Domáce úlohy k predmetu
GEOMETRICKÉ METÓDY V KLASICKEJ MECHANIKE
Marián Fecko
Letný semester 2023/2024

K prednáške z 19.2.2024

$\boxed{\text{bez čísla}}$ *i)* Vymyslite si *hocijakú* varietu a na nej (súradnicovo zapísanú) *hocijakú* 1-formu σ. Vyrátajte 2-formu $d\sigma$ a napíšte diferenciálne rovnice pre krivku γ, ktorá spĺňa rovnicu

$$i_{\dot{\gamma}} d\sigma = 0$$

ii) Ako budú vyzerať tieto rovnice, ak ako varietu zoberieme euklidovský 3-rozmerný priestor E^3 a ako 1-formu σ zoberieme všeobecnú 1-formu v tvare $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$, t.j. zapíšeme ju tak, ako sme sa to naučili v paragrafe 8.5 o vektorovej analýze?

(Rovnice, ktoré takto dostanete, sa formálne volajú rovnice pre *vírové čiary* poľa $\mathbf{A}$. *Naozaj* vírové čiary sú to vtedy, keď ako pole $\mathbf{A}$ zoberieme (tu stacionárne) *rýchlostné* pole tečenia tekutiny, čiže pole $\mathbf{v}$ z hydrodynamiky.)
Návod na ii): 8.5.8ii; pre súradnice $x^1, \dots, x^n$ je $\dot{\gamma} = \dot{x}^j \partial_j$; čiže tu $\dot{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\nabla}$

$\boxed{\text{bez čísla}}$ Uvažujme v priestore $E^3 \times \mathbb{R}$ so súradnicami $(x, y, z, t) \equiv (\mathbf{r}, t)$ (pre zmenu :-) 2-formu

$$\sigma = z dx \wedge dy - H dG \wedge dt \qquad H(\mathbf{r}, t), G(\mathbf{r}, t)$$

Vyrátajte 3-formu $d\sigma$ a napíšte diferenciálne rovnice pre krivku $\gamma \leftrightarrow (\mathbf{r}(t), t)$, ktorá spĺňa rovnicu

$$i_{\dot{\gamma}} d\sigma = 0$$

Overte si, že sa dajú napísať v tvare

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\nabla} H \times \boldsymbol{\nabla} G$$

Návod: Použite rozklad analogický tomu, aký sa robil s *Hamiltonovými* rovnicami na prednáške, t.j.

$$d\sigma = dt \wedge \hat{s} + \hat{r} \qquad \dot{\gamma} = \hat{v} + \partial_t \qquad \hat{v} = \dot{x}^j \partial_j$$

Uvedomte si, že priestorové formy $\hat{s}$ a $\hat{r}$ vieme vyjadriť pomocou zápisov z *vektorovej analýzy* (paragraf 8.5) ako

$$\hat{s} = -(\boldsymbol{\nabla} H \cdot d\mathbf{r}) \wedge (\boldsymbol{\nabla} G \cdot d\mathbf{r}) = \dots \qquad \hat{r} = dV$$

(Rovnice, ktoré dostanete, sa volajú *Nambuove* rovnice (Nambu 1973).)

K prednáške z 26.2.2024

$\boxed{\text{bez čísla}}$ Uvažujeme lineárny harmonický oscilátor s hamiltoniánom

$$H(x,p,t) = \frac{1}{2}(x^2+p^2)$$

($m=\omega=1$). Potom 1-forma $\sigma \equiv p_a dq^q - H dt$ je

$$\sigma = p dx - \frac{x^2+p^2}{2} dt$$

Zaveďme namiesto x, p *polárne* súradnice r, φ

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ p &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

i) Napíšte σ a $d\sigma$ v súradniciach r, φ, t, napíšte a vyriešte Hamiltonove rovnice

$$i_{\dot\gamma} d\sigma = 0 \qquad\qquad \dot\gamma = \dot r \partial_r + \dot\varphi \partial_\varphi + \partial_t$$

ii) Presvedčte sa, že $\xi \equiv \partial_\varphi$ *je symetriou* v zmysle

$$\mathcal{L}_\xi \sigma = d\theta$$

iii) Vyrátajte explicitne zachovávajúcu sa veličinu

$$f := i_\xi \sigma - \theta$$

zodpovedajúcu tejto symetrii. Čo to je (aká fyzikálna veličina)?
iv) Vyrátajte *tok* Φ_s poľa ξ a vyrátajte, ako vyzerá *nové riešenie*

$$\gamma_s := \Phi_s \circ \gamma \qquad\qquad \text{t.j.} \quad \gamma_s(t) := \Phi_s(\gamma(t))$$

vyrobené týmto tokom z pôvodného riešenia γ (nájdeného v časti *i*).

K prednáške zo 4.3.2024

$\boxed{17.3.1}$ Ukázať, že Tf „uzatvára" komutatívny diagram

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\ {\scriptstyle \pi_M}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi_N} \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array} \qquad \text{t.j. že platí} \qquad f \circ \pi_M = \pi_N \circ Tf$$

$\boxed{17.3.2}$ Dokázať, že pre zloženie zobrazení platí

$$T(f \circ g) = Tf \circ Tg$$

Návod: (3.1.2)

$\boxed{17.4.4}$ Podľa vzoru TM a T^*M, spojených s vektormi a kovektormi na M, opísať fibráciu $T_1^1 M$, spojenú s tenzormi typu $\binom{1}{1}$ na M. Skonštruovať hladký atlas, zistiť, aký má (totálny priestor) rozmer, čo je typické vlákno F a ako vyzerá v súradniciach projekcia. (Dobrovoľná časť: Ako vyzerá v súradniciach všeobecné *vertikálne* vektorové pole?) $\square$

K prednáške z 11.3.2024

Úlohy (17.4.1), (17.4.2) ukazujú, že vertikálne podpriestory na TM resp. T^*M sú lineárnym obalom vektorov $(\frac{\partial}{\partial v^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v^n})$ resp. $(\frac{\partial}{\partial p_1}, ..., \frac{\partial}{\partial p_n})$. Zdalo by sa, že podobne by sa dal definovať "horizontálny" podpriestor ako lineárny obal $(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n})$. Z tohoto omylu nás vyvedie výsledok úlohy (17.4.3).

$\boxed{17.4.3}$ Overiť, že takto definovaný podpriestor je (na rozdiel od vertikálneho) nekanonický, t.j. závisí od výberu súradníc x^i.
Návod: overiť, že ak $x^i \mapsto x'^i(x)$, tak vektory $\frac{\partial}{\partial x'^i}$ obsahujú aj členy $\frac{\partial}{\partial v^i}$, zatiaľ čo $\frac{\partial}{\partial v'^i}$ neobsahujú $\frac{\partial}{\partial x^i}$.

$\boxed{17.5.4}$ (upravený, len pre $p = 1$ plus podrobnejší návod): Máme v bode $x \in M$ definovaný tenzor typu $\binom{1}{1}$: $A \in T_1^1$ v x. Môžeme mu priradiť jeho *vertikálny zdvih* $A^\uparrow$, čo je tenzor typu $\binom{1}{1}$ v bode $v \in T_x M$:

$$A^\uparrow(U) := (A(\pi_* U))^\uparrow \qquad U \in T_v TM \ .$$

Ak je na M definované tenzorové pole A typu $\binom{1}{1}$, pobodovým zdvihom sa vygeneruje v TM tenzorové *pole* $A^\uparrow$ typu $\binom{1}{1}$, čiže vzniká zobrazenie

$$(\ \ )^\uparrow \ : \ \mathcal{T}_1^1(M) \to \mathcal{T}_1^1(TM)$$

Overiť, že
$i)$ v súradnicovom vyjadrení to vyzerá takto:

$$A \equiv A^a_b(x)dx^b \otimes \frac{\partial}{\partial x^a} \qquad \mapsto \qquad A^\uparrow = A^a_b(x)dx^b \otimes \frac{\partial}{\partial v^a}$$

$ii)$ tenzor $A^\uparrow$ je *horizontálny*, t.j. anuluje sa ľubovoľným *vertikálnym* argumentom.
Návod : $i)$ ako každý tenzor typu $\binom{1}{1}$ hore, musí mať $A^\uparrow$ tvar

$$A^\uparrow = E^a_b dx^b \otimes \frac{\partial}{\partial x^a} + F^a_b dx^b \otimes \frac{\partial}{\partial v^a} + G^a_b dv^b \otimes \frac{\partial}{\partial x^a} + H^a_b dv^b \otimes \frac{\partial}{\partial v^a}$$

Podobne U, ako každý vektor hore, musí mať tvar

$$U = K^a \frac{\partial}{\partial x^a} + L^a \frac{\partial}{\partial v^a}$$

Takže $A^\uparrow(U) = \dots$ a pritom podľa definície to má byť ... takže doteraz neznáme koeficienty (matice) $E^a_b, F^a_b, G^a_b, H^a_b$ musia byť v skutočnosti ...

K prednáške z 18.3.2024

$\boxed{17.7.1}$ Buďte sami sebou! Dokážte *svoje tri* identity na TM resp. T^*M a počítajte ďalších 200 úloh do konca marca zadarmo!

$$\begin{array}{rcl} TM & & T^*M \\ [V^\uparrow, W^\uparrow] = 0 & & [\alpha^\uparrow, \beta^\uparrow] = 0 \\ [\tilde{V}, \tilde{W}] = \widetilde{[V, W]} & & [\tilde{V}, \tilde{W}] = \widetilde{[V, W]} \\ [\tilde{V}, W^\uparrow] = [V, W]^\uparrow & & [\tilde{V}, \alpha^\uparrow] = (\mathcal{L}_V \alpha)^\uparrow \\ & & \\ [\triangle, V^\uparrow] = -V^\uparrow & & [\triangle, \alpha^\uparrow] = -\alpha^\uparrow \\ [\triangle, \tilde{V}] = 0 & & [\triangle, \tilde{V}] = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{L}_{W^\uparrow} S = 0 & \mathcal{L}_{\alpha^\uparrow} \theta = \tau^* \alpha & \Rightarrow & \mathcal{L}_{\alpha^\uparrow} \omega = \tau^* d\alpha \\ \mathcal{L}_{\tilde{W}} S = 0 & \mathcal{L}_{\tilde{W}} \theta = 0 & \Rightarrow & \mathcal{L}_{\tilde{W}} \omega = 0 \\ \mathcal{L}_\triangle S = -S & \mathcal{L}_\triangle \theta = \theta & \Rightarrow & \mathcal{L}_\triangle \omega = \omega \end{array}$$

Návod: (napríklad) kanonické súradnice; niektoré (tie, v ktorých sa vyskytuje $\triangle$) sme už mali v (17.6.3), (17.6.4).

K prednáške z 25.3.2024

Keďže sa z TM stala symplektická varieta (TM, ω_L), štandardne môžeme zaviesť *hamiltonovské pole* ζ_f zodpovedajúce ľubovoľnému generátoru $f \in \mathcal{F}(TM)$

$$i_{\zeta_f}\omega_L = -df$$

a *hamiltonovský systém* $(TM, \omega_L, \mathcal{H})$ výberom jednej privilegovanej funkcie $f \equiv \mathcal{H}$ (hamiltoniánu), ktorá potom generuje dynamiku (= časový vývoj) ako pohyb po integrálnych krivkách $\gamma(t)$ poľa $\zeta_{\mathcal{H}}$:

$$\dot{\gamma} = \zeta_{\mathcal{H}}$$

tj.

$$x \equiv \gamma(0) \mapsto \Phi_t(x) \equiv \gamma(t) \qquad\qquad \text{tok } \Phi_t \leftrightarrow \zeta_{\mathcal{H}}$$

Ukazuje sa pritom kľúčový výsledok, že pre vhodný výber funkcie $\mathcal{H}$, konkrétne pre

$$\mathcal{H} \equiv E_L := \triangle L - L$$

($E_L =:$ *energia* zodpovedajúca lagranžiánu L) je dynamika tohoto hamiltonovského systému (TM, ω_L, E_L) totožná so štandardnou dynamikou generovanou Lagrangeovými rovnicami 2. druhu.

$\boxed{18.2.6}$ Overiť tento fakt zapísaním definičnej rovnice pre *Eulerovo-Lagrangeovo pole* Γ

$$i_\Gamma \omega_L = -dE_L \quad \text{ t.j. } \quad \Gamma \equiv \zeta_{E_L}$$

v kanonických súradniciach.
Návod: dostatočne veľký kus papiera, (18.2.2), (18.2.3)

K prednáške z 8.4.2024

$\boxed{14.4.6}$ Let V be a Cartan symmetry of a Hamiltonian system (M, ω, H). Check that
i) ... *ii*) ... *iii*) ... NETREBA
iv) if $V = \zeta_F$ is an *exact* Cartan symmetry corresponding to the conserved quantity F, then the value of F for the initial motion coincides with the value of F on the new (class of) solutions[1]

$$F(\gamma_s(t)) = F(\gamma(t)) = \text{ const.}$$

$F(\gamma_s(t))$ depends neither on t (since F is conserved on all γ_s) *nor on s* (since the value if the conserved quantity happens to be the same on all γ_s); F is

[1]This means, for example (as will be clear after reading (18.4.3)), that if the new solution is obtained by a translation, it has the same *momentum* as before and the new solution obtained by a rotation has the same *angular* momentum.

thus constant on the two-dimensional sheet $\gamma_s(t) \subset M$)
Hint: $i) \dots\ ii) \dots\ iv)$ $\zeta_F F \equiv \{F,F\} = 0$ $(= \zeta_H F \equiv \{H,F\}$ by (14.4.3))

$\boxed{17.6.6}$ It turns out that the canonical 1-form θ on T^*M may be regarded as the "Platonic eternal Idea" of a differential 1-form on M in the following sense: let α be a 1-form on $\mathcal{O} \subset M$ and let $\sigma : \mathcal{O} \to T^*M$ be the corresponding section of the cotangent bundle $\tau : T^*M \to M$ (17.2.6). Check that

$$\sigma^*\theta = \alpha$$

so that *any* differential 1-form on M may be viewed as a result of an appropriate pull-back of "the 1-form θ" on T^*M. The 1-form θ, living in the "real world of eternal Ideas" T^*M, is then "the Platonic Idea of a differential 1-form" whereas α, living in the "apparent world of material objects" M is its "immersion in the material world".

Obe úlohy[2] sú LEN v anglickom vydaní knihy :-(
Preto sú tu po anglicky.

K prednáške z 15.4.2024

$\boxed{\text{bez čísla}}$ Uvažujme ako symplektickú varietu (M,ω) rovinu $\mathbb{R}^2[x,p]$ so symplektickou formou $\omega = dp \wedge dx$. V tejto rovine zároveň prirodzene pôsobí (rotáciami) grupa SO(2). Ukazuje sa (overte!), že toto pôsobenie zachováva formu ω. Máme teda istým konkrétnym (a veľmi jednoduchým) spôsobom realizovanú trojicu (M,ω,R_g).
$i)$ Presvedčte sa, že fundamentálne pole ξ_X uvažovaného pôsobenia explicitne vyzerá

$$\xi_X = X^1 \xi_{E_1} \qquad X^1 = \text{ const.} \qquad \xi_{E_1} = -p\partial_x + x\partial_p$$

Myslí sa to voči štandardnej báze

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{t.j.} \qquad X = X^1 E_1 = \begin{pmatrix} 0 & X^1 \\ -X^1 & 0 \end{pmatrix}$$

v Lieovej algebre $so(2)$ grupy $SO(2)$.
$ii)$ Presvedčte sa, že

$$\mathcal{L}_{\xi_X}\omega = 0$$

$iii)$ Vyrátajte explicitne 1-formu $\alpha_X \equiv -i_{\xi_X}\omega$ a overte, že je uzavretá

$$d\alpha_X = 0$$

[2] Časti $i)$ - $iii)$ úlohy 14.4.6 *sú* aj v slovenskom vydaní; nie je tam časť $iv)$, ktorá (ako jediná) je náplňou domácej úlohy. Celá úloha 17.6.6 je len v anglickom vydaní.

iv) 1-forma $\alpha_X \equiv -i_{\xi_X}\omega$ je v tomto našom prípade dokonca exaktná - nájdite jej potenciál P_X

$$\alpha_X = dP_X \qquad P_X = X^1 P_{E_1}(x,p) - \text{ funkcia na } M$$

v) Vyrátajte explicitne momentové zobrazenie $P : M \to \mathcal{G}^*$

Dodatok pre trochu náročnejších (*nepovinný*):

Uvažujme ako fázový priestor $\mathbb{R}^4[x_1, x_2, p_1, p_2]$ s formou $\omega = dp_1 \wedge dx_1 + dp_2 \wedge dx_2$. Tu prirodzene pôsobí grupa $SO(2) \times SO(2)$ (ľavá z nich rotáciami len v rovine (x_1, p_1) a pravá rotáciami len v rovine (x_2, p_2)). Toto pôsobenie tiež zachováva formu ω. Zopakovať body povinnej časti úlohy pre túto (o epsilon) komplikovanejšiu situáciu.

Dodatok pre ešte trochu náročnejších (*ešte nepovinnejší*):

Ako vieme od útleho detstva (14.2.3), obyčajná sféra s (obyčajnou metrickou) formou objemu *je* symplektická varieta. Zároveň vieme (od útleho detstva), že sféra je pekne guľatá. T.j. že na nej pôsobí ako grupa symetrie rotačná grupa $S0(3)$. A pekne guľatá je aj tá forma objemu, čiže je rotačne invariantná. Vieme to napríklad z toho, že plocha (napríklad) Afriky na glóbuse sa nezvykne zmeniť, keď glóbusom zatočíme. Ale, pravdu povediac, glóbusom slušní ľudia (ktorí ho nevyberajú z osi ani keď na ňom utierajú prach) netočia okolo hociktorej osi, ale len okolo osi z (to je tá, ktorá ide cez póly). Tak pre istotu uvažujeme ako G nie celú grupu rotácií, ale *len rotácie okolo osi* z (teda $SO(2) \subset SO(3)$). Máme tak všetko, čo potrebujeme na ohmatanie látky z paragrafu 14.5 - máme symplektickú varietu a pôsobenie grupy G na nej, ktoré si ju ctí. Nájdite (tu sa začína naozajstná úloha) explicitne *hybnostné zobrazenie* $P : M \to \mathcal{G}^*$, t.j. tu

$$P : S^2 \to so(2)^* \subset so(3)^*$$

zodpovedajúce tomuto pôsobeniu (a hneď tu sa tá úloha aj končí).
Návod: v bežných sférických súradniciach (ϑ, φ) na sfére vyzerá symplektická forma takto ..., generátor pôsobenia $SO(2)$ (to sú tie rotácie okolo z) takto ..., takže ... (A ako by to dopadlo - len odhad! - keby sa rotovalo okolo x alebo y? A teda pre celú $SO(3)$?)

K prednáške z 22.4.2024

$\boxed{12.6.2}$ (podmnožina): Na prvých troch stupňoch vyzerajú vzorce pre $\hat{d}$

(spomínané na prednáške) takto:

$$\begin{aligned}\hat{d}v(X) &= \rho(X)v \\ \hat{d}\alpha(X,Y) &= \rho(X)(\alpha(Y)) - \rho(Y)(\alpha(X)) - \alpha([X,Y]) \\ \hat{d}\beta(X,Y,Z) &= \rho(X)(\beta(Y,Z)) - \rho(Y)(\beta(X,Z)) + \rho(Z)(\beta(X,Y)) \\ &\quad - \beta([X,Y],Z) + \beta([X,Z],Y) - \beta([Y,Z],X)\end{aligned}$$

i) Overte, že operátor $\hat{d}$ je *nilpotentný*, t.j. $\hat{d}\hat{d} = 0$
ii) Ako vyzerajú príslušné (jednoduchšie) vzorce pre *triviálnu* reprezentáciu (bude treba v 14.5.5 :-)
Návod: *i*) Ide o *dva* výpočty (na dvoch rôznych stupňoch), konkrétne že

$$\hat{d}\hat{d}v(X,Y) = 0 \qquad \hat{d}\hat{d}\alpha(X,Y,Z) = 0$$

ii) $\rho = ?$

$\boxed{14.5.5}$ Ukázať, že
i) zobrazenie

$$\beta : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathbb{R}$$

definované vzťahom (pozri (14.5.4))

$$\beta(X,Y) := \{P_X, P_Y\} - P_{[X,Y]}$$

je bilineárne a antisymetrické, takže ide o *2-formu* v $\mathcal{G}$ (s hodnotami v $\mathbb{R}$)[3]
ii) táto 2-forma $\beta \in \Lambda^2\mathcal{G}^*$ je *uzavretá* (2-*kocyklus*)

$$\hat{d}\beta = 0 \quad \text{ t.j. } \quad \beta(X,[Y,Z]) + \text{ cykl. } = 0$$

iii) využitie vôle vo výbere P_X na báze vedie na zmenu 2-formy β

$$P_X \mapsto \hat{P}_X := P_X + \langle p, X\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \beta \mapsto \hat{\beta} := \beta + \hat{d}p \qquad p \in \mathcal{G}^* \equiv \Lambda^1\mathcal{G}^*$$

iv)

$$[\beta] = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{dá sa dosiahnuť} \quad \{\hat{P}_X, \hat{P}_Y\} = \hat{P}_{[X,Y]}$$

čiže aditívna konštanta $\beta(X,Y)$ sa dá odstrániť využitím tejto vôle práve ak β reprezentuje *triviálnu* kohomologickú triedu, t.j. je *kohranicou.* To je iste zaručené vtedy, ak iné ako triviálne triedy pre danú Lieovu algebru neexistujú, čiže ak $H^2(\mathcal{G}^*, \mathbb{R}) = 0$. Táto podmienka je splnená, ako sa spomínalo v (11.8), napríklad pre dôležitú triedu poloprostých Lieových algebier.
Návod: *ii*) (11.8.4), Jacobiho identity pre $\{\ .\ ,\ .\ \}$ a $[\ .\ ,\ .\ ]$; *iv*) $\beta \equiv \hat{d}\tau \mapsto \hat{d}\tau + \hat{d}p \Rightarrow$ treba zvoliť nové P_X tak, aby $p = -\tau$, t.j. $\hat{P} = P - \tau$

[3] v skutočnosti je $\beta(X,Y)$ konštantná *funkcia* na M, takže vlastne prísne vzaté $\beta \in \Omega^0(M, \Lambda^2\mathcal{G}^*)$; keďže je však *konštantná*, v každom bode je *rovnaký* element z $\Lambda^2\mathcal{G}^*$, čo sa dá prakticky chápať ako $\beta \in \Lambda^2\mathcal{G}^*$