

Domáce úlohy k predmetu
GEOMETRICKÉ METÓDY V KLASICKEJ MECHANIKE
Marián Fecko
Letný semester 2025/2026

K prednáške z 18.2.2026

bez čísla i) Vymyslite si *hocijakú* varietu a na nej (súradnicovo zapísanú) *hocijakú* 1-formu σ . Vyrátajte 2-formu $d\sigma$ a napíšte diferenciálne rovnice pre krivku γ , ktorá splňa rovnicu

$$i_{\dot{\gamma}}d\sigma = 0$$

ii) Ako budú vyzerat tieto rovnice, ak ako varietu zoberieme euklidovský 3-rozmerný priestor E^3 a ako 1-formu σ zoberieme všeobecnú 1-formu v tvare $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$, t.j. zapíšeme ju tak, ako sme sa to naučili v paragrafe 8.5 o vektorovej analýze?

(Rovnice, ktoré takto dostanete, sa formálne volajú rovnice pre *vírové čiary* poľa $\mathbf{A}$. *Naozaj* vírové čiary sú to vtedy, keď ako pole $\mathbf{A}$ zoberieme (tu stacionárne) *rýchlostné* pole tečenia tekutiny, čiže pole $\mathbf{v}$ z hydrodynamiky.)
Návod na ii): 8.5.8ii; pre súradnice $x^1, \dots, x^n$ je $\dot{\gamma} = \dot{x}^j \partial_j$; čiže tu $\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla$

K prednáške z 25.2.2026

bez čísla Uvažujeme lineárny harmonický oscilátor s hamiltoniánom

$$H(x, p, t) = \frac{1}{2}(x^2 + p^2)$$

($m = \omega = 1$). Potom 1-forma $\sigma \equiv p_a dq^a - H dt$ je

$$\sigma = p dx - \frac{x^2 + p^2}{2} dt$$

Zavedme namiesto x, p *polárne* súradnice r, φ

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ p &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

i) Napíšte σ a $d\sigma$ v súradniciach r, φ, t , napíšte a vyriešte Hamiltonove rovnice

$$i_{\dot{\gamma}}d\sigma = 0 \qquad \dot{\gamma} = \dot{r}\partial_r + \dot{\varphi}\partial_{\varphi} + \partial_t$$

ii) Presvedčte sa, že $\xi \equiv \partial_\varphi$ je *symetriou* v zmysle

$$\mathcal{L}_\xi \sigma = d\theta$$

iii) Vyrátajte explicitne zachovávajúcu sa veličinu

$$f := i_\xi \sigma - \theta$$

zodpovedajúcu tejto symetrii. Čo to je (aká fyzikálna veličina)?

K prednáške zo 4.3.2026

17.4.4 Podľa vzoru TM a T^*M , spojených s vektormi a kovektormi na M , opísať bandl $T_1^1 M$, spojený s tenzormi typu $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ na M . Skonstruovať hladký atlas, zistiť, aký má (totálny priestor) rozmer, čo je typické vlákno F a ako vyzerá v súradniciach projekcia. (Dobrovoľná časť: Ako vyzerá v súradniciach všeobecné *vertikálne* vektorové pole?)

bez čísla Uvažujme v priestore $E^3 \times \mathbb{R}$ so súradnicami $(x, y, z, t) \equiv (\mathbf{r}, t)$ (pre zmenu :-) 2-formu

$$\sigma = z dx \wedge dy - H dG \wedge dt \quad H(\mathbf{r}, t), G(\mathbf{r}, t)$$

Vyrátajte 3-formu $d\sigma$ a napíšte diferenciálne rovnice pre krivku $\gamma \leftrightarrow (\mathbf{r}(t), t)$, ktorá spĺňa rovnicu

$$i_\gamma d\sigma = 0$$

Overte si, že sa dajú napísať v tvare

$$\dot{\mathbf{r}} = \nabla H \times \nabla G$$

Návod: Použite rozklad analogický tomu, aký sa robil s *Hamiltonovými* rovnicami na prednáške, t.j.

$$d\sigma = dt \wedge \hat{s} + \hat{r} \quad \dot{\gamma} = \hat{v} + \partial_t \quad \hat{v} = \dot{x}^j \partial_j$$

Uvedomte si, že priestorové formy $\hat{s}$ a $\hat{r}$ vieme vyjadriť pomocou zápisov z *vektorovej analýzy* (napr. $df = \nabla f \cdot d\mathbf{r} + (\partial_t f)dt$, paragraf 8.5) ako

$$\hat{s} = -(\nabla H \cdot d\mathbf{r}) \wedge (\nabla G \cdot d\mathbf{r}) = \dots \quad \hat{r} = dV$$

(Rovnice, ktoré dostanete, sa volajú *Nambuove* rovnice (Nambu 1973).)

bez čísla (Ešte jeden bod k úlohe z 25.2.2026):

iv) Vyrátajte *tok* Φ_s poľa ξ a vyrátajte, ako vyzerá *nové riešenie*

$$\gamma_s := \Phi_s \circ \gamma \quad \text{t.j.} \quad \gamma_s(t) := \Phi_s(\gamma(t))$$

vyrobené týmto tokom z pôvodného riešenia γ (nájdeneho v časti *i*).

K prednáške z 11.3.2024

Úlohy (17.4.1), (17.4.2) ukazujú, že vertikálne podpriestory na TM resp. T^*M sú lineárnym obalom vektorov $(\frac{\partial}{\partial v^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v^n})$ resp. $(\frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_n})$. Zdalo by sa, že podobne by sa dal definovať "horizontálny" podpriestor ako lineárny obal $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$. Z tohoto omylu nás vyvedie výsledok úlohy (17.4.3).

17.4.3 Overiť, že takto definovaný podpriestor je (na rozdiel od vertikálneho) nekanonický, t.j. závisí od výberu súradníc x^i .

Návod: overiť, že ak $x^i \mapsto x'^i(x)$, tak vektory $\frac{\partial}{\partial x'^i}$ obsahujú aj členy $\frac{\partial}{\partial v^i}$, zatiaľ čo $\frac{\partial}{\partial v'^i}$ neobsahujú $\frac{\partial}{\partial x^i}$.

17.5.4 (upravený, len pre $p = 1$ plus podrobnejší návod): Máme v bode $x \in M$ definovaný tenzor typu $\binom{1}{1}$: $A \in T_1^1$ v x . Môžeme mu priradiť jeho *vertikálny zdvih* $A^\uparrow$, čo je tenzor typu $\binom{1}{1}$ v bode $v \in T_x M$:

$$A^\uparrow(U) := (A(\pi_* U))^\uparrow \quad U \in T_v TM.$$

Ak je na M definované tenzorové pole A typu $\binom{1}{1}$, pobodovým zdvihom sa vygeneruje v TM tenzorové *pole* $A^\uparrow$ typu $\binom{1}{1}$, čiže vzniká zobrazenie

$$(\)^\uparrow : \mathcal{T}_1^1(M) \rightarrow \mathcal{T}_1^1(TM)$$

Overiť, že

i) v súradnicovom vyjadrení to vyzerá takto:

$$A \equiv A_b^a(x) dx^b \otimes \frac{\partial}{\partial x^a} \quad \mapsto \quad A^\uparrow = A_b^a(x) dx^b \otimes \frac{\partial}{\partial v^a}$$

ii) tenzor $A^\uparrow$ je *horizontálny*, t.j. anuluje sa ľubovoľným *vertikálnym* argumentom.

Návod : *i)* ako každý tenzor typu $\binom{1}{1}$ hore, musí mať $A^\uparrow$ tvar

$$A^\uparrow = E_b^a dx^b \otimes \frac{\partial}{\partial x^a} + F_b^a dx^b \otimes \frac{\partial}{\partial v^a} + G_b^a dv^b \otimes \frac{\partial}{\partial x^a} + H_b^a dv^b \otimes \frac{\partial}{\partial v^a}$$

Podobne U , ako každý vektor hore, musí mať tvar

$$U = K^a \frac{\partial}{\partial x^a} + L^a \frac{\partial}{\partial v^a}$$

Takže $A^\uparrow(U) = \dots$ a pritom podľa definície to má byť $\dots$ takže doteraz neznáme koeficienty (matice) $E_b^a, F_b^a, G_b^a, H_b^a$ musia byť v skutočnosti $\dots$