Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov
Marián Fecko
(výber z poznámok pod čiarou)

V tejto kapitole sa zoznámime so základmi technickej stránky opisu hladkých variet. Hlavná myšlienka spočíva v tom, že sa varieta dá predstaviť ako "zlepená" z *niekoľkých* kúskov, ktoré už *sú* otvorenými oblasťami v $\mathbb{R}^n$. Formálnym nástrojom na tento opis sú pojmy *mapa* (lokálne súradnice) a *atlas*. V úvodnom odseku sa trochu obtrieme aj o pojem topologického priestoru, ale pre úroveň poznania variet, ktorú potrebujeme, ho netriviálne nijako nevyužijeme.[1]

===

Ak $f : M \to N$ je vloženie, tak podmnožina $f(M) \subset N$ má prirodzenú štruktúru variety (ako lokálne súradnice sa použijú $y^1, \dots, y^m$, t.j. tie, ktoré sa *neanulujú* na $f(M)$) a volá sa *podvarieta* variety N.[2]

===

Integrálna krivka vektorového poľa V je taká krivka γ na M, že v každom bode, cez ktorý prechádza, je ňou daná trieda $[\gamma]$ totožná s triedou danou vektorom V_P. Ináč povedané, z každého bodu, do ktorého príde, pôjde ďalej presne smerom (a aj rýchlosťou), ktorý jej ukazuje[3] vektor V_P.

===

Zistili sme teda, že L indukuje ∞-veľa ďalších lineárnych priestorov - pre každú dvojicu (p, q) celých nezáporných čísel máme priestor $T^p_q(L)$ rozmeru n^{p+q}. (To znamená, že ak si predstavíme tenzorové priestory ako "vežu", táto veža sa smerom hore *rozširuje*, podobne ako budova rozhlasu v Bratislave - na rozdiel od nej však rastie do nekonečna.)

Výsledok (2.4.7) ukazuje, že všetky tenzory spolu tvoria (∞-rozmernú nekomutatívnu) *asociatívnu algebru* (Dodatok A2), ktorej sa hovorí *tenzorová algebra* $T(L)$. Ako lineárny priestor je *priamym súčtom* všetkých priestorov $T^p_q(L)$

$$T(L) := \bigoplus_{\substack{r=0\\s=0}}^{\infty} T^r_s(L) \;\equiv\; T^0_0(L) \oplus T^1_0(L) \oplus T^0_1(L) \oplus T^2_0(L) \oplus T^1_1(L) \oplus T^0_2(L) \oplus \dots$$

(do nekonečna), t.j. prvok z $T(L)$ sa dá chápať ako lineárna kombinácia tenzorov všemožných typov $\binom{p}{q}$ a násobenie $\otimes$ sa zavádza lineárnym rozšírením definície pre $\otimes$ na *homogénnych členoch* (s fixným $\binom{p}{q}$), t.j. podľa pravidla "každý s každým"[4]:

$$(k + v + \alpha + \dots) \otimes (q + w + \beta + \dots) := k \otimes q + k \otimes w + k \otimes \beta + \dots + v \otimes q + v \otimes w + \dots$$

===

Vektorové pole V na M vytvorilo novú zaujímavú štruktúru, *kongruenciu* integrálnych kriviek na M: varieta M je "husto" vyplnená sústavou (∞ veľa) kriviek, pričom tieto krivky sa nikde nepretínajú a rýchlosť pohybu po nich je poľom V tiež jednoznačne diktovaná. Možno si to predstaviť tak, akoby po variete tiekla rieka, pričom toto tečenie je *stacionárne* (vektor rýchlosti v danom bode je stále rovnaký; v miestach, kde je pole nulové, voda stojí) a pre špeciálne typy polí - napríklad hamiltonovské - je kvapalina navyše (14.3.6)

---

[1] Didakticky sa opierame o najnovšie vedecké poznatky, najmä o etnologické výskumy Indiánov v povodí Amazonky. Tie presvedčivo ukázali, že aj títo skutoční majstri prežitia v podmienkach džungle úplne vystačia s intuitívnymi vedomosťami o hladkých varietách a iba šamani tu i tam ovládali niektoré formálne definície; napríklad fakt, že topologický priestor, ktorým je hladká varieta, má byť *hausdorffovský*, zvyknú šamani prezradiť členom kmeňa až tesne pred smrťou a keď im začnú rozoberať príklady *nehausdorffovských* priestorov, vystrašený jedinec už (podľa očitých svedkov) obyčajne radšej rýchlo poručí dušu Všemohúcemu.

[2] Nie každá podmnožina $X \subset N$, ktorá je varietou, je teda podvarietou v N. Aby ňou bola, musí byť "veľmi slušne" v N uložená - bez rohov, špicov a samopriesekov. Práve to zabezpečí existencia vloženia f. Napríklad kružnica aj štvorec sú (navzájom difeomorfné) hladké jednorozmerné variety, ale zatiaľ čo kružnica je podvarietou v $\mathbb{R}^2$, štvorec ňou nie je (má rohy; extrémnym príkladom je tiež koza, ktorá má dokonca špicaté rohy a k úplnej (ne)dokonalosti jej chýbajú už len samoprieseky, čo iste neujde pozornosti genetických inžinierov).

[3] Ako disciplinovaný turista, ktorý kráča stále v smere šípiek na orientačných miestach a navyše aj poslušne dodržiava predpísané časové údaje (o koľko minút má byť pri ďalšej značke) na tabuľkách

[4] Pravidlo maximálnej promiskuity.

nestlačiteľná. Integrálne krivky sú v tejto predstave prúdnice tohoto tečenia. Ak v niektorý horúci letný deň neodoláme a necháme sa unášať po dobu t týmto prúdom, dostaneme sa z bodu $P \equiv \gamma(0) \in M$ do bodu $Q \equiv \gamma(t) \in M$ - vzniká teda prirodzene jednoparametrická trieda zobrazení

$$\Phi_t : M \to M \qquad\qquad P \equiv \gamma(0) \mapsto \gamma(t)$$

ktorej sa hovorí (lokálny) *tok* generovaný poľom V. K tomuto mimoriadne dôležitému pojmu sa vrátime podrobnejšie vo 4. kapitole.

===

$\boxed{2.4.8}$ Overiť, že
i) výsledok je opäť tenzor (multilineárnosť)
ii) C nezávisí od výberu bázy e_a (po výbere e_a už ale e^a musí byť duálna)
iii) v zložkách C vyzerá[5]

$$t^{\cdots\cdots}_{\cdots\cdots} \mapsto t^{\cdot\cdot a\cdot}_{\cdot a\cdots} \qquad \text{t.j. ako sčítanie cez dvojicu indexov hore-dolu}$$

===

Zobrazeniam $\flat_g$ resp. $\sharp_g$ sa zvykne hovoriť *spúšťanie* resp. *dvíhanie* indexov (pomocou g). Veličinám v_a, v^a sa niekedy hovorí kovariantné a kontravariantné *zložky* (toho istého!) vektora v. Túto terminológiu však nebudeme používať; budeme striktne rozlišovať *vektor* $v = v^a e_a$ a *kovektor* $v_a e^a$ (ako prvky L a L^*) a operácie dvihnutia a spustenia indexu interpretovať ako zobrazenie dvoch *rôznych* priestorov $L \leftrightarrow L^*$. Poznamenajme tiež, že označenie je inšpirované symbolikou z hudobnej teórie.[6]

===

$\boxed{2.4.14}$ Dokázať platnosť cviku

$$t^{\cdots a\cdot}_{\cdot\cdot a\cdots} = t^{\cdot\cdot a\cdots}_{\cdots a\cdot}$$

Návod: ak plánujete založiť dôkaz na fakte, že celková potenciálna energia indexov sa nezmenila, ste na falošnej stope

===

Metrický tenzor umožňuje analogicky meniť polohu indexov aj na tenzoroch vyššieho rangu, napríklad

$$t^a_{bc} \mapsto t_{abc} := g_{ad}\; t^d_{bc} \qquad\qquad R^{ab}_{cd} \mapsto R_{abcd} := g_{ae}\; g_{bf}\; R^{ef}_{cd}$$

Toto patrí k základným cvikom *indexovej gymnastiky.*[7]

===

V odseku 2.2 sme sa zoznámili s pojmom vektor v bode $P \in M$ a dotykový priestor $T_P M$. Odsek 2.4 nás zase poučil o konštrukcii tenzorov typu $\binom{p}{q}$ štartujúc z *ľubovoľného* konečnorozmerného vektorového priestoru L. Ak teda zoberieme ako L priestor $T_P M$, dostávame okamžite (a už bez námahy - len pozbierame úrodu z toho, čo sme zasiali v 2.4) tenzory v bode $P \in M$. Špeciálne duálny priestor k $T_P M$, priestor *kovektorov* v $P \in M$ sa volá *kodotykový priestor*[8] v P a označuje sa $T^*_P M$.

===

vi) ak $\psi : N \to \mathbb{R}$ je ľubovoľná funkcia, tak platí

$$(f_* \dot\gamma)\psi = \dot\gamma(f^*\psi)$$

---

[5] Každá kontrakcia teda odbremení tenzor o dva indexy. Dýcha sa mu hneď ľahšie (veľa indexov = veľa starostí), cíti sa, akoby omladol. Tento ľudský rozmer veci citlivo odráža nemecký termín pre túto operáciu, *Verjüngung* (omladenie).

[6] "Béčko" a "krížik". Pozorným absolventom hudobných škôl sa iste vybavilo, že na krížikoch a béčkach v notách žiadne g *nevideli* - je to jednoducho preto, lebo v hudobných sieňach sa tradične predpokladá platnosť *euklidovskej* geometrie, takže hudobné béčka a krížiky sa konvenčne viažu na *toto euklidovské g* (a explicitne sa nevypisujú).

[7] Treba ju, ako každú gymnastiku, robiť pri otvorenom okne a nikdy nie bezprostredne po výdatnom jedle.

[8] Alebo aj *kotangenciálny priestor*. Slovo "kodotykový" je výstupom grantu na základe "Slovensko-Latinskej zmluvy o úprimnom priateľstve oboch národov a spolupráci v oblasti tvorby nových užitočných slov"; latinská strana (zastúpená Maticou latinskou) sa finančne podieľala na prvých dvoch písmenách, slovenská na zvyšku (slovotvorný švík už zrástol, ale stále ho vidno pod mikroskopom, ak preparát trochu prifarbíme).

t.j. nezávislá (a ekvivalentná) možnosť *definovať* f_* je[9]

$$(f_* V)\psi := V(f^*\psi)$$

===

Všimnime si bližšie, ako vlastne funguje indukovaný tenzor g. Podľa definície v (3.1.4) skalárny súčin dvoch vektorov V, W v zmysle g na M je

$$g(V,W) \equiv (f^*h)(V,W) := h(f_*V, f_*W)$$

Vidíme, že je rovnaký, ako keby sme vektory V, W najprv preniesli na N a tam urobili[10] skalárny súčin *v zmysle* h.

===

Všeobecné pole A však na integrálnych krivkách poľa V *nie je* konštantné: tenzor $(\Phi_t^* A)(x)$, ktorý je do bodu x prenesený z bodu $\Phi_t(x)$, všeobecne závisí od t. Vhodnou mierou tejto závislosti (t.j. lieovskej *ne*konštantnosti = *ne*invariantnosti voči V) je výraz

$$\mathcal{L}_V A := \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \Phi_t^* A$$

ktorému sa hovorí *Lieova derivácia* tenzorového poľa[11]

===

Ako uvidíme o chvíľu (4.3.4), komponentné vyjadrenie Lieovej derivácie všeobecného tenzorového poľa je súčtom viacerých členov a na každom je veľa indexov. Celková štruktúra má síce jasné pravidlá, výraz je však na pohľad pomerne komplikovaný. A aj keď sa z tohoto vyjadrenia dajú odvodiť[12] všetky vlastnosti $\mathcal{L}_V$, oveľa efektívnejšie a poučnejšie je využiť *algebraické* vlastnosti $\mathcal{L}_V$, ktoré sú priamym dôsledkom algebraických vlastností pull-backu Φ_t^*.

===

$\boxed{4.3.4}$ Overiť, že

i)

$$\mathcal{L}_V dx^i = V^i{}_{,j} dx^j \qquad \mathcal{L}_V \partial_i = -V^j{}_{,i} \partial_j$$

ii)

$$(\mathcal{L}_V A)^{i\ldots j}_{k\ldots l} = V^m A^{i\ldots j}_{k\ldots l,m} + V^m_{,k} A^{i\ldots j}_{m\ldots l} + \cdots - V^j_{,m} A^{i\ldots m}_{k\ldots l}$$

t.j. je tam prvý člen (paušál), plus za každý index jeden ďalší člen (s + za dolný a s - za horný). Prehľadne to

[9] Namiesto Mohameda k hore ide hora k Mohamedovi. Keďže invariantný výsledok je rovnaký - Mohamed je pri hore - dá sa jedno definovať cez druhé.

[10] Myšlienkovo to vystihuje nasledujúca analógia s prácou s počítačovými sieťami: M a N je počítač "tu" a "tam", h je užitočný softvér tam (my sedíme tu). Máme dve možnosti: buď prácu vykonávame tam (čo môže byť nepohodlné, ak ju chceme robiť v čase, keď je sieť preťažená), alebo si stiahneme softvér sem (f^* slúži ako *ftp*), čím dostaneme (M, f^*h) ($\leftrightarrow$ náš počítač vybavený už stiahnutým užitočným softvérom) a prácu (skalárne súčiny a ich dôsledky) robíme už pohodlne v ktoromkoľvek dennom čase *tu*. Výsledok práce je rovnaký, ale šetrí sa čas.

[11] V Arnoľdovej monografii [1] sa spomína Lieova derivácia aj pod výstižným názvom *rybárska derivácia*: rybár stojí na mieste a derivuje tenzorové polia, ktoré plávajú okolo neho. Žiaľ, zmena reálií okolitého sveta spôsobuje, že tento svieži bonmot sa stáva súčasnej generácii už takmer nezrozumiteľný. Žalostný stav riek už prakticky neumožňuje vyžiť v nich tenzorovým poliam vyšších rangov a strhujúce rozprávania starších rybárov, ako derivovali "holými rukami v potoku za dedinou" často úplne antisymetrické (!) tenzory "za poldruha lakťa" počúvame už len s nemým úžasom a zle maskovanou závisťou.

[12] V staršej literatúre sa to aj tak robilo. Napríklad steny jaskýň Altamira a Lascaux sú vraj (podľa nie celkom spoľahlivých očitých svedkov) husto popísané práve takýmito komponentnými výrazmi. Ako kuriozitu ilustrujúcu vynaliezavosť lovcov tých čias vo využití terénnych nerovností spomeňme, že horné indexy písali spravidla na stalaktity, dolné na stalagmity a kontrakciu horného a dolného indexu graficky riešili temer vždy na stalagnátoch. Len pre úplnosť tiež uvádzame, že z dosiaľ (uspokojivo) nevysvetlených príčin práve v týchto jaskyniach stalaktity, stalagmity ani stalagnáty (ako na potvoru) vôbec nie sú.

vyjadríme v tabuľke - recepte na prípravu miestnej špeciality $(\mathcal{L}_V A)^{i\ldots j}_{k\ldots l}$ (porovnaj s (15.2.7)):

	na prípravu $\mathcal{L}_W A$
na dno hrnca vždy dať	$WA^{\cdots}_{\cdots} \equiv W^m A^{\cdots}_{\cdots,m}$
plus za každý $A^{\cdots i \cdots}$ pridať	$-W^i{}_{,m} A^{\cdots m \cdots}$
plus za každý $A_{\ldots i \ldots}$ pridať	$+W^m{}_{,i} A_{\ldots m \ldots}$

Ako uvidíme ďalej, vhodný výber *repérneho poľa* $e_a(x)$ a *korepérneho poľa* $e^a(x)$ môže niekedy veci výrazne zjednodušiť. Dôležitými príkladmi sú používanie *ortonormovaného* poľa na riemannovskej variete (pozri napríklad (15.6)) alebo *ľavoinvariantných* polí na grupe (11.1). Vo všeobecnej teórii relativity sa (vhodne vybratému, najčastejšie ortonormovanému) repérnemu poľu hovorí *tetrádne pole*[13] a formalizmu, v ktorom sa pracuje s komponentami voči takémuto repérnemu poľu sa hovorí *tetrádny formalizmus* (pozri napríklad (15.6.20), (16.5) a (22.5)).

V ďalšom postupe sa nám veľmi zídu nasledujúce užitočné cviky[14] indexovej gymnastiky.

$\boxed{5.2.6}$ Rozmyslieť si legálnosť krokov (α, β, A, t sú ľubovoľné navzájom komutujúce objekty s indexmi, napríklad zložky tenzorov)

i)

$$\alpha_{[a\ldots b]}\beta^{a\ldots b} = \alpha_{[a\ldots b]}\beta^{[a\ldots b]} = \alpha_{a\ldots b}\beta^{[a\ldots b]}$$
$$\alpha_{(a\ldots b)}\beta^{a\ldots b} = \alpha_{(a\ldots b)}\beta^{(a\ldots b)} = \alpha_{a\ldots b}\beta^{(a\ldots b)}$$

ii)

$$A^a_{[c}\ldots A^b_{d]} = A^{[a}_{[c}\ldots A^{b]}_{d]} = A^{[a}_c\ldots A^{b]}_d$$
$$A^a_{(c}\ldots A^b_{d)} = A^{(a}_{(c}\ldots A^{b)}_{d)} = A^{(a}_c\ldots A^{b)}_d$$

iii)

$$t^{\cdots}_{[\ldots a\ldots[\ldots b\ldots c\ldots]\ldots d\ldots]} = t^{\cdots}_{[\ldots a\ldots b\ldots c\ldots d\ldots]}$$
$$t^{\cdots}_{(\ldots a\ldots(\ldots b\ldots c\ldots)\ldots d\ldots)} = t^{\cdots}_{(\ldots a\ldots b\ldots c\ldots d\ldots)}$$

iv)

$$t^{\cdots}_{[\ldots a\ldots(\ldots b\ldots c\ldots)\ldots d\ldots]} = t^{\cdots}_{(\ldots a\ldots[\ldots b\ldots c\ldots]\ldots d\ldots)} = 0$$

kde okrúhle zátvorky znamenajú úplnú *symetrizáciu* (v definícii z (5.2.2) sa vpravo berú všetky členy *s plusom*). Zmyslom *i)* - *iii)* je spoznať typické situácie, v ktorých možno niektoré (anti)symetrizácie vynechať (alebo naopak aj formálne pridať), lebo sú už automaticky zabezpečené inými (anti)symetrizáciami; *iv)* hovorí, že symetrizácia *vnútri* antisymetrizácie (a naopak) dáva nulu.

Vidíme, že tri zo štyroch členov vypadli. Po troche cviku takéto nulové členy vidno na (približne) sto honov, a teda ich netreba ani vypisovať a výsledok násobenia sa píše prakticky hneď. Ich vynulovanie má na svedomí veľmi efektívny[15] mechanizmus č.4.

[13]Keďže priestoročas (M, g) je *štvorrozmernou* varietou; všeobecne sa používa termín *vielbeinové pole*, teda v preklade "mnohonôžkové pole"; repér v *troch* rozmeroch pripomína pri troche fantázie (bez ktorej sa v matematike ťažko dýcha) trojnožku, čiže *dreibein* a tetráda je to isté, ako *vierbein*.

[14]Pamätníci si iste spomenú, že na spartakiádach ich bolo vídať v skladbách so špeciálnym náčiním - s hranatými a okrúhlymi zátvorkami.

[15]Najnovšie literárnovedné výskumy jasne ukazujú, že verše Jána Bottu "iba raz spakrukou dokola zatočí, hneď siedmim lapajom stĺpkom stoja oči" netreba chápať doslova, ale sú rafinovaným inotajom, vyjadrujúcim jeho ohúrenie likvidačnou silou mechanizmu č.4 (podobnosť "spakruky" a znaku $\wedge$ je zrejmá). Pokračovanie "len raz sa činčierom dokola zaženie, už po celom dvore samé spustošenie" zasa jasne symbolizuje "vlastnosť č.4" z úlohy (6.2.5) (len ťažko sa v činčieri nespozná operátor d). Pripomeňme, že v časoch, keď Ján Botto publikoval Smrť Jánošíkovu (1862, Lauffer et Stolp, Pešť), by cenzúra zastavila akúkoľvek otvorenejšiu zmienku o vonkajších formách, s typickým arogantným zdôvodnením, že ešte neboli objavené. (Zrnko pravdy jej ale priznajme. Práca (z roku 1844) učiteľa gymnázia v dnešnom Štetíne, Hermanna Grassmanna, dlho nevyvolala zaslúžený ohlas (znechutený Grassmann úspešne presedlal na sanskrt) a jej myšlienky využil a rozvinul až Cartan.)

==

$\boxed{5.2.10}$ Vyrátať ten istý výsledok komponentne a vyskúšať si, že je to v porovnaní s priamym postupom nepraktické.
Návod: porovnaním so štandardnými (5.2.9) výrazmi $\alpha = \alpha_a e^a$, $\beta = \frac{1}{2}\beta_{ab} e^a \wedge e^b$ určiť komponenty α_a, β_{ab}, dosadiť do (5.2.5) a z výsledných komponent $(\alpha \wedge \beta)_{abc}$ zrekonštruovať celok $\frac{1}{3!}(\alpha \wedge \beta)_{abc} e^a \wedge e^b \wedge e^c$; počas výpočtov sa (napriek čoraz ťažšie odolateľnému pokušeniu) vyhnúť vykrikovaniu menej spisovných (ale o to výstižnejších) slov

==

Takáto $\mathbb{Z}_2$-graduovanosť hrá kľúčovú úlohu vo fyzikou inšpirovanej *supermatematike* (*super*priestory, *super*algebry, *super*variety, *super*symetrie,[16] ...) a na nej založených *super*symetrických teóriách poľa. Vonkajšia algebra ΛL^*, interpretovaná ako $\mathbb{Z}_2$-graduovaný priestor, je jednoduchý príklad (asociatívnej) superalgebry.

==

Zovšeobecnené Kroneckerove symboly (p-delta symboly) hrajú v aparáte foriem úlohu podobnú, ako obyčajný Kroneckerov delta symbol δ^a_b pre vektory alebo kovektory. V tomto odseku si pre ne odvodíme niekoľko užitočných technických identít[17] a ukážeme na ich súvis s inými známymi objektami, ako napríklad s Levi-Civitovým symbolom a s determinantom.

==

Z pohľadu merania objemov je teda vo vzorci na výpočet objemu rovnobežnostena v L vôľa v jednom parametri λ. Tento parameter možno zafixovať predpísaním konkrétnej hodnoty objemu pre *jeden* vybraný (nesingulárny) rovnobežnosten. V (len) lineárnom priestore (bez metrického tenzora) sú však *všetky* (nedegenerované) rovnobežnosteny *úplne rovnocenné* a teda niet rozumného dôvodu preferovať niektorý z nich na zafixovanie konštanty λ. Ináč povedané, nedá sa kanonicky zafixovať *škála* objemov, *všetky* formy objemu, a teda aj všetky na nich založené vzorce na výpočet objemu, sú rovnocenné. Dá sa hovoriť len o *pomeroch* objemov ale nie o objemoch samotných.[18]

==

(Tu sme na našej plavbe narazili na drobný vrcholok obrovského ľadovca, ktorého objem nad vodou je v tomto prípade podstatne menší, ako oná často citovaná jedna desatina a ktorého väčšina, žiaľ, v tomto texte pod vodou aj zostane. Ide o úzky súvis diferenciálnej geometrie a topológie variet. Vidíme, že globálne topologické vlastnosti variet môžu byť napríklad *prekážkou* zavedenia istých geometrických štruktúr (tu orientácia, alebo ekvivalentne (6.3.5) forma objemu). Podobné "topologické podmienky" si kladú aj niektoré iné hviezdy geometrického neba, napríklad spinorové polia alebo metrický tenzor s lorentzovskou signatúrou (nedá sa globálne definovať napríklad na sfére S^2 !). Možno by si mohli trochu vstúpiť do svedomia a zobrať si príklad z takej užitočnej a zaslúžilej veličiny, akou je "obyčajný" (kladne definitný) metrický tenzor, ktorý sa bez zbytočných rečí rád nechá definovať na *každej* variete.)

==

Vidíme, že orientácie pásika P', ktoré sa indukujú z P kanálmi $A = A'$ resp. $B = B'$ si protirečia, a teda na zjednotení (celom Möbiovom liste) *nemáme žiadnu* konzistentnú globálnu orientáciu. Dá sa dokázať,

---

[16] Pre úplnosť uvádzame, že (podstatne frekventovanejšie) pojmy *super*kšeft a *super*špicový-bombový *nie sú* odborné termíny zo supermatematiky.

[17] Čitateľovi, ktorému zvykne byť z množstva indexov nevoľno, odporúčame pol hodiny pred štúdiom tohoto odseku zapiť pohárom vody pol tabletky Kinedrylu; ak to nepomôže, radšej ho nečítať.

[18] Masívna reklama, ktorá do nás denne búši zo všetkých strán, nás presviedča, že bez platobnej karty, mobilného telefónu a metrického tenzora sme v živote úplne stratení. Niektorí z nás to však stále cítia ináč. Napríklad John Lennon pôsobivo umelecky pretlmočil svoje odvážne sny o živote v lineárnom priestore bez metrického tenzora (čo si už naozaj vieme len ťažko predstaviť) v skladbe *Imagine* (*Predstav si*). V pôvodnej verzii sa tam spievalo

Imagine there's no metric	Predstav si, že niet metriky
it isn't hard to do	nie je to nič ťažké
no way to measure angles	nedajú sa merať uhly
no lengths of vectors, too...	ani dĺžky vektorov...

Pravda, doba vtedy ešte na takéto odvážne posolstvo nedozrela, cenzúra (pochopiteľne, úzko prepojená na tenzorové lobby) ho prinútila text prepracovať a v obchodoch sa objavila všeobecne známa nevinná verzia, v ktorej po metrickom tenzore nezostalo ani stopy.

že tento problém je na Möbiovom liste *neodstrániteľný*. Povie sa, že ide o *neorientovateľnú varietu.*[19]

==

Formálne[20] lineárne kombinácie

$$c = c_i s_p^i \qquad\qquad c_i \in \mathbb{R},\ s_p^i = i\text{-ty } p\text{-simplex}$$

p-simplexov sa volajú *p-reťazce* a príslušný (∞-rozmerný) lineárny priestor sa označuje C_p.

==

Uveďme ešte prepisy zo vznešeného písma hieroglyfov do demotického písma ľudu pospolitého. Ten používa označenia

$$\omega_g \leftrightarrow d\Omega \equiv \sqrt{|g|}\ d^n x \qquad\qquad \omega_{\hat{g}} \leftrightarrow dS \qquad\qquad d\Sigma_i \leftrightarrow dS_i \leftrightarrow d\mathbf{S}$$

v ktorých zápis Gaussovej vety vyzerá

$$\begin{aligned}\int_D (\operatorname{div} V) d\Omega &\equiv \int_D (\operatorname{div} V)\ \sqrt{|g|} d^n x \\ &= \oint_{\partial D} (\mathbf{V}.\mathbf{n}) dS \equiv \oint_{\partial D} \mathbf{V}.d\mathbf{S} \equiv \oint_{\partial D} V^i dS_i\end{aligned}$$

pričom krúžok na integráli znamená, že sa integruje cez *uzavretú* "plochu" (hranicu[21] oblasti D). Opäť platí (pozri poznámku v úlohe (6.3.11)), že $d\Omega$ resp. dS *nie sú* všeobecne vonkajšou deriváciou niečoho, ide len o konvenčný zápis ("d" v ňom súvisí s "infinitezimálnosťou" týchto "elementov").

==

Vznikne tak "plná trubica" $\mathcal{U}$. Jej ľavou stenou je σ, sprava ju ohraničuje $\Phi_\infty(\sigma)$ a zboku integrálne krivky poľa ξ, ktoré štartujú z hranice $\partial\sigma$. Cieľom je porovnať integrály nejakej formy α po pôvodnom simplexe a jeho koncovom obraze, t.j. porovnať integrály $\int_{\Phi_\infty(\sigma)} \alpha$ a $\int_\sigma \alpha$. Keďže $\Phi_\infty(\sigma)$ aj σ sú časťou *hranice* $\mathcal{U}$, oba skúmané integrály sa objavia v zápise *Stokesovej vety* pre formu α a oblasť $\mathcal{U}$. Okrem vytúžených dvoch integrálov však Stokesova veta prihadzuje ešte dva členy, jeden "objemový" integrál po $\mathcal{U}$ a jeden "plošný" integrál po "boku" hranice $\partial\mathcal{U}$. Tieto integrály treba vedieť zrátať. Podstatná myšlienka pre ich výpočet teraz spočíva v tom, že uvažovaná trubica (aj bok jej hranice) sa dá *poskladať z infinitezimálnych odrezkov*[22] hrúbky dt (poskladanie $= \int_0^\infty dt \dots$). Stokesova veta teda dáva rovnicu, v ktorej figurujú dva integrály, o ktoré nám ide, plus dva ďalšie integrály, ktoré obsahujú procedúru skladania krúžkov $\int_0^\infty dt \dots$. Posledným technickým momentom je uvedomenie si faktu, že odrezky sú vlastne "mince" z úlohy (7.6.11), takže sa na ne dá použiť "mincová interpretácia" operácie vnútorného súčinu i_V.

==

$\boxed{9.3.3}$ Overiť, že
i) ak sú všetky p-kocykly p-kohranicami ($Z^p = B^p$), takáto trieda bude (pre dané p) *len jedna* (trieda $[0]$).
ii) ak existuje *netriviálny* p-kocyklus z (ktorý nie je p-kohranicou), tak netriviálne sú aj všetky jeho (nenulové) násobky λz, pričom násobky *rôznymi* číslami sú navzájom *neekvivalentné*.
Návod: *i)* ak $z \in Z^p = B^p$, tak $z = dw$ pre nejaké $w \in C^{p-1}$. Potom $z = dw = 0 + dw \Rightarrow [z] = [0]$, a to[23] pre *každé* z; *ii)* $z \neq d(\dots) \ \Rightarrow\ \lambda z \neq d(\dots)'$; ak $\lambda_1 z = \lambda_2 z + d(\dots)$, tak $(\lambda_1 - \lambda_2) z = d(\dots) \Rightarrow z = d(\dots)'$, čo je spor.

==

[19] Vo vedeckých kruhoch sa vedú dlhodobé vášnivé spory, či je neorientovateľnosť variet vlastnosť vrodená, výchovou prakticky neovplyvniteľná, alebo je dôsledkom necitlivého prístupu v útlom veku (podľa niektorých už v prenatálnom, keď ju lepili z triviálnych kúskov).

[20] Lineárny priestor možno zadať vymenovaním prvkov bázy. Ak $\mathcal{J}$ je jablko a $\mathcal{H}$ je hruška, môžeme pomocou nich zaviesť dvojrozmerný lineárny priestor elementov tvaru $v = v^1 \mathcal{J} + v^2 \mathcal{H}$ (jablko a hruška tvoria jeho bázu). V našom príklade hore sú bázou simplexy.

[21] *Nie je* to teda, ako sa to niekedy chybne uvádza, módna ozdoba známa ako *piercing*.

[22] Podobne ako sa zvykne štangľa salámy (pre nás vegetariánov mrkva) nakrájať na izomorfnú kôpku tenkých krúžkov.

[23] Na tomto mieste by sa autor rád poďakoval Indom za vynájdenie nuly, ako aj všetkým národom, jednotlivcom a firmám, ktoré sa zaslúžili o jej uvedenie aj na náš trh. V tomto dôkaze prišla naozaj vhod.

Z hľadiska geometrie má mimoriadny význam špeciálna trieda grúp, ktorej sa hovorí *Lieove* grupy. Ide o objekty, v ktorých si bok po boku v šťastnej symbióze nažívajú ich dva rôzne aspekty - algebraický (sú to grupy) a geometrický, resp. diferenciálno-topologický (sú to hladké variety). Tieto dve zložky sa navzájom obmedzujú,[24] ale (ako to už v dobrom partnerstve chodí) aj nesmierne obohacujú - bohatstvo *geometrie* na Lieových grupách má svoj pôvod práve v existencii *algebraickej* štruktúry grupy.

==

Ak si všeobecne nemajú v spoločnej domácnosti liezť neustále na nervy dve úplne rozdielne štruktúry, musia sa dohodnúť na dodržiavaní istých pravidiel hry - byť *kompatibilné*. Jedna zo štruktúr je teraz *hladká* štruktúra na variete. Tá si konkrétne veľmi potrpí na to, aby všetky zobrazenia, s ktorými prichádza do styku, boli hladké.[25] Jej požiadavka teda je, aby všetky zobrazenia, ktoré domov donesie grupa, boli hladké.[26] Grupa si svoj život nevie predstaviť (a teda ich domov určite donesie) bez základných *troch* zobrazení, požiadavka hladkosti sa teda z definície týka práve ich troch.

==

Lieove grupy by mali byť uvádzané ako vzory vo všetkých príručkách o "umení žiť" - z hľadiska diferenciálnej geometrie žijú naozaj naplno. Vyskytuje sa na nich niekoľko kanonických geometrických objektov a dajú sa robiť procedúry, ktoré sú špecifické len pre ne. Za celé toto bohatstvo vďačí Lieova grupa ako varieta Lieovej grupe ako grupe, t.j. už spomínanej symbióze svojej algebraickej a diferenciálno-topologickej štruktúry. Mnoho z ďalších konštrukcií stavia na dôležitom pojme *(ľavo)invariantných polí*, s ktorým sa zoznámime v nasledujúcom paragrafe.

==

Z úlohy (11.2.1) vieme, že štruktúrne konštanty c^c_{ab} sú vlastne koeficienty anholonómie ľavoinvariantného repérneho poľa e_a a teda nesú informáciu nielen o objektoch v bode e, ale prinajmenšom v jeho istom okolí. Ľavoinvariantné pole sa ale "rozširuje" zo svojej predpísanej hodnoty $E_a = e_a(e)$ v e do bodov mimo bodu e ľavou transláciou $L_g = m(g,\ .\ )$, ktorá zase závisí od kompozičného zákona $m : G \times G \to G$ na grupe G (t.j. pre tie isté vektory E_a dostaneme iné ľavoinvariantné polia a teda aj iné štruktúrne konštanty, ak zmeníme kompozičný zákon). Vidíme teda, že v štruktúrnych konštantách (t.j. vlastne v Lieovej algebre $\mathcal{G}$) je v skoncentrovanej podobe ukrytá životne dôležitá "genetická" informácia, informácia o *kompozičnom zákone na grupe*,[27] aj keď sa formálne vyjadrujú len cez objekty, ktoré žijú len v jej jedinom bode (jednotke e).

==

$\boxed{11.3.3}$ Nech L_X je ľavoinvariantné vektorové pole na G, ktoré je generované vektorom $X \in \mathcal{G}$. Ukázať, že
i) jeho integrálna krivka $\gamma^X(t)$, ktorá štartuje z e, je jednoparametrická podgrupa

$$\gamma^X(t+s) = \gamma^X(t)\gamma^X(s) \qquad\qquad \gamma^X(0) = e$$

ii) ak naopak $\gamma(t)$ je ľubovoľná jednoparametrická podgrupa, tak je integrálnou krivkou ľavoinvariantného[28] poľa L_X s $X \equiv L_X(e) = \dot\gamma(0)$; jej celý priebeh je teda plne daný tým, kam a ako rýchlo vyrazí z e v čase 0, t.j. svojím dotykovým vektorom $\dot\gamma(0) = X$ v počiatku e.

==

$\boxed{11.4.6}$ Označme $\Phi^{L_X}_t : G \to G$ tok generovaný ľavoinvariantným poľom L_X, $\Phi^{R_X}_t : G \to G$ tok generovaný pravoinvariantným poľom R_X. Ukázať, že platí

$$\Phi^{L_X}_t = R_{\exp tX} \qquad\qquad \Phi^{R_X}_t = L_{\exp tX}$$

---

[24]Napríklad uvidíme (11.1.6), že varieta, ktorá sa chce stať Lieovou grupou, sa musí najprv slávnostne zaviazať, že bude celý život *paralelizovateľná* (existuje na nej *globálne repérne pole*, t.j. $n = \dim M$ všade nenulových vektorových polí, ktoré sú v každom bode lineárne nezávislé) a zďaleka nie všetky variety sú ochotné takéto silné záväzky na seba brať. Napríklad na obyčajnej sfére S^2 neexistuje *ani jedno* všade nenulové vektorové pole, a teda sa na nej nedá zaviesť štruktúra Lieovej grupy.

[25]V literatúre sa cituje anamnéza Lieovej grupy (z etických dôvodov tu neuvádzame jej meno), ktorej sa po celom tele vysypali vyrážky "ako bobule hrozna", keď prišla len na krátku chvíľu do styku s "drsným" zobrazením triedy C^3 (namiesto hladučkých C^∞, ktorými bola celý život hýčkaná).

[26]O niektorých nárokoch grupy voči variete sme už hovorili v (10.1).

[27]Istou analógiou by mohol byť vzťah medzi niektorými potravinami (Lieova grupa) a ich verziami "*v prášku*" (jej Lieova algebra); práškové formy sú "zjednodušenou" verziou naozajstných, pričom zachovávajú podstatnú (podľa reklamy úplnú) časť vlastností originálu

[28]K kuloárov k nám preniklo, že tá istá krivka nenecháva nič na náhodu ("krivka nikdy nevie") a systematicky sa pripravuje na časy, keď sa vo všetkých učebniciach v krajine budú autori venovať hlavne *pravoinvariantným* objektom - potajomky a nikým nepozorovaná si rozohráva svoju hru na druhú stranu a už teraz je *zároveň* integrálnou krivkou *aj pravoinvariantného* poľa R_X, o čom sa môže ľubovoľný investigatívny žurnalista ľahko presvedčiť výpočtom; menej investigatívny nahliadne do (11.4.7).

resp.

$$\Phi_t^{L_X}(g) = g(\exp tX) \equiv g e^{tX} \qquad \Phi_t^{R_X}(g) = (\exp tX)g \equiv e^{tX} g$$

takže ak pôjdeme z g pozdĺž ľavoinvariantného poľa L_X o t, dôjdeme do ge^{tX}; ak pozdĺž pravoinvariantného poľa R_X, skončíme[29] v $e^{tX}g$. Zobrazenie $\Phi_t^{L_X}$ je teda *pravou* transláciou o prvok $\exp tX$, zatiaľ čo $\Phi_t^{R_X}$ je *ľavou* transláciou o (taký istý) prvok $\exp tX$. Povie sa, že ľavoinvariantné polia generujú pravé translácie a pravoinvariantné polia generujú ľavé translácie.

==

Nech $f : G \to H$ je homomorfizmus Lieových grúp. Ukazuje sa, že potom automaticky vzniká aj homomorfizmus Lieových algebier týchto grúp. Hovorí sa mu odvodený homomorfizmus. Začneme jednoduchým pozorovaním.[30]

==

Mnoho faktov o Lieových grupách a ich Lieových algebrách sa dá získať aj bez doteraz používaného geometrického aparátu (ľavoinvariantných polí, ich integrálnych kriviek atď.). Tu skúsime tento zjednodušený aparát "odvodiť" z doterajších výsledkov a dopracovať sa k praktickým a rýchlym algoritmom,[31] ktorými si potom prešetríme konkrétne bežné Lieove grupy, spomínané v paragrafe (10.1).

==

$\boxed{11.7.14}$ Nech $\mathcal{G} = sl(2,\mathbb{R})$. Ukázať, že
i) všeobecný element tejto Lieovej algebry má tvar[32]

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

==

Ako sme už spomínali na začiatku odseku 10.1., grupy sa vždy objavujú ako grupy transformácií čohosi, teda cez svoje pôsobenie (*akciu*) na nejakej množine (zvyčajne s dodatočnou štruktúrou). Existuje teda predpis, ktorý každému grupovému prvku g priradí transformáciu L_g nejakej množiny M. Až cez toto pôsobenie dá o sebe abstraktná grupa G vedieť. Štúdium teórie grúp takto prirodzene zahŕňa[33] okrem poznatkov o samotných grupách aj skúmanie otázky, ako a kde môže daná grupa pôsobiť.

==

Pridružená reprezentácia Ad grupy G a jej odvodená reprezentácia ad Lieovej algebry $\mathcal{G}$ hrajú veľmi významnú úlohu v rôznych aplikáciách. Keď sa nám pripletú pod nohy už jubilejný stý krát, určite začneme rozmýšľať, prečo sa vlastne v natoľko rôznorodých kontextoch objavuje práve táto jedna reprezentácia. Dôvod by sme mohli vystopovať v tom, že je to vlastne jediná (všeobecne netriviálna) reprezentácia, ktorá je k dispozícii *vždy*, lebo (ako o chvíľu uvidíme) grupa je z hľadiska tejto reprezentácie úplne sebestačná: nepotrebuje sa trápiť s hľadaním reprezentačného priestoru V, zoberie jednoducho priestor, ktorý je na katastrálnom úrade oddávna zapísaný ako jej vlastníctvo, svoju vlastnú Lieovu algebru.

==

[29] Ak hovoríme "dôjdeme" či "skončíme", máme na mysli aspoň ako-tak skúsených turistov. Začiatočníci nezriedka podcenia úskalia, ktoré na nich na Lieových grupách striehnu, vyrazia si bezstarostne bez jedinej mapy (už to je vážny prehrešok, veď Lieova grupa je varietou!), zablúdia a zamestnanci grupovej služby ich potom vyčerpaných nájdu úplne inde. Jeden takýto turista dokonca skončil na inej komponente súvislosti a dodnes nevie uspokojivo vysvetliť, ako sa tam dostal, keďže (vraj) celý čas išiel po spojitej krivke.

[30] Toto pozorovanie robíme vždy pri slabom červenom svetle v dobre zatemnenej miestnosti. V literatúre sa tiež odporúča pripraviť si už aspoň deň vopred kúsok konopného motúza, zväčšovacie (alebo zmenšovacie) sklíčko, jednu diódu a trochu jelenieho loja. Podľa osobných skúseností autora tohoto textu sa však bez vymenovaných pomôcok napokon vždy podarilo akosi zaobísť a mohli sa rovnako užitočne využiť pri niektorom z ďalších zaujímavých pozorovaní.

[31] Vzniká prirodzená a plne oprávnená námietka, prečo sme vlastne začali "zložitým" geometrickým výkladom, keď je na trhu "jednoduchý" maticový formalizmus. Na svoju obranu pred slávnou súdnou stolicou uvádzame, že 1. po desiatich kapitolách sme sa s geometriou už natoľko spriatelili, že jej argumentom nerozumieme o nič horšie, ako maticovému násobeniu a 2. niektoré veci sa z pozícií maticového fundamentalizmu nahliadnu naopak podstatne horšie, alebo sa získavajú len po veľmi neekologických výpočtoch ($\equiv$ ktorým padne za obeť papier z nejedného hektára lesa).

[32] Upozorňujeme na drobnú pascu, do ktorej v tomto kontexte sa s obľubou chytajú najmä začiatočníci-relativisti: c vo vyjadrení matice X *nie je* rýchlosť svetla vo vákuu.

[33] Najmä v tých poľutovaniahodných prípadoch, keď sa venujeme tejto oblasti už od začiatku s úmyslom získané vedomosti kdesi aj použiť.

Celý postup si je dobré krok po kroku v pokoji ujasňovať, lebo *práve* úspornosť celej konštrukcie, t.j. fakt, že reprezentačný priestor V je tu totožný s objektom, ktorý sa (v odvodenej reprezentácii) reprezentuje, môže pri prílišnom zhone spôsobiť zmätok.[34]

==

$\boxed{12.4.11}$ Nech (ρ_1, V_1) a (ρ_2, V_2) sú dve reprezentácie (tej istej) grupy G. Overiť, že
i) predpisom[35]

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g) := \rho_1(g) \otimes \rho_2(g)$$

(kde pravá strana, t.j. operátor štruktúry $A \otimes B$, je v zmysle Dodatku A1) sa naozaj definuje reprezentácia G

==

Každé *ekvivariantné* zobrazenie $A : (V_1, \rho_1) \to (V_2, \rho_2)$ nám dáva do rúk čarovný prútik na dosiahnutie vytúženého sna celých generácií alchymistov, "zmenu veličiny typu ρ_1 na veličinu typu ρ_2". Stačí chvíľu predstierať hlboké sústredenie, mrmlať si popod nos abraka-dabraka a (hlavne nezabudnúť) popri tom nenápadne[36] priradiť vektoru $v_1 \in V_1$ vektor $Av_1 =: v_2 \in V_2$; pôsobenie g totiž potom dáva

$$v_1 \mapsto \rho_1(g)v_1 \qquad \Rightarrow \qquad v_2 \equiv Av_1 \mapsto A(\rho_1(g)v_1) = \rho_2(g)(Av_1) \equiv \rho_2(g)v_2$$

takže vplyv zobrazenia A sa dá opísať ako strata koreňov a úplná asimilácia na nové kultúrne prostredie V_2: pôvodné obyvateľstvo z V_1 zaprie svoju ρ_1-dnú hrudu a do všetkých dokladov si bez najmenších výčitiek svedomia nechá na úradoch zapísať

$$\text{Hruda} \ : \ (V_2, \rho_2)$$

==

Môže sa stať, že daný G-priestor sa skladá z jedinej orbity; znamená to, že ľubovoľné dva body sa dajú spojiť akciou grupy. Vtedy hovoríme o *tranzitívnej akcii* a príslušný G-priestor sa volá *homogénny priestor*. Opačným extrémom je prípad, keď sa nejaká orbita $\mathcal{O}_x$ skladá len z jediného bodu x; vtedy hovoríme o *stabilnom bode* pôsobenia.[37]

==

Tým sme dostali do rúk nástroj na jednoduchú konštrukciu istej triedy homogénnych priestorov grupy G - stačí nájsť jej podgrupy H. Naša radosť, už teraz nemalá, však prerastie do skutočného nadšenia keď zistíme, že okrem tejto triedy už vlastne (až na izomorfizmus) žiadne iné homogénne priestory neexistujú, takže touto konštrukciou sa vyčerpávajú vlastne *všetky*[38] homogénne priestory.

==

Zobrazeniu f môže chýbať k izomorfizmu nanajvýš neinjektívnosť a nesurjektívnosť; neinjektívnosť vyliečime faktorizáciou, nesurjektívnosť ignorovaním časti $\widetilde{G}$, ktorá nie je v obraze f; takto preliečeného pacienta potom nazveme $\hat{f}$ a kypiaceho zdravím vypíšeme opäť ako práceschopného.

[34] Ak má divadlo len dvoch-troch hercov a hrá hru, v ktorej je spolu sedemnásť postáv, vidíme na javisku stále tie isté tváre v nových a nových úlohách a ak chvíľu nedávame pozor, stratíme prehľad koho daný herec *práve teraz* hrá (v horšom prípade ho stratia aj oni).

[35] Všimnime si, že konštrukcia priameho súčtu reprezentácií $\rho_1 \oplus \rho_2$ sa dá veľmi jednoducho získať (a pritom sa to v literatúre na počudovanie nikde nespomína!) z priameho súčinu $\rho_1 \otimes \rho_2$ dobre známou operáciou "otočenie žiarovky o uhol $\pi/4$" (jej iterácia sa zvykne používať vtedy, keď sa žiarovka $\otimes$ vypáli a treba ju vymeniť).

[36] Slovo *nenápadne* treba osobitne zdôrazniť; niekedy malé deti z prvých radov trik prekuknú a potom bez zábran škodoradostne vykrikujú "hááá, použil ekvivariantné zobrazenie $A : (\rho_1, V_1) \to (\rho_2, V_2)$!"

[37] Takýto bod x, ak existuje, si zaslúži našu úctu: nech sa grupa akokoľvek snaží vykývať ho zo svojho miesta (a má na to prostriedkov dosť: púšťa naň všetky svoje $g \in G$), všetko márne, bod x zostáva neochvejne stáť so vztýčenou hlavou stále na tom istom mieste, na ktorom stojí od nepamäti (dokonca vraj už od čias, keď ľudstvo o matematike ešte ani nechyrovalo).

[38] Vrátane homogénnych priestorov, ktoré kedykoľvek v budúcnosti dovezú (s cieľom preskúmať ich v laboratóriách pod mikroskopom) akékoľvek misie z iných planét, "slnečných" sústav či dokonca iných galaxií. Sila našej útlej pozemskej matematiky niekedy skutočne vyráža dych.

$\boxed{13.2.13}$ Overiť, že homomorfizmy vľavo dávajú izomorfizmy vpravo:[39]

$$
\begin{array}{ccc}
GL(n,\mathbb{R}) \to GL(1,\mathbb{R}) & A \mapsto \det A & \\
 & \Rightarrow & GL(n,\mathbb{R})/SL(n,\mathbb{R}) = GL(1,\mathbb{R}) \\
GL(1,\mathbb{C}) \to GL(1,\mathbb{R}) & z \mapsto |z| & \\
 & \Rightarrow & GL(1,\mathbb{C})/U(1) = GL_+(1,\mathbb{R}) \\
GL(1,\mathbb{C}) \to GL(1,\mathbb{C}) & z \mapsto z^2 & \\
 & \Rightarrow & GL(1,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2 = GL(1,\mathbb{C}) \\
SU(n) \times U(1) \to U(n) & (A, e^{i\alpha}) \mapsto e^{i\alpha} A & \\
 & \Rightarrow & SU(n) \times U(1)/\mathbb{Z}_n = U(n) \\
GL_+(1,\mathbb{R}) \to (\mathbb{R},+) & x \mapsto \ln x & \\
 & \Rightarrow & GL_+(1,\mathbb{R}) = (\mathbb{R},+)
\end{array}
$$

===

Z úlohy (13.3.1) vieme, že reprezentácie "nakrytej" grupy automaticky "sú" aj reprezentáciami nakrývajúcej grupy, ale naopak to všeobecne neplatí. Na zmäkčenie duševnej traumy, ktorú spôsobuje tento nemilý výsledok nakrytým[40] grupám $\tilde{G}$, zaviedla moderná psychohygiena pojem *viacznačnej reprezentácie*. O čo v nej ide?

===

Ako sa už spomínalo v návode k (13.3.1), opačnému priradeniu $\rho \mapsto \tilde{\rho}$ bráni to, že f sa všeobecne nedá obrátiť, lebo je neinjektívne a všeobecne neexistuje ani kanonický výber jedného zo vzorov. Keď neexistuje preferovaný výber jedného, bude spravodlivé, keď zoberieme *všetky* vzory. (Druhý spravodlivý výber je neakceptovať *žiaden* vzor a zaujať konzervatívne stanovisko, že nemáme žiadnu reprezentáciu a basta).

===

• Touto konštrukciou došlo k avizovanej (pred 13.4.11)) kombinácii dvoch línií zovšeobecnenia reprezentácie na $\mathcal{F}(M)$: prišli sme k $\mathcal{T}^r_s(M,V)$, čiže od funkcií sme prešli k tenzorovým poliam a zároveň od hodnôt v $\mathbb{R}$ k hodnotám vo V.

Uveďme si dva jednoduché príklady objektov uvažovaného typu. Uvidíme z nich, že tenzorové polia typu $\hat{\rho}$ zďaleka nie sú takou zriedkavou kvetenou, ako by sme si to o nich mohli na prvý pohľad myslieť. Naopak, sú ich plné lúky, len sme si zatiaľ ich prítomnosť (a krásnu vôňu) v tomto uponáhľanom svete nestihli všimnúť.

===

Ešte v úlohe (2.3.7), teda v časoch, keď sme boli na prériách diferenciálnej geometrie naozajstnými greenhornmi,[41] sme zistili, že Hamiltonove rovnice

$$\dot{q}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a} \qquad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q^a} \qquad a = 1, \dots n$$

sa dajú interpretovať ako rovnice pre integrálne krivky istého vektorového poľa na $\mathbb{R}^{2n}[q^a, p_a]$, konkrétne poľa

$$\zeta_H = \frac{\partial H}{\partial p_a}\frac{\partial}{\partial q^a} - \frac{\partial H}{\partial q^a}\frac{\partial}{\partial p_a}$$

===

[39] Posledný izomorfizmus (daný logaritmom) je jadrom fungovania *logaritmického pravítka*, kedysi neodmysliteľnej výbavy každého správneho inžiniera. Súčin prerába na súčet, ktorý sa realizuje mechanicky. Pravítka založené na ostatných izomorfizmoch si však u nás, žiaľ, svojho výrobcu zatiaľ nenašli. Opäť zrejme čakáme, kým nás predbehnú Japonci.

[40] Grupy $\tilde{G}$ podľa (13.3.1) ochotne a nezištne poskytujú *všetky* svoje reprezentácie svojím nakrývajúcim grupám G; často sa však reciprocity nedočkajú

[41] Karl May: Winnetou, 1.kapitola: Greenhorn. V apokryfickom vydaní diela vraj okrem štandardných bodov definície tohoto kľúčového pojmu (... pokladá mývala za opossum a len trochu peknú mulatku za kvadronku ...) môžeme nájsť aj vetu "pletie si bivektory s 2-formami a o súvise Hamiltonových rovníc a symplektickej geometrie vie toľko, ako o obsahu katiónov v minerálnych prameňoch Vihorlatu". V kanonickom vydaní chýba.

Definujme výrazy (*Poincarého-Cartanove integrálne invarianty*)

$$I^k \equiv I^k[\mathcal{D}] := \int_{\mathcal{D}} \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{k \text{ kusov}}$$

Dokázať, že si zaslúžia svoj názov; konkrétne[42] dokázať, že platí

$$I^k[\Phi_t(\mathcal{D})] = I^k[\mathcal{D}]$$

===

V prípade zrýchlenia si vektor $\mathbf{v}(t+\varepsilon)$ treba posunúť z bodu $\mathbf{r}(t+\varepsilon)$ späť do bodu $\mathbf{r}(t)$ (tak dostaneme $\mathbf{v}_{\parallel}(t)$) a až ten môžeme porovnávať s vektorom $\mathbf{v}(t)$. Je to teda presne trik z (15.1.1), kde úlohu izomorfizmu B hrá príslušné posunutie. Všetko je *tu* také jasné, až sme v rozpakoch, prečo by sa z toho mala "robiť veda".[43]

Predstavme si, že sa naplnil smelý technokratický ideál - na Zemi najprv buldozérmi vyrovnali všetky nerovnosti (boli nepraktické a neestetické) a potom ju celú pokryli úhľadným asfaltom. Ak po takomto povrchu rozkotúľame guľu,[44] musí sa podľa zákonov mechaniky gúľať rovnomerne a priamočiaro. Jediná sila v hre je totiž gravitačná sila, ktorá smeruje všade kolmo dolu. Tá ju núti zostať na dvojrozmernom *povrchu* Zeme (neumožňuje jej odletieť do vesmíru "naozaj" rovno); na to si guľa po čase zvykne a nepociťuje to už ako nejaké obmedzenie.[45] Ako svoj (do)životný priestor, vníma pragmaticky sféru S^2 a nestará sa o to, či je táto sféra podmnožinou čohosi väčšieho, alebo nie. Keďže projekcia gravitačnej sily do roviny, ktorá sa dotýka sféry v danom bode, je vždy nulová, guľa má pocit,[46] že na ňu nepôsobí *žiadna sila*, takže nemá dôvod meniť svoju rýchlosť (veľkosť ani smer) a preto pôjde s nulovým zrýchlením stále rovno. Výsledkom však z pohľadu E^3 nie je bežná rovná čiara, ale kružnica (s maximálnym polomerom), obopínajúca celú Zem.[47]

===

Pojem lineárnej konexie je vo fyzike veľmi dôležitý, aj keď jej prítomnosť je väčšinou skrytá a nefiguruje v aparáte explicitne (zrýchlenie v elementárnej mechanike). Sú však oblasti, ako napríklad všeobecná teória relativity, kde sa svojho zviditeľnenia konexia nástojčivo dožadovala a OZLK[48] statočným postojom v tripartite presadil, že sa všeobecne uznáva ako jadro jej matematického aparátu. Napokon ďalekosiahle zovšeobecnenie lineárnej konexie, s ktorým sa bližšie zoznámime v 20.kapitole, je základom formalizmu moderných kalibračných teórií poľa.

===

Táto významná lineárna konexia na riemannovskej variete sa zvykne volať *Riemannova konexia* alebo tiež *Levi-Civitova konexia*; skrátene ju preto budeme označovať RLC-konexia[49]

===

Pozrime sa ešte na niektoré praktické manipulácie so súradnicovými výrazmi obsahujúcimi kovariantné derivácie.[50]

===

$\boxed{15.4.17}$ Z Bratislavy sa začala stavať diaľnica do Západnej Európy. Rozhodlo sa, že jej začiatok pôjde presne smerom na západ a že ďalej pôjde stále rovno (t.j. bude geodetikou). Nedopatrením kompetentných úradníkov[51] sa začala stavať ešte jedna diaľnica, ktorej začiatok bol rovnaký, ale ktorá pre zmenu smerovala *vždy* smerom

[42] Dôkaz časti názvu "Poincarého-Cartanove" overiť "v knižnici na rebríku" (Lasica & Satinský), "integrálne" vidno z definície. Tu sa sústredíme preto len na slovo "invariantný", a to v zmysle invariantný *voči toku* Φ_t

[43] Matematickej fyzike sa niekedy vytýka, že z "jednoduchých" vecí (zbytočne) "robí vedu". Všeobecná zhoda panuje v tom, že táto výčitka je v p percentách konkrétnych prípadov naozaj oprávnená, trochu menšia zhoda je v numerickej hodnote čísla p, ktorá kolíše od $p = 0$ po $p = 100$.

[44] A zabezpečíme nulový odpor vzduchu a pár podobných technických detailov.

[45] Súkromná informácia od jednej takej gule, ktorá si z osobných dôvodov nepriala byť menovaná.

[46] ibid.

[47] Na tom je založená zaujímavá, a pritom prekvapujúco málo rozšírená hra, *sférické kolky*, pri ktorej hráči zhadzujú figúrky zásahom *od chrbta* guľou, ktorá obíde celú Zem.

[48] Odborový zväz lineárnych konexií.

[49] Akú úlohu hrá v analýze RLC-obvodov v elektronike, zostáva stále zahalené rúškom tajomstva.

[50] Ide o pokračovanie cvikov indexovej gymnastiky z (2.4.14), (5.2.6), umožnené pridaním ďalšieho náčinia, bodkočiarky.

[51] Dochádza k nemu naozaj len veľmi zriedka.

na západ (t.j. po rovnobežke). Zistiť, aká je (približne) vzdialenosť týchto diaľnic od seba po 1 km, 10 km a 100 km od svojho začiatku.

===

$\boxed{15.6.12}$ Riešiť sústavu (15.6.10) pre (T^2, g) = dvojrozmerný torus s metrikou indukovanou z vloženia do E^3 (3.2.2). Vyrátať jeho Gaussovu krivosť, Ricciho tenzor a skalárnu krivosť a overiť, že[52]

$$R_{abcd} = \frac{\sin\psi}{b(a+b\sin\psi)}\epsilon_{ab}\epsilon_{cd} \qquad\qquad R_{ab} = \frac{\sin\psi}{b(a+b\sin\psi)}\delta_{ab}$$
$$R(x) = \frac{2\sin\psi}{b(a+b\sin\psi)} \equiv 2K(x)$$

Skalárna krivosť teda už nie je konštantná ale závisí od súradnice ψ; špeciálne je *nulová* na dvoch kružniciach, v ktorých sa torus dotýka krajcov chleba, medzi ktoré si ho balíme na desiatu, kladná na jeho časti, ktorú spomedzi chlebov vidíme a záporná na časti, ktorú nevidíme.

===

S pojmom (tenzora) torzie sme sa zoznámili v paragrafe o RLC-konexii (15.3.3), kde sa ukázalo, že požiadavka *nulovosti* torzie dáva spolu s metričnosťou jednoznačnú konexiu (RLC). A keďže práve táto konexia, v ktorej torzia *podľa definície* veľa vody nenamúti, je najbežnejšou lineárnou konexiou, s ktorou sa obyčajný smrteľník v živote stretáva, zostáva torzia väčšinou úplne v tieni svojej oveľa populárnejšej sestry, krivosti.[53] Preto jej určite padne dobre, keď na ňu celkom nezabudneme a všimneme si, v akej geometrickej situácii sa má šancu prejaviť. Ukazuje sa, že nenulová torzia sa prejaví tým, že sa "neuzatvára geodetický rovnobežník".

===

Uvažujme ako varietu dvojrozmernú sféru S^2 bez severného a južného pólu, s bežným "okrúhlym" metrickým tenzorom. Ak je taká veľká, ako povrch zemegule, ľahko sa nám môže stať, že si ani nevšimneme, že ide o sféru (aj ľudstvu to chvíľu trvalo) a budeme žiť v predstave, že chodíme po euklidovskej rovine. V tom prípade je celkom prirodzené robiť paralelný prenos vektorov takto: Po prvé, zmeriame dĺžku vektora, ktorý chceme preniesť a zabezpečíme jeho rovnakú dĺžku aj po prenesení. Tým ostane otvorenou už iba otázka jeho smeru. Ten vybavíme tak, že zmeriame jeho *azimut* (uhol od smeru na sever, pomocou kompasu; na póloch by to nefungovalo, preto sa z variety prezieravo vopred odstránili) a na novom mieste nastavíme rovnaký azimut. Ak veríme, že chodíme po euklidovskej rovine, tak máme čisté svedomie,[54] že sme takto urobili všetko pre paralelný prenos vektora *v tom najobyčajnejšom* intuitívnom zmysle.[55]

===

Štandardný aparát, ktorý sa rozvíja v kurzoch špeciálnej teórie relativity, je matematika štvorvektorov a štvortenzorov v Minkowského priestore. Dosahuje sa ním explicitná lorentzovská kovariantnosť všetkých rovníc. Ukazuje sa napríklad, že elektrické a magnetické polia sa štvorrozmerne javia ako časti spoločného objektu, tenzora elektromagnetického poľa s komponentami $F_{\mu\nu}$. Tento tenzor však nie je "všeobecný", ale *antisymetrický*

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$$

To je pre nás už jasný signál, aby sme v rozmýšľaní o ňom prepli hlavu na mód *diferenciálnych foriem.* A ak si prípadne spomenieme aj na štvorrozmerný zápis Maxwellových rovníc v tvare

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = j^{\mu} \qquad\qquad F_{[\mu\nu,\rho]} = 0$$

tak naše skúsené oko[56] už nezaváha a hlási, že na ľavých stranách rovníc spoznáva zložkový tvar *kodiferenciálu a diferenciálu dva-formy* F. Základné rovnice elektromagnetizmu sa teda zapisujú pomocou základných objektov a operácií teórie diferenciálnych foriem.

---

[52] Ak sa chystáte písmenkám a, b v menovateľoch prisudzovať hodnoty indexov a, b na tenzoroch, signalizuje to ľahkú prepracovanosť a odporúčame pár minút relaxačných cvičení na čerstvom vzduchu.

[53] Ako zistili vedci pod mikroskopom, tento astronomický úkaz poznali už starí Mayovia a hovorili mu "zatmenie torzie" (krivosťou). Zároveň vedeli s obdivuhodnou presnosťou počítať, kedy nastane (vyšlo im, že nastáva vždy).

[54] Prinajmenšom (v terminológii K.Plíhala) "ako podlaha po plese v Národnom dome".

[55] Určite by sa takto dali dosiahnuť slušné výsledky napríklad pri stavbe rovnobežných ulíc a panelákov na sídlisku; v rámci nácviku možno začať aspoň s kreslením rovnobežných vektorov v zošite.

[56] U pravákov ľavé, u ľavákov pravé; ide o známe kríženie nervových dráh.

==

Pozrime sa napokon na posledné dva potrebné operátory, kodiferenciál δ a Laplaceov-deRhamov operátor Δ. Keďže sú poskladané z operátorov, ktoré sme už vybavili, treba na ne už len dať doterajšie výsledky dokopy. Ako je štandardne zaužívané, budeme Laplaceov-deRhamov operátor v prípade $E^{1,3}$ označovať $\Box$ namiesto Δ (pravda, treba mať na pamäti, že tento operátor pôsobí všeobecne na formy, nielen na funkcie; na funkciách sa mu hovorí aj *d'Alembertov operátor* alebo *vlnový operátor*).[57]

==

V tomto kontexte bude dobré zaviesť často používaný termín *variačnej derivácie* účinku podľa svojho argumentu (ktorého je funkcionálom; môže ich byť aj viac, potom existuje pre každý z nich). Tento pojem má pre funkcionály analogický zmysel, ako obyčajná derivácia pre funkcie (prípadne *parciálna* derivácia funkcie, ak je argumentov viac), t.j. informuje nás o citlivosti funkcionálu na drobné zmeny argumentu.[58] Napríklad výsledok[59]

$$S[A+\epsilon\alpha] = S[A] - \langle \delta F + j, \epsilon\alpha\rangle + \cdots \equiv S[A] - \epsilon \int_{\mathcal{D}} \alpha^\mu (\delta F + j)_\mu d^4x$$

sa prepíše ako

$$\frac{\delta S[A]}{\delta A^\mu(x)} = -(\delta F + j)_\mu(x)$$

$\boxed{16.3.3}$ Je už verejným tajomstvom, že honoráre, ktoré dostávajú písmená za svoje vystúpenia v matematike a fyzike sú skutočne žalostné. Nečudujme sa preto, že mnohé si privyrábajú tak, že podpisujú pracovné zmluvy na viacero úloh ($\Rightarrow$ viacero platov). Neodradia ich ani trápne scény, keď sa stretnú v dvoch úlohách v jednej rovnici. Zistiť, na ktorom mieste je tu δ v úlohe *variácie* a kde je[60] v úlohe *kodiferenciálu*.

==

ii) tento nový účinok stále zostáva *reparametrizačne invariantný*: β sa totiž pri reparametrizácii *transformuje* podľa predpisu

$$\tau \mapsto \tau'(\tau) \qquad \Rightarrow \qquad \beta \mapsto \beta' = \frac{d\tau}{d\tau'}\beta$$

Návod: *i)* ak $g = \beta(\tau)d\tau \otimes \beta(\tau)d\tau \equiv e^1 \otimes e^1$, tak $\omega_g = e^1$ a $((g, f^*h)_g + 1/2)\omega_g$ sa redukuje na $1/2(h_{ab}\dot{y}^a\dot{y}^b/\beta + \beta)d\tau$; *ii)* "funkcia" $\beta(\tau)$ je podľa svojho zavedenia *zložkou 1-formy*[61] e^1 voči súradnicovej báze $d\tau$, odkiaľ jednoznačne vyplýva, ako sa transformuje pri zámene tejto súradnice (tak, že platí $\beta d\tau \stackrel{!}{=} \beta' d\tau'$)

==

Prípad *dvoj*rozmernej variety M (dvojrozmerných plôch v (N, h)) je zaujímavý hlavne pre dve skupiny civilného obyvateľstva.

Prvou sú malé deti, ktoré sú vo vani očarené *mydlovými bublinami*. Povrchové napätie núti bubliny zaujať tvar s minimálnou plochou pri daných dodatočných podmienkach; tieto podmienky môžu byť realizované napríklad drôteným rámčekom, na ktorom má okraj bubliny držať alebo tlakom vzduchu, ktorý je v nich uzavretý (ak na ničom nedržia a ľahučko poletujú v tvare S^2 vo vzduchu). Niektoré deti zostanú pri tejto téme aj v dospelosti, píšu o nej zložité články a (zložité) monografie, v ktorých neváhajú vytiahnuť proti (zložitým) problémom teórie bublín ťažkú artilériu diferenciálnej geometrie a algebraickej topológie. Iné deti v dospelosti spojito predifundujú od očarenia bublinami k očareniu *teóriou strún*; tá si zaumienila vysvetliť z minima prvotných princípov celú fyziku vo vesmíre. Úlohu *svetočiary* $y^a(\tau)$ bodovej častice v nej prebrala dvojrozmerná *svetoplocha* $y^a(\tau, \sigma)$ struny. Ak sa chce čitateľ dozvedieť o strunách viac, môže si o nich pre začiatok (najlepšie ešte dnes!) prečítať niekoľko tisíc článkov, ktoré naňho trpezlivo čakajú v preprintovej knižnici na adrese http://arxiv.org/ .

---

[57]Ľudia, ktorí kedysi zaviedli toto označenie, nevynikali zrejme mimoriadnou predvídavosťou; vôbec ich nenapadlo, že rovnakým symbolom sa raz bude v tomto texte označovať koniec úlohy.

[58]Tu sme sa už dostali do ríše, kde pevnou rukou vládne ďalšia rozsiahla matematická disciplína, *funkcionálna analýza*. Náš prístup je tu z jej pohľadu len "formálny", využívajúci naučenú geometrickú mašinériu. (To je ale v bežnej teoretickej fyzike štandardné a zdá sa, že "Prírode" je tento prístup celkom sympatický.)

[59]Vo fyzikálnych knihách sa člen $\epsilon\alpha$ zapisuje často ako δA (prírastok = variácia A), čiže $S[A+\delta A] = S[A] - \int_{\mathcal{D}} \delta A^\mu (\delta F + j)_\mu d^4x$.

[60]Všimnime si, že ide dokonca o *maloletú* δ-u; zjavne to už došlo tak ďaleko, že hoci sa dospelá Δ rozhodne tiež nenudí a označuje všetko možné, rodinu neuživí.

[61]Vzhľadom na všeobecnú definíciu $e^a = e^a_\mu dx^\mu$ sa β zvykne tiež volať *vielbeinovým poľom* ($e^1 = e^1_\tau(\tau)d\tau \equiv \beta d\tau$), aj keď obhajobu slova *viel* (veľa) v tomto (*jedno*rozmernom) prípade by asi považoval za ťažko zarobené peniaze aj skúsený advokát.

==

Variety TM a T^*M, s ktorými sme sa zoznámili v tomto paragrafe, sú časťou (totálnymi priestormi) štruktúr, ktorým sa hovorí *dotyková fibrácia* a *kodotyková fibrácia*. Dôvod týchto pomenovaní[62] sa stane úplne jasným v nasledujúcom paragrafe (pozri (17.2.5)), kde sa pozrieme, čo je to fibrácia všeobecne.

==

Názov *vertikálna* distribúcia je pochopiteľný z konvencií okolo kreslenia obrázkov typu (19.1.3): vlákna sa zvyknú kresliť zvislo, čiže vertikálne. Prečo sa distribúcia daná konexiou volá horizontálna? Ak by sme robili verejný prieskum, ako sa laicky chápe pojem horizontálny, pravdepodobne by sme sa dozvedeli to isté, ako hovorí slovník cudzích slov:[63] "horizontálny = vodorovný (opak vertikálneho)". Pritom vieme, že vodorovný smer je *kolmý* na zvislý. V našom kontexte by to znamenalo, že by bol horizontálny podpriestor definovaný ako *ortogonálny doplnok* k vertikálnemu. Tak to však nebolo (19.4.3), v definícii $\mathrm{Hor}_e LM$ nefiguroval žiaden metrický tenzor na LM, len forma konexie ω. Napriek tomu tu intuitívna predstava o horizontalite nemusí strácať svoj zvyčajný význam, ak ju však budeme chápať trochu voľnejšie. Typický horizont v slušnej prírode sa javí ako čiara, ktorá môže byť všeobecne aj zvlnená (teda nie nevyhnutne vodorovná, nie sme všetci námorníci), ale spravidla nie je zvislá (čiže vertikálna).[64] Dotyčnica k horizontu a zvislica tak tvoria dva nezávislé smery, z ktorých sa už dá skombinovať ľubovoľný iný smer. Dá sa to povedať aj tak, že horizontálny smer tvorí *doplnok* k vertikálnemu, avšak *nie nevyhnutne ortogonálny*.

==

Návod: $\rightarrow$: existuje globálna trivializácia $\psi : P \to M \times G$; rez je napríklad $\sigma : m \mapsto \psi^{-1}(m, e)$; $\leftarrow$: ak existuje rez σ, v každom vlákne dostávame významný bod[65] ($\sigma(m)$ nad m). Všetky ostatné body vo vlákne môžeme vzťahovať voči tomuto $\sigma(m)$: sú dané jednoznačným grupovým prvkom g takým, že $p = R_g\sigma(m) \equiv \sigma(m)g$; globálna trivializácia je napríklad $p \mapsto (m \equiv \pi(p), g)$

==

Táto 1-forma je úplne nezávislá na konexii, žije si na LM pokojne aj bez nej.[66] Keď však nejakú konexiu máme, dostávame na LM ďalší kanonický objekt, horizontálnu 2-formu $\Theta \equiv D\theta$.

==

Pripomeňme si, že v (5.3.4) sme dostali *vonkajšiu* algebru ΛL^* *faktorizáciou* "čisto kovariantnej" tenzorovej algebry podľa vhodného ideálu I. Pri konštrukcii algebry $C(L, g)$ môžeme postupovať rovnako, len (v tej istej počiatočnej algebre) trochu zmeníme ideál, podľa ktorého budeme faktorizovať.[67]

==

Ak už pracujeme len s výslednou faktoralgebrou[68]

$$C(L, g) := T_{(.)}(L)/J \qquad\qquad \textit{Cliffordova algebra}$$

tak zátvorky označujúce triedy ekvivalencie *nepíšeme* a ostane kľúčová relácia pre (bilineárny a asociatívny) *Cliffordov súčin*

$$e^a e^b + e^b e^a = 2g^{ab}$$

==

[62] Termín "kodotyková fibrácia" je tiež výstupom grantu, spomínaného v poznámke pod čiarou v paragrafe (2.5); podiel latinskej strany je tu trochu väčší.

[63] M.Ivanová-Šalingová, Z.Maníková: Slovník cudzích slov, SPN Bratislava 1983

[64] Toto neplatí napríklad pre pozorovateľa stojaceho v strede sídliska: jeho horizont (môže byť v niektorých smeroch až nepríjemne blízko, na paneláku pár metrov od neho) často obsahuje dlhočizné zvislé čiary (bočné múry panelákov). To však nie je slušná príroda.

[65] Už tušíme, že sme vyhrali: Archimedes (by) pohol Zemou, len čo (by) mu dali pevný bod, my (naozaj) pohneme dôkazom, lebo (naozaj) máme významný bod

[66] A žila si tam už v časoch, keď konexia nebola ešte ani na rysovacích doskách evolúcie. (Sú známe nálezy niektorých jej komponent už z prvohôr. Z mladších spomeňme napríklad veľmi zachovalý travertínový odliatok θ^2 z Gánoviec pri Poprade či slávnu dolnú polovičku z $\theta^3 E_3$ z Barce pri Košiciach). Mimochodom podľa niektorých autorov sa konexia vyvinula z dinosaurov, nám sa však táto hypotéza zdá (pri všetkej úcte) natoľko absurdná, že môže byť vhodná tak akurát ako námet na poznámku pod čiarou.

[67] Zmena ideálov je častým sprievodným znakom časového vývoja osobnosti. Aj my sme sa už od piatej kapitoly trochu vyvinuli a miernu zmenu ideálov by nám okolie nemalo zazlievať.

[68] A ignorujeme jej ťažké detstvo, poznačené faktorizáciou pôvodnej algebry $T_{(.)}(L)$.

$\boxed{22.1.8}$ Overiť,[69] že všetky reálne Cliffordove algebry sumarizuje nasledujúca stručná tabuľka (v hornom riadku sú čísla $(p-q)$ mod 8, v dolnom zodpovedajúce Cliffordove algebry $C(p,q)$), ktorá zovšeobecňuje tabuľku z úlohy (22.1.7):

0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbb{R}(2^l)$	$\mathbb{R}(2^l)\oplus\mathbb{R}(2^l)$	$\mathbb{R}(2^l)$	$\mathbb{C}(2^l)$	$\mathbb{H}(2^{l-1})$	$\mathbb{H}(2^{l-1})\oplus\mathbb{H}(2^{l-1})$	$\mathbb{H}(2^{l-1})$	$\mathbb{C}(2^l)$

Návod: *i)* $u\mapsto\varphi_u$ je reprezentácia ortogonálnymi operátormi; aj priamo: $u_1u_2e^au_2^{-1}u_1^{-1}=(A_2^{-1})^a_b u_1e^bu_1^{-1}=\dots$; *ii)* geometrický folklór hovorí,[70] že *každá* rotácia (ortogonálna transformácia s determinantom +1) sa dá realizovať ako párny počet zrkadlení; nepárny počet zrkadlení potom vedie na zloženie rotácie a zrkadlenia, prvok z $O(p,q)$, ktorý nie je v $SO(p,q)$

==

Ak teda máme (pseudo)riemannovskú varietu (M,g) signatúry (p,q), tak *spinová fibrácia*[71]

$$\pi : SM\to M$$

je v terminológii (20.5) (podľa definície) také *predĺženie* fibrácie (pravotočivých) ortonormovaných repérov $\tilde\pi : OM\to M$, že jeho štruktúrna grupa je Spin$\,(p,q)$ a potrebný homomorfizmus φ : Spin$\,(p,q)\to SO(p,q)$ je dvojlistové nakrytie spomínané v (22.2). Tejto fibrácii sa niekedy hovorí aj *spinová štruktúra* na M. Podobne, ako to bolo pri ohraničení, ani predĺženie fibrácie nemusí vždy existovať; môžu mu brániť topologické "prekážky". Špeciálne spinová štruktúra nemusí existovať pre každú (pseudo)riemannovskú varietu. Tu sa nebudeme zaoberať problémom, kedy existuje a kedy nie;[72] budeme jednoducho predpokladať, že *na našej* variete (M,g) *existuje*.

==

Návod: *i)* predstavme si v E^3 fixnú (referenčnú) pravotočivú ortonormovanú bázu $E_a, a=1,2,3$. Ak na ňu aplikujeme $A\in SO(3)$ vzťahom $e_a:=A^b_aE_b$, dostaneme opäť (pravú) ortonormovanú bázu a máme zjavnú bijekciu $A\leftrightarrow e$ medzi $SO(3)$ a množinou všetkých pravých ortonormovaných báz v E^3. Túto množinu báz ale ľahko stotožníme aj s totálnym priestorom fibrácie pravých ortonormovaných repérov *sféry* S^2: koniec vektora e_3 bude zodpovedať *bodu* s na S^2 a zvyšná dvojica (e_1,e_2) bude (po posunutí do tohoto bodu s na sfére) slúžiť ako pravý ortonormovaný repér v $s\in S^2$. Presne opačným postupom priradíme každému pravému ortonormovanému repéru (e_1,e_2) v s na S^2 prvok $A\in SO(3)$. Vo vlákne nad $e_3=s$ pôsobí $SO(2)$ ako grupa takých $B\in SO(3)$, ktoré nemenia e_3 (stabilizátor bodu e_3 akcie $e_a\mapsto B^b_ae_b$, t.j. $A\mapsto AB$). *ii)* pozrime sa, čo sa deje napríklad nad severným pólom;[73] zodpovedajú mu matice $A\in SO(3)$ také, že $e_3=E_3$, t.j. (13.1.11) $A=\operatorname{diag}(\tilde A,1)=\exp\{\alpha\ l_3\}$, $\tilde A\in SO(2), l_3\in so(3)$ (tvoria vlákno nad severným pólom sféry S^2 vo fibrácii pravých ortonormovaných repérov).

==

- Stiahnuté 1-formy

$$\hat\omega_{ab}:=\tilde\sigma^*\tilde\omega_{ab}$$

už žijú v oblasti $\mathcal{U}\subset M$, kde je definovaný rez $\tilde\sigma$, a teda aj jemu príslušné ortonormované repérne pole. Tieto formy predstierajú, že sa vidíme prvýkrát. Neúspešne. Akosi sa nám to nezdá a preto nazrieme do starostlivo vedeného denníčka. Ten nám naozaj pripomenie, že sme do ich hlbokých antisymetrických očí dlho hľadeli už

[69] Počas dlhých zimných večerov, keď sú už varešky vystrúhané, všetko náčinie na jarné práce na poli opravené, dobytok nakŕmený a karty namastené.

[70] Kto ho nepočul v podaní Lúčnice ani Sľuku a chcel by si ho sám v kútiku tíško zanôtiť, nech si nakreslí v rovine dve priamky, ktoré sa pretínajú pod uhlom ψ a vyskúša si, že zloženie zrkadlení voči týmto dvom priamkam dáva to isté, ako rotácia o uhol 2ψ okolo bodu, v ktorom sa pretínajú. Na trochu smelší spev v troch rozmeroch treba namiesto dvoch priamok dve roviny a na všeobecné plnohodnotné predstavenie bude asi najlepšia tá Lúčnica či Sľuk.

[71] Časť antropológov sa domnieva, že predkovia dnešných ľudí žili kedysi v totálnom priestore nejakej hlavnej fibrácie nad priestoročasom (a najviac sa hovorí práve o spinovej fibrácii) a vývoj ľudského druhu obsahoval fázu, v ktorej sa "spustil po projekcii π" do samotného priestoročasu. Jeden z kľúčových argumentov v prospech tejto (zatiaľ len) hypotézy dala svetovej vede slovenská etymologická škola odvážnym výkladom dnes často používaného zvratu "kedysi *za totáča* ..."

[72] Pre prípad, že by sme sa chceli nonšalantne zapojiť do odborného rozhovoru na túto tému na nejakom večierku, oplatí sa zapamätať si, že zavedeniu spinovej štruktúry bráni "druhá Stiefelova-Whitneyho trieda". Hneď po tomto výroku sa však radšej odporúčame rýchlo vytratiť, napríklad pod zámienkou, že si ideme dať ešte trochu toho výborného kaviáru.

[73] Iné zaujímavé úkazy, ktoré sa dajú pozorovať nad severným pólom (špeciálne pri jeho prekračovaní), možno vidieť v podaní Divadla Járy Cimrmana v hre Dobytí severního pólu.

na jednom nezabudnuteľnom večierku v 15. kapitole a o pár strán ďalej nám pomôže vybaviť si v spomienkach aj neskoršie stretnutie s nimi na koncerte neandertálskej hudby v 19. kapitole.

==

Všimnime si, že posledné vyjadrenie (ktoré obsahuje koeficienty anholonómie $c^a_{bc}(x)$) vlastne nepotrebuje žiadne objekty, ktoré *explicitne* charakterizujú *konexiu*; stačí jednoducho vyrátať vzájomné komutátory repérneho poľa (čo je z technickej stránky jednoduchá domáca úloha z(o sťaby) kvantovej mechaniky).[74] Vyhneme sa teda napríklad počítaniu foriem konexie $\hat{\omega}_{ab}$ z Cartanových štruktúrnych rovníc, alebo (dokonca) Ricciho koeficientov rotácie z komplikovaného vzorca $\gamma_{abc} := e^\mu_a e_{b\mu;\nu} e^\nu_c$ (15.6.20), ktorým sa s obľubou v literatúre zvyšuje posvätná úcta pred touto témou (treba počítať všetky bodkočiarky, na ktoré potrebujeme Christoffelove symboly zo vzorca $2\Gamma^\mu_{\nu\sigma} = g^{\mu\rho}(g_{\rho\nu,\sigma} + \dots)$ atď., atď.

==

V týchto dodatkoch si stručne zhrnieme elementárne fakty o algebraických štruktúrach, ktoré sa v texte najviac používajú. Spravidla sa obmedzíme na veci, kde hrozí aspoň aké-také riziko, že sa s nimi čitateľ ešte nestretol alebo v nich nemá celkom jasno.[75] Pochybnosti o korektnosti ktorejkoľvek definície, či platnosti ktoréhokoľvek tvrdenia, rozptýli samostatne a s chuťou vykonaný dôkaz (väčšinou je veľmi jednoduchý).

==

Podpriestor $\mathcal{B} \le \mathcal{A}$ je *podalgebra*, ak je uzavretý (aj) voči násobeniu a podalgebra $\mathcal{I}$ je *ideál* (ľavý, pravý, obojstranný), ak násobenie ľubovoľného prvku $a \in \mathcal{A}$ prvkom $i \in \mathcal{I}$ (zľava, sprava, aj aj) vedie na výsledok už v $\mathcal{I}$ (t.j. napr. pre ľavý ideál $ia = i' \in \mathcal{I}$ pre ľubovoľné $a \in \mathcal{A}$).[76] Ak máme v algebre $\mathcal{A}$ obojstranný ideál $\mathcal{I}$, môžeme do faktorpriestoru $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ zaviesť pomocou reprezentantov násobenie a dostať *faktoralgebru* ($[a][b] := [ab]$; pre iných reprezentantov máme $[a+i][b+i'] = [ab + ai' + ib + ii'] = [ab]$, ak $\mathcal{I}$ je obojstranný ideál).

---

[74] Dá sa robiť aj popri hlásení o stave vodných tokov, prípadne oznamе o regulačných stupňoch pre odberateľov plynu.

[75] Vopred sa ospravedlňujeme, ak tu čitateľ narazí aj na pojmy dôverne známe a spôsobená strata času ho vyvedie z emocionálnej rovnováhy; vytrhnutie, dôkladné rozžuvanie a následné spopolnenie príslušnej pasáže zvyčajne vráti v krátkom čase hladinu adrenalínu do hraníc normy. Svoje pohŕdanie autorom môžeme dať najavo aj tým, že sa textu niekoľko dní (prípadne už nikdy) nedotkneme.

[76] Ak si predstavíme prvky ideálu $\mathcal{I}$ ako nositeľov génu nenapraviteľného *idealizmu*, tak potomstvo, ktoré vznikne ich ľubovoľným párením (násobením) (aj s tými, ktorí už všetky ideály dávno stratili), pozostáva opäť len z (nenapraviteľných) idealistov.