Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
UK Bratislava

Menej tradičné aplikácie moderného diferenciálnej geometrie vo fyzike

Habilitačná práca

Marián Fecko **2001**

1. ÚVOD

Moderná diferenciálna geometria si za posledné desaťročia vybudovala v rámci matematického aparátu teoretickej fyziky naozaj dôstojnú pozíciu. Úplného laika, v ktorého predstavách sa diferenciálna geometria zaoberá štúdiom rôzne pokrútených kriviek či podobne poohýbaných dvojrozmerných plôch v obyčajnom trojrozmernom euklidovskom priestore, môže (celkom oprávnene) prekvapovať, prečo by práve takéto krivky a plochy mali dlhodobejšie zamestnávať mysle fyzikov. Pokročilejší adept, ktorý už má za sebou štandardný (súradnicový) kurz všeobecnej teórie relativity a obohatil svoj arzenál o viacindexové polia, bodkočiarky (kovariantné derivácie) a "zakrivené priestory" sa už čuduje menej; vidí jej užitočnosť (ba priam nevyhnutnosť) v úlohe jazyka a nástroja na zvládnutie fundamentálnej fyziky.

Súradnicovou riemannovskou geometriou v kontexte všeobecnej teórie relativity sa však prienik diferenciálnej geometrie do teoretickej fyziky zďaleka neskončil; postupne pribúdali ďalšie a ďalšie oblasti. Z modernejšieho pohľadu obsahujú jednotlivé fyzikálne aplikované geometrické disciplíny vždy istý minimálny spoločný základ, ktorým je hladká n-rozmerná *varieta* M; na tento "základný náter" sa ďalej nanášajú rôzne dodatočné štruktúry závislé od kontextu. Napríklad spomenutá všeobecná teória relativity využíva ako hlavnú dodatočnú štruktúru *metrický tenzor*, čo zodpovedá *riemannovskej geometrii* (M, g), hamiltonovská mechanika sa elegantne a efektívne skúma pomocou trojice (M, ω, H), kde ω je *symplektická forma* na variete M (alebo všeobecnejšie trojice $(M, \mathcal{P}, H)$, kde $\mathcal{P}$ je *Poissonov tenzor*) a H je preferovaná funkcia (*hamiltonián*) na symplektickej variete (M, ω), teória kalibračných polí sa opiera o teóriu *hlavných G-fibrácií* $\pi : P \to M$ s konexiou, symetrie stoja na *akciách grúp* (M, R_g) na variete, atď., atď.

Konkrétne spomenuté štruktúry na varietách (a aj zopár ďalších) majú teda v modernej teoretickej fyzike svoje pevné miesto, spravidla automaticky spojené aj so štandardnou oblasťou svojej aplikácie. V tomto texte pôjde z tohoto pohľadu jednak o *modifikáciu*[1] niektorých zabehaných štruktúr, jednak o *menej obvyklú aplikáciu* známych (nemodifikovaných) štruktúr.

Ako modifikácia dobre zabehanej úspešnej štruktúry sa dá chápať kapitola o *Nambuovej mechanike*. Z technickej stránky ide o zámenu (symplektickej) *dva-formy* v hamiltonovskej dynamike analogickou *tri-formou* v nambuovskej mechanike. Ukazuje sa, že niektoré dôležité vlastnosti hamiltonovskej dynamiky zostávajú stále v platnosti (napríklad Liouvillova veta), viaceré sa však aj strácajú a hamiltonovská mechanika zostáva celkovo vzaté stále zaujímavejšou.

Ďalšia kapitola sa zaoberá aplikáciou (nijako nemodifikovanej) teórie konexií (pripomeňme, že štandardne spájanej so "vznešenými" kalibračnými poľami) v "prízemnej" oblasti mechaniky deformovateľných telies (otáčanie sa mačky, kinematika auta).

Posledná kapitola sa dá v istom zmysle opäť chápať ako "modifikačná". Hovorí o technike 1+3 rozkladov vo všeobecnej teórii relativity aparátom foriem. Táto technika má niektoré črty spoločné s teóriou konexií, treba však vypustiť požiadavku G-invariantnosti horizontálnych podpriestorov.

[1] modifikáciu tu nechápeme ako *deformáciu* týchto štruktúr, akými sú teória *kvantovania*, *nekomutatívna geometria* či *kvantové grupy*; zaoberáme sa iba modifikáciami, ktoré sú len "mierne, v medziach zákona"

2. NAMBUOVA MECHANIKA

2.1. Kedy platí Liouvillova veta

• V Nambuovej mechanike hrá kľúčovú úlohu analóg Liouvillovej vety z hamiltonovskej mechaniky, preto bude vhodné vyjasniť si situáciu okolo tejto vety vo všeobecnejšom kontexte.

Majme n-rozmernú varietu M s ľubovoľnou fixnou formou objemu (t.j. všade nenulovou n-formou) Ω. Okrem toho majme na M aj dynamické vektorové pole ξ (jeho integrálne krivky sú krivkami časového vývoja). Forma objemu umožňuje definovať objem n-rozmerných oblastí ako integrál

$$\text{objem } \mathcal{D} := \int_{\mathcal{D}} \Omega \tag{2.1.1}$$

Tok Φ_t vektorového poľa ξ zobrazí oblasť $\mathcal{D}$ do oblasti $\mathcal{D}(t) \equiv \Phi_t(\mathcal{D})$. Jej objem je

$$\text{objem } \mathcal{D}(t) = \int_{\mathcal{D}(t)} \Omega = \int_{\Phi_t(\mathcal{D})} \Omega = \int_{\mathcal{D}} \Phi_t^* \Omega$$

takže vidíme, že požiadavka *zachovania* objemu *každej* oblasti vedie pre tok Φ_t na obmedzenie

$$\Phi_t^* \Omega = \Omega \qquad \text{resp. infinitezimálne} \qquad \mathcal{L}_\xi \Omega = 0 \tag{2.1.2}$$

Lieova derivácia formy objemu je však opäť n-forma, takže musí byť nejakým násobkom samotnej formy Ω. Tento násobok sa podľa definície volá *divergencia* poľa ξ (v zmysle formy Ω; niekedy sa jej hovorí aj Ω-divergencia)

$$\mathcal{L}_\xi \Omega =: (\operatorname{div} \xi)\ \Omega \tag{2.1.3}$$

Požiadavka zachovania objemu sa teda dá vyjadriť ako

$$\text{objem } \mathcal{D}(t) = \text{objem } \mathcal{D} \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{div} \xi = 0 \tag{2.1.4}$$

t.j. ľubovoľné objemy zachovávajú toky polí s *nulovou divergenciou.* V lokálnych súradniciach má forma objemu všeobecne tvar

$$\Omega = f(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \tag{2.1.5}$$

pre nejakú (nenulovú) funkciu (presnejšie hustotu) $f(x)$ a jednoduchý výpočet Lieovej derivácie dáva pre Ω-divergenciu výraz

$$\operatorname{div} \xi = \frac{1}{f} (f \xi^i)_{,i} \tag{2.1.6}$$

takže vyššie spomenuté tvrdenie nadobúda tvar

$$\text{objem } \mathcal{D}(t) = \text{objem } \mathcal{D} \qquad \Leftrightarrow \qquad (f \xi^i)_{,i} = 0 \tag{2.1.7}$$

Pozrime sa, ako to vyzerá konkrétne v hamiltonovskej dynamike. Štandardné Hamiltonove kanonické rovnice

$$\dot{q}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a} \qquad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q^a} \qquad a = 1, \dots n \tag{2.1.8}$$

nadobúdajú po premenovaní súradníc

$$x^1 \equiv q^1,\ \dots,\ x^n \equiv q^n,\ x^{n+1} \equiv p_1,\ \dots,\ x^{2n} \equiv p_n \tag{2.1.9}$$

tvar

$$\dot{x}^i = \omega^{ij} \partial_j H \equiv \xi^i_H(x) \qquad \omega^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} = -\omega^{ji} \tag{2.1.10}$$

Z týchto rovníc okamžite vidno, že tunajšie dynamické vektorové pole $\xi_H = \xi^i_H \partial_i$ *má* nulovú divergenciu, *ak sa zvolí* $f(x) \equiv f(q,p) =$ konšt.

$$\operatorname{div} \xi_H \equiv \partial_i \xi^i_H = \partial_i(\omega^{ij}\partial_j H) = \omega^{ij}(\partial_i\partial_j H) = 0 \tag{2.1.11}$$

To však znamená, že platí Liouvillova veta pre fázový objem *zodpovedajúci výberu* $f =$ konšt.: hamiltonovský časový vývoj zachováva fázový objem

$$\text{objem } \mathcal{D} := \text{ konšt.} \int_{\mathcal{D}} d^{2n}x \equiv \text{ konšt.} \int_{\mathcal{D}} d^n q d^n p \tag{2.1.12}$$

2.2. Čo je Nambuova mechanika

• Liouvillova veta v hamiltonovskej mechanike je teda integrálnou verziou špecifickej diferenciálnej vlastnosti hamiltonovského dynamického poľa, nulovosti jeho (vhodne vybratej) divergencie. Z predchádzajúcej diskusie je tiež zrejmé, že jej platnosť nie je striktne viazaná na všetky detaily hamiltonovskej dynamiky, ale len a len na spomínanú nulovosť divergencie. Nambu v práci [1] zaviedol dynamiku, ktorá je založená na dynamickom vektorovom poli *inom* ako hamiltonovskom, ktoré však tiež má nulovú divergenciu a teda v tejto dynamike *tiež platí* Liouvillova veta.

Vo svojej základnej verzii funguje na 3-*rozmernom* fázovom priestore M so súradnicami $(x,y,z) \equiv (x^1,x^2,x^3)$ (hovorí sa im *Nambouva trojica* (triplet) a je to analóg kanonického *páru* (q,p) v hamiltonovskej dynamike) pre ktoré sa postulujú pohybové rovnice

$$\dot{x} = \frac{\partial(H,G)}{\partial(y,z)} \qquad \dot{y} = \frac{\partial(H,G)}{\partial(z,x)} \qquad \dot{z} = \frac{\partial(H,G)}{\partial(x,y)} \tag{2.2.1}$$

t.j.

$$\dot{x}^i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\frac{\partial(H,G)}{\partial(x^j,x^k)} = \epsilon_{ijk}(\partial_j H)(\partial_k G) \equiv (\nabla H \times \nabla G)^i \equiv \xi^i_{H,G}(\mathbf{r}) \tag{2.2.2}$$

alebo tiež "vektorovo"

$$\dot{\mathbf{r}} = \nabla H \times \nabla G \equiv \nabla \times (H\nabla G) \tag{2.2.3}$$

Táto dynamika je teda daná *dvoma* funkciami H, G na M; zvykne sa im hovoriť *hamiltoniány*.

Ukazuje sa, že takúto štruktúru majú napríklad Eulerove dynamické rovnice pre opis rotácií tuhého telesa, ak sa $\mathbf{r}$ stotožní s momentom hybnosti (presnejšie jeho zložkami voči báze točiacej sa spolu s telesom) a ako hamiltoniány H a G sa zoberú kinetická energia a kvadrát vektora momentu hybnosti.

Ľahko sa presvedčíme, že zodpovedajúce dynamické vektorové pole $\xi_{H,G}$ má naozaj nulovú (obyčajnú) divergenciu[2]

$$\operatorname{div} \xi_{H,G} = \partial_i(\epsilon_{ijk}(\partial_j H)(\partial_k G)) = 0 \tag{2.2.4}$$

takže dynamika skutočne zachováva (obyčajný) objem

$$\text{objem } \mathcal{D} := \int_{\mathcal{D}} dxdydz \tag{2.2.5}$$

To je nambuovský analóg Liouvillovej vety.

Podobne ako sa hamiltonovská dynamika neobmedzuje na *jeden* kanonický pár (q,p) ale všeobecne ich využíva viacero, sú možné aj viacrozmerné rozšírenia Nambuovej dynamiky. V pôvodnom článku [1]

[2] "vektorovo"

$$\operatorname{div} \xi_{H,G} = \nabla.\,(\nabla H \times \nabla G) = \nabla.\,(\nabla \times (H\nabla G)) = \operatorname{div}\operatorname{rot}\ (\dots) = 0$$

sa spomínajú *dve* rôzne verzie tohoto rozšírenia: prvé (len tomu sa budeme venovať ďalej) je rozšírenie na N nambuovských trojíc

$$(x^1, x^2, x^3) \mapsto (x_1^1, x_1^2, x_1^3; \dots, x_N^1, x_N^2, x_N^3) \tag{2.2.6}$$

čo je zrejmým analógom hamiltonovského rozšírenia na N kanonických párov

$$(q, p) \mapsto (q^1, p_1, \dots, q^N, p_N) \tag{2.2.7}$$

Zovšeobecnenie (2.2.2) sa postuluje v tvare

$$\dot{x}_a^i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\frac{\partial(H, G)}{\partial(x_a^j, x_a^k)} = \epsilon_{ijk}(\partial_j^a H)(\partial_k^a G) \qquad a = 1, \dots, N \text{ (cez } a \text{ sa nesčíta)} \tag{2.2.8}$$

resp. "vektorovo"

$$\dot{\mathbf{r}}_a = \boldsymbol{\nabla}_a H \times \boldsymbol{\nabla}_a G \qquad a = 1, \dots, N \tag{2.2.9}$$

Príslušné dynamické pole má opäť nulovú (obyčajnú $3N$-rozmernú) divergenciu

$$\operatorname{div} \xi_{H,G} = \sum_{a=1}^{N} \boldsymbol{\nabla}_a . \, (\boldsymbol{\nabla}_a \times (H \boldsymbol{\nabla}_a G)) = \sum_{a=1}^{N} \operatorname{div}_a \operatorname{rot}_a \, (\dots) = 0 \tag{2.2.10}$$

takže aj v tomto všeobecnejšom prípade *platí* Liouvillova veta, a to pre *obyčajný* $3N$-rozmerný objem ($f =$ konšt.)

$$\text{objem } \mathcal{D} := \int_{\mathcal{D}} dx_1 dy_1 dz_1 \dots dx_N dy_N dz_N \tag{2.2.11}$$

Dynamické rovnice pre špeciálne funkcie, súradnice na M, sa dajú prepísať v termínoch rovnice pre ľubovoľnú funkciu $F(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ v tvare

$$\dot{F} = \sum_{a=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial x_a^i}\dot{x}_a^i = \sum_{a=1}^{N} \epsilon_{ijk}\frac{\partial(F, H, G)}{\partial(x_a^i, x_a^j, x_a^k)} \equiv \{F, H, G\} \tag{2.2.12}$$

kde (úplne antisymetrická) *Nambuova* zátvorka *troch* funkcií $\{F, H, G\}$ je analógom *Poissonovej* zátvorky $\{F, G\}$ *dvoch* funkcií v hamiltonovskej mechanike. Tejto zátvorke (aj jej viacrozmerným zovšeobecneniam) sa venuje aj v súčasnom období nemalá pozornosť; je zaujímavá napríklad v súvislosti so štúdiom tzv. ternárnych algebier [7] (kde existuje "násobenie" *troch* prvkov, t.j. zobrazenie $A \times A \times A \to A$) a je kľúčovým objektom v zovšeobecnenej Nambuovej dynamike [5] a jej deformačnom kvantovaní [5,6].

Druhý typ rozšírenia pôvodnej trojrozmernej dynamiky spočíva v prechode do n-rozmerného priestoru so súradnicami $x^1, \dots, x^n$ a dynamikou[3] generovanou $(n-1)$ hamiltoniánmi $H, \dots, G$ rovnicami

$$\dot{x}^i = \epsilon_{ij\dots k}(\partial_j H) \dots (\partial_k G) \equiv \xi_{H,\dots,G}^i(\mathbf{r}) \tag{2.2.13}$$

t.j. ekvivalentne

$$\dot{F} = \frac{\partial(F, G, \dots, H)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \equiv \{F, G, \dots, H\} \tag{2.2.14}$$

[3] V často citovanej Tachtadžanovej práci [5] sa uvažuje všeobecný prípad "Nambuovej" zátvorky pre n funkcií na N-rozmernej variete (kde $N \geq n$). Pre túto zátvorku sa postulujú isté veľmi obmedzujúce identity (sú motivované prirodzenou požiadavkou zachovania algebry pozorovateľných a v špeciálnom prípade $n = 2$ sa redukujú presne na identity platné pre Piossonovu zátvorku) a získava (o.i.) prekvapujúci výsledok, že im *nevyhovuje* ani *pôvodná Nambuova* (!) zátvorka z (2.2.12) pre viac tripletov.

2.3. Niektoré geometrické aspekty Nambuovej mechaniky

Pripomeňme, že *hamiltonovská* mechanika ma elegantnú globálnu formuláciu v termínoch *symplektických variet.*

Ide o párnorozmerné variety $(\mathcal{M}, \omega)$ so symplektickou formou ω (nedegenerovanou uzavretou 2-formou). Na takejto variete sa definuje *hamiltonovské pole* ξ_F generované ľubovoľnou funkciou F vzťahom

$$i_{\xi_F}\omega \equiv \omega(\xi_F, \ . \ ) = -dF \tag{2.3.1}$$

a postuluje sa dynamika rovnicou

$$\dot{\gamma} = \xi_H \tag{2.3.2}$$

t.j. časový vývoj je posun po integrálnych krivkách hamiltonovského poľa generovaného preferovanou funkciou H, hamiltoniánom sústavy $(\mathcal{M}, \omega, H)$. *Darbouxova veta* zaručuje na $\mathcal{M}$ lokálne súradnice, v ktorých má ω tvar

$$\omega = dp_1 \wedge dq^1 + \cdots + dp_N \wedge dq^N \tag{2.3.3}$$

a v ktorých nadobúda (2.3.2) presne tvar (2.1.8), takže (2.3.2) sa dá chápať ako bezsúradnicová formulácia hamiltonovskej dynamiky.

V tomto vyjadrení sú mimoriadne priezračné niektoré jej dôležité všeobecné vlastnosti. Napríklad z definície sa elementárne nahliadne, že symplektická forma (a preto aj jej ľubovoľná vonkajšia mocnina) je invariantná voči toku ľubovoľného hamiltonovského poľa

$$\mathcal{L}_{\xi_F}\omega = 0 \qquad \mathcal{L}_{\xi_F}(\omega \wedge \omega) \equiv \mathcal{L}_{\xi_F}\omega^2 = 0 \qquad \ldots \qquad \mathcal{L}_{\xi_F}\omega^N = 0 \tag{2.3.4}$$

čo vedie na *Poincarého-Cartanove integrálne invarianty*

$$I_1(t) := \int\limits_{\mathcal{D}_2(t)} \omega = \text{ konšt.} \qquad I_2(t) := \int\limits_{\mathcal{D}_4(t)} \omega^2 = \text{ konšt.} \qquad \ldots \qquad I_N(t) := \int\limits_{\mathcal{D}_{2N}(t)} \omega^N = \text{ konšt.} \tag{2.3.5}$$

kde $\mathcal{D}_k$ je ľubovoľná k-rozmerná oblasť (reťazec) v $\mathcal{M}$ a $\mathcal{D}_k(t) \equiv \Phi_t(\mathcal{D}_k)$ je jej obraz voči časovému vývoju Φ_t generovanému poľom ξ_H. Posledný z týchto invariantov nie je nič iné ako *objem* $2N$-rozmernej oblasti v zmysle (preferovanej) formy objemu

$$\Omega := \text{konšt. } \omega^N \equiv dq^1 \wedge \cdots \wedge dq^N \wedge dp_1 \wedge \cdots \wedge dp_N \tag{2.3.6}$$

(s funkciou $f(q,p) =$ konšt. v kanonických súradniciach), t.j. ide o Liouvillovu vetu.[4]

Z týchto výpočtov je zrejmé, že ak chceme preskúmať podobné fakty v prípade Nambuovej dynamiky, veľmi by sme si pomohli, ak by sme poznali ich geometrickú formuláciu, analóg (2.3.1), (2.3.2). To je práve náplňou článkov [3] a [4].

Prvou prácou, v ktorej sa objavila geometrická formulácia Nambuových rovníc, bola práca [2]. Navrhla sa tam prirodzená modifikácia (2.3.1) v tvare

$$i_{\xi_{H,G}}\hat{\omega} \equiv \hat{\omega}(\xi_{H,G}, \ . \ , \ . \ ) = dH \wedge dG \tag{2.3.7}$$

Namiesto symplektickej 2-formy tam figuruje "kanonická" 3-*forma* $\hat{\omega}$, ktorá má súradnicové vyjadrenie (analóg (2.3.3))

$$\hat{\omega} = dx_1^1 \wedge dx_1^2 \wedge dx_1^3 + \cdots + dx_N^1 \wedge dx_N^2 \wedge dx_N^3 \equiv \hat{\omega}_1 + \cdots + \hat{\omega}_N \tag{2.3.8}$$

Z tohoto zápisu sa o.i. dedukuje, že pre viac ako jeden triplet *neplatí* Liouvillova veta. Dôvod je jednoduchý: jediná forma použiteľná na konštrukciu formy objemu (prítomná v rovnici (2.3.7)) je $\hat{\omega}$, avšak na rozdiel od hamiltonovského prípadu ide tu o formu *nepárneho stupňa*, takže jej vonkajšie mocniny

[4] posledný vzťah v (2.3.4) hovorí, že pole ξ_H má *nulovú* Ω-*divergenciu*, takže jeho tok podľa (2.1.4) zachováva objemy v zmysle Ω

sú už *nulové*. Rovnice teda neponúkajú žiadnu $3N$-formu, ktorá by mohla slúžiť ako forma objemu (pre *jeden* triplet problém nevzniká, stačí zobrať samotnú formu $\hat{\omega}$).

To je však v zjavnom protirečení s bezproblémovým súradnicovým výsledkom (2.2.10), (2.2.11). V práci [3] sa ukazuje, že problém je v *chybnom* geometrickom zápise (2.3.7) (pre $N \geq 2$). Nekorektnosť rovnice (2.3.7) okamžite vidno napríklad z toho, že 2-forma na jej ľavej strane neobsahuje súčiny diferenciálov z rôznych trojíc, zatiaľ čo pravá ich obsahuje (funkcie F, G sú ľubovoľné nezávislé). Zároveň sa v [3] dáva isté riešenie, ako sa Nambuova dynamika aj pre viac trojíc *dá* geometricky zapísať. Výsledný zápis je síce na pohľad menej elegantný, v jeho prospech oproti (2.3.7) však hovorí to, že *naozaj* zodpovedá dynamike (2.2.8). Využíva "čiastočné" vonkajšie derivácie[5] d_a a 3-formy $\hat{\omega}_a$ a vyzerá

$$i_{\xi_{H,G}}\hat{\omega}_a = d_a H \wedge d_a G \text{ (cez } a \text{ sa nesčíta)} \tag{2.3.9}$$

Teraz argument o jedinečnosti formy $\hat{\omega}$ (a neplatnosti Liouvillovej vety) padá, lebo rovnice ponúkajú ako stavebný materiál na konštrukciu formy objemu Ω všetky "čiastočné" formy $\hat{\omega}_1, \ldots, \hat{\omega}_N$ a overí sa, že ich súčin

$$\Omega := \hat{\omega}_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega}_N \tag{2.3.10}$$

je invariantná (nenulová!) forma objemu (čo presne korešponduje s výsledkom (2.2.11)). Liouvillova veta teda platí. *Nefungujú* však "nižšie" integrálne invarianty (analógy (2.3.5)): Lieova derivácia samotnej 3-formy $\hat{\omega}_a$ je nenulová, takže integrál tejto formy po 3-rozmernej oblasti všeobecne *nie je* invariantný voči časovému vývoju.

Ak napríklad uvažujeme situáciu s dvoma tripletmi, pričom označíme súradnice $(x, y, z; u, v, w)$ a vyberieme hamiltoniány $H = xu$, $G = yv$, tak dynamické pole je $\xi \equiv \xi_{H,G} = uv\partial_z + xy\partial_w$. Potom

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi \hat{\omega}_1 &\equiv \mathcal{L}_\xi(dx \wedge dy \wedge dz) = dx \wedge dy \wedge d(uv) \neq 0 \\ \mathcal{L}_\xi \hat{\omega}_2 &\equiv \mathcal{L}_\xi(du \wedge dv \wedge dw) = du \wedge dv \wedge d(xy) \neq 0 \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

ale vidno, že

$$\mathcal{L}_\xi \Omega \equiv \mathcal{L}_\xi(\hat{\omega}_1 \wedge \hat{\omega}_2) = dx \wedge dy \wedge d(uv) \wedge du \wedge dv \wedge dw + dx \wedge dy \wedge dz \wedge du \wedge dv \wedge d(xy) = 0 \tag{2.3.12}$$

V [3] sa na základe (2.3.7) tiež skúma otázka kanonických transformácií a potvrdzuje sa fakt spomínaný v [1], že oproti hamiltonovskému prípadu sú dosť chudobné: vychádza, že sa pri nich nemiešajú premenné z rôznych trojíc a v rámci jednej trojice ide o transformácie s jednotkovým jakobiánom.

Na záver ešte spomeňme špecifické črty konštrukcie *účinkového integrálu* pre Nambuovu mechaniku [4]. Pre jeden triplet je podľa (2.3.7) rovnica pre dynamické pole

$$i_{\xi_{H,G}} d\theta = dH \wedge dG = d(HdG) \qquad \theta := xdy \wedge dz \tag{2.3.13}$$

resp. v časovo závislom formalizme

$$i_\xi d(\theta - HdG \wedge dt) = 0 \qquad \xi := \xi_{H,G} + \partial_t \tag{2.3.14}$$

Vidíme, že dynamika ponúka ako analóg *Cartanovej 1-formy* $pdq - Hdt$ (ktorej integrál sa štandardne berie ako účinok) *2-formu* $xdy \wedge dz - HdG \wedge dt$. To ale znamená, že nemáme možnosť postulovať ako účinok integrál tejto formy po krivke, ale tento integrál sme nútení robiť po nejakej *dvojrozmernej ploche* (dva-reťazci). Ukazuje sa [4], že sa naozaj dá vymyslieť plocha (priradená krivke), po ktorej to funguje (variáciou účinku sa získajú Nambuove rovnice až na reparametrizáciu).[6]

[5] takéto čiastočné vonkajšie derivácie vyzerajú na prvý pohľad neelegantne (napríklad nie sú invariantné voči *všeobecnej* zámene súradníc), ale uvedomíme si, že presne rovnaká myšlienka sa využíva v teórii diferenciálnych foriem na *komplexných* varietách, kde sa "úplná" vonkajšia derivácia rozkladá na súčet $d = \partial + \overline{\partial}$ holomorfného a antiholomorfného diferenciálu. Ani tento rozklad nie je invariantný voči všeobecným zámenám súradníc, *je* však invariantný voči *holomorfným* zámenám, t.j. zámenám kompatibilným s komplexnou štruktúrou

[6] Je pozoruhodné, nakoľko pripomína konštrukcia účinkového integrálu pre Nambuovu mechaniku v spomínanom Tachtadžanovom článku [5] z roku 1994 konštrukciu v práci [4] z roku 1992.

2.4. Literatúra

[1] Nambu Y.: Generalized Hamiltonian Dynamics, Phys.Rev. **D 7** (1973) 2405-2412
[2] Estabrook F.B.: Comments on Generalized Hamiltonian Dynamics, Phys.Rev. **D 8** (1973) 2740-2743
[3] Fecko M.: On a geometrical formulation of the Nambu dynamics, J.Math.Phys. **33** (3) 926-929 (1992)
[4] Fecko M.: On a variational principle for the Nambu dynamics, J.Math.Phys. **33** (3) 930-933 (1992)
[5] Takhtajan L.: On foundations of the generalized Nambu dynamics, Comm.Math.Phys. **160** 295-315 (1994) (hep-th/9301111)
[6] Dito G., Flato M., Sternheimer D., Takhtajan L.: Deformation quantization and Nambu mechanics, Comm.Math.Phys. **183** 1-22 (1997) (hep-th/9602016)
[7] Kerner R.: Ternary algebraic structures and their applications in physics, Proceedings of ICGTMP "Group 23" conference, Dubna (Russia) July 30 - Aug.6, 2000
[8] Marmo G.,Saletan E.J.,Simoni A.,Zaccaria F.: Liouville dynamics and Poisson brackets, J.Math.Phys. **22** (1981) 833-841

3. APLIKÁCIE TEÓRIE KONEXIÍ V MECHANIKE DEFORMOVATEĽNÝCH TELIES

3.1. Úvod

• Matematickým základom teoreticko-fyzikálnej schémy známej pod názvom *kalibračné teórie* je časť diferenciálnej geometrie, ktorá sa zaoberá *konexiami v hlavných G-fibráciách.* Táto oblasť geometrie je (aj zásluhou motivácie z fyziky) dobre preštudovaná a najmä od sedemdesiatych rokov, keď sa kalibračné teórie stali vo fyzike elementárnych častíc paradigmou, aj vo fyzikálnych kruhoch v týchto súvislostiach dobre známa.[7] Neskôr sa však ukázalo, že táto časť geometrie má čo povedať nielen vo fundamentálnej fyzike ale aj v mnohých iných "prízemnejších" fyzikálnych kontextoch.

Mnoho článkov sa napríklad venovalo od polovice osemdesiatych rokov problematike *Berryho fázy* [1-4]. Táto fáza (komplexné číslo modulu 1) sa istým spôsobom dá priradiť každej slučke v priestore parametrov kvantovomechanických systémov. V jazyku konexií ide o *holonómiu* istej $U(1)$-konexie, ktorá zodpovedá tomuto systému, t.j. o grupový prvok, ktorý je výsledkom paralelného prenosu po slučke. Klasickým analógom (resp. limitou) Berryho fázy sú *Hannayove uhly* [2,3].

Ďalším poučným príkladom je využitie konexie na fenomenologický opis *dislokácií* a *disklinácií.* Ukazuje sa, že takáto teória sa dá vybudovať (pozri napríklad [5,6]) ako kalibračná teória zodpovedajúca *euklidovskej* grupe v E^3, pričom translačnej časti grupy zodpovedajú dislokácie a rotačnej časti disklinácie.

Zaujímavou oblasťou je vyšetrovanie fyzikálnych princípov a efektívnosti *plávania* [7] objektov pod vodou (čo je zložitý hydrodynamický problém). Ukázalo sa [8,9], že v aproximácii malých Reynoldsových čísel sa pomocou Navierovej-Stokesovej rovnice dá zaviesť $E(3)$-konexia nad priestorom ("neumiestnených") tvarov plávajúceho telesa a jeho pohyb sa dá chápať ako jej holonómia (translácie a rotácie telesa priradené slučkám v priestore tvarov, t.j. cyklickým pohybom telies plávajúcich pod vodou).

V tejto kapitole si všimneme ďalšiu oblasť aplikácií, otáčanie sa deformovateľných telies v priestore.

Kalibračný prístup k tejto problematike dostali do povedomia širokých fyzikálnych kruhov Shapere a Wilczek[8] pekným čitateľným článkom [10] v populárnom didaktickom časopise American Journal of Physics. Venujú sa v ňom spomínanému (fyzikálne dávno pochopenému) javu, že deformovateľné telesá sa môžu vlastným úsilím (bez dotyku okolia) otočiť v priestore. Ak sa napríklad pustí mačka na zem chrbtom dolu, dokáže sa sama otočiť a dopadne na nohy. Novinkou je u spomínaných autorov to, že ukázali ako sa dá tento jav elegantne opísať v jazyku kalibračných polí (konexií); pri výpočte výsledného otočenia telesa prirodzene vstupuje do hry myšlienka kalibračnej vôle a formalizmus $SO(3)$-kalibračného poľa. Toto pole (presnejšie potenciál), ktorého prítomnosť je v rýdzo mechanickom probléme určite nečakaná, vstúpi do hry ako vhodne zapísaná sústava neholonómnych väzieb, ktoré vyjadrujú *zachovanie sa* (nulového) *momentu hybnosti.* Ak sa teleso vhodným spôsobom deformuje tak, že na konci deformácie má rovnaký tvar ako malo na začiatku, (takže vykoná *slučku* v priestore svojích tvarov), tak výsledné otočenie je (podobne ako Berryho fáza) *holonómiou* spomínanej $SO(3)$-konexie.

Článok [13] sa venuje rozšíreniu tohoto postupu na všeobecný konfiguračný priestor so symetriou G.

Posledným zdrojom konexie, ktorý si tu všimneme, je *bezšmykový kontakt* dvoch telies, napríklad pri *gúľaní* sa telesa po podložke. Elementárny príklad tohoto typu sa vyšetruje v [14], trochu pracnejší ale aj zaujímavejší je rozbor kinematiky auta pohybujúceho sa po ceste v [15].

3.2. Konexia v problémoch typu padajúcej mačky

Predstavme si, že pustíme na zem mačku, ktorú držíme v polohe hore nohami. Všeobecne známa je jej schopnosť *otočiť sa* a dopadnúť na nohy. (V podstate to isté robí aj skokan do vody: začne svoju púť

[7] napríklad fakt, že intenzita kalibračného poľa sa dá chápať ako krivosť. Samotný pojem fibrovanej variety sa vo fyzike *implicitne* používal už oveľa skôr, napríklad *fázový priestor* známy z klasickej hamiltonovskej mechaniky je totálnym priestorom istej fibrácie a už v pomerne jednoduchých prípadoch (napríklad pre sférické kyvadlo) ide o *netriviálnu* fibráciu (čiže nie je kartézskym súčinom konfiguračného priestoru a fíbra $\mathbb{R}^n$ za hybnosti)

[8] obaja sú dobre známi z fyziky *vysokých energií* a aparát kalibračných polí v teórii elementárnych častíc dôverne poznali; tento článok, ako uvidíme v odseku 3.2. *nebol* na danú tému prvý (o päť rokov ho predbehla práca [12]), vzhľadom na spôsob prezentácie (v didaktickom časopise, ...) je však dodnes oveľa známejší

otočený dolu nohami a dopadne dolu *hlavou*. Analogické triky predvádzajú tiež skokani na trampolíne [11] a špeciálne sa ich učia aj kozmonauti. Komu sa nechce riskovať život, môže si tento jav v zjednodušenej a úplne bezpečnej domáckej $SO(2)$-verzii vyskúšať tak, že sa skúsi otočiť sa na stoličke od klavíra bez dotyku nôh so zemou.)

Pozrime sa na celý proces z lokálne inerciálnej sústavy, ktorá padá (bez točenia sa) spolu s ňou. Uvidíme mačku, ktorá sa v stave beztiaže vznáša vo vzduchu. Jej ťažisko síce *stojí na mieste* ale mačka sa kadejako skrúca, prehýba a naťahuje až kým o krátky čas neskončí *otočená o* 180 *stupňov*, t.j. s nohami dolu. (Prechod do padajúcej sústavy je dobrý na "vyčistenie stola" od nepodstatného translačného pohybu jej ťažiska pri páde; pre nás je dôležité jej *otáčanie*.) Pritom jej tvar je na konci (viac-menej) rovnaký ako na začiatku, len je celá (ako tuhé teleso) otočená. Z dynamického hľadiska si uvedomíme, že na začiatku bola v kľude, takže jej celková hybnosť aj jej celkový moment hybnosti boli nulové. Keďže na ňu nepôsobí žiadna vonkajšia sila ani žiaden vonkajší moment sily (jediná sila, ktorá tam bola, gravitačná, sa eliminovala prechodom do padajúcej sústavy), tieto hodnoty hybnosti a momentu hybnosti jej budú prislúchať stále: celý čas bude platiť $\mathbf{P} = \mathbf{0} = \mathbf{L}$.

Na prvý (povrchný) pohľad sa môže zdať čudné, že sa mačka ako izolované teleso dokáže otočiť - intuícia hlási narušenie zákona zachovania momentu hybnosti. Je to však unáhlený záver. Netreba si pliesť *otočenie* sa (čo sa *dá*) s *roztočením* sa (čo sa *nedá*, lebo by musel pribudnúť moment hybnosti). To, čo sa tu deje je *otočenie* sa pri striktnom dodržiavaní (v každom okamihu) podmienky $\mathbf{L} = \mathbf{0}$, teda pri *zachovaní konštantnej* (nulovej) *hodnoty momentu hybnosti*.

Predstavme si, že by sme chceli opísať výslednú rotáciu ako koniec reťazca veľkého množstva drobných rotácií. Keby išlo o tuhé teleso, nepredstavovalo by to žiaden problém. Tento prípad sa štandardne rieši tak, že sa v jeho ťažisku (ľubovoľne) fixuje ortonormovaný repér, ktorý sa otáča spolu s ním a ako rotácia telesa sa vníma rotácia tohoto repéru (repér v čase t sa vyjadruje jednoznačnou rotačnou maticou voči repéru v čase 0, $e_a(t) = A^b_a(t)e_b(0)$, $A \in SO(3)$.) Pre teleso, ktoré *mení* v čase svoj tvar to však *stráca zmysel*: pre *každý* tvar v procese deformácie treba definovať fixáciu repéru a keďže *neexistuje nijaká preferovaná* fixácia repéru v tuhom telese,[9] musíme repér fixovať *pre každý tvar ľubovoľne* a teda pre daný časový interval nemá objektívny zmysel hovoriť o rotácii telesa za tento interval, ak v ňom zároveň dochádza k zmene tvaru (bola by daná vzťahom dvoch ľubovoľne vybratých ortonormovaných repérov, čo dáva bezcenný výsledok). *Výnimkou* je len *koncový tvar* telesa, ktorý sa predpokladá *rovnaký* ako bol počiatočný tvar: vtedy ide o "to isté tuhé teleso" a teda *môžeme* objektívne porovnať repér na začiatku s *tak isto fixovaným* repérom na konci a zistiť rotačnú maticu A, ktorá ich spája.[10] Na výpočet objektívneho faktu, výslednej rotácie telesa, sa teda používajú subjektívne vybraté repéry pre každý medzistupeň v procese deformácie. To je však typická situácia v kontexte kalibračných teórií (kde sa to volá fixovanie kalibrácie). Možnosť vybrať si na slučke aj iné repéry je kalibračná vôľa v probléme, jednoznačnosť výsledku nezávisle na tomto výbere znamená, že tento výsledok je *kalibračne invariantný* objekt.

Detailnejší rozbor javu v reči konexií je najlepšie začať zavedením priestorov umiestnených a neumiestnených tvarov deformovateľného telesa.

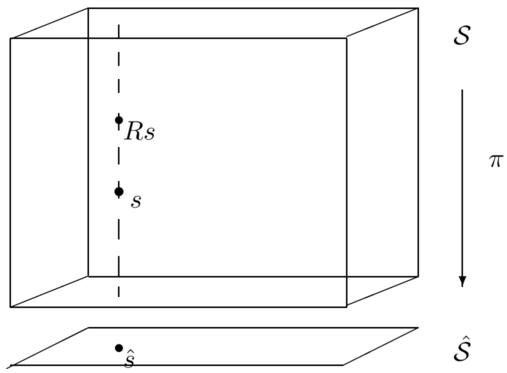
Umiestneným tvarom telesa budeme volať jeho tvar vrátane orientácie v priestore, *neumiestnený tvar* je "abstraktný" tvar telesa *bez ohľadu* na jeho konkrétnu orientáciu v priestore.[11] Dva umiestnené tvary, ktoré sa dajú jeden z druhého získať púhou rotáciou teda zodpovedajú len jednému neumiestnenému tvaru. Ak takéto umiestnené tvary prehlásime za ekvivalentné, tak každý neumiestnený tvar môžeme stotožniť s celou triedou ekvivalencie umiestnených tvarov. Priestor neumiestnených tvarov $\hat{\mathcal{S}}$ deformovateľného telesa sa takto dá chápať ako *faktorpriestor* priestoru umiestnených tvarov $\mathcal{S}$ podľa ekvivalencie danej

[9] chvíľkovú falošnú nádej vzbudzuje nápad fixovať v tuhom telese repér vždy tak, že bázové vektory budú v smere *hlavných osí* v poradí (napríklad) klesajúcich momentov zotrvačnosti voči týmto osiam. Ak sa však bude tvar telesa meniť a v istom čase sa prejde cez tvar, ktorý je *symetrickým zotrvačníkom* (t.j. dva momenty zotrvačnosti sú *rovnaké*), tieto dve osi už sú ľubovoľné v rovine kolmej na tretiu a preferovanosť mizne (pre *sférický* zotrvačník to je ešte horšie)

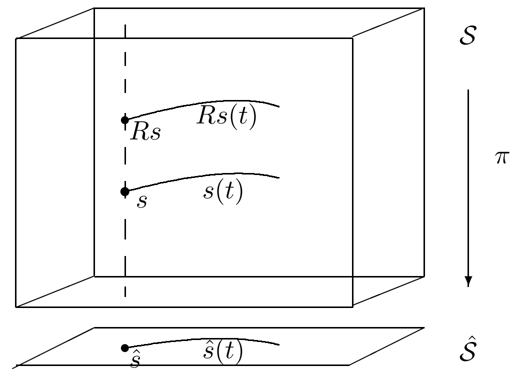
[10] Veľmi podobná situácia nastáva aj pri výpočte Berryho fázy. Analógom slučky v priestore tvarov je tam slučka v priestore parametrov hamiltoniánu a analógom vôle vo výbere repéru pri konkrétnom tvare je vôľa vo výbere fázy stavového vektora pri konkrétnych hodnotách parametrov hamiltoniánu; v koncovom stave už ale vôľa nie je, lebo je (pre slučku) totožný so začiatočným a teda výber fázy sa už realizoval. Tento *objektívny* prírastok fázy stavu je práve Berryho fáza prislúchajúca danej slučke.

[11] pripomeňme, že ťažisko už považujeme za fixované, takže "umiestnenie" abstraktného (neumiestneného) tvaru v priestore naozaj znamená už len určenie jeho orientácie (natočenia; translácie by pohli ťažiskom)

prirodzenou akciou rotačnej grupy v tomto priestore. Na obrázku 3.2.1 sú všetky umiestnené tvary zodpovedajúce neumiestnenému tvaru $\hat{s}$ nakreslené ako zvislá prerušovaná čiara, tvar Rs vznikol rotáciou R tvaru s, projekcia π priradí umiestnenému tvaru s jemu príslušný neumiestnený tvar $\hat{s}$. Fyzikálny mechanizmus otáčania mačky sa v tejto terminológii dá vyjadriť nasledovne (pozri obrázok 3.2.2). Mačka začne z nejakého konkrétneho umiestneného tvaru $s \equiv s(0)$ a jemu zodpovedajúceho neumiestneného tvaru $\hat{s} \equiv \hat{s}(0) \equiv \pi(s(0))$. Svojimi svalmi *priamo* ovplyvňuje (len) svoj *neumiestnený* tvar, napríklad v istom časovom intervale pokrčí ľavú prednú nohu. Vie teda vytvoriť "ľubovoľnú" krivku $\hat{s}(t)$ v priestore neumiestnených tvarov $\hat{\mathcal{S}}$. Zákon zachovania (nulového) momentu hybnosti však spôsobí, že zodpovedajúci časový vývoj v priestore umiestnených tvarov vonkoncom nemôže byť ľubovoľný, ale (ako sa ukazuje) je naopak už *jednoznačne* daný. (Veľmi zhruba povedané ak napríklad krčí spomínanú nohu, pohyb hmoty v tejto nohe si vyžaduje veľmi konkrétnu kompenzáciu (vhodný pohyb inej hmoty na opačnej strane voči ťažisku), aby zostal *súčet* ich momentov hybnosti nulový.) Dáta $\hat{s}(t)$ a $s(0)$ sú teda dostatočné na to, aby sa z nich (využitím len zákona zachovania nulového momentu hybnosti) získala celá časová postupnosť $s(t)$ v priestore umiestnených tvarov, t.j. úplná postupnosť tvarov vrátane ich orientácie v priestore.



Obr. 3.2.1



Obr. 3.2.2

V termínoch obrázku 3.2.2 posledná veta znamená, že ak zadáme krivku $\hat{s}(t)$ v dolnom priestore $\hat{\mathcal{S}}$ a ľubovoľný bod $s(0)$ vo *fíbri* nad jej štartovným bodom (t.j. taký bod $s(0)$ na hornom priestore $\mathcal{S}$, ktorý sa zobrazením π projektuje do bodu $\hat{s}(0)$), tak z bodu $s(0)$ vychádza jednoznačná krivka $s(t)$ na hornom priestore $\mathcal{S}$, pričom táto krivka je v každom okamihu t presne nad[12] krivkou $\hat{s}(t)$ (teda platí $\pi(s(t)) = \hat{s}(t)$). Takáto procedúra sa zvykne volať horizontálny *lift (dvihnutie)* krivky zo spodného priestoru do horného priestoru.

Navyše si uvedomíme, že izotrópnosť (nášho obyčajného trojrozmerného euklidovského) priestoru zaručuje, že ak by mačka nezačala z umiestneného tvaru $s(0)$ ale z otočeného tvaru $Rs(0)$, výsledkom by bola krivka, ktorá by pozostávala z umiestnených tvarov otočených *tou istou* rotáciou R ako v čase 0 aj v *každom ďalšom* čase t. Ak teda aplikujeme na každý bod istým spôsobom liftovanej krivky (t.j. s istým štartovým bodom) *rovnakú* rotáciu, dostaneme *opäť* liftovanú krivku (s iným, rotovaným štartovým bodom; je to vyššia krivka na obrázku 3.2.2).

Tieto výsledky neznamenajú nič iné ako to, že v hre je *konexia*: priestor umiestnených tvarov $\mathcal{S}$ hrá úlohu totálneho priestoru istej *hlavnej* $SO(3)$*-fibrácie* nad priestorom neumiestnených tvarov $\hat{\mathcal{S}}$ ($\equiv$ bázou fibrácie), horizontálne smery v dotykových priestoroch v $\mathcal{S}$ sú vydelené podmienkou zachovania nulového momentu hybnosti.[13]

Za samotný efekt otočenia mačky je teraz menovite zodpovedný kľúčový efekt teórie konexií, *holonómia*. Ak vezmeme ako krivku $\hat{s}(t)$ dolu na $\hat{\mathcal{S}}$ *slučku* (t.j. platí $\hat{s}(0) = \hat{s}(1)$), jej liftom bude hore na $\mathcal{S}$ krivka, ktorá už *nemusí byť* slučkou (lift môže trhať slučky). Začiatok a koniec tejto krivky $s(t)$ sa totiž musia nevyhnutne *len projektovať* do toho istého bodu ($\pi(s(0)) = \pi(s(1)) = \hat{s}(0)$), to znamená,

[12] kriviek ktoré sú presne nad danou krivkou $\hat{s}(t)$ je samozrejme nekonečne veľa, takže samotná táto vlastnosť nevydeľuje jednoznačnú krivku $s(t)$

[13] Shapere a Wilczek nepoužívajú v práci [10] slovník fibrácií (konexia, horizontálnosť, lift, ..., obrázky tu uvedeného typu), ale ich duši (a iste aj duši čitateľskej obce Am.J.Phys.) bližší "fyzikálny" slovník kalibračných polí

že každopádne musia ležať v rovnakom fíbri (na rovnakej zvislej čiare v hornom priestore $\mathcal{S}$ na obrázku 3.2.3).

To, či budú rôzne alebo rovnaké sa však všeobecne apriori nedá povedať a závisí to od konkrétnej konexie. Keďže v našom prípade vnáša podmienka $\mathbf{L} = \mathbf{0}$ do hry konkrétnu konexiu, otázka sa dá jednoznačne vyšetriť a výsledok je, že táto konexia slučky naozaj trhá. Preložené do reči uvažovanej fyzikálnej situácie to ale znamená presne toľko, že ak mačka má na konci rovnaký *neumiestnený* tvar, môže mať iný *umiestnený* tvar, t.j. dôjde k jej čistej *rotácii* v priestore.

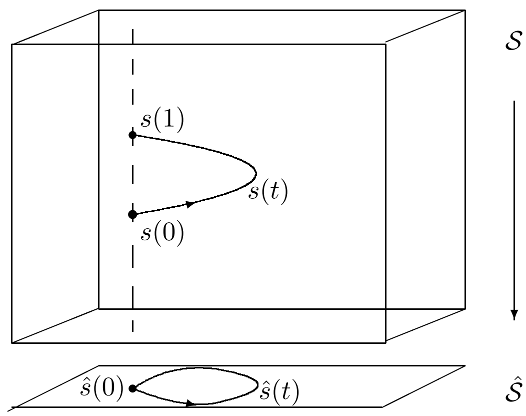
V tejto súvislosti treba spomenúť, že Shapere a Wilczek neboli v skutočnosti v spojení problému padajúcej mačky s konexiami (kalibračnými poľami) prví. Päť rokov pred nimi publikoval v serióznom vedeckom časopise *Annales de l'Institute Henri Poincaré - Physique théorique* článok [12] na túto tému známy francúzsky matematik A.Guichardet. Oficiálnym cieľom článku bolo štúdium separácie stupňov voľnosti molekuly na rotačnú a vibračnú časť, ale autor si jasne uvedomoval, že problém padajúcej mačky s delením stupňov voľnosti molekuly úzko súvisí (explicitne to spomína).

Jeho úvahy a výpočty šli zhruba nasledovne: uvažujme klasickú molekulu s už fixovaným ťažiskom. Jej celková *kinetická energia* sa dá štandardne zapísať ako súčet rotačnej a vibračnej časti. Ak sa však chcú takto rozdeliť aj samotné stupne voľnosti (napríklad zaviesť pre ne osobitné súradnice), dochádza k zaujímavému pozorovaniu. Zatiaľ čo čisto rotačný pohyb je dobre definovaný pojem, s čisto vibračným pohybom to je trochu pikantnejšie: ak molekula vykonáva čisto vibračný pohyb, môže sa stať, že o chvíľu bude oproti počiatočnej konfigurácii *otočená*. V tomto zmysle vibračný pohyb nemožno oddeliť od rotačného.

Pozrime sa na veci trochu podrobnejšie. Predstavme si (klasickú) molekulu ako sústavu hmotných bodov (s ťažiskom v pokoji). Tento systém má svoju konfiguračnú varietu a na nej *metrický tenzor*, ktorý indukuje *kinetická energia* sústavy. Na tomto konfiguračnom priestore má tiež prirodzenú akciu rotačná grupa: prvok z $SO(3)$ transformuje body molekuly tak, akoby molekula bola tuhým telesom. Na generátory tejto akcie sa teda v každom dotykovom priestore naťahuje trojrozmerný (akcia je *voľná*) podpriestor, ktorý zodpovedá čisto rotačným pohybom molekuly. Distribúcia daná generátormi rotácie je (napríklad podľa Frobeniovho kritéria v jazyku vektorových polí) integrovateľná, integrálnymi podvarietami sú (trojrozmerné) orbity akcie. Čisto rotačný pohyb molekuly je zjavne taká krivka v konfiguračnom priestore, ktorá celá leží v jednej orbite rotačnej grupy. *Vibračný* pohyb by mal byť v nejakom zmysle "úplne iný" ako rotačný, ale pre sústavu viac ako dvoch bodov nie je celkom jasné, ako ho presne zaviesť. Guichardet navrhuje geometricky najprirodzenejšiu možnosť *definovať* vibračný pohyb tak, že jeho dotykový vektor je *ortogonálny* (v zmysle metriky z kinetickej energie) k ľubovoľnému rotačnému dotykovému vektoru. Celý dotykový priestor je teda priamym súčtom dvoch ortogonálnych podpriestorov, rotačného a vibračného.[14] Tým sa rozpadá aj kinetická energia na súčet rotačnej a vibračnej časti (ohraničení celého tenzora na spomínané ortogonálne podpriestory). Na úrovni kinetickej energie sa teda pohyb "rovnocenne" delí na rotačný a vibračný. Rotačný pohyb je dobre definovaný (ako sa spomínalo pred chvíľou) aj ako taký: existujú "čisto rotačné" krivky na konfiguračnej variete; ležia v jednej orbite grupy, čo je dobre definovaná trojrozmerná varieta. S čisto vibračnými pohybmi to je však ináč.

Podľa definície to majú byť krivky, ktorých dotykové vektory sú v každom bode kolmé na ľubovoľný rotačný vektor (patria do vibračného podpriestoru). Ukazuje sa však, že táto vibračná distribúcia je *neintegrovateľná*: vibračné podpriestory sa (pre molekulu z viac ako dvoch bodov) nedajú (ani lokálne) preintegrovať do "vibračných podvariet", na ktorých by sa zaviedli "vibračné súradnice" opisujúce "vibračné stupne voľnosti". Existuje len vibračná kinetická energia (tá je definovaná v každom *bode*). Neintegrovateľnosť (neholonómnosť) vibračnej distribúcie vedie na jav analogický otočeniu padajúcej mačky (formálne jav trhania slučiek pri horizontálnom lifte, pozri obrázok 3.2.3): molekula sa môže pohybovať stále čisto vibračne (stále kolmo na rotácie), ale o chvíľu zistíme, že je v konfigurácii, do ktorej sa mohla dostať aj "opačným" typom pohybu, čistou rotáciou. (K symetrickej situácii vzhľadom na integrovateľnosť rotačnej distribúcie dôjsť nemôže: rotačný pohyb nikdy nemá vibračný koniec.) Samozrejme čisto vibračný pohyb znamená zmenu (aj neumiestneného) tvaru molekuly, t.j. jej deformáciu. Dá sa teda povedať, že postupnosťou deformácií sa molekula (podobne ako mačka či skokan do vody) môže v priestore otočiť ako tuhé teleso.

[14]ako kuriozitu uveďme, že formálne taká istá konexia sa objavuje aj v práci [16], ktorá nemá nič spoločné s mechanikou (ide v nej o matematický aparát súvisiaci so supersymetrickými teóriami poľa)

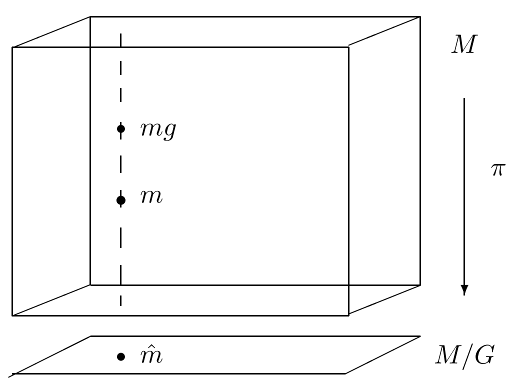


Obr. 3.2.3

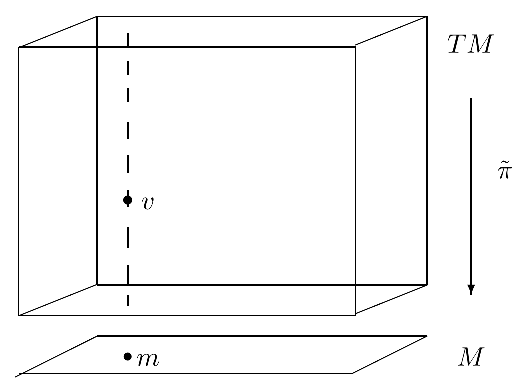
Guichardetov článok [12], ktorý obsahuje všetky myšlienky a technické výsledky z práce [10] však zostal prakticky nepovšimnutý a k jeho znovuobjaveniu došlo až pár rokov po popularizujúcom článku [10] (a aj to len medzi málopočetnou komunitou, ktorá sa týmto problémom zaoberala aj z technickej stránky).

Pozrime sa teraz stručne na to, o čom je článok [13]. Ide o rozšírenie konštrukcie konexie na všeobecný prípad lagranžovskej mechaniky so symetriou, pričom sa kladie dôraz na úlohu zachovávajúcich sa veličín.

Štandardná lagranžovská mechanika sa odohráva na *dotykovej fibrácii* TM, kde M je konfiguračná varieta sústavy. Na variete TM je definovaný lagranžián L. Obe zachovávajúce sa veličiny ($\mathbf{P}$ aj $\mathbf{L}$) vo vyššie spomínaných prípadoch súviseli so symetriou špeciálneho typu: liftovanou do LM z bázy M. Budeme preto všeobecne predpokladať, že na M má (pravú, voľnú, vlastnú) akciu R_g Lieova grupa G. Orbity tejto akcie spôsobujú fibráciu konfiguračnej variety M, ktorá sa tak stáva totálnym priestorom *hlavnej G-fibrácie.* Máme teda v hre *dve* zaujímavé fibrácie



Obr. 3.2.4



Obr. 3.2.5

Obrázok 3.2.4, ktorý zodpovedá hlavnej G-fibrácii $\pi : M \to M/G$, je zrejmým zovšeobecnením hlavnej $SO(3)$-fibrácie $\pi : \mathcal{S} \to \hat{\mathcal{S}}$, ktorá bola v pozadí úvah o mačke či molekulách (teda obrázku 3.2.1). Umiestnené tvary zodpovedajú bodom konfiguračnej variety, neumiestnené tvary bodom faktorvariety M/G, čiže G-orbitám v konfiguračnej variete (tvar telesa je daný polohou bodov, z ktorých sa skladá, čiže konfiguráciou systému bodov). Snahou je nájsť v tejto G-fibrácii nejakú prirodzenú konexiu a overiť, že v špeciálnom prípade mačky a molekuly sa zredukuje na konexiu z prác [10,12].

Keďže v spomínanom špeciálnom prípade bola konexia matematickým vyjadrením podmienky $\mathbf{L} = \mathbf{0} =$ **konšt.**, je prirodzené snažiť sa ju od začiatku spojiť s geometrickým objektom, ktorý má v symplektických dynamikách na starosti súvis medzi symetriami a zachovávajúcimi sa veličinami. Takýmto objektom je *momentové zobrazenie.* Všeobecne ide o zobrazenie zo symplektickej variety, na ktorej máme (poissonovskú) akciu grupy do duálu Lieovej algebry tejto grupy. V našom prípade teda ide o zobrazenie $P : TM \to \mathcal{G}^*$. Grupa G má akciu aj na TM (*lift* akcie R_g z M) a predpokladá sa, že výsledná lagranžovská dynamika je *invariantná* voči tejto liftovanej akcii (vtedy bude momentové zobrazenie dávať zachovávajúce sa veličiny zodpovedajúce akcii G). Symplektická štruktúra na TM sa konštruuje (štandardne) pomocou kanonického tenzora typu $\binom{1}{1}$ na TM a lagranžiánu. Predpokladáme jeho bežný tvar $L = T - U$, uplatní sa len kinetická energia T. V nej je skrytý metrický tenzor na M; požiadavka invariantnosti dynamiky vedie na G-invariantnosť tohoto metrického tenzora.

Máme teda momentové zobrazenie P z TM do $\mathcal{G}^*$. To, čo by sme potrebovali, je ale konexia v hlavnej fibrácii $\pi : M \to M/G$. Tá je daná svojou *formou konexie* ω, čo je 1-forma na M s hodnotami v $\mathcal{G}$ (plus nejaké požiadavky na ňu). Takže

máme	chceme	čo je	na	s hodnotami v	ekvivariantná voči
P		$0-$ forma	TM	$\mathcal{G}^*$	Ad^*
	ω	$1-$ forma	M	$\mathcal{G}$	Ad

Vidíme, že to čo máme je v každej položke iné, ako to čo potrebujeme a na prvý pohľad sa zdá, že rozdiely sú príliš veľké; v skutočnosti to však nie je tak. Funkcia P je tu totiž *lineárna* v rýchlostiach (čo je dôsledkom toho, že akcia je liftovaná z bázy) a *také* funkcie (0-formy) na TM sa dajú kanonicky stotožniť s 1-formami na M (čím sú vybavené prvé dve položky). Ostáva sa ešte vysporiadať s cieľovým priestorom a typom ekvivariantnosti (prerobiť $\mathcal{G}^*$ na $\mathcal{G}$ a Ad^* na Ad), čo sa dá ľahko dosiahnúť a vznikne tak potrebná 1-forma konexie ω na M. Zatiaľ samozrejme nie je jasné, či táto konexia má niečo spoločné s konexiou z článkov [10,12]; jasné je len to, že takto vzniká v potrebnej fibrácii *nejaká* konexia. Jednoducho sa overia jej nasledujúce vlastnosti:

1. horizontálny priestor je *ortogonálny* k vertikálnemu (v zmysle metrického tenzora z kinetickej energie); tým už je zrejmé, že ide o zovšeobecnenie konexie uvažovanej v [12]

2. čisto horizontálny pohyb je taký, že pri ňom má P celý čas nulovú hodnotu; to je zjavne zovšeobecnenie [10], lebo tam sa konexia počítala z podmienok $\mathbf{P} = \mathbf{0} = \mathbf{L}$, čo je práve $P = 0$, ak sa zoberie ako G *euklidovská* grupa s prirodzeným pôsobením na sústavu hmotných bodov v $\mathbb{R}^3$

Priamy výpočet tejto formy konexie pre prípad spomínaný v [10,12] rozptýli aj posledné zvyšky pochybností a ukáže, že naozaj ide o tú istú konexiu.

3.3. Konexia v kinematike auta

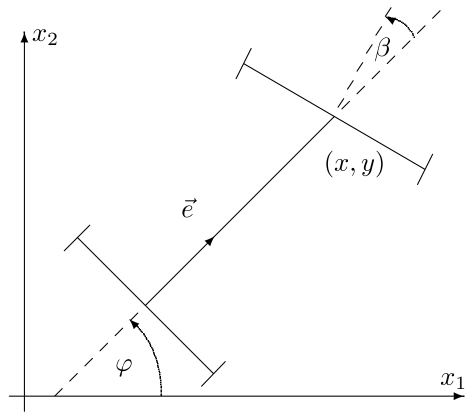
• Ak študujeme situácie v mechanike, v ktorých sa dve (alebo viac) telesá navzájom bez prešmykovania dotýkajú, tak do hry vstupujú *neholonómne* väzby. Podľa definície ide o také väzby, ktoré sa nedajú vyjadriť v tvare vynulovania istých funkcií (len) polohy. Ak sa napríklad gúľa jedno koleso po druhom, body ktoré sa práve dotýkajú majú rovnaké okamžité *rýchlosti*; táto podmienka je neholonómna väzba. Podobne ak uvažujeme koleso, ktoré sa valí po (dvojrozmernej) ceste, tak jeho rotačný a translačný pohyb sú viazané neholonómnym spôsobom; štúdium pohybu takéhoto kolesa je komplikované prítomnosťou neholonómnych väzieb.

Holonómnych väzieb sa v mechanike vieme štandardne zbaviť: uvažujeme len tie body pôvodného konfiguračného priestoru, ktoré sú v súlade s väzbami, t.j. *menší* konfiguračný priestor a všetko ďalej skúmame už len na tomto menšom konfiguračnom priestore. S neholonómnymi väzbami je to ale ináč; konfiguračný priestor nemusí byť vôbec menší ako bez nich, ale väzby komplikujú *spôsob, ako* sa dostať z jeho jedného bodu do druhého. Predstavme si napríklad dve veľmi blízke konfigurácie bicykla na ceste, ktoré sa líšia len jeho drobnou transláciou (ako tuhého telesa, bez gúľania) v smere akým je práve nasmerovaný. Ak ho tam chceme poctivo dotlačiť (čo je *jediný povolený* spôsob pohybu bicykla v jeho konfiguračnom priestore) a nie nadvihnúť ho a preložiť do koncového stavu, je zrejmé, že to bude pomerne zložité: treba vykonať dosť dlhú a (oproti zakázanému preneseniu) zložitú (navyše nejednoznačnú) cestu.

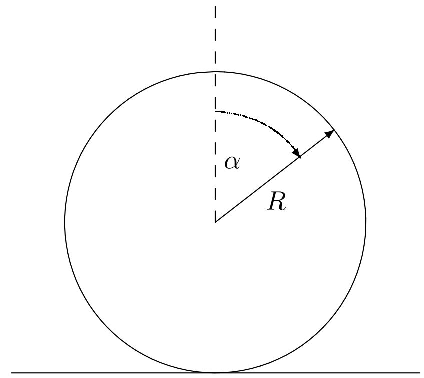
Neholonómne väzby teda nezmenšujú konfiguračný priestor, ale pridávajú naň ako dodatočnú štruktúru *neintegrovateľnú distribúciu.* V dotykovom priestore v každom bode (t.j. priestore *rýchlostí* v každom bode) je totiž vydelený podpriestor vektorov v smeroch ktoré sú "povolené väzbami".[15]

Pre ďalšie úvahy budú dôležité také neholonómne mechanické sústavy, ktoré majú istú *symetriu*, t.j. v ktorých máme *navyše akciu grupy* na konfiguračnom priestore, pričom spomínaná distribúcia je voči nej *invariantná*. Zaujímavým pozorovaním je to, že takto sa niekedy z konfiguračného priestoru stáva totálny priestor istej *hlavnej G-fibrácie* s *konexiou*: orbity (vhodnej) akcie grupy sú fíbre a distribúcia daná neholonómnymi väzbami sa dá reinterpretovať ako *horizontálna* distribúcia. Presne táto situácia nastáva napríklad pri opise kinematiky auta na ceste, ktorá sa študuje v práci [15].

Uvažujeme veľmi zjednodušený model auta, v ktorom má (len) 5-rozmerný konfiguračný priestor $\mathcal{S}$ so zavedením súradníc podľa obrázku 3.3.1.



Obr. 3.3.1.: Súradnice x, y, φ, β .



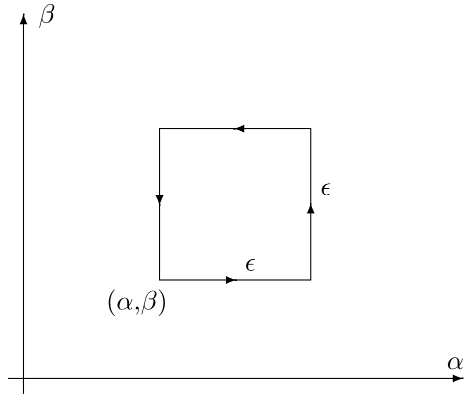
Obr. 3.3.2.: Predné koleso - súradnica α.

Tento priestor je opäť (ako v paragrafe o mačke) prirodzené nazvať priestor *umiestnených* tvarov auta. Na tomto konfiguračnom priestore má (voľnú) akciu *euklidovská grupa* $E(2)$ (translácie a rotácie roviny = cesty): auto sa posunie a otočí *ako tuhé teleso*, teda bez otáčania kolies a volantu; môžeme si to predstaviť tak, že ho nadvihneme a položíme na výsledné miesto. Priestor orbít $\hat{\mathcal{S}}$ bude priestorom *neumiestnených* tvarov auta; ide o tvary auta bez ohľadu na to, kde je a ako je otočené. Dostávame *hlavnú $E(2)$-fibráciu* $\pi : \mathcal{S} \to \hat{\mathcal{S}}$. Neumiestnené tvary sú parametrizované súradnicami (α, β), teda natočením jedného kolesa a volantu. Podobne ako v prípade mačky je toto priestor ovládaný *priamo* vodičom (plynový pedál, volant). Cieľom vodiča však nie je realizovať krivky v jeho vnútornom priestore $\hat{\mathcal{S}}$ (hrať sa v zaparkovanom aute), ale v celkovom konfiguračnom priestore $\mathcal{S}$ (jazdiť, premiestňovať sa na ceste); krivky v $\hat{\mathcal{S}}$ sú nato len nástrojom. Kontakt medzi týmito dvoma priestormi realizuje *konexia* vo fibrácii $\pi : \mathcal{S} \to \hat{\mathcal{S}}$, ktorej fyzikálnym pozadím je *bezšmykový kontakt* kolies s vozovkou. Krivky v $\mathcal{S}$, ktoré hovoria aj o presmiestňovaní sa auta po ceste, sú horizontálne *lifty* kriviek na báze $\hat{\mathcal{S}}$. Doslovne teda môžeme použiť obrázky Obr.3.2.1 a Obr.3.2.2 z paragrafu o mačke, pričom ich terajšia interpretácia znie, že manipulácie s volantom a plynovým pedálom (krivka $\hat{s}(t)$ na $\hat{\mathcal{S}}$) spôsobujú pohyb auta po ceste ($s(t)$ na $\mathcal{S}$; R je teraz euklidovská transformácia polohy auta).

Pobavujúcou skutočnosťou je priama interpretácia dôležitého pojmu *krivosti* konexie (*intenzity* kalibračného poľa) v termínoch *parkovacieho manévru*. Tento známy manéver (drobný pohyb dopredu, otočenie volantu, pohyb dozadu, spätné otočenie volantu) vyzerá v priestore neumiestnených tvarov $\hat{\mathcal{S}}$ ako *slučka*

Liftom tejto slučky je roztrhnutá slučka (je tu teda netriviálna holonómia), čiže v danom prípade čistá translácia a rotácia auta na ceste (to je presný analóg čistej výslednej rotácie mačky). Konkrétne parametre tejto euklidovskej transformácie sú najlepšie viditeľné z *2-formy krivosti* konexie, ktorá sa dá v danom prípade jednoducho explicitne vyrátať [15]. Dá sa tiež zostrojiť zložitejší parkovací cyklus (obsahuje viacej slučiek podobného typu), ktorého výsledkom je (temer) čistá translácia v smere *kolmom* na pôvodný smer auta, čo je obzvlášť žiadúci typ pohybu pre auto tesne zablokované spredu aj zozadu ďalšími autami.

[15] holonómne väzby sa tiež dajú (trochu násilne) chápať ako pridanie distribúcie; tá je však *integrovateľná*, jej integrálnou podvarietou je spomínaný zmenšený konfiguračný priestor a ďalej sa všetko obmedzuje už len naň



Obr. 3.3.3.: Jednoduchý infinitezimálny parkovací cyklus

Pohľad na auto jazykom diferenciálnej geometrie nie je celkom nový, jeho opis pomocou štyroch vektorových polí sa spomína v Nelsonovej učebnici [17]. V našom prístupe sa pridaním jedného stupňa voľnosti dosiahla možnosť pozerať sa na celú situáciu v termínoch *konexií*.

Na záver by bolo dobre spomenúť, že neholonómne situácie v mechanike sú aj v súčasnosti veľmi živou témou so skutočnými praktickými aplikáciami v *robotike* a *teórii riadenia*. (Napríklad tohtoročná téma tradičného sympózia z matematickej fyziky v Toruni (Poľsko) znie *Neholonómne sústavy a kontaktné štruktúry*). Spústa mechanických zariadení obsahuje stupne voľnosti, ktoré sú ovládané inými stupňami voľnosti (často na diaľku) a neholonómnosť je pritom skôr pravidlom ako výnimkou. Keďže tu je nemalá spoločenská objednávka, téma sa skúma z mnohých strán (intenzívne aj z "výpočtovej" strany) a jednou z nich je aj prístup využívajúci niektoré vetvy diferenciálnej geometrie [18,19].

3.4. Literatúra

[1] Berry M.V.: Quantal phase factors accompanying adiabatic changes, Proc. Roy. Soc. Lond. A 392, 45-57 (1984)
[2] Berry M.V.: Classical adiabatic angles and quantal adiabatic phase, J.Phys.A: Math.Gen. 18 (1985) 15-27
[3] Hannay J.H.: Angle variable holonomy in adiabatic excursion of an integrable Hamiltonian, J.Phys.A: Math.Gen. 18 (1985) 221-230
[4] Wilczek F.,Zee A.: Appearance of Gauge Structure in Simple Dynamical Systems, PRL 52, (1984) 2111-2114
[5] Kadič A., Edelen D.G.B.: A Gauge Theory of Dislocations and Disclinations. Lecture Notes in Physics No. 176. Springer Verlag, Berlin 1983
[6] Lazar M.: Dislocation theory as a 3-dimensional translation gauge theory, Annalen der Physik 9 (2000) 461-473
[7] Purcell E.M.: Life at low Reynolds number, Am.J.Phys. Vol 45, N.1, 1977, 3-11
[8] Shapere A, Wilczek F.: Geometry of self-propulsion at low Reynolds number, J. Fluid. Mech. (1989) vol.198, 557-585
[9] Shapere A, Wilczek F.: Efficiences of self-propulsion at low Reynolds number, J. Fluid. Mech. (1989) vol.198, 587-599
[10] Shapere A, Wilczek F.: Gauge kinematics of deformable bodies, Am. J. Phys. 57 (1989) 514-518
[11] Frohlich C.: Do springboard divers violate angular momentum conservation?, Am. J. Phys. 47(7), July 1979, 583-592
[12] Guichardet A.: On rotation and vibration motions of molecules, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol.40,n.3, 1984, p. 329-342
[13] M.Fecko: "Falling cat" connections and the momentum map, J.Math.Phys. **36** (12) 6709-6719 (1995); (physics/9702010)
[14] M.Fecko: U(1)-gauge structure associated with a motion of a guitar string, Acta Phys.Slov. vol **44**, No.6, 445-449 (1994)
[15] M.Fecko: Gauge-potential approach to the kinematics of a moving car, Il Nuovo Cimento B, **111**

(11) 1315-1332 (1996) (physics/9703016)
[16] Hitchin N.J.,Karlhede A.,Lindström U.,Roček M.: Hyperkähler Metrics and Supersymmetry, Comm. Math. Phys. **108**, 535-589 (1987)
[17] E.Nelson : Tensor analysis, Princeton Univ. Press 1967, str. 33-36
[18] Bullo F.,Murray R.M.: Experimental comparison of trajectory trackers for a car with trailers, 1996 IFAC World Congress, San Francisco, July 1996
[19] Tilbury D.,Murray R.M.,Sastry S.S.: Trajectory Generation for the N-Trailer Problem Using Goursat Normal Form, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.40, No.5 May 1995

4. $1+3$ ROZKLADY POMOCOU DIFERENCIÁLNYCH FORIEM

4.1. Úvod

• Uvažujme v *Minkowského* priestore $E^{1,3} \equiv (\mathbb{R}^4, \eta)$ nejakú diferenciálnu formu, napríklad 2-formu elektromagnetického poľa F. Ak ju vyjadríme v kartézskych súradniciach $x^\mu \equiv (x^0, x^i) \equiv (t, x, y, z)$, dostaneme

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = dt \wedge F_{0i} dx^i + \frac{1}{2} F_{ij} dx^i \wedge dx^j = dt \wedge \mathbf{E}.d\mathbf{r} - \mathbf{B}.d\mathbf{S} \equiv dt \wedge \hat{E} + \hat{B} \qquad (4.1.1)$$

kde 1-forma elektrického poľa $\hat{E}$ a 2-forma magnetického poľa $\hat{B}$ už neobsahujú diferenciál dt, ale len priestorové diferenciály dx^i. Také formy je prirodzené volať *priestorové*, lebo vyzerajú, akoby žili len v (trojrozmernom) priestore E^3; jediná ich vlastnosť, ktorá prezrádza, že predsa len ide o formy v $E^{1,3}$, je časová závislosť ich komponent. V jazyku štandardnej vektorovej analýzy v E^3 máme vektorové polia $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$, ktoré závisia od času, takže tiež vlastne objekty, ktoré signalizujú, že im je varieta E^3 "priúzka".

Formy $\hat{E}$ a $\hat{B}$ sú objekty, ktoré nesú úplnú informáciu o rozštiepení "celkového" poľa F na elektrickú resp. magnetickú časť v danej vzťažnej sústave (t.j. pri danom rozštiepení samotného časopriestoru na čas a priestor), pričom sa však už tieto časti *ďalej neštiepia* na ešte menšie časti zodpovedajúce komponentám v smere súradnicových osí v trojrozmernom priestore; $\hat{E}$ a $\hat{B}$ sú invariantné voči výberu súradníc v E^3, to čo pocítia je len taká zámena, ktorá mení rozdelenie časopriestoru na čas a priestor.

Je zrejmé, že takáto situácia sa zopakuje pre ľubovoľnú diferenciálnu p-formu α v Minkowského priestore. Keďže $dt \wedge dt = 0$, faktor dt je v každom člene buď (len) raz alebo tam vôbec nie je. Ak súčet všetkých členov pri dt označíme $\hat{s}$ a súčet členov bez dt ako $\hat{r}$, dostávame zápis ľubovoľnej formy α v tvare

$$\alpha = dt \wedge \hat{s} + \hat{r} \qquad (4.1.2)$$

kde formy $\hat{s}$ a $\hat{r}$ už neobsahujú diferenciál dt (v kartézskych súradniciach obsahujú už iba súčiny diferenciálov dx^i), takže sú priestorové. Môžeme zhrnúť, že ak sa (výberom inerciálnej vzťažnej sústavy) fixuje smer času, každá p-forma v Minkowského priestore sa jednoznačne kóduje *dvoma priestorovými* formami, $(p-1)$-formou $\hat{s}$ a p-formou $\hat{r}$.

Operácie na formách v Minkowského priestore majú svoj odraz ako isté konkrétne operácie s dvojicou $\hat{r}, \hat{s}$; ak výsledkom nejakej operácie je prechod $\alpha \mapsto \alpha'$, ich rozklad vyzerá ako prechod $(\hat{s}, \hat{r}) \mapsto (\hat{s}', \hat{r}')$.

Pozrime sa napríklad na operátor vonkajšej derivácie. Ak počítame vonkajšiu deriváciu *priestorových* foriem, dostávame ako výsledok "všeobecnú" formu, t.j. môže sa tam objaviť aj diferenciál dt (keďže komponenty závisia od t, *ich* vonkajšia derivácia dá aj člen obsahujúci dt). Napríklad pre 1-formu elektrického poľa dostávame

$$d\hat{E} = d(E_i(t, \mathbf{r}) dx^i) = dE_i \wedge dx^i = E_{i,t} dt \wedge dx^i + E_{i,j} dx^j \wedge dx^i \equiv dt \wedge (\partial_t \mathbf{E}).d\mathbf{r} + (\operatorname{rot} \mathbf{E}).d\mathbf{S} \qquad (4.1.3)$$

Všimneme si, že faktor za dt v prvom člene je *Lieovou* deriváciou 1-formy $\hat{E}$ v smere "časového" poľa ∂_t, zatiaľ čo druhý člen vyzerá presne tak, ako *by sa robila* vonkajšia derivácia formy $\hat{E}$, keby žila *len v* E^3. Ak takúto "priestorovú" vonkajšiu deriváciu označíme ako $\hat{d}$, môžeme výsledok zapísať v tvare

$$d\hat{E} = dt \wedge (\mathcal{L}_{\partial_t} \hat{E}) + \hat{d}\hat{E} \qquad (4.1.4)$$

Potom pre vonkajšiu deriváciu *všeobecnej* formy dostávame

$$d\alpha \equiv d(dt \wedge \hat{s} + \hat{r}) = -dt \wedge d\hat{s} + d\hat{r} = dt \wedge (\mathcal{L}_{\partial_t} \hat{r} - \hat{d}\hat{s}) + \hat{d}\hat{r} \qquad (4.1.5)$$

Operátor "celkovej" vonkajšej derivácie rozloženej formy sa teda tiež dá vyjadriť v rozloženom tvare, t.j. v termínoch štandardných trojrozmerných operácií na trojrozmerných formách

$$d : (\hat{s}, \hat{r}) \mapsto (\mathcal{L}_{\partial_t} \hat{r} - \hat{d}\hat{s}, \hat{d}\hat{r}) \qquad (4.1.6)$$

Podobné roklady sa dajú urobiť aj s inými operátormi na formách, napríklad Hodgeovým operátorom $*$, kodiferenciálom δ, Laplaceovým-deRhamovým operátorom Δ apod.

Teória gravitácie, všeobecná teória relativity, sa vybudovala na predpoklade o platnosti *princípu ekvivalencie*: inerciálne sústavy existujú len lokálne, sú to sústavy voľne padajúce (bez rotácie) v gravitačnom poli a v týchto sústavách platia fyzikálne zákony špeciálnej teórie relativity. Z (plochého) priestoročasu $E^{1,3}$ sa stala všeobecná *lorentzovská varieta* (M, g). V každom bode M si môžeme rozdeliť priestoročas lokálne (v dotykovom priestore tohoto bodu) na priestor a čas: smer času fixuje ľubovoľný jednotkový časupodobný vektor (štvorrýchlosť) V (t.j. $g(V, V) = 1$), trojrozmerný "priestor" tohoto pozorovateľa potom určujú vektory *kolmé* na tento smer času. Vektorovému *poľu* s touto vlastnosťou sa hovorí *pole pozorovateľov*; každá integrálna krivka poľa V je svetočiarou nejakého pozorovateľa. Namiesto doteraz uvažovanej trojice $(\mathbb{R}^4, \eta, \partial_t)$ (plochý Minkowského priestor a pole pozorovateľov ∂_t) dostávame teda všeobecnejšiu štruktúru (M, g, V). Každý konkrétny pozorovateľ vníma "objektívnu štvorrozmernú" fyziku z pohľadu svojho lokálneho 1+3 rozštiepenia na čas a priestor. Preto bolo treba rozvinúť aparát, ktorý dokáže elegantné štvorrozmerné objekty na M (tenzorové polia, operátory ktoré na ne pôsobia) rozštiepiť tak, ako ich vníma konkrétny (ľubovoľný) pozorovateľ.

V spomínanom špeciálnom prípade $(\mathbb{R}^4, \eta, \partial_t)$ sme videli, že potrebné rozklady sa ľahko robia využitím (globálnych) kartézskych súradníc. Všeobecná teória 1+3 rozkladov tenzorových polí a operácií na nich je však podstatne zložitejšia a venuje sa jej obšírna literatúra (pozri napríklad [1-7]).

Ukazuje sa, že aparát rozkladov sa značne zjednodušuje, ak sa môžeme obmedziť na špeciálne tenzorové polia, na *diferenciálne formy*. V tomto prípade môžeme samozrejme pracovať aj technikami platnými pre všetky tenzory, lepšie je však využiť špecifiká, ktoré ponúkajú len formy.

Použitie foriem ako technického nástroja rozkladov je samo osebe už staršieho dáta. V slávnom článku o geometrodynamike [10] uvažujú Misner s Wheelerom rozklady foriem, avšak v tzv. *nadplochovom prístupe* (priestoročas sa rozvrství na priestorupodobné trojrozmerné nadplochy, ktoré sa číslujú parametrom t). Druhé možné chápanie rozkladov je *kongruenčný prístup*, v ktorom je v priestoročase daná kongruencia časupodobných kriviek. Tieto krivky γ sa interpretujú ako svetočiary pozorovateľov a definujú v každom bode lokálnu časovú os (ako dotykový vektor $\dot{\gamma}$) a lokálny trojrozmerný priestor (ako podpriestor dotykového priestoru *kolmý* na smer času). Vidíme, že tento prístup je vlastne totožný s vyššie spomínanou formuláciou v jazyku štruktúry (M, g, V). Cieľom práce [11] je ukázať jednoduchý formalizmus, ktorým sa dajú realizovať rozklady foriem a operátorov na nich v kongruenčnom prístupe. Tento formalizmus využíva postupy, ktoré sa štandardne aplikujú v teórii konexií na hlavných G-fibráciách (pozri napr. [12]).

4.2. Rozklady foriem na (M, g, V)

- Zaveďme pre spomínané vektorové pole V štandardné operácie na formách

$$i_V : \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M) \qquad\qquad j_V : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$$

$$i_V \alpha(U, ...) := \alpha(V, U, ...) \tag{4.2.1}$$

$$j_V \alpha := \tilde{V} \wedge \alpha \qquad\qquad \tilde{V} \equiv g(W, .) \equiv \flat_g V \tag{4.2.2}$$

Technika rozkladu je založená na elementárnej identite

$$j_V i_V + i_V j_V = \hat{1} \tag{4.2.3}$$

Ak sa z týchto operátorov vytvoria kombinácie

$$\mathcal{P} := i_V j_V \qquad\qquad \mathcal{Q} := j_V i_V \tag{4.2.4}$$

tak sa overí, že máme rozklad jednotkového operátora na súčet dvoch projektorov[16]

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P} \qquad \mathcal{Q}^2 = \mathcal{Q} \qquad \mathcal{P}\mathcal{Q} = 0 = \mathcal{Q}\mathcal{P} \qquad \mathcal{P} + \mathcal{Q} = \hat{1} \tag{4.2.5}$$

[16] dá sa overiť, že operátor j_V je *združený* k i_V v zmysle štandardnej bilineárnej formy $\langle \alpha, \beta \rangle = \int \alpha \wedge *\beta$, takže $\mathcal{P} = i_V (i_V)^+, \mathcal{Q} = (i_V)^+ i_V$

Potom pre ľubovoľnú formu $\alpha \in \Omega^p(M)$ platí

$$\alpha = (\mathcal{Q} + \mathcal{P})\alpha = \tilde{V} \wedge i_V \alpha + i_V j_V \alpha \tag{4.2.6}$$

t.j. dostávame *rozklad* formy

$$\alpha = \tilde{V} \wedge \hat{s} + \hat{r} \tag{4.2.7}$$

kde

$$\hat{s} \equiv i_V \alpha \qquad \hat{r} \equiv i_V j_V \alpha \tag{4.2.8}$$

Ak ako trojicu (M, g, V) zoberieme $(\mathbb{R}^4, \eta, \partial_t)$, dostaneme $\tilde{V} = dt$ a všeobecný rozklad (4.2.7) sa zredukuje na (4.1.2) resp. špeciálne (4.1.1). Ľahko sa tiež overí, že explicitné vzorce (4.2.8) dávajú práve potrebné výrazy získané zozbieraním členov s dt a bez dt. Rozklad (4.2.7) je teda zovšeobecnením rozkladu (4.1.2).

Na vzniknutú situáciu sa môžeme pozrieť aj jazykom, ktorý sa používa v teórií konexií, v termínoch *horizontálnych* podpriestorov. V ľubovoľnom bode $m \in M$ definujeme *vertikálny* smer ako lokálny smer času (= smer V) a *horizontálne* smery ako lokálne 3-priestorové smery - kolmé na V. Potom má každý vektor jednoznačný rozklad

$$U = U_{||} + U_{\perp} \equiv \text{ver } U + \text{hor } U$$

a (v duchu teórie konexií na hlavných G-fibráciách) môžeme definovať operáciu na formách

$$(\text{hor } \alpha)(U, W, ...) := \alpha(\text{hor } U, \text{hor } W, ...) \tag{4.2.9}$$

Ukáže sa, že presne to robí časť $i_V j_V$ v (4.2.3)

$$\text{hor } \alpha = i_V j_V \alpha \equiv \mathcal{P}\alpha \equiv \hat{r} \tag{4.2.10}$$

takže (4.2.6) sa dá prepísať aj ako

$$\alpha = \tilde{V} \wedge \hat{s} + \text{hor } \alpha \tag{4.2.11}$$

Ak zavedieme pojem *priestorovej* (horizontálnej) formy požiadavkou

$$\alpha = \text{hor } \alpha \tag{4.2.12}$$

(čo je práve vtedy, keď $i_V \alpha = 0$, čo je zase práve vtedy, keď $\alpha = i_V \beta$ pre nejakú formu β), vidíme, že forma α sa kóduje (voči poľu V, teda spôsobom závislým od pozorovateľa) do *dvoch priestorových* foriem $\hat{s}$, $\hat{r}$.

4.3. Rozklady operátorov na formách na (M, g, V)

• Ak na formu $\alpha = \tilde{V} \wedge \hat{s} + \hat{r}$ aplikujeme nejaký operátor (napríklad Hodgeov operátor dualizácie $*$), výsledkom je nejaká iná forma na (M, g, V). Tú môžeme (rovnako ako pôvodnú formu α) rozložiť a vyjadriť ju v tvare $\tilde{V} \wedge \hat{S} + \hat{R}$. Ľubovoľnú operáciu na formách na (M, g, V) teda môžeme vyjadriť priamo v termínoch nejakých operátorov na *priestorových* formách $\hat{s}$, $\hat{r}$, z ktorých sa α "skladá". Pod rozkladom operátora na formách máme na mysli práve toto vyjadrenie. Ak sa tento výpočet napríklad urobí pre spomínaný Hodgeov operátor, získa sa [9]

$$*(\tilde{V} \wedge \hat{s} + \hat{r}) = \tilde{V} \wedge \hat{*}\hat{r} + \hat{*}\hat{\eta}\hat{s} \tag{4.3.1}$$

kde $\hat{*}$ je Hodgeov operátor v E^3 (*priestorový* Hodgeov operátor) a $\hat{\eta}$ je *hlavný automorfizmus* na formách (p-forme priradí jej $(-1)^p$-násobok).

Do vzorca pre podobný rozklad *vonkajšej derivácie* vstupuje operátor *priestorovej* vonkajšej derivácie $\hat{d}$; pozrime sa najprv na motiváciu pre jeho zavedenie z pohľadu Stokesovej vety.

Nech $\mathcal{D}$ je priestorová ($\equiv$ horizontálna) oblasť (dotykové vektory ku krivkám v nej sú horizontálne), $\hat{b}$ je priestorová forma. Potom

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} d\hat{b} &\overset{1.}{=} \int_{\partial\mathcal{D}} \hat{b} && \text{zo Stokesovej vety} \\ &\overset{2.}{=} \int_{\mathcal{D}} \text{hor } d\hat{b} \equiv \int_{\mathcal{D}} \hat{d}\hat{b} && \text{keďže } \mathcal{D} \text{ je horizontálna} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ platí *priestorová Stokesova veta*

$$\int_{\mathcal{D}} \hat{d}\hat{b} = \int_{\partial\mathcal{D}} \hat{b} \tag{4.3.2}$$

kde sa zaviedla *priestorová vonkajšia derivácia*

$$\hat{d} := \text{hor } d \equiv i_V j_V \ d \tag{4.3.3}$$

(jej formálna definícia presne kopíruje *kovariantnú* vonkajšiu deriváciu, ktorá vystupuje v teórii konexií na hlavných G-fibráciách [12]). Pre priestorové formy a oblasti môžeme teda nahradiť "celkový" operátor d v Stokesovej vete operátorom $\hat{d}$ (takže priestorové formy sa ešte viac podobajú na formy, ktoré žijú len v E^3; spomínané priestorové oblasti $\mathcal{D}$ však nemusia vždy existovať, pozri [11]).

Vzorec pre rozklad vonkajšej derivácie vyjde v tvare

$$d(\tilde{V} \wedge \hat{s} + \hat{r}) = \tilde{V} \wedge (-\hat{d}\hat{s} + \mathcal{L}_V \hat{r} + \hat{a} \wedge \hat{s}) + (\hat{d}\hat{r} + \hat{y} \wedge \hat{s}) \tag{4.3.4}$$

kde priestorové formy $\hat{a}$ a $\hat{y}$ sú kinematické charakteristiky poľa pozorovateľov V, dané rozkladom 2-formy $d\tilde{V}$

$$d\tilde{V} = \tilde{V} \wedge \hat{a} + \hat{y} \tag{4.3.5}$$

Konkrétne 1-forma $\hat{a} = g(\nabla_V V, \ . \ ) \equiv g(a, \ . \ )$ je *forma zrýchlenia* poľa V a 2-forma $\hat{y}$, *forma* (tenzor) *víru* je mierou neintegrovateľnosti horizontálnej (priestorovej) distribúcie (alebo v inom jazyku mierou (ne)možnosti synchronizácie hodín pozorovateľov daných poľom V; je to formálny analóg 2-formy *krivosti* v teórii konexií).

V špeciálnom prípade $(\mathbb{R}^4, \eta, \partial_t)$ dostávame $\tilde{V} = dt$, takže $\hat{a} = 0 = \hat{y}$ a (4.3.4) sa redukuje na

$$d(dt \wedge \hat{s} + \hat{r}) = dt \wedge (-\hat{d}\hat{s} + \mathcal{L}_{\partial_t} \hat{r}) + (\hat{d}\hat{r}) \tag{4.3.6}$$

čo je v zhode s (4.1.6).

Ak sa napríklad rozpíšu podľa (4.3.1) a (4.3.4) Maxwellove rovnice

$$\begin{aligned} d * F &= -4\pi * j \\ dF &= 0 \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

tak dostaneme

$$\begin{aligned} \hat{d}\hat{*}\hat{E} + \hat{y} \wedge \hat{*}\hat{B} &= 4\pi\rho\hat{\omega} \\ \hat{d}\hat{*}\hat{B} - \mathcal{L}_V \hat{*}\hat{E} - \hat{a} \wedge \hat{*}\hat{B} &= 4\pi\hat{*}\hat{j} \\ \hat{d}\hat{E} + \mathcal{L}_V \hat{B} - \hat{a} \wedge \hat{E} &= 0 \\ \hat{d}\hat{B} - \hat{y} \wedge \hat{E} &= 0 \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

alebo ekvivalentne v bežnejšom jazyku vektorovej analýzy

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{E} + \mathbf{y}.\mathbf{B} &= 4\pi\rho \\ (\text{rot } \mathbf{B}).d\mathbf{S} - \mathcal{L}_V(\mathbf{E}.d\mathbf{S}) - (\mathbf{a} \times \mathbf{B}).d\mathbf{S} &= 4\pi\mathbf{j}.d\mathbf{S} \\ (\text{rot } \mathbf{E}).d\mathbf{S} + \mathcal{L}_V(\mathbf{B}.d\mathbf{S}) - (\mathbf{a} \times \mathbf{E}).d\mathbf{S} &= 0 \\ \text{div } \mathbf{B} - \mathbf{y}.\mathbf{E} &= 0 \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

kde $\hat{a} = \mathbf{a}.d\mathbf{r}$, $\hat{y} = \mathbf{y}.d\mathbf{S}$. V špeciálnom prípade $(\mathbb{R}^4, \eta, \partial_t)$ v nich spoznávame "obyčajné" Maxwellove rovnice ($\mathbf{a} = \mathbf{0} = \mathbf{y}$ atď.)

4.4. Literatúra

[1] Ch.W.Misner, K.S.Thorne, J.A.Wheeler : Gravitation, W.H.Freeman and Company, Ex.22.6
[2] K.S.Thorne, D.A.Macdonald : Electrodynamics in curved spacetime : 3+1 formulation, Mon. Not. R. astr. Soc. (1982) **198**,339-343 + Microfiche
[3] G.F.R. Ellis : Relativistic cosmology, Cargèse Lectures in Physics, Vol.6, 1-60, 1973
[4] N.Straumann : General Relativity and Relativistic Astrophysics, Springer - Verlag 1991, p.439
[5] K.S.Thorne, R.H.Price, D.A.Macdonald : Black Holes : The Membrane Paradigm , Yale Univ. Press 1986
[6] I.M.Benn,R.W.Tucker: An Introduction to Spinors and Geometry with Applications in Physics, Adam Hilger, Bristol, 1989
[7] А.Л.Зальманов, В.Г.Агаков: Основы общей теории относительности, Москва, Наука 1989
[8] Ю.С.Владимиров: Системы отсчёта в общей теории относительности, Москва, Енергоиздат 1982
[9] V.D.Gladush R.A.Konoplya: Split Structures in General Relativity and the Kaluza-Klein Theories, J.Math.Phys. 40 (1999) 4542-4560
[10] Ch.W.Misner, J.A.Wheeler : Classical Physics as Geometry, Annals of Physics, **2**, 525-603 (1957)
[11] M.Fecko: On 3+1 decompositions with respect to an observer field via differential forms, J.Math.Phys. **38** (9) 4542-4560 (1997) (gr-qc/9701066)
[12] A.Trautman : Fiber Bundles, Gauge Fields, and Gravitation, in A.Held : General Relativity and Gravitation, Vol. 1, Plenum Press 1980