že zákony zachovania vo fyzike sú úzko späté so (spojitými) symetriami účinkového integrálu.

Jej pôvodný článok nie je ľahké čítanie. Odvtedy sa rozvinul modernejší matematický jazyk na opis objektov v ňom a manipulácií s nimi (hlavne aparát diferenciálnych foriem a prípadne formy na tzv. jetových fibrovaných varietách), ale samotné formy sú až v Matematickej fyzike č.2 a jetové variety ani tam.

Avšak už aj s bežnou bakalárskou matematikou sa dá o tej vete, ktorá sa vo fyzike najčastejšie spomína, povedať dosť na to, aby to stálo za to. Dokonca je lepšie, keď poznáme tieto jednoduchšie prístupy skôr, ako sa do toho pustíme na hlbšej úrovni cez formy. Jedno z miest, odkiaľ sa dá vyštartovať, je tvrdenie z teoretickej mechaniky o cyklických súradniciach a z nich vyplývajúcich zákonoch zachovania zovšeobecnených hybností. Ak sa na toto (jednoduché a známe) tvrdenie správne pozrieme, uvidíme tam aj tie symetrie aj tie zákony zachovania. A podobne sa dá celkom ľahko pochopiť aj jej typické používanie v teórii poľa.

Cieľ: Zoznámiť sa s Nötherovej vetou na úrovni bežnej bakalárskej matematiky, zrátať si nejaké jej aplikácie a spísať o tom text zrozumiteľný a poučný pre motivovaných spolužiakov.

Literatúra: Stone, Goldbart: Mathematics for Physics, CUP 2009

Vedúci: doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.
Katedra: FMFI.KTF - Katedra teoretickej fyziky
Vedúci katedry: doc. RNDr. Tomáš Blažek, PhD.

Dátum zadania: 01.07.2022

Dátum schválenia: 08.08.2022

doc. RNDr. Tomáš Blažek, PhD.
garant študijného programu

57369903

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

....

študent vedúci práce

Čestné vyhlásenie

Vyhlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne s použitím uvedenej literatúry.

. . . .

Ľuboš Ravas

Poďakovanie: Rád by som poďakoval môjmu školiteľovi za jeho veľkú pomoc, ochotu a trpezlivosť pri vedení ma počas písania tejto práce.

Abstrakt

Táto práca sa venuje mechanickej verzii Noetherovej vety z pohľadu cyklických súradníc a symetrií. Najskôr sa robí variácia účinku a z nej odvodnenie Lagrangeových rovníc a následne zákonov zachovania. V druhej časti sa zaoberá cyklickými súradnicami a ako jednoducho sa z cyklických súradníc dajú získať zákony zachovania. Ďalej sa zameria na súvis grúp, symetrií a cyklických súradníc. V nasledujúcej časti sleduje konkrétny príklad, z ktorého vyvodí ako metóda cyklických súradníc závisí na zvolených súradniciach, čo je jej veľkou nevýhodou. Táto časť pokračuje využitím daného konkrétneho príkladu na nájdenie metódy pre hľadanie symetrií Lagrangeovej funkcie, pričom táto metóda je nezávislá od voľby súradníc. Následne je táto metóda zovšeobecnená a použitá na inom konkrétnom príklade.

Kľúčové slová: Noetherovej veta, symetrie, cyklické súradnice, Lagrangeova mechanika

# Abstract

The thesis discusses mechanical version of Noether's theorem from the perspective of cyclic coordinates and symmetries. First, variation of action is explicitly computed and from that Lagrange equations as well as conservation laws are derived. In second part it deals with cyclic coordinates and the fact how easy it is to get conservation laws from them. Next it focuses on connection among groups, symmetries and cyclic coordinates. In the next part it follows a specific example, from which it deduces how method of cyclic coordinates depends on choice of coordinates, which is a big disadvantage. This part continues with using this example to find a method that searches for all symmetries of Lagrangian. This method is independent of the choice of coordinates. Finally, the method is generalized and consequently applied to another example.

Keywords: Noether's theorem, symmetries, cyclic coordinates, Lagrangian mechanics

Predhovor

Noetherovej veta bola publikovaná nemeckou matematičkou Emmy Noetherovou v roku 1918. Táto veta a taktiež jej autorka mali veľký vplyv na teoretickú fyziku a fyziku všeobecne. Sám Albert Einstein opísal pani Noetherovú ako najvýznamnejšiu ženu v histórii matematiky. Hoci sa dožila len 53 rokov, kedy čelila predsudkom kvôli pohlaviu a židovskému pôvodu, dokázala sa presadiť vo viacerých oblastiach, ako napríklad abstraktná algebra či teoretická fyzika. Veta, ktorej sa venujeme v tejto práci patrí k jej objavom práve v oblasti fyziky. Hovorí o vzťahoch medzi symetriami účinku a zákonmi zachovania a to nie len v klasickej mechanike, ktorej zjednodušenej verzii sa venuje táto práca, ale aj v teórii poľa a v teórii relativity. Túto tému sme si vybrali, pretože aj keď je Noetherovej veta známa v teoretickej fyzike opísaná zložitejšími metódami, myslíme si, že je výhodné sa s ňou stretnúť už skôr. To je dôvod prečo sme sa snažili opísať túto vetu, aj keď len jej menšiu časť, jazykom, ktorý je pochopiteľný pre každého študenta bakalárskeho kurzu fyziky. Preto je táto práca určená každému koho zaujíma fyzika, ale ešte nemá naštudovaný dostatočný aparát na zvládnutie Noetherovej vety v plnej forme. Táto práca predpokladá u čitateľa základné znalosti z Lagrangeovej mechaniky, diferenciálneho a integrálneho počtu a minimálne poznanie grúp a variačného počtu.

Obsah

Úvod

Cieľom tejto práce je opísanie mechanickej verzie Noetherovej vety pomocou matematiky pochopiteľnej študentom bakalárskeho programu fyziky. Je rozčlenená na tri kapitoly, pričom prvá sa venuje hlavne účinku, ako z jeho variácie získať Lagrangeove rovnice a potom ako získať zákony zachovania pri nulovej zmene účinku. V druhej kapitole prejdeme na cyklické súradnice, ukážeme, že za cyklické súradnice účinku ale aj lagranžiánu dostaneme zákony zachovania. Potom prejdeme na to ako grupy súvisia so symetriami a že je výhodné symetrie opisovať pomocou grúp. Ďalej si zavedieme grupu symetrie a pozrieme sa na jej podgrupy a ako sú vhodné na opisovanie cyklických súradníc vo funkcii. Krátko sa pozrieme na symetrie samotné a potom si ukážeme ako to všetko využijeme v Lagrangeovej mechanike. V poslednej kapitole sa vrátime k cyklickým súradniciam, konkrétne k ich veľkej nevýhode. Na konkrétnom príklade si túto nevýhodu prejdeme a potom na tom istom prípade ukážeme metódu, ktorá taký problém nemá. Na záver metódu zovšeobecníme a predvedieme na inom príklade.

Kapitola 1

Účinok

Jednoducho povedané, Noetherovej veta hovorí, že zákony zachovania vieme nájsť vďaka symetriám účinku. V tejto kapitole použijeme variačný počet a z účinku odvodíme Lagrangeove rovnice (1.20) a potom aj ako získať zákony zachovania z nulovej zmeny účinku.

1.1 Variácia účinku

Účinok je definovaný ako

$$S \equiv \int_{t_0}^{t_1} L\left(t, q^a, \dot{q}^a\right) dt, \tag{1.1}$$

kde

$$L\left(t, q^a, \dot{q}^a\right) \equiv L\left(t, q^1, q^2, ..., q^n, \dot{q}^1, \dot{q}^2, ..., \dot{q}^n\right), \tag{1.2}$$

je Lagrangeova funkcia, tzv. lagrangeián. Ideme robiť malé zmeny v súradniciach a následne budeme hľadať také, aby sa nám účinok nezmenil.

$$q^a \to q^a + \delta q^a \tag{1.3}$$

$$\dot{q}^a \to \dot{q}^a + \delta \dot{q}^a \tag{1.4}$$

$$t \to t + \delta t \tag{1.5}$$

Keďže času sa teraz nejdeme venovať tak budeme brať $\delta t \equiv 0$. Takže posúvame súradnice q^a a $\dot{q}^a$ a hľadáme také posunutia, aby sa nám nezmenil účinok. To znamená, že máme:

$$S \to S + \delta S \tag{1.6}$$

a budeme hľadať δS, pre ktoré bude platiť:

$$\delta S = 0 \tag{1.7}$$

Najskôr ale musíme rozpísať δS a na to využijeme definíciu účinku (1.1).

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^a} \delta q^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \delta \dot{q^a} \right) dt \tag{1.8}$$

Pripočítame nulu v podobe:

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) \delta q^a - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) \delta q^a \tag{1.9}$$

a následne využijeme vzorec pre deriváciu súčinu:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \delta q^a \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) \delta q^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \frac{d}{dt} \left(\delta q^a \right), \tag{1.10}$$

z čoho dostaneme:

$$\begin{align} \delta S &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^a} \delta q^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \frac{d}{dt} \left(\delta q^a \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) \delta q^a - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) \delta q^a \right) dt \tag{1.11} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^a} \delta q^a + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \delta q^a \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) \delta q^a \right) dt. \tag{1.12} \end{align}$$

Rozdelíme na dva integrály:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^a} \delta q^a - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) \delta q^a \right) dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \delta q^a \right) dt \tag{1.13}$$

Vidíme, že druhý integrál vieme spočítať pomocou Newton-Leibnizovej formuly:

$$\int_a^b \frac{df(x)}{dx} dx = f(a) - f(b) \tag{1.14}$$

a tak dostávame:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \delta q^a \left(\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) \right) dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \delta q^a \right]_{t_0}^{t_1} \tag{1.15}$$

Po využití podmienky (1.7) máme rovnicu

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \delta q^a \left(\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) \right) dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \delta q^a \right]_{t_0}^{t_1} \tag{1.16}$$

1.2 Pohybové rovnice

V tejto časti odvodíme Lagrangeove rovnice z (1.16), kde budeme vo variácií držať δq^a rovné nule v oboch hraniciach, teda na oboch koncoch bude variácia nulová, tzv. pevné konce. Keď pri variácií v časti 1.1 budeme držať pevné konce, teda bude platiť $\delta q^a(t_0) = \delta q(t_1) = 0$, dostaneme výraz, z ktorého vieme dostať Lagrangeove rovnice. Podmienka pevných koncov nám spôsobí, že

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \left(t_1 \right) \delta q^a \left(t_1 \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \left(t_0 \right) \delta q^a \left(t_0 \right) = 0 - 0 = 0. \tag{1.17}$$

Takže nám v rovnici (1.16) ostane len prvý člen:

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \delta q^a \left(\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) \right) dt \tag{1.18}$$

a aby toto platilo pre ľubovoľné t_0 a t_1, tak musí platiť, že

$$0 = \delta q^a \left(\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) \right). \tag{1.19}$$

Máme súčin a ten aby bol nulový, tak musí aspoň jeden zo súčiniteľov byť rovný nule. Vzhľadom na to, že ak by platilo $\delta q^a = 0$, tak v každom čase nie je pre žiadnu súradnicu žiadna variácia, resp. žiadne infinitezimálne posunutie. V tom prípade by bolo zbytočné všetko, čo sme spravili, čiže to pre nás nie je zaujímavé a budeme brať ten druhý prípad, t.j.

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right), \tag{1.20}$$

čo sú pohybové rovnice v Lagrangeovej mechanike, resp. Lagrangeove rovnice.

1.3 Zákony zachovania

Predstavme si, že podmienka (1.7) je plnená bez ohľadu na platnosť pohybových rovníc. Potom ak tieto pohybové rovnice (1.20) platia, prvý člen v (1.16) dá nulu a aby platilo (1.7), musí platiť:

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \delta q^a \right]_{t_0}^{t_1} = 0, \tag{1.21}$$

čo je náš zákon zachovania. Keďže

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \equiv p_a \tag{1.22}$$

sa zvykne volať a-ta zovšeobecnená hybnosť, tak rovnicu (1.21) môžeme napísať ako

$$[p_a \delta q^a]_{t_0}^{t_1} = 0 \tag{1.23}$$

a teda zachovávajúci sa výraz bude v prípade konštantného $\delta q^a = const.$ a-ta zovšeobecnená hybnosť.

Kapitola 2

Cyklické súradnice

Cyklické súradnice sú také súradnice, ktoré sa v Lagrangeovej funkcií môžu nachádzať, ale v nej explicitne nevystupujú. V tejto kapitole si ukážeme ako súvisia takéto súradnice s Noetherovej vetou. Najskôr sa pozrieme, ako z cyklických súradníc dostaneme zákony zachovania z účinku. Následne sa pozrieme ako ich vieme získať rovno z Lagrangeových rovníc (1.20) a nakoniec uvidíme čo majú spoločné so symetriami a grupami.

2.1 Súvis cyklických súradníc s časťou 1.3

V tejto časti si odvodíme zákony zachovania pomocou cyklických súradníc. Majme systém s účinkom (1.1) a lagranžiánom $L\left(q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^2\right)$, ktorý má cyklickú súradnicu q^1 a povedzme, že sa nezmení vzhľadom na transláciu v prvej súradnici:

$$\delta q^1 = K = const. \tag{2.1}$$

$$q^1 \to q^1 + K. \tag{2.2}$$

To nám nezmení lagranžián, pretože nezávisí od tejto súradnice a teda nám to nezmení ani účinok, resp.

$$S' - S = \delta S = 0. \tag{2.3}$$

Čiže sme dostali, že $\delta S = 0$, čo nám v časti 1.3 dalo (1.21). To v našom prípade bude

$$0 = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1}\delta q^1\right]_{t_0}^{t_1} = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1}K\right]_{t_0}^{t_1} \tag{2.4}$$

$$= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1}\right]_{t_0}^{t_1} \tag{2.5}$$

K sme dali preč lebo je to konštanta nezávislá od času a teda sme ju mohli vykrátiť. Vyšlo nám, že veličina zachovávajúca sa v čase je $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1}$. Táto veličina sa nazýva prvá zovšeobecnená hybnosť, čiže sme našli zákon zachovania hybnosti v smere súradnice q^1:

$$[p_1]_{t_0}^{t_1} \equiv \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1}\right]_{t_0}^{t_1} = 0 \tag{2.6}$$

2.2 Zákon zachovania za cyklické súradnice z (1.20)

Môžeme si všimnúť, že účinok je len časový integrál z Lagrangeovej funkcie (1.2), čo znamená, že ak zmena nejakej súradnice nezmení lagranžián, tak sa nezmení ani účinok. To ale znamená, že nám stačí hľadať cyklické súradnice Lagrangeovej funkcie. Z tohto faktu sa dá jednoducho odvodiť zákon zachovania priamo z Lagrangeových rovníc (1.20).

Majme teda lagranžián, ktorý nezávisí na prvej súradnici, čo znamená:

$$\frac{\partial L}{\partial q^1} = 0. \tag{2.7}$$

Dosadíme (2.7) do Lagrangeových rovníc (1.20) a dostaneme:

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1} - \frac{\partial L}{\partial q^1} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1} = \frac{d}{dt}p_1. \tag{2.8}$$

Z toho máme zachovanie hybnosti v čase:

$$\frac{d}{dt}p_1 = 0. \tag{2.9}$$

Teraz si pozrime, čo sa stane, ak lagranžián nezávisí na čase. Čas je cyklickou súradnicou a teda platí:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0. \tag{2.10}$$

lagranžián však od času závisí a to cez zvyšné súradnice $q^a(t), \dot{q}^a(t)$, a preto keď derivujeme Lagrangeovu funkciu (1.2) podľa času v zmysle úplnej časovej derivácie, t.j. využijeme vzorec pre deriváciu zloženej funkcie a potom využijeme (2.10):

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q^a}\frac{\partial q^a}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\frac{\partial \dot{q}^a}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial q^a}\frac{\partial q^a}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\frac{\partial \dot{q}^a}{\partial t}. \tag{2.11}$$

Lagrangeove rovnice (1.20) nám po jednoduchej úprave dajú:

$$\frac{\partial L}{\partial q^a} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}, \tag{2.12}$$

čo využijeme v (2.11)

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right)\dot{q}^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\frac{d\dot{q}^a}{dt} \tag{2.13}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\dot{q}^a\right) \tag{2.14}$$

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\dot{q}^a - L\right). \tag{2.15}$$

Teraz si ukážeme, čomu sa rovná $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}$. Vieme, že L=T-U a U nezávisí od $\dot{q}^a$, čiže U nám pri derivácii celé vypadne. T môžeme napísať ako

$$T = \frac{1}{2} T_{ab} \dot{q}^a \dot{q}^b, \tag{2.16}$$

kde T_{ab} je matica kinteickej energie a už nezávisí od $\dot{q}^a$. Využijúc toto dostaneme:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^a} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} \left(\frac{1}{2} T_{cb} \dot{q}^c \dot{q}^b \right) \tag{2.17}$$

$$= \frac{1}{2} T_{cb} \dot{q}^b \delta^c_a + \frac{1}{2} T_{cb} \dot{q}^c \delta^b_a \tag{2.18}$$

$$= \frac{1}{2} T_{ab} \dot{q}^b + \frac{1}{2} T_{ca} \dot{q}^c \tag{2.19}$$

Keďže T_{ab} je symetrická a štvorcová matica, tak dostaneme:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} = T_{ab} \dot{q}^b \tag{2.20}$$

Dosadíme (2.20) do (2.15):

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \dot{q}^a - L \right) = \frac{d}{dt} \left(T_{ab} \dot{q}^b \dot{q}^a - L \right) \tag{2.21}$$

$$= \frac{d}{dt} \left(2 \cdot \frac{1}{2} T_{ab} \dot{q}^b \dot{q}^a - L \right) = \frac{d}{dt} (2T - L) \tag{2.22}$$

$$= \frac{d}{dt} (2T - (T - U)) = \frac{d}{dt} (2T - T + U) \tag{2.23}$$

$$0 = \frac{d}{dt} (T + U) = \frac{d}{dt} E \tag{2.24}$$

Dostali sme, že sa nám celková mechanická energia E takého systému v čase nemení:

$$\frac{dE}{dt} = 0, \tag{2.25}$$

teda zákon zachovania mechanickej energie.

2.3 Symetrie a cyklické súradnice

V tejto časti prepojíme istú grupu, symetrie a cyklické súradnice.

2.3.1 Grupa symetrie

Grupa je množina spĺňajúca isté podmienky:
1. Má operáciu (zvyčajne nazývanú súčin), ktorá je asociatívna a grupa je voči tejto operácii uzavretá. 2. Obsahuje neutrálny prvok e.
3. Každý prvok grupy má k sebe inverzný prvok.
Toto sú axiómy grupy a každá grupa ich musí spĺňať. Symetrie sú invariantnosti voči

akciám, napríklad keď otočíme homogénnu guľu, tak nepozorujeme žiadnu zmenu, teda guľa je invariantná voči rotáciám. Grupy môžu slúžiť ako matematický jazyk na opis takýchto symetrií a pre každú symetriu sa dá spraviť grupa. Nazvime si ju grupa symetrie G pričom jej prvky robia to, že ak nimi pôsobíme na niečo symetrické (vykonávame akciu), tak sa daná symetrická vec nezmení vďaka tej symetrii (invariantnosť). Táto grupa spĺňa axiómy:
1. Pôsobíme prvkom g_1 a nič sa nezmení, následne pôsobíme prvkom g_2 a nič sa nezmení, teda keď budeme pôsobiť prvkom $g_1 \circ g_2 = g_3$, opäť sa nič nezmení. Napríklad otočenie gule o uhol α a o uhol β je to isté ako otočenie o $\alpha + \beta$
2. Neutrálny prvok bude, že nepôsobíme nijako, napríklad otočenie o uhol 0 alebo posunutie o 0.
3. Inverzný prvok bude, že tú zmenu vykonáme naspäť, napríklad otočenie gule o $-\alpha$ je inverzné k otočeniu o α.
Nás zaujíma grupa, ktorá bude pôsobiť takým spôsobom, že bude posúvať nejakú funkciu v takých súradniciach, od ktorých nezávisí.

Majme n-rozmerný priestor, so súradnicami $x = (x^1, x^2, ..., x^n)$, a funkciami $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}. \tag{2.26}$$

Budeme mať grupu s prvkami $a \equiv (a_1, a_2, ..., a_n)$, $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$, ktorá bude na funkcie pôsobiť pravými akciami:

$$\mathcal{R}_a : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \tag{2.27}$$

$$\mathcal{R}_a f(x) := f(x + a) . \tag{2.28}$$

Symetrická bude funkcia, ktorá spĺňa vzťah

$$\mathcal{R}_a f(x) = f(x) . \tag{2.29}$$

Je potrebné si uvedomiť, že aby sa funkcia nezmenila aplikovaním takejto pravej akcie, nesmie funkcia závisieť od takej premennej, ktorú posúvame netriviálne. Názorne demonštrujme na pravej akcii $\mathcal{R}_{(0,a_2,a_3,0,0,...,0)}$. Tá nám bude posúvať funkcie v dvoch smeroch a preto aby platila rovnica (2.29), čo je v našom prípade

$$\mathcal{R}_{(0,a_2,a_3,0,0,...,0)} f(x) = f(x) , \tag{2.30}$$

nesmie $f(x)$ byť funkciou x^2 a x^3, resp. má platiť

$$f(x) = f\left(x^1, x^4, x^5, ..., x^n\right) . \tag{2.31}$$

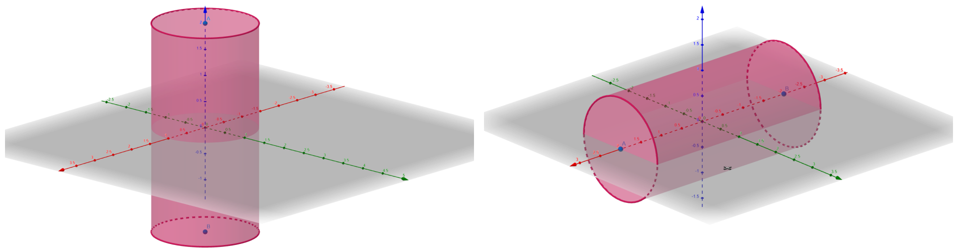
Ľahko vidno, že jediné funkcie, ktoré takýmto spôsobom prežijú pravú akciu posúvajúcu o a také, čo má všetky prvky $a_1, a_2, ..., a_n$ nenulové, budú funkcie nezávislé na všetkých súradniciach. To spĺňajú iba konštantné funkcie $f(x) \equiv const.$, a tie sú pre nás nezaujímavé. Druhým extrémnym prípadom by boli akcie s $a = (0, 0, ..., 0) \equiv 0$, kde by rovnicu (2.29) spĺňali úplne všetky funkcie, lebo ide o triviálne posunutie, a to by sme sa veľa nedozvedeli. My sa preto budeme venovať len takým akciám, ktorých a budú mať nejaké nulové komponenty a aspoň jednu nenulovú. Teraz si predstavíme tzv. jednoparametrické podgrupy grupy G, z ktorých si vieme poskladať hocijaké posunutie o ľubovoľný počet súradníc (samozrejme maximálne n).

2.3.2 Podgrupa

V tejto časti sa budeme zaoberať podgrupami grupy G s jedným parametrom $a_k \in \mathbb{R}$, kde $k = 1, 2, ..., n$ nám hovorí, na ktorom mieste v a sa parameter nachádza. Tieto podgrupy nám našu funkciu posunú v smere len jednej premennej a ich pravé akcie vyzerajú: $\mathcal{R}_{a_k} = \mathcal{R}_{(0,0,...,a_k,0,...,0)}$. Zložením dvoch akcií z dvoch rôznych podgrúp dostaneme posunutie v dvoch rôznych smeroch $\mathcal{R}_{a_k}\mathcal{R}_{a_{k+1}} = \mathcal{R}_{(0,...,0,a_k,a_{k+1},0,...,0)}$, a preto nám na opísanie akéhokoľvek posunutia stačia takéto jednoparametrické podgrupy. Keď budeme pôsobiť takouto podgrupou na funkciu a tú funkciu to nezmení, tak od tej konkrétnej súradnice (v závislosti od podgrupy) táto funkcia nezávisí, resp. je to cyklická súradnica.

2.3.3 Symetrie

Symetrické útvary sú zaujímavé, pretože my s nimi niečo spravíme, a tieto útvary sa správajú ako keby sa nič nezmenilo. Predstavme si napríklad jednofarebnú homogénnu guľu, ktorú držíme v ruke. Keď ju otočíme ľubovoľným spôsobom, tak vyzerá úplne rovnako, ako keby sa nič nestalo. Guľa je ale veľmi symetrická, tak si teraz zoberme valec. Otočíme ho okolo osi prechádzajúcej stredom oboch jeho podstáv a nič sa nezmení (na obrázku 2.1 v časti (a) okolo modrej a v časti (b) okolo červenej). Ak ho však otočíme okolo osi napríklad kolmej na túto os, tak už je pozorovateľná zmena (napríklad ak v obrázku 2.1 v časti(a) otočíme valec okolo zelenej osi o 90 stupňov, dostaneme časť (b)).



(a) (b)

Obr. 2.1: Valec

Späť na našom priestore sa pozrime na symetrie funkcií. Tie vyzerajú tak, že ich posunieme v niektorej súradnici a ony sa nezmenia. Môžeme si to napríklad demonštrovať na funkcii

$$f(x,y) = \cos x. \tag{2.32}$$

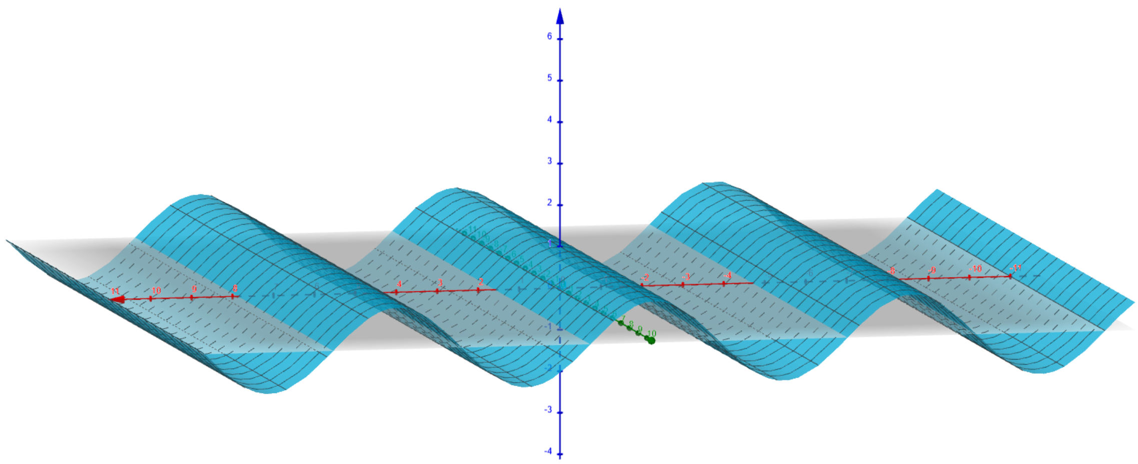
Vidíme, že funkcia nezávisí od y, aj keď vo všeobecnosti môže. Keď budeme y meniť, nebude to nijako funkciu ovplyvňovať. To môžeme vidieť aj na obrázku 2.2, kde červená os je x a zelená je y. V jazyku pravých akcií:

$$\mathcal{R}_{(0,a_2)} f(x,y) = f(x+0, y+a_2) = \cos(x+0) = \cos(x) . \tag{2.33}$$

Pozornejší čitateľ si všimne, že aj posunutím po ose x o konkrétne hodnoty vieme dosiahnuť to, že sa funkcia nezmení. Toto však neplatí pre všetky $a_k \in \mathbb{R}$, ale iba pre konkrétne hodnoty

$$\mathcal{R}_{(2\pi l,0)} f(x,y) = f(x+2\pi l, y+0) = cos(x+2\pi l) = cos(x) , \tag{2.34}$$

kde $l \in \mathbb{Z}$.



Obr. 2.2: $f(x,y) = \cos x$

Keď sa pozrieme na (2.33), môžeme si všimnúť, že y nevystupuje vo funkcii (2.32). Na grafe tejto funkcie 2.2 vidíme, že je symetrická práve voči posunutiam v smere y. Z toho vieme usúdiť, že niektoré symetrie funkcií súvisia s chýbajúcimi súradnicami. Takýto poznatok vieme využiť vo fyzike, kde sa v našom prípade budeme pozerať na symetrie Lagrangeovej funkcie vďaka cyklickým súradniciam.

2.3.4 Lagrange

Našim priestorom teraz bude $\mathbb{R}^{2n+1}\left(t, q^1, ..., q^n, \dot{q}^1, ..., \dot{q}^n\right)$, kde t je čas, $q^1, ..., q^n$ sú zovšeobecnené súradnice a $\dot{q}^1, ..., \dot{q}^n$ sú zovšeobecnené rýchlosti. Funkcie, ktorým sa budeme venovať a ktorých symetrie budeme hľadať sú Lagrangeove funkcie (1.2):

$$L\left(t, q^a, \dot{q}^a\right) \equiv L\left(t, q^1, q^2, ..., q^n, \dot{q}^1, \dot{q}^2, ..., \dot{q}^n\right), \tag{2.35}$$

spĺňajúce Lagrangeove rovnice. Na $L\left(t, q^a, \dot{q}^a\right)$ budeme pôsobiť podgrupami z časti 2.3.2 aby sme našli cyklické súradnice. Našu všeobecnú funkciu $f\left(x\right)$ s n premennými teda nahradí lagranžián $L\left(t, q^a, \dot{q}^a\right)$ s $2n+1$ premennými. Hľadáme cyklické súradnice, čiže vzťah, ktorý potrebujeme splniť je:

$$R_{b_k}{}^{1} L\left(t, q^a, \dot{q}^a\right) = L\left(t, q^a, \dot{q}^a\right). \tag{2.36}$$

V tomto prípade bude naše $k = 0, 1, 2, ..., 2n$, pričom $k = 0$, resp. $R_{(b_0,0,0,...,0)}$ bude pre čas, $k = 1$ pre q^1, ..., $k = n$ pre q^n, $k = n+1$ pre $\dot{q}^1$, ... a $k = 2n$ pre $\dot{q}^n$.

Zvoľme si najskôr $k = 0$ a položme $b_0 \equiv b$, teda

$$R_{(b,0,...,0)} L\left(t, q^1, ..., q^n, \dot{q}^1, ..., \dot{q}^n\right) = L\left(t + b, q^1 + 0, ..., q^n + 0, \dot{q}^1 + 0, ..., \dot{q}^n + 0\right) \tag{2.37}$$

$$\stackrel{!}{=} L\left(t, q^1, ..., q^n, \dot{q}^1, ..., \dot{q}^n\right). \tag{2.38}$$

Z toho vieme, že lagranžián nezávisí explicitne od času $L \equiv L\left(q^a, \dot{q}^a\right)$, resp. čas je cyklická súradnica. Systému, ktorého lagranžián má takúto symetriu, sa zachováva celková mechanická energia. Toto sme ukázali v časti 2.2.

Ďalej ak $0 < k < n+1$ a $b_a \equiv b$, tak

$$R_{(0,0,...,b,0,...,0)} L\left(t, q^1, ..., q^n, \dot{q}^1, ..., \dot{q}^n\right) = L(t, q^1, ..., q^a + b, q^{a+1}, ..., q^n, \dot{q}^1, ..., \dot{q}^n) \tag{2.39}$$

$$\stackrel{!}{=} L\left(t, q^1, ..., q^a, q^{a+1}, ..., q^n, \dot{q}^1, ..., \dot{q}^n\right). \tag{2.40}$$

To znamená, že lagranžián nezávisí od q^a, teda a-ta súradnica je cyklická. V takomto prípade sa nám zachováva hybnosť v smere q^a, resp. platí zákon zachovania hybnosti v tomto smere, čo sme tiež ukázali v časti 2.2.

Prípadom kedy $k = a, n < a \leq 2n$ sa zaoberať nebudeme, pretože rýchlosti sa vždy nachádzajú v lagranžiáne.

[1] Namiesto a_k používanom v kapitole (2.3.2) sme si teraz zvolili b_k, pretože index a sme chceli použiť v lagranžiáne.

Kapitola 3

Nevýhoda metódy cyklických súradníc

V tejto kapitole sa budeme najskôr ešte trochu venovať cyklickým súradniciam, resp. ich slabej stránke. Na jednoduchom príklade si ukážeme, ako nám výber súradníc môže ovplyvniť, ktoré zákony zachovania z cyklických súradníc dostaneme. To pre nás znamená, že hľadanie symetrií cez cykličnosť súradníc je síce jednoduché, ale nemusí dať všetky tieto symetrie. Inak povedané, cyklické súradnice sú závislé na výbere konkrétnych súradníc. Následne si na rovnakom príklade ukážeme, ako do prvého rádu nájsť všetky zákony zachovania a potom túto metódu zovšeobecníme. Lagrangeove funkcie v tejto časti budú všetky nezávislé od času a časovú súradnicu kvôli prehľadnosti nebudeme písať ani spomínať a takisto zákon zachovania energie z toho vyplývajúci.

3.1 Závislosť od výberu súradníc

Vyberieme si jednoduchý lagranžián, ktorý bude mať v kartézskej súradnicovej sústave 4 súradnice a to 2 za polohu (x, y) + 2 za rýchlosť $(\dot{x}, \dot{y})$:

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = T(\dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \tag{3.1}$$

Pozorný čitateľ si hneď všimne, že v lagranžiáne (3.1) chýbajú dve súradnice, ktoré by tam mohli byť a to x a y. Z (2.3.4) vieme, že by sme mali za dve chýbajúce súradnice polohy dostať dva zákony zachovania hybností. Overíme dosadením (3.1) do Lagrangeových rovníc (1.20), tak ako sme pre všeobecný lagranžián spravili na konci časti 2.2, pričom očakávame, že dostaneme (2.9):

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L(\dot{x},\dot{y})}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L(\dot{x},\dot{y})}{\partial x} \qquad 0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L(\dot{x},\dot{y})}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L(\dot{x},\dot{y})}{\partial y} \tag{3.2}$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial L(\dot{x},\dot{y})}{\partial \dot{x}} \qquad = \frac{d}{dt}\frac{\partial L(\dot{x},\dot{y})}{\partial \dot{y}} \tag{3.3}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m(2\dot{x})\right) \qquad = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m(2\dot{y})\right) \tag{3.4}$$

$$0 = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = \frac{d}{dt}p_x \qquad 0 = \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = \frac{d}{dt}p_y \tag{3.5}$$

Dostali sme presne to, čo sme očakávali, rovnice (3.5) sú naše spomínané zákony zachovania. Teraz sa pozrime na ten istý lagranžián (3.1), ale v polárnej súradnicovej sústave (r, ϕ), čiže budeme mať $L\left(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}\right)$. Pripravíme si polárne súradnice:

$$x = r\cos\phi \qquad y = r\sin\phi \tag{3.6}$$

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\phi - r\sin(\phi)\,\dot{\phi} \qquad \dot{y} = \dot{r}\sin\phi + r\cos(\phi)\,\dot{\phi} \tag{3.7}$$

$$\dot{x}^2 = \dot{r}^2\cos^2\phi - \dot{r}\dot{\phi}r\sin 2\phi + r^2\sin^2(\phi)\,\dot{\phi}^2 \quad \dot{y}^2 = \dot{r}^2\sin^2\phi + \dot{r}\dot{\phi}r\sin 2\phi + r^2\cos^2(\phi)\,\dot{\phi}^2 \tag{3.8}$$

A teraz dosadíme (3.8) do (3.1) a upravíme využitím goniometrických vzorcov:

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) = L\left(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}\right), \tag{3.9}$$

čím sme našli lagranžián (3.1) v polárnych súradniciach. Vidíme, že chýba súradnica ϕ a teda už očakávame zákon zachovania. Zopakujeme postup ako pri kartézskych súradniciach a dosadíme do Lagrangeových rovníc.

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L\left(r,\dot{r},\dot{\phi}\right)}{\partial\dot{\phi}} - \frac{\partial L\left(r,\dot{r},\dot{\phi}\right)}{\partial\phi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L\left(r,\dot{r},\dot{\phi}\right)}{\partial\dot{\phi}} \tag{3.10}$$

$$0 = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\phi}\right) \tag{3.11}$$

Vyšiel nám zákon zachovania momentu hybnosti voči počiatku, keďže $mr^2 = I$ je moment zotrvačnosti a ϕ je súradnica, ktorá značí otočenie okolo počiatku tak $\dot{\phi} = \omega$ musí byť uhlová rýchlosť otočenia okolo počiatku. Keď dosadíme tieto poznatky do (3.11), tak dostávame:

$$0 = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\phi}\right) = \frac{d}{dt}(I\omega), \tag{3.12}$$

čo je práve zachovanie momentu hybnosti v čase. Aby sme mali všetky zákony v jedných súradniciach, tak si tento prevedieme do kartézskych. Potrebujeme $\dot{\phi}$ a to získame z $\dot{x}$ a $\dot{y}$:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\phi & -r\sin\phi\\ \sin\phi & r\cos\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{r}\\ \dot{\phi}\end{pmatrix} \tag{3.13}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\frac{1}{r}\sin\phi & \frac{1}{r}\cos\phi \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

Z toho:

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}\cos\phi + \dot{y}\sin\phi \\ -\frac{\dot{x}}{r}\sin\phi + \frac{\dot{y}}{r}\cos\phi \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

Použijeme vzťahy (3.6) a dostaneme $\dot{\phi}$:

$$\dot{\phi} = \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{r^2} \tag{3.17}$$

Teraz dosadíme do (3.11) a máme zákon zachovania momentu hybnosti v kartézskych súradniciach:

$$0 = \frac{d}{dt}\left(m\left(\dot{y}x - \dot{x}y\right)\right) \tag{3.18}$$

Ako kontrolu, či sme dostali správnu vec si môžeme predstaviť časticu v trojrozmernom priestore točiacu sa okolo osi z. Veľkosť momentu hybnosti tejto častice bude rovnaká ako to čo sa nám zachováva v (3.18). Veľkosť momentu hybnosti bude:

$$|\vec{L}| = \vec{n} \cdot \vec{L} = \vec{n} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}), \tag{3.19}$$

kde $\vec{n}$ je jednotkový vektor v smere osi okolo ktorej sa točí častica, čo je v našom prípade z.

$$|\vec{L}| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} m\dot{x} \\ m\dot{y} \\ m\dot{z} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot m \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \dot{y}x - \dot{x}y \end{pmatrix} = m\left(\dot{y}x - \dot{x}y\right) \tag{3.20}$$

Vrátiac sa k zákonom zachovania si uvedomíme, že sme v jednej súradnicovej sústave získali dva a v druhej ďalší, iný od prvých dvoch. Vzhľadom na to, že si môžeme vymyslieť súradnicových sústav koľko chceme prichádzame k skutočnosti, že touto metódou nevieme, či sme našli všetky, alebo sme nejaký prehliadli lebo je touto metódou nájditeľný len v nejakých zvláštnych súradniciach. Ak teda potrebujeme nájsť všetky zákony zachovania systému, tak cyklické súradnice nie sú ideálna cesta (jedine v prípade, že by sa niekomu chcelo kontrolovať všetkých nekonečne veľa súradnicových sústav) vzhľadom na to, že táto metóda závisí od zvolených súradníc.

3.2 Všeobecné rovnice pre symetrie lagranžiánu

Teraz si na konkrétnom príklade ukážeme ako nájsť všetky symetrie lagranžiánu. Budeme to robiť posúvaním súradníc o infinitezimálny kúsok ϵV^a a pozeraním sa ako to zmení Lagrangeovu funkciu. Následne tú zmenenú Lagrangeovu funkciu položíme rovnú pôvodnej, resp. ich rozdiel rovný nule a z toho dostaneme rovnice V^a. (Preznačili sme δq^a, ktoré sme používali v kapitole 1, na ϵV^a, kde budeme brať len rád ϵ). Ešte si v tomto novom značení zapíšeme výsledok (1.21), ktorý budeme využívať na hľadanie zákonov zachovania z nájdených V^a:

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} V^a\right]_{t_0}^{t_1} = 0, \tag{3.21}$$

3.2.1 Jednoduchý motivačný príklad

Majme lagranžián 3.1:

$$L\left(x, y, \dot{x}, \dot{y}\right) = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \tag{3.22}$$

ktorého súradnice sa zmenia:

$$x \to x' = x + \epsilon V^x\left(x, y\right) \tag{3.23}$$

$$y \to y' = y + \epsilon V^y\left(x, y\right) \tag{3.24}$$

Ak by sme našli V^x a V^y, tak by sme vedeli o koľko sa posunú súradnice x a y. Keď vieme kam sa nám o kúsok posunú súradnice, tak vieme aj kam nám pôjde lagranžián. Našou úlohou je nájsť práve také V^x a V^y aby sa nám nezmenil lagranžián. Inak povedané:

$$L\left(x', y', \dot{x}', \dot{y}'\right) - L\left(x, y, \dot{x}, \dot{y}\right) = 0 \tag{3.25}$$

Z nášho lagranžiánu vidíme, že potrebujeme $\dot{x}'^2$ a $\dot{y}'^2$.

$$x' = x + \epsilon V^x\left(x, y\right) \qquad y' = y + \epsilon V^y\left(x, y\right) \tag{3.26}$$

$$\dot{x}' = \dot{x} + \epsilon\left(V^{x}_{,x}{}^{1}\dot{x} + V^x_{,y}\dot{y}\right) \qquad \dot{y}' = \dot{y} + \epsilon\left(V^y_{,x}\dot{x} + V^y_{,y}\dot{y}\right) \tag{3.27}$$

$$\dot{x}'^2 = \dot{x}^2 + 2\dot{x}\epsilon\left(V^x_{,x}\dot{x} + V^x_{,y}\dot{y}\right) + o\left(\epsilon^2\right) \qquad \dot{y}'^2 = \dot{y}^2 + 2\dot{y}\epsilon\left(V^y_{,x}\dot{x} + V^y_{,y}\dot{y}\right) + o\left(\epsilon^2\right) \tag{3.28}$$

Zanedbáme členy rádu ϵ^2 a dosadíme (3.28) do (3.25). Možno vidieť, že sa nám vykrátia členy bez epsilonu a potom môžeme vyňať 2ϵ a taktiež to vykrátiť. Dostaneme:

$$0 = V^x_{,x}\dot{x}^2 + V^x_{,y}\dot{y}\dot{x} + V^y_{,x}\dot{x}\dot{y} + V^y_{,y}\dot{y}^2 \tag{3.29}$$

$$= V^x_{,x}\dot{x}^2 + \left(V^x_{,y} + V^y_{,x}\right)\dot{y}\dot{x} + V^y_{,y}\dot{y}^2. \tag{3.30}$$

Toto je rovnica pre V^x a V^y a teda má platiť pre všetky $\dot{x}$ a $\dot{y}$. Aby tá rovnica mohla byť rovná nule pre všetky $\dot{x}$ a $\dot{y}$, musí každý z tých troch členov rovnice 3.30 byť nula. Z toho máme 3 diferenciálne rovnice pre V^x a V^y.

$$V^x_{,x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V^x = f_1\left(y\right) \tag{3.31}$$

$$V^y_{,y} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V^y = f_2\left(x\right) \tag{3.32}$$

$$V^y_{,x} = -V^x_{,y} \qquad \Rightarrow \qquad \partial_x f_2\left(x\right) = -\partial_y f_1\left(y\right) \tag{3.33}$$

[1]Pod $V^x_{,x}$ myslíme $\frac{\partial V^x}{\partial x}$

V (3.33) vidíme, že aj pravá aj ľavá strana musia byť konštanty.

$$\partial_x f_2(x) = -\partial_y f_1(y) = C = const. \tag{3.34}$$

$$\partial_x f_2(x) = C \qquad V^y = f_2(x) = Cx + K_1 \tag{3.35}$$

$$\partial_y f_1(y) = -C \qquad V^x = f_1(y) = -Cy + K_2 \tag{3.36}$$

A teda rovnice pre V^x a V^y sú

$$V^x = -Cy + K_2 \tag{3.37}$$

$$V^y = Cx + K_1 \tag{3.38}$$

Teraz využijeme (3.21)

$$0 = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} V^a\right]_{t_0}^{t_1} = \left[m\dot{x}\left(-Cy + K_2\right) + m\dot{y}\left(Cx + K_1\right)\right]_{t_0}^{t_1} \tag{3.39}$$

$$= \left[m\dot{x}K_2\right]_{t_0}^{t_1} + \left[m\dot{y}K_1\right]_{t_0}^{t_1} + \left[Cm\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right)\right]_{t_0}^{t_1} \tag{3.40}$$

Z toho vidíme, že máme tri zákony zachovania:

$$0 = \left[m\dot{x}\right]_{t_0}^{t_1} \tag{3.41}$$

$$= \left[m\dot{y}\right]_{t_0}^{t_1} \tag{3.42}$$

$$= \left[m\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right)\right]_{t_0}^{t_1} \tag{3.43}$$

Našli sme zákon zachovania hybnosti v smere x a y a zákon zachovania momentu hybnosti, teda tie tri zákony zachovania, ktoré sme očakávali, lebo sme ich mali už z cyklických súradníc. Teraz už však vieme, že to sú všetky prislúchajúce Lagrangeovej funkcii (3.1), keďže táto metóda nezávisí od súradníc, t.j. keď tento postup zopakujeme v hocijakých súradniciach, tak dostaneme tie isté 3 zákony zachovania, len vyjadrené v daných súradniciach. Ako kontrolu si to spravme v polárnych súradniciach $(r,\ \phi)$. Vzhľadom na to, že postup je v podstate rovnaký, budeme čo najstručnejší.

Majme lagranžián:

$$L\left(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}\right) = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2\right), \tag{3.44}$$

posunutím súradníc:

$$r \to r' = r + \epsilon V^r(r, \phi) \tag{3.45}$$

$$\phi \to \phi' = \phi + \epsilon V^\phi(r, \phi) \tag{3.46}$$

a hľadáme také V^r a V^ϕ aby nám platilo:

$$L\left(r', \phi', \dot{r}', \dot{\phi}'\right) - L\left(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}\right) = 0. \tag{3.47}$$

Nájdeme čiarkované súradnice

$$\dot{r}' = \dot{r} + \epsilon\left(V^r_{,r}\dot{r} + V^r_{,\phi}\dot{\phi}\right) \qquad \dot{\phi}' = \dot{\phi} + \epsilon\left(V^\phi_{,r}\dot{r} + V^\phi_{,\phi}\dot{\phi}\right) \tag{3.48}$$

$$\dot{r}'^2 = \dot{r}^2 + 2\dot{r}\epsilon\left(V^r_{,r}\dot{r} + V^r_{,\phi}\dot{\phi}\right) + o\left(\epsilon^2\right) \quad \dot{\phi}'^2 = \dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi}\epsilon\left(V^\phi_{,r}\dot{r} + V^\phi_{,\phi}\dot{\phi}\right) + o\left(\epsilon^2\right) \tag{3.49}$$

Dosadíme do (3.47) a po zanedbaní členov rádu ϵ^2 a nejakých jednoduchých úpravách dostaneme:

$$0 = V^r_{,r}\dot{r}^2 + V^r_{,\phi}\dot{\phi}\dot{r} + r^2V^\phi_{,r}\dot{r}\dot{\phi} + r^2V^\phi_{,\phi}\dot{\phi}^2 + rV^r\dot{\phi}^2 \tag{3.50}$$

$$= V^r_{,r}\dot{r}^2 + \left(V^r_{,\phi} + r^2V^\phi_{,r}\right)\dot{r}\dot{\phi} + \left(r^2V^\phi_{,\phi} + rV^r\right)\dot{\phi}^2. \tag{3.51}$$

Ako vidíme, tak sme dostali trochu inú rovnicu než v kartézskych súradniciach, čo sa dalo očakávať. Postup a logika však sú veľmi podobné a opäť platí, že aby rovnica bola nulová pre všetky $\dot{r}$ a $\dot{\phi}$, tak musí byť nula každý z troch členov. Naše tri rovnice teda budú:

$$V^r_{,r} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V^r = f\left(\phi\right) \tag{3.52}$$

$$rV^\phi_{,\phi} = -V^r = -f\left(\phi\right) \qquad \Rightarrow \qquad V^\phi = -\frac{1}{r}F\left(\phi\right) + g\left(r\right) \tag{3.53}$$

$$V^\phi_{,r} = -r^2V^r_{,\phi} \qquad \Rightarrow \qquad \partial_\phi f\left(\phi\right) = -r^2\frac{1}{r^2}F\left(y\right) - r^2\partial_r g\left(r\right) \tag{3.54}$$

Z toho dostaneme

$$\partial_\phi f\left(\phi\right) = \partial^2_\phi F\left(\phi\right) = -F\left(\phi\right) - r^2\partial_r g\left(r\right) = -F\left(\phi\right) + C \tag{3.55}$$

Zrejme musí byť posledný člen konštanta, lebo v žiadnom inom člene nie je závislosť na r. Z toho vieme vypočítať $g(r)$:

$$-r^2\partial_r g\left(r\right) = C \tag{3.56}$$

$$\partial_r g\left(r\right) = -\frac{C}{r^2} \tag{3.57}$$

$$g\left(r\right) = \frac{C}{r} + K. \tag{3.58}$$

Späť k rovnici (3.55), kde môžeme uhádnuť riešenie:

$$\partial^2_\phi F\left(\phi\right) = -F\left(\phi\right) + C \tag{3.59}$$

$$F\left(\phi\right) = A\sin\phi + B\cos\phi + C \tag{3.60}$$

Dostaneme rovnice:

$$V^\phi = -\frac{1}{r}F\left(\phi\right) + g\left(r\right) = -\frac{1}{r}\left(A\sin\phi + B\cos\phi\right) + K \tag{3.61}$$

$$V^r = f\left(\phi\right) = \partial_\phi F\left(\phi\right) = -B\sin\phi + A\cos\phi \tag{3.62}$$

Opäť využijeme (3.21) a po dosadení a úpravách dostaneme 3 zákony zachovania, ktoré potom prevedieme do kartézskych súradníc pomocou 3.16.

$$0 = \left[m\left(r\dot{\phi}\sin\phi + \dot{r}\cos\phi\right)\right]_{t_0}^{t_1} = \left[m\dot{x}\right]_{t_0}^{t_1} \tag{3.63}$$

$$\left[m\left(-r\dot{\phi}\cos\phi - \dot{r}\sin\phi\right)\right]_{t_0}^{t_1} = \left[m\dot{y}\right]_{t_0}^{t_1} \tag{3.64}$$

$$\left[mr^2\dot{\phi}\right]_{t_0}^{t_1} = \left[m\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right)\right]_{t_0}^{t_1} \tag{3.65}$$

Touto metódou sa nám podarilo nájsť všetky symetrie, z ktorých sú zákony zachovania, nezávisle od voľby súradníc. Robiť pre každý lagranžián všetky tieto kroky by však bolo zdĺhavé a preto túto metódu čo najviac zovšeobecníme, aby sme si ušetrili zbytočnú prácu.

3.2.2 Všeobecná situácia

Máme systém opísaný všeobecným lagranžiánom v tvare:

$$L\left(q^a, \dot{q}^a\right) = T\left(q^a, \dot{q}^a\right) - U\left(q^a\right) = \frac{1}{2}T_{ab}\left(q^a\right)\dot{q}^a\dot{q}^b - U\left(q^a\right), \tag{3.66}$$

pričom súradnice sa menia ako:

$$q^a \to q'^a = q^a + \epsilon V^a \tag{3.67}$$

$$\dot{q}^a \to \dot{q}'^a = \dot{q}^a + \epsilon V^a_{,b}\dot{q}^b \tag{3.68}$$

Teraz sa pozrieme ako sa nám zmení kinetická a potenciálna energia do prvého rádu ϵ a z toho zistíme ako sa nám mení lagranžián. Následne položíme rozdiel zmeneného a pôvodného lagranžiánu rovný nule:

$$L\left(q'^a, \dot{q}'^a\right) - L\left(q^a, \dot{q}^a\right) = 0 \tag{3.69}$$

Z čoho dostaneme rovnice pre V^a.

Kinetická a potenciálna energia sa menia ako:

$$T' = \frac{1}{2}T_{ab}\left(q^a + \epsilon V^a\right)\left(\dot{q}^a + \epsilon V^a_{,c}\dot{q}^c\right)\left(\dot{q}^b + \epsilon V^b_{,d}\dot{q}^d\right) \tag{3.70}$$

$$= \frac{1}{2}T_{ab}\left(q^a + \epsilon V^a\right)\left(\dot{q}^a\dot{q}^b + \epsilon\left(\dot{q}^a V^b_{,d}\dot{q}^d + \dot{q}^b V^a_{,c}\dot{q}^c\right) + o\left(\epsilon^2\right)\right) \tag{3.71}$$

$$U' = U\left(q^a + \epsilon V^a\right) \tag{3.72}$$

$U\left(q^a + \epsilon V^a\right)$ a $T_{ab}\left(q + \epsilon V\right)$ rozvinieme do Taylorových radov:

$$T_{ab}\left(q^a + \epsilon V^a\right) = T_{ab}\left(q^a\right) + \partial_c T_{ab}\left(q^a\right)\epsilon V^c + o\left(\epsilon^2\right) \tag{3.73}$$

$$U\left(q^a + \epsilon V^a\right) = U\left(q^a\right) + \partial_c U\left(q^a\right)\epsilon V^c + o\left(\epsilon^2\right) \tag{3.74}$$

Dosadíme do (3.70) a (3.72), roznásobíme a keďže nás opäť nás zaujíma len rád ϵ, tak vyššie rády zanedbáme. Následne nájdeme čiarkovaný lagranžián pomocou $L' = T' - U'$ a potom dosadíme do

$$0 = L' - L = T' - T + U - U', \tag{3.75}$$

z čoho dostaneme:

$$0 = \frac{1}{2}\epsilon \left(T_{ab}\left(\dot{q}^a V^b_{,d}\dot{q}^d + \dot{q}^b V^a_{,c}\dot{q}^c\right) + \left(\partial_c T_{ab}\right) V^c \dot{q}^a \dot{q}^b - 2\left(\partial_c U\right) V^c\right) \tag{3.76}$$

$$= \epsilon \left(V^c \frac{1}{2} T_{ab,c}\dot{q}^a\dot{q}^b + \frac{1}{2} T_{ab} V^b_{,c}\dot{q}^a\dot{q}^c + \frac{1}{2} T_{ab} V^a_{,c}\dot{q}^b\dot{q}^c - V^c\partial_c U\right). \tag{3.77}$$

Už len premenujeme indexy:

$$0 = \frac{1}{2}\left(V^c T_{ab,c} + T_{ac}V^c_{,b} + T_{cb}V^c_{,a}\right)\dot{q}^a\dot{q}^b - V^c\partial_c U. \tag{3.78}$$

Je dôležité si uvedomiť, že rovnica (3.78) nie je rovnica pre neznáme $\dot{q}$, ale rovnica, v ktorej hľadáme také V^a aby platila pre všetky $\dot{q}$ (tak ako v rovniciach 3.30 a 3.51). Teda rovnicu budeme riešiť tak, že ju rozdelíme na viac previazaných rovníc, v ktorých už $\dot{q}$ nebudú.

$$V^c T_{ab,c} + T_{ac}V^c_{,b} + T_{cb}V^c_{,a} = 0 \tag{3.79}$$

$$V^c\partial_c U = 0. \tag{3.80}$$

Z týchto rovníc získame V^a, ktoré dosadíme do (3.21) a z toho dostaneme zákony zachovania.

3.2.3 Ilustrácia - sférické kyvadlo

Teraz využijeme to, čo sme sa dozvedeli v kapitole 3.2.2 a aplikujeme to na konkrétny prípad. Našim príkladom bude sférické kyvadlo, teda už z názvu môžeme tušiť, že najpríjemnejšie súradnice budú sférické (r, θ, ϕ) pričom vzdialenosť od počiatku sa nemení $r = R = const.$. Budeme používať konvenciu zaužívanú vo fyzike, kde $\phi \in< 0; 2\pi)$ je uhol v rovine x, y definovaný v smere od kladného smeru osi x ku kladnému smeru osi y. a $\theta \in< 0; \pi)$ je uhol od kladného smeru osi z. Kinetická a potenciálna energia tohto systému sú:

$$T = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) \tag{3.81}$$

$$U = mgR\left(1 - \cos\theta\right), \tag{3.82}$$

z čoho Lagrangeova funkcia je:

$$L\left(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}\right) = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) - mgR\left(1 - \cos\theta\right) \tag{3.83}$$

Využijeme rovnice (3.79) a (3.80):

$$0 = V^c T_{ab,c} + T_{ac} V^c_{,b} + T_{cb} V^c_{,a} \qquad\qquad 0 = V^a \partial_a U \tag{3.84}$$

Následne dosadíme a dostaneme:

$$0 = mR^2 V^\theta_{,\theta} \tag{3.85}$$

$$= mR^2 \left(V^\theta_{,\phi} + \sin^2(\theta) V^\phi_{,\theta} \right) \tag{3.86}$$

$$= V^\theta mR^2 \sin(\theta)\cos(\theta) + mR^2 \sin^2(\theta)\, V^\theta_{,\phi} \tag{3.87}$$

$$= mgR\sin(\theta)\, V^\theta \tag{3.88}$$

Rovnica (3.88) nám hneď dá, že

$$V^\theta = 0 \tag{3.89}$$

a to nám zjednoduší zvyšné rovnice na:

$$0 = V^\phi_{,\theta} = V^\phi_{,\phi} \tag{3.90}$$

Z toho je vidieť, že jediné riešenie je

$$V^\phi = K = const. \tag{3.91}$$

Dosadíme do (3.21):

$$0 = \left[\frac{\partial L}{\partial V^a} \delta q^a \right]_{t_0}^{t_1} = \left[mr^2 \dot\phi \right]_{t_0}^{t_1} = \left[m\left(x\dot y - y\dot x\right)\right]_{t_0}^{t_1} \tag{3.92}$$

Z toho vidíme, že jediným zákonom zachovania sférického kyvadla (keď nepočítame ten za cykličnosť času) bude zákon zachovania momentu hybnosti v rovine x, y.

Záver

Cieľom tejto práce bolo spísať poučný text o Noetherovej vete v rámci bakalárskej matematiky. Všetko čo sme tu ukazovali bolo už dávno známe a my sme sa pokúšali iba o napísanie čo najjasnejšieho textu s čo najjednoduchšou matematikou. Vychádzajúc z vety pani Noetherovej sme hľadali zákony zachovania z účinku pomocou variačného počtu. Zákony zachovania sa štandardne rátajú aj pomocou tzv. cyklických súradníc. Vyjasnili sme si, ako tieto dve metódy súvisia. Pri metóde cyklických súradníc sme narazili na problém s tým, že táto metóda je závislá od výberu súradnicovej sústavy. Síce sa pomocou tejto metódy hľadajú zákony zachovania najjednoduchšie, ale je potrebné vedieť v akých súradniciach treba hľadať, čo nie je pri všetkých systémoch triviálne, naopak to môže byť veľmi náročné. Z tohto dôvodu sme skúsili hľadať symetrie Lagrangeovej funkcie všeobecným, vopred neznámym infinitezimálnym posunom súradníc a následným skúmaním ako sa pri tom zmení táto funkcia do prvého rádu ϵ. Tádo metóda bola poznateľne náročnejšia, ale poskytla úplnú informáciu o symetriách Lagrangeovej funkcie. Vzhľadom na to, že účinok je len časovým integrálom z Lagrangeovej funkcie, tak každú symetriu, ktorú má táto funkcia, má aj účinok. Tento fakt sme využili dosadením výsledkov za symetrie lagrangeiánu do rovníc pre zákony zachovania (3.21).

Príloha A: Toky a Lieova derivácia

Existuje jazyk, ktorý lepšie opisuje túto problematiku a nazýva sa diferenciálna geometria. V diferenciálnej geometrií sa stretneme s pojmami ako varieta, tenzor, vektorové pole, tok vektrového poľa, Lieova derivácia atď, ktoré vedia lepšie intrepretovať a riešiť takéto veci. V tomto dodatku nebudeme tieto pojmy do hĺbky definovať a zaoberať sa s nimi (to je možné v knihe [5]), ale len naznačíme ako zaujímavé sú a ako sa s nimi pracuje.

V skutočnosti sme celú dobu pracovali na niečom čo sa volá varieta M (varieta môže byť napríklad sféra alebo euklidovský E^3 priestor). Na tejto variete máme vektorové polia.

$$V = V^a \partial_a \tag{3.93}$$

Vektorové pole si môžeme predstaviť ako vektor v každom bode variety. Takéto pole vektorov nám teda v každom bode ukazuje, ktorým smerom sa v tom bode budeme hýbať. Tieto body môžeme pospájať pomyselnou čiarou a získame integrálne krivky. Môžeme si predstaviť vektorové pole ako rieku a potom integrálne krivky budú niečo ako prúdnice. Tu prichádzame k pojmu tok vektorového poľa, čo je posunutie po integrálnej krivke. Tok je teda zobrazenie:

$$\Phi : M \to M. \tag{3.94}$$

Keď toto aplikujeme na našu situáciu v časti 3.2.2, môžeme si všimnúť, že naše súradnice sa v skutočnosti posúvajú vplyvom toku v smere vektrového poľa:

$$\Phi_\epsilon : q^a \to q'^a = q^a + \epsilon V^a \tag{3.95}$$

$$\dot{q}^a \to \dot{q}'^a = \dot{q}^a + \epsilon V^a_{,b} \dot{q}^b. \tag{3.96}$$

Teda čo sme vlastne hľadali, len sme to nevedeli, boli komponenty vektrového poľa. Ďalej keď sa pozrieme na rovnicu (3.78), tak v skutočnosti je $T_{ab} \equiv g_{ab}$ tenzor typu $\binom{0}{2}$ a U je tenzor typu $\binom{0}{0}$, čo nám umožňuje využiť prehľadný zápis rovnice pomocou tzv. Lieových derivácii. V rovnici (3.78) sa ukrývajú dve Lieove derivácie v smere poľa $\mathcal{L}_V$.

$$0 = \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}_V g\right)_{ab} \dot{q}^a \dot{q}^b - \mathcal{L}_V U \tag{3.97}$$

Takže vektorové pole V dostaneme z dvoch rovníc:

$$\mathcal{L}_V g = 0 \tag{3.98}$$

$$\mathcal{L}_V U = 0. \tag{3.99}$$

Literatúra

[1] J.R.Taylor: Classical Mechanics, University Science Books, 2005

[2] Ch.Kittel,V.Knight,M.Ruderman: Mechanics (Berkley Physics Course 1) Mc Graw-Hill 1965

[3] R.Feynman, Leighton, Sands: Feynmanove prednášky z fyziky 1,4, Alfa, Bratislava, 1986,1989

[4] L.D.Landau,E.M.Lifshitz: Mechanics, 3-rd edition, Butterworth-Heinemann Ltd., 1995

[5] M.Fecko: Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov, Iris, Bratislava 2004, 2008, 2018

[6] Wikipedia: Emmy Noether, URL: `https://en.wikipedia.org/wiki/Emmy_Noether`