

OBSAH

OBSAH	5
PREDHOVOR	11
0. ÚVOD	15
1. POJEM VARIETY	18
1.1. Topológia a spojité zobrazenia	18
1.2. Triedy hladkosti zobrazení kartézskych priestorov	20
1.3. Hladká štruktúra, hladká varieta	21
1.4. Hladké zobrazenia variet	26
1.5. Technický opis hladkých plôch v \mathbb{R}^n	30
1.6. Zhrnutie 1. kapitoly	34
2. VEKTOROVÉ A TENZOROVÉ POLIA	35
2.1. Krivka a funkcia na M	36
2.2. Dotykový (tangenciálny) priestor, vektory a vektorové polia	37
2.3. Integrálne krivky vektorového poľa	44
2.4. Lineárna algebra tenzorov (multilineárna algebra)	47
2.5. Tenzorové polia na M	58
2.6. Metrický tenzor na variete	62
2.7. Zhrnutie 2. kapitoly	66
3. ZOBRAZENIA TENZOROV INDUKOVANÉ ZOBRAZENIAMÍ VARIET	67
3.1. Zobrazenia tenzorov a tenzorových polí	67
3.2. Indukovaný metrický tenzor	73
3.3. Zhrnutie 3. kapitoly	77
4. LIEOVA DERIVÁCIA	78
4.1. Lokálny tok vektorového poľa	78
4.2. Lieovský prenos a Lieova derivácia	82
4.3. Vlastnosti Lieovej derivácie	85
4.4. Exponenta Lieovej derivácie	88
4.5. Geometrická interpretácia komutátora $[V, W]$, neholonómne bázy	90
4.6. Izometrie a konformné transformácie, Killingove rovnice	93
4.7. Zhrnutie 4. kapitoly	104

5. VONKAJŠIA ALGEBRA	105
5.1. Motivácia - objemy rovnobežnostenov	105
5.2. p -formy a vonkajší súčin	107
5.3. Vonkajšia algebra ΛL^*	114
5.4. Vnútorý súčin i_v	118
5.5. Orientácia v L	119
5.6. Determinant a zovšeobecnené Kroneckerove symboly	120
5.7. Metrická forma objemu	125
5.8. Hodgeov operátor (dualizácie) *	130
5.9. Zhrnutie 5. kapitoly	138
6. DIFERENCIÁLNY POČET FORIEM	139
6.1. Formy na variete	139
6.2. Vonkajšia derivácia	142
6.3. Orientovateľnosť, Hodgeov operátor a forma objemu na M	147
6.4. Formy s hodnotami vo vektorovom priestore V	153
6.5. Zhrnutie 6. kapitoly	157
7. INTEGRÁLNY POČET FORIEM	158
7.1. Podintegrálne výrazy ako diferenciálne formy	158
7.2. Euklidovské simplexy a refazce	160
7.3. Simplexy a refazce na variete	163
7.4. Integrál formy po refazci na variete	164
7.5. Stokesova veta	165
7.6. Integrál po oblasti na orientovateľnej variete	167
7.7. Integrál po oblasti na orientovateľnej riemannovskej variete	172
7.8. Integrál a zobrazenia variet	175
7.9. Zhrnutie 7. kapitoly	176
8. ŠPECIÁLNE PRÍPADY A APLIKÁCIE STOKESOVEJ VETY	177
8.1. Elementárne situácie	177
8.2. Divergencia a Gaussova veta	178
8.3. Kodiferenciál a Laplaceov-deRhamov operátor	184
8.4. Greenove identity	189
8.5. Vektorová analýza v E^3	191
8.6. Funkcie komplexnej premennej	198
8.7. Zhrnutie 8. kapitoly	202
9. POINCARÉHO LEMA A KOHOMOLÓGIE	203
9.1. Jednoduché príklady uzavretých neexaktných foriem	204

9.2. Konštrukcia potenciálu na stiahnuteľných varietách	205
9.3. Kohomológie a deRhamov komplex	212
9.4. Zhrnutie 9. kapitoly	216
10. LIEOVE GRUPY - ZÁKLADY	217
10.1. Automorfizmy rôznych štruktúr a grupy	217
10.2. Lieove grupy - základné pojmy	223
10.3. Zhrnutie 10. kapitoly	226
11. DIFERENCIÁLNA GEOMETRIA NA LIEOVÝCH GRUPÁCH	227
11.1. Lavoinvariantné tenzorové polia na Lieovej grupe	227
11.2. Lieova algebra \mathcal{G} grupy G	235
11.3. Jednoparametrické podgrupy	238
11.4. Exponenciálne zobrazenie	241
11.5. Odvodený homomorfizmus Lieových algebier	243
11.6. Invariantný integrál na G	244
11.7. Maticový formalizmus	246
11.8. Zhrnutie 11. kapitoly	257
12. REPREZENTÁCIE LIEOVÝCH GRÚP A LIEOVÝCH ALGEBIER	258
12.1. Základné pojmy	258
12.2. Ireducibilné a ekvivalentné reprezentácie, Schurova lema	266
12.3. Pridružená reprezentácia, Killingova-Cartanova metrika	273
12.4. Základné konštrukcie s grupami, Lieovými algebrami a ich reprezentáciami	284
12.5. Invariantné tenzory a splietajúce operátory	294
12.6.* Kohomológie Lieových algebier	298
12.7. Zhrnutie 12. kapitoly	303
13. PÔSOBENIE LIEOVÝCH GRÚP A ALGEBIER NA VARIETÁCH	304
13.1. Pôsobenie grupy, orbita a stabilizátor	304
13.2. Štruktúra homogénnych priestorov, G/H	309
13.3. Nakrývajúci homomorfizmus, nakrytia $SU(2) \rightarrow SO(3)$ a $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow L_+^\uparrow$	315
13.4. Reprezentácie G a \mathcal{G} v priestore funkcií na G -priestore, fundamentálne polia	325
13.5. Reprezentácie G a \mathcal{G} v priestore tenzorových polí typu $\hat{\rho}$	334
13.6. Zhrnutie 13. kapitoly	341

14. HAMILTONOVSKÁ MECHANIKA A SYMPLEKTICKÉ VARIETY	342
14.1. Poissonovská a symplektická štruktúra na variete	342
14.2. Darbouxova veta, kanonické transformácie a symplektomorfizmy	351
14.3. Poincarého-Cartanove integrálne invarianty a Liouvillova veta	357
14.4. Symetrie a zákony zachovania	362
14.5.* Momentové zobrazenie	365
14.6.* Orbity koadjungovaného pôsobenia	370
14.7.* Symplektická redukcia	377
14.8. Zhrnutie 14. kapitoly	385
15. PARALELNÝ PRENOS A LINEÁRNA KONEXIA NA M	386
15.1. Zrýchlenie a paralelný prenos	386
15.2. Paralelný prenos a kovariantná derivácia	389
15.3. Kompatibilita s metrikou, RLC konexia	400
15.4. Geodetiky	407
15.5. Tenzor krivosti	419
15.6. Formy konexie a Cartanove štruktúrne rovnice	424
15.7. Rovnica pre odklon geodetík (Jacobiho rovnica)	437
15.8. Torzia, úplný paralelizmus a plochá konexia	441
15.9. Zhrnutie 15. kapitoly	447
16. TEÓRIA POĽA V JAZYKU FORIEM	448
16.1. Diferenciálne formy v Minkowského priestore $E^{1,3}$	448
16.2. Maxwellove rovnice v jazyku diferenciálnych foriem	455
16.3. Kalibračné transformácie, účinkový integrál	460
16.4. Tenzor energie-hybnosti, časopriestorové symetrie a zákony zachovania za ne	468
16.5.* Einsteinove rovnice gravitačného poľa, Hilbertov a Cartanov účinok	479
16.6.* Nelineárne sigma modely a harmonické zobrazenia	489
16.7. Zhrnutie 16. kapitoly	499
17. DIFERENCIÁLNA GEOMETRIA NA TM A T^*M	500
17.1. Dotyková fibrácia TM a kodotyková fibrácia T^*M	500
17.2. Pojem fibrovanej variety	504
17.3. Zobrazenia Tf a T^*f	507
17.4. Vertikálny podpriestor, vertikálne vektory	509
17.5. Zdvihy na TM a T^*M	511
17.6. Kanonické tenzorové polia na TM a T^*M	516
17.7. Identity medzi zavedenými tenzorovými poľami	520

17.8. Zhrnutie 17. kapitoly	520
18. HAMILTONOVE A LAGRANGEOVE ROVNICE	521
18.1. Pole diferenciálnej rovnice druhého rádu	521
18.2. Eulerovo-Lagrangeovo pole	522
18.3. Súvis Lagrangeovej a Hamiltonovej mechaniky, Legendreovo zobrazenie	526
18.4. Symetrie zdvihnuté z bázy (konfiguračného priestoru)	529
18.5. Hamiltonián závislý od času, účinkový integrál	540
18.6. Zhrnutie 18. kapitoly	544
19. LINEÁRNA KONEXIA A FIBRÁCIA REPÉROV	545
19.1. Fibrácia repérov $\pi : LM \rightarrow M$	545
19.2. Forma konexie na LM	548
19.3. k -rozmerná distribúcia \mathcal{D} na variete \mathcal{M}	551
19.4. Geometrická interpretácia formy konexie: horizontálna distribúcia na LM	559
19.5. Horizontálna distribúcia na LM a paralelný prenos na M	564
19.6. Tenzory na M v jazyku LM a ich paralelný prenos	566
19.7. Zhrnutie 19. kapitoly	571
20. KONEXIA NA HLAVNEJ G-FIBRÁCII	572
20.1. Hlavné G -fibrácie	572
20.2. Forma konexie $\omega \in \Omega^1(P, \text{Ad})$	581
20.3. Paralelný prenos a vonkajšia kovariantná derivácia D	585
20.4. Forma krivosti $\Omega \in \Omega^2(P, \text{Ad})$ a explicitné vyjadrenia D	589
20.5.* Ohraničenie štruktúrnej grupy a konexia	598
20.6. Zhrnutie 20. kapitoly	607
21. KALIBRAČNÉ TEÓRIE A KONEXIE	608
21.1. Lokálna kalibračná invariantnosť - "tradičný" prístup	608
21.2. Zmena rezu a kalibračná transformácia	615
21.3. Rovnice paralelného prenosu veličiny typu ρ v kalibrácii σ	621
21.4. Pridružená (asociovaná) fibrácia $P \times_{\rho} V$ k hlavnej fibrácii $\pi : P \rightarrow M$	627
21.5. Kalibračne invariantný účinok a pohybové rovnice	629
21.6. Nötherovské prúdy a Nötherovej veta	639
21.7. Ešte raz (na chvíľu) na LM	648
21.8. Zhrnutie 21. kapitoly	655

Hlava 22. SPINOROVÉ POLIA A DIRACOV OPERÁTOR	656
22.1. Cliffordove algebry $C(p, q)$	658
22.2. Cliffordove grupy $\text{Pin}(p, q)$ a $\text{Spin}(p, q)$	666
22.3. Spinory - lineárna algebra	672
22.4. Spinová fibrácia $\pi : SM \rightarrow M$ a spinorové polia na M	676
22.5. Diracov operátor	684
22.6. Zhrnutie 22. hlavy	693
Dodatok A: niektoré algebraické štruktúry	694
A1. Lineárne priestory	
A2. Asociatívne algebry	
A3. Lieove algebry	
A4. Moduly	
A5. Graduovanosť	
A6. Kategórie a funktoary	
Dodatok B: Slovensko-anglicko-ruský slovní(če)k	706
Dodatok C: V hlavných a vedľajších úlohách účinkovali	708
LITERATÚRA	710
REGISTER	712

PREDHOVOR

Táto kniha je **úvodným** textom o istej časti **matematiky**, o modernej diferenciálnej geometrii a o Lieových grupách ako jej integrálnej súčasťi. Pritom je písaná hlavne **z pohľadu a pre potreby fyzikov**. Orientácia na fyziku sa prejavuje vo výbere materiálu, v spôsobe jeho podania (miere "rigoróznosti", nepoužívaní formy "definícia-veta-dôkaz"), aj v náplni úloh (sú často spojené s fyzikou).

Fyzikmi sa však potenciálna čitateľská obec knihy nevyčerpáva. Keďže je o matematike a keďže fyzika odjakživa bola a stále je pre matematiku výdatným zdrojom inšpirácie, bude užitočná **aj pre matematikov**. A všeobecnejšie pre kohokoľvek, kto má potrebné (neveľké) predbežné vedomosti (skonkretizované nižšie) a chcel by sa **prístupným spôsobom** zoznámiť s touto zaujímavou, dôležitou a živou disciplínou, ktorá čoraz viac preniká do rôznorodých oblastí modernej teoretickej fyziky, matematiky a aj ich aplikácií.

S akými **minimálnymi vedomosťami** môže prikrčiť potenciálny čitateľ k štúdiu tejto knihy? Nevyžaduje sa toho veľa. Stačia bežné vedomosti z kurzov matematickej analýzy (funkcií viacerých reálnych premenných) a lineárnej algebry, ktoré v prvom alebo druhom ročníku vysokoškolského štúdia absolvujú napríklad všetci fyzici a matematici, ale **aj väčšina** budúcich **inžinierov**. Čitateľ by teda mal rozumieť pojmom parciálna derivácia, Taylorov rozvoj a viacnásobný Riemannov integrál, vedieť násobiť matice, mal by chápať pojem podpriestor n -rozmerného lineárneho priestoru a podobne. Mal by tiež mať istú prax v zostavovaní a riešení jednoduchých sústav obyčajných diferenciálnych rovníc a rozumieť, aká myšlienka sa nimi realizuje. (Doladenie formy sa dá robiť aj "za pochodu", okrem iného pozorným čítaním Dodatkov na konci knihy.)

Typicky teda pôjde o vysokoškoláka/čku spomínaných odborov, spravidla od druhého ročníka vyššie, ale nezriedka majú potrebné vedomosti už aj mladší. Kniha je však úmyselne písaná tak, aby ju mohol bez ťažkostí študovať **aj samouk** - ktokoľvek, koho lákajú **tenzorové a spinorové polia**, či **fibrované variety**, chce sa naučiť **derivovať a integrovať diferenciálne formy**, vidieť, ako súvisia so symetriami **Lieove grupy a algebry** a ich **reprezentácie**, čo je **krivosť a torzia**, ako sa využíva **symplektická geometria** v **lagranžovskej a hamiltonovskej mechanike**, v akom zmysle hovoria **konexie** a **kalibračné polia** o tom istom, ako vznikajú **nötherovské prúdy** a ako súvisia so **zákonmi zachovania** atď.

Zo zamerania knihy vyplýva, že je výhodou, ak aspoň zhruba poznáme aj fyzikálny kontext, ktorého sa týkajú aplikácie. Avšak aj bez fyzikálnych vedomostí možno mať (z hľadiska samotnej geometrie) z knihy prospech. Ak sme

napríklad nikdy nevideli **Maxwellove rovnice** a netušíme, aká je ich úloha vo fyzike, nebudeme síce chápať, *prečo* sa práve im venuje taká pozornosť, ale napriek tomu budeme rozumieť, *čo* sa tu s nimi z technického hľadiska robí. Uvidíme na nich, ako sa dajú tieto **parciálne diferenciálne rovnice** vyjadriť v jazyku diferenciálnych foriem, ako pre ne vyzerá účinok, ako sa z neho pomocou **tenzora energie-hybnosti** získavajú **zákony zachovania** a podobne. A ak sa nám to bude zdať zaujímavé, môžeme si o nich prečítať niečo "tradičné" aspoň dodatočne.

Podobne, ak nevieme nič o všeobecnej teórii relativity, nebudeme síce chápať odkiaľ sa nabrala predstava o "**zakrivenom**" **priestoročase** a o **metrickom tenzore** v ňom, dozvieme sa však, čo to je priestoročas z geometrického hľadiska a čo sa v ňom dá štandardne robiť. Neprenikneme síce do fyzikálnej podstaty **Einsteinových rovníc** pre **gravitačné pole**, avšak spoznáme ich formálnu štruktúru a jednoduché a účinné technické nástroje na prácu s nimi. Zvládnutie tejto a množstva inej geometrickej techniky nám potom výrazne **uľahčí** pochopenie **fyzikálnej** stránky veci, ak si o tejto teórii prečítame, alebo vypočujeme neskôr niečo orientované fyzikálne.

Kľúčovou požiadavkou na budúceho čitateľa je veľký **záujem porozumieť** veciam, o ktorých sa tu píše a chuť zvládnuť materiál nielen platonicky (pre potreby nonšalantnej konverzácie na spoločenských večierkoch), ale aj **na pracovnej úrovni**. No a samozrejme aj prijatie prirodzeného dôsledku, že tento cieľ sa nedá dosiahnuť samotným pasívnym čítaním, ale že je nevyhnutná značná samostatná práca (z čoho by mal mať ideálny budúci čitateľ *radosť*) a jej zodpovedajúca časová investícia.

Látka sa vyjasňuje pomocou **množstva jednoduchých úloh** (je ich spolu vyše tisíc), v ktorých si čitateľ "**vlastnými rukami**" rozoberá detaily "teórie", ale aj spústu **konkrétnych príkladov**. Začiatok úlohy spoznáme podľa rámečka, v ktorom je jej číslo (napríklad 14.4.3 označuje tretiu úlohu vo štvrtom paragrafe štrnástej kapitoly), koniec podľa symbolu \square . Väčšina úloh (asi deväťsto) má pripojený dostatočne podrobný **návod** a niektoré, zhruba päťdesiat, aj **úplné riešenie**. Symbol \bullet znamená začiatok "textu", ktorý nie je úlohou ("teória" alebo komentár k úlohám). Ak je pri čísle paragrafu hviezdička (napríklad 12.6.*), znamená to, že pri prvom čítaní ho môžeme vynechať (ide do väčších detailov, alebo sa zaoberá príliš špeciálnymi otázkami). Hviezdičkou sú označené aj niektoré náročnejšie úlohy.

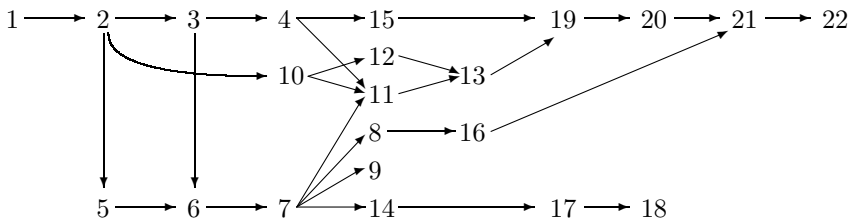
Táto kniha obsahuje dosť veľa materiálu a bude asi užitočné spomenúť, ako s ňou optimálne pracovať. Dá sa čítať rôznymi spôsobmi, ktoré závisia od toho, čo od nej očakávame a koľko úsilia sme ochotní na jej zvládnutie venovať.

Základným a najviac odporúčaným spôsobom je postupovať pekne od začiatku do konca a riešiť pritom (skoro) všetky úlohy. Toto je postup, ktorým sa z textu vyťaží maximum. Tému vidíme v dostatočnej šírke, fakty

vnímame v súvislostiach a mnohorakých aplikáciách. Vyžaduje si to však čas a trpezlivosť.

Kto jedno alebo druhé nemá, môže postupovať aj ináč. Pôjde síce opäť od začiatku do konca, ale podrobne riešiť bude len úlohy, ktoré ho niečím zaujmú alebo potrebuje ich výsledok. Pri tomto postupe sa môže stať, že niektorú úlohu nebude vedieť zvládnuť; chýba mu na to nejaké podstatné ohnivko (fakt alebo zručnosť) z preskočeného materiálu. Ak sa dá zistiť ktoré ohnivko to je (v návode sa veľmi často odvolávame na čísla potrebných predchádzajúcich úloh), nič hrozné sa nestalo, jednoducho sa treba vrátiť a chýbajúci kúsok (úlohu) si dodatočne doplniť.

Ešte rýchlejší bude postup čitateľa, ktorý sa chce od začiatku obmedziť na nejakú konkrétnu oblasť a o ostatné sa zaujíma iba do tej miery, aká je nevyhnutná pre "jeho" tému. Na pomoc takémuto čitateľovi uvádzame (približnú) **schému závislosti kapitol**:



(Táto schéma nezodpovedá skutočnosti úplne, viacero paragrafov, krátkych častí či dokonca jednotlivých úloh by si v skutočnosti vyžadovalo dokresliť do nej *ďalšie* šípky, čím by sa ale stala prakticky bezcennou.)

Z takýchto konkrétnych oblastí by sa dali spomenúť povedzme tieto:

1. geometria potrebná pre základy **všeobecnej teórie relativity (kovariantné derivácie, tenzor krivosti, geodetiky, apod.)**

Ide o líniu 1 - 2 - 3 - 4 - 15 (podobný aparát sa zide aj do pokročilej **mechaniky kontinua**). Ak chceme zvládnuť aj prácu s formami (napríklad pochopiť paragraf 15.6. o výpočte Riemannovho tenzora pomocou Cartanových štruktúrnych rovníc alebo paragraf 16.5. o Einsteinových rovniciach a ich odvodení z účinkového integrálu), potrebujeme pridať ešte kapitoly 5 - 6 - 7.

2. **elementárna teória Lieových grúp** a ich **reprezentácií** (bez aparátu diferenciálnej geometrie)

Línia by mohla obsahovať kapitoly (z niektorých len uvedené paragrafy) 1 - 2.4 - 10 - 11.7 - 12 - 13.1,2,3

3. **hamiltonovská mechanika** a **symplektické variety**

Minimálna trasa obsahuje kapitoly 1 - 2 - 3 - začiatok 4 - 5 - 6 - 7 - 14. Jej

pokračovanie (formulácie lagranžovskej a hamiltonovskej mechaniky na fibrovanej varietách TM a T^*M) je v kapitolách 17 - 18. Ak chceme rozumieť aj pokročilejším paragrafom o symetriách (14.5.-14.7. a 18.4.), potrebujeme chápať geometriu na Lieových grupách a pôsobenia Lieových grúp na varietách (11.-13. kapitola).

4. základy práce s **diferenciálnymi formami**

Trasa by mohla vyzeráť 1 - 2 - 3 - začiatok 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9, prípadne ešte pridať začiatok 16. kapitoly.

Táto kniha vznikla usporiadaním a rozšírením materiálu, ktorý už mnoho rokov prednášam študentom teoretickej fyziky FMFI UK (predtým MFF UK) v Bratislave. Formálne zodpovedá *štyrom* oficiálnym prednáškam (čo uvádzam len ako inšpiráciu pre prípadné zavedenie podobných prednášok inde), jednej väčšej a povinnej (je k nej aj cvičenie) a trom menším a výberovým (sú bez cvičenia, aktivita sa udržiava len domácimi úlohami). Väčšia, ktorá beží pod názvom "Matematická fyzika" (1 alebo 2), zodpovedá zhruba kapitolám 1-9 a 14-16. Jej náplňou sú teda základy diferenciálnej geometrie a náčrt jej hlavných aplikácií. Menšie sa týkajú Lieových grúp a ich reprezentácií (kapitoly 10-13), geometrických metód v klasickej mechanike (17-18 a zvyšok 14) a konexií a kalibračných polí (19-21).

Na záver by som sa rád poďakoval Spoločnosti autorov vedeckej a odbornej literatúry (SAVOL) za poskytnutie štedrej dotácie potrebnej na vyjdenie tohoto diela, Centru pre výskum kvantovej informácie Fyzikálneho ústavu SAV v Bratislave za príspevok na ten istý účel, Literárnemu fondu za udelenie štipendia na dokončenie diela, kolegom z Katedry teoretickej fyziky FMFI v Bratislave, hlavne Paľovi Ševerovi a Vladovi Balekovi za mnohé obohacujúce diskusie o geometrii vo fyzike, obom (anonymným) recenzentom pre SAVOL za mimoriadne starostlivé prečítanie nie práve najkratšieho rukopisu a cenné profesionálne postrehy v posudkoch, Vladovi Bužekovi za povzbudenie v pravom čase a za dobré rady, E.Bartošovi, J.Bušovi, V.Černému, J.Hitzingerovi, J.Chlebkovej, E.Masárovi, E.Sallerovi, S.Slizzovi a A.Šurdovi za rady a nezištnú pomoc pri realizácii elektronickej verzie textu (špeciálne s jemnosťami $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -u, v ktorom som ho napísal) a svojim synom Stankovi a Mirkovi za nakreslenie obrázkov (tiež v $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -u). Osobitne ďakujem mojej manželke Lubke, ktorá spolu s našimi deťmi Stankom, Mirkom a Dankou trpezlivo znášala moje nekonečné písanie a s ním spojenú fyzickú, alebo aspoň duševnú neprítomnosť.

Budem vďačný za akékoľvek pripomienky, komentáre, nájdené chyby či návrhy na vylepšenie textu (fecko@fmph.uniba.sk).

V Bratislave, marec 2004

Marián Fecko

0. ÚVOD

Vo fyzike sa každú chvíľu niečo derivuje alebo integruje. Preto treba súbežne s kurzom fyziky vniknúť aj do tajov diferenciálneho a integrálneho počtu. Začína sa funkciami jednej premennej, potom sa prejde aj na prípad viacerých premenných. Do hry vstúpia viacnásobné integrály a parciálne derivácie, ktorých sa budúci adept fyziky napočíta neúrekom.

Keď sa však pozornejšie pozrieme na štruktúru výrazov, zapísaných pomocou parciálnych derivácií v skutočných fyzikálnych vzorcoch, zistíme, že isté kombinácie sa vyskytujú veľmi často, iné prakticky nikdy. Napríklad ak porovnáme frekvenciu výskytu výrazov tvaru

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad \text{a} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + 4 \frac{\partial f}{\partial z}$$

tak zistíme, že zatiaľ čo prvý (Laplaceov operátor aplikovaný na funkciu f) sa vyskytuje veľmi často, druhý v knihách prakticky nenájdeme (ak nerátame zbierku úloh z analýzy, kde treba rátať práve túto kombináciu derivácií z didaktických dôvodov). Kombinácie, ktoré sa v knihách vyskytujú, sú spravidla výsledkom výpočtu, ktorý realizuje isté *názorné lokálne geometrické* predstavy o uvažovanej realite (napríklad fenomenologický opis difúzie látky v homogénnom prostredí). Práve takéto predstavy systematicky študuje *lokálna diferenciálna geometria*. V zhode s fyzikálnou skúsenosťou sa v nej pozoruje, že operácií, ktoré sú naozaj zaujímavé a často sa vyskytujú, je skutočne pomerne málo (dobrá správa, zvládnu sa v rozumnom čase).

Zo všeobecnej fyziky tiež poznáme fakt, že tá istá situácia sa dá opisovať pomocou *rôznych súradníc* (kartézskych, sférických, cylindrických,...) a z kontextu je zrejmé, že *výsledok* určite *nebude závisieť* od výberu týchto súradníc (čo sa ale často nedá povedať o *pracnosti* výpočtov; *to* je dôvod, prečo sa vyberajú na rôzne úlohy rôzne súradnicové sústavy). Samotné objekty a operácie s nimi sú teda nezávislé od výberu súradníc na ich opis, a preto neprekvapí, že vo vhodne vybudovanom aparáte sa bude dať veľká časť výpočtov urobiť úplne *bez súradníc* (aká veľká časť to bude, závisí od problému aj majstrovstva používateľa aparátu). Takéto "abstraktné" (bez-súradnicové) výpočty majú viacero predností. Bývajú spravidla podstatne kratšie a prehľadnejšie (dajú sa preto napríklad ľahko viackrát skontrolovať), jednotlivým krokom sa dá lepšie názorne rozumieť a podobne. Porovnajme na ilustráciu napríklad takéto rovnice

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi g = 0 & \quad \leftrightarrow \quad \xi^k g_{ij,k} + \xi^k_{,i} g_{kj} + \xi^k_{,j} g_{ik} = 0 \\ \nabla_\gamma \dot{\gamma} = 0 & \quad \leftrightarrow \quad \ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k = 0 \\ \nabla g = 0 & \quad \leftrightarrow \quad g_{ij,k} - \Gamma_{ijk} - \Gamma_{jik} = 0 \end{aligned}$$

V tomto texte sa postupne dozvieme, že dvojice rovníc vľavo-vpravo hovoria vždy *presne to isté*: výraz vpravo vzniká rozpísaním do (ľubovoľných) súradníc výrazu vľavo.

(Prvý prípad sú *Killingove rovnice* a ich obsahom je fakt, že Lieova derivácia g v smere ξ je nulová, t.j. že metrický tenzor g má *symetriu* danú vektorovým poľom ξ ; druhý je rovnica geodetiky a vyjadruje podmienku, že ideme rovnomerne priamočiario (= s nulovým zrýchlením); tretí je podmienka metričnosti konexie a hovorí, že pri paralelnom prenose sa bude zachovávať skalárny súčin vektorov. Komu je už teraz všetko toto jasné, môže túto knihu hneď predať a za získané peniaze si kúpiť a začať čítať nejakú rozumnejšiu a pokročilejšiu literatúru; tým, čo zostali čítať ďalej, to bude úplne jasné po prečítaní štvrtej a pätnástej kapitoly.)

Napriek maximálnemu zjednodušeniu zápisu súradnicových verzií rovníc (sumačná konvencia, zápis parciálnych derivácií pomocou čiarok) je zrejmé, že stručnosť ľavých strán je bezkonkurenčná. Ak sa preto naučíme *spoľahlivo manipulovať* s objektmi typu ľavých strán, získame tým schopnosť efektívne (nepriamo) narábať s pomerne komplikovanými výrazmi, ktoré obsahujú parciálne derivácie a pritom navyše v každom kroku rozumieť, čo *objektívne* robíme.

Analýza sa zvyčajne rozvíja v kartézskom priestore \mathbb{R}^n resp. v otvorených oblastiach v \mathbb{R}^n . V skutočnosti však mnohé priestory, na ktorých bez miľnutia oka analýzu používame, prísne vzaté otvorenými oblasťami v \mathbb{R}^n *nie sú*, hoci k nim majú veľmi blízko.

V teoretickej mechanike napríklad vyšetrujeme pohyb kyvadiel tak, že riešime (diferenciálne) Lagrangeove rovnice pre časovú závislosť súradníc v ich konfiguračných priestoroch. Pritom tieto konfiguračné priestory nie sú vždy otvorenými oblasťami v \mathbb{R}^n . Pre rovinné kyvadlo je to napríklad *kružnica* S^1 . Je to síce jednorozmerný priestor, avšak je intuitívne zrejmé (a dá sa dokázať), že je to čosi *iné*, ako (otvorená oblasť v) \mathbb{R}^1 . Podobne konfiguračný priestor sférického kyvadla je dvojrozmerná sféra S^2 , ktorá sa líši od (otvorenej oblasti v) \mathbb{R}^2 .

Všimnime si však, že dostatočne *malé okolia* ľubovoľného bodu na S^1 aj S^2 sú na nerozoznanie od dostatočne malých okolí ľubovoľných bodov v \mathbb{R}^1 , resp. \mathbb{R}^2 ; sú v nejakom zmysle "lokálne rovnaké", rozdiel je "až globálny". Aplikácie matematickej analýzy (aj vo fyzike) takto prirodzene tlačia smerom k jej rozšíreniu na všeobecnejšie priestory, akými sú otvorené oblasti v \mathbb{R}^n .

Takýmito všeobecnejšími priestormi sú *hladké variety*. Veľmi voľne povedané ide o priestory, ktoré sa *krátkozrakému pozorovateľovi* javia ako \mathbb{R}^n (pre vhodné n), ale celkovo ("topologicky", keď si založí okuliare a vidí už dobre aj do diaľky) môžu vyzeráť úplne ináč ako \mathbb{R}^n .

Príjemnou pozornosťou podniku je fakt, že aparát, ktorý sa vybuduje na

vyššie spomínaný opis geometrických predstáv nezávisle od výberu súradníc, je zároveň automaticky vhodný aj na opis *globálnych* geometrických objektov, t.j. objektov korektne definovaných *na celej variete*. Budeme teda hovoriť aj o *globálnej analýze*, analýze na varietách. Napríklad spomenuté rovnice $\mathcal{L}_\xi g = 0$, $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$ a $\nabla g = 0$ sú všetko rovnice na varietách a ich riešenia sú tiež globálne dobre definované objekty na varietách.

Samotný kľúčový pojem hladkej variety si zavedieme v 1. kapitole. Výklad bude hlavne intuitívny. Veľa vecí, ktoré sa podrobne rozvádzajú v matematickej literatúre o diferenciálnej *topológii*, sa spomenie len veľmi orientačne alebo dokonca sa nespomenú vôbec. Cieľom tejto úvodnej kapitoly bude povedať len to, čo treba nevyhnutne vedieť na pochopenie (už na pracovnej úrovni) hlavnej náplne tohoto textu, ktorou je diferenciálna *geometria* na varietách.

Zhrnutie 1. kapitoly

Hladká varieta je základnou hracou plochou v diferenciálnej geometrii. Je to zovšeobecnenie kartézskeho priestoru \mathbb{R}^n (resp. otvorenej oblasti v \mathbb{R}^n) na objekt, ktorý vyzerá (len) *lokálne* ako \mathbb{R}^n , ale jeho globálna štruktúra môže byť oveľa komplikovanejšia. Vždy sa však dá predstaviť ako celok zlepený z *niekoľkých* kúskov homeomorfných \mathbb{R}^n ; číslo n , ktoré je rovnaké pre všetky kúsky, sa volá rozmer variety. Technická realizácia týchto myšlienok je založená na pojmoch *mapa* (lokálne súradnice) a *atlas* pozostávajúci z niekoľkých máp. Kartézsky súčin $M \times N$ dvoch variet je nová varieta, vytvorená z pôvodných variet M a N . Ľubovoľná varieta sa dá realizovať ako veľmi slušne uložená plocha v dostatočne rozmernom *kartézskom* priestore.

Zhrnutie 2. kapitoly

V každom bode x n -rozmernej variety M existuje kanonicky istý n -rozmerný lineárny priestor $T_x M$, dotykový (tangenciálny) priestor v bode x . Jeho elementy sa volajú vektory v bode x . Existuje viacero navzájom ekvivalentných definícií tohoto pojmu, ktoré sú výhodné v rôznych kontextoch. Vektorové *pole* na variete M je hladké priradenie vektora každému bodu $x \in M$. Integrálna krivka vektorového poľa je taká krivka, ktorá v každom bode ide tak, ako jej diktuje vektor poľa v tomto bode. Štandardné konštrukcie multilineárnej algebry (konštrukcia tenzorov typu $\binom{p}{q}$ pre daný vektorový priestor L) vedú k pojmu *tenzorového poľa* typu $\binom{p}{q}$ na variete. Špeciálnymi prípadmi sú funkcie (typ $\binom{0}{0}$), vektorové a kovektorové polia (typ $\binom{1}{0}$ a $\binom{0}{1}$), polia bilineárnych foriem (typ $\binom{0}{2}$), v symetrickom nedegenerovanom prípade metrický tenzor) a lineárnych operátorov (typ $\binom{1}{1}$).

Zhrnutie 3. kapitoly

Každé (hladké) zobrazenie bodov variet $f : M \rightarrow N$ indukuje zobrazenie tenzorov na nich. Označuje sa f_* , ak prenáša tenzory v smere f (z M na N) a f^* , ak ich prenáša proti smeru f (z N na M). Pre difeomorfizmy sa dá zaviesť f_* aj f^* pre ľubovoľné tenzorové pole. Ak f nie je difeomorfizmus, môžu nastať problémy. Pre tenzorové polia typu $\binom{0}{p}$ existuje zobrazenie f^* vždy. Špeciálnym prípadom je indukovanie metrického tenzora na

M z riemannovskej variety (N, h) , čím sa získa riemannovská varieta (M, g) , $g = f^*h$. Najčastejšie ide o indukované metrického tenzora na podvariety M euklidovského priestoru $N = E^n$ (alebo všeobecnejšie $E^{r,s}$), na ktorom existuje kanonický metrický tenzor $h = \eta$.

Zhrnutie 4. kapitoly

Eubovonné vektorové pole V na M indukuje zobrazenie $\Phi_t : M \rightarrow M$, pri ktorom sa bod x posunie o parameter t po integrálnej krivke štartujúcej v x . Hovorí sa mu tok generovaný poľom V , alebo vzhľadom na skladáciu vlastnosť $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$ aj jednoparametrická grupa transformácií. Zobrazenie Φ_t variety M na seba indukuje v zmysle 3. kapitoly zobrazenie tenzorových polí Φ_t^* , ktoré generuje *lieovský prenos* tenzorov (pozdĺž integrálnych kriviek poľa V). Mierou citlivosti (nekonštantnosti) tenzorového poľa A voči lieovskému prenosu je *Lieova derivácia* $\mathcal{L}_V A := \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \Phi_t^* A$. Dvomi vektorovými poľami V, W sa dá priradiť tretie, ich komutátor $[V, W]$ (ktorý je zároveň totožný s $\mathcal{L}_V W$). Dve polia komutujú práve vtedy, keď komutujú im zodpovedajúce toky; nekomutovanie vektorových polí takto vedie na javy anholonómie (závislosti od cesty). Killingov vektor je vektorové pole, v smere ktorého je lieovský konštantný metrický tenzor. Tok Killingovho vektora je izometriou riemannovskej variety (M, g) , t.j. zobrazením M na seba, pri ktorom sa zachovávajú všetky dĺžky a uhly. Ak sa zachovávajú len uhly, ide o konformné transformácie a generujú ich konformné Killingove vektory.

Zhrnutie 5. kapitoly

V kontexte výpočtu objemov rovnobežnostenov (a tým aj v teórii integrovania, kde sa funkčné hodnoty násobia objemami *infinitesimalných* rovnobežnostenov) sa ukáže mimoriadny význam úplne antisymetrických čisto kovariantných tenzorov, ktorým sa hovorí formy. Celá táto kapitola študuje formy na úrovni lineárnej algebry. Okrem všeobecných vlastností, ktoré platia pre všetky tenzory, sú v hre aj dôležité špecifiká. Formy majú prirodzené \mathbb{Z} -graduovanie, funguje na nich (graduovane komutatívny) vonkajší súčin \wedge (čím vzniká graduovaná *vonkajšia* = Grassmannova algebra) a vnútorný súčin i_v (ktorý je deriváciou stupňa -1 tejto algebry). Ak je k dispozícii aj metrický tenzor a orientácia (daná formou objemu), pristupuje Hodgeov operátor $*$. Prirodzenú interpretáciu tu nadobúda aj obyčajný determinant.

Zhrnutie 6. kapitoly

Študujú sa formy už ako polia na variete (*diferenciálne formy*). Okrem algebraických konštrukcií z 5. kapitoly pristupuje kľúčový pojem *vonkajšej derivácie*. Ide o deriváciu stupňa +1 Cartanovej algebry foriem na variete, ktorá je navyše nilpotentná ($dd = 0$). Jednoduchým (ale užitočným) zovšeobecnením doterajších foriem sú formy s hodnotami v ľubovoľnom vektorovom priestore (doterajšie mali hodnoty v \mathbb{R}).

Zhrnutie 7. kapitoly

Rozborom konkrétnych jednoduchých príkladov sa zisťuje, že na podintegrálne výrazy je užitočné nazerať ako na diferenciálne formy zo 6. kapitoly. Definuje sa základný pojem integrálu formy po reťazci, pričom sa predpokladá elementárna znalosť bežného Riemannovho viacnásobného integrálu. Formuluje sa Stokesova veta pre diferenciálne formy (dáva do súvisu integrál formy po hranici reťazca s integrálom *vonkajšej derivácie* tejto formy po samotnom reťazci). Diskutuje sa reinterpretácia integrálu po oblasti na orientovateľnej variete ako integrálu po reťazci (vrátane tvaru Stokesovej vety) a špecifikum integrovania po *riemannovskej* variete. Odhaľuje sa jednoduché správanie sa integrálu voči zobrazeniam variet.

Zhrnutie 8. kapitoly

Všeobecná Stokesova veta pre diferenciálne formy zo 7. kapitoly má mnohoraké klasické prejavy. Ukazuje, že je v nej skrytá napríklad Gaussova-Ostrogradského veta, Greenove identity, "obyčajná" Stokesova veta z vektorovej analýzy, niektoré fakty z teórie funkcií komplexnej premennej. Zavádza sa kodiferenciál δ (ako operátor združený k diferenciálu $d =$ vonkajšej derivácii) a samozdružená kombinácia $\Delta = -(d\delta + \delta d)$, Laplaceov-deRhamov operátor (zovšeobecnenie Laplaceovho operátora na funkciách na ľubovoľné formy). V časti o vektorovej analýze sa prichádza k záveru, že operácie gradient, rotácia a divergencia sú len zamaskovaná vonkajšia derivácia.

Zhrnutie 9. kapitoly

Forma sa volá uzavretá, ak má nulovú vonkajšiu deriváciu a exaktná, ak je vonkajšou deriváciou inej formy (svojho *potenciálu*). Vzhľadom na nilpotentnosť operátora d (t.j. platnosti $dd = 0$) je exaktná forma automaticky uzavretá (Poincarého lema). Ukazuje sa, že vo fyzike často využívané opačné tvrdenie (obrátenie Poincarého lemy) všeobecne neplatí, ale konštruktívne sa overí jeho platnosť na *stiahnutelných* varietách (resp. *lokálne*, t.j. v dostatočne malom okolí ľubovoľného bodu na ľubovoľnej variete). Jemnejší pohľad na vec umožňuje aparát teórie kohomológií, v tomto prípade ide konkrétne o kohomológie *deRhamovho* komplexu.

Zhrnutie 10. kapitoly

Grupy vstupujú do hry vo fyzike aj v matematike ako grupy *symetrie* čohosi, t.j. (v matematickej reči) ako grupy *automorfizmov* rôznych štruktúr. Explicitne sa vyšetrujú štruktúry, ktoré vedú na bežné klasické grupy (všeobecnú lineárnu, ortogonálnu, symplektickú, unitárnu,...). Spojením algebraického pojmu grupa a diferenciálno-topologického pojmu (analytická) varieta vzniká *Lieova grupa*. Vyššie spomínané grupy (aj iné) sú príklady Lieových grúp.

Zhrnutie 11. kapitoly

Efektívnym nástrojom na štúdium pomerne zložitých objektov, akými sú Lieove grupy, je využitie ich bohatej diferenciálnej geometrie. Tá je dôsledkom kompatibility štruktúry grupy a variety. Pomocou *ľavo invariantných* vektorových polí sa dá Lieovej grupe kanonicky priradiť jej *Lieova algebra*, čo je objekt nepomerne jednoduchší, ako samotná grupa (je to konečnorozmerný lineárny priestor), napriek tomu však kóduje podstatnú časť informácie o grupe. Študuje sa dôležité exponenciálne zobrazenie z algebry do grupy.

Zhrnutie 12. kapitoly

Lieova grupa dáva o sebe často vedieť cez svoju *reprezentáciu*, t.j. existuje homomorfizmus tejto grupy do grupy obrátiteľných lineárnych operátorov v nejakom vektorovom priestore a v danom kontexte vidíme len jej homomorfny obraz. Reprezentácia grupy automaticky indukuje aj istú (odvodenú)

reprezentáciu jej Lieovej *algebry*, čo je všeobecne homomorfizmus Lieovej algebry do Lieovej algebry (všetkých) lineárnych operátorov (vo fixnom lineárnom priestore). Ak daná reprezentácia pripúšťa nejaký netriviálny invariantný podpriestor, volá sa *reducibilná*, lebo sa dá redukovať na (menšiu) reprezentáciu v tomto podpriestore. *Ireducibilné* sa takto zmenšiť nedajú. Kritériám ireducibility sa venuje Schurova lema. Ak k danému podpriestoru existuje aj invariantný doplnok, reprezentácia je ekvivalentná priamemu súčtu dvoch menších. Takýto doplnok sa dá dostať napríklad ako *ortogonálny* doplnok voči *invariantnému* skalárnemu súčinu (ak existuje; na kompaktných grupách existuje vždy a ukazuje sa, ako sa dá získať). S reprezentáciami sa dajú robiť isté konštrukcie, napríklad priamy súčet a súčin; kombináciou s ohraničením na invariantné podpriestory vo výsledku sa dá často získať spústa reprezentácií z malej zásoby na začiatku (niekedy aj všetky z jednej). Invariantné tenzory a s nimi spojené splietajúce operátory umožňujú "meniť typ" veličín, priradiť vektorom, na ktoré pôsobí grupa cez reprezentáciu ρ_1 vektory, na ktoré pôsobí cez ρ_2 . Každá reprezentácia Lieovej algebry indukuje istý komplex; trochu sa venujeme jeho kohomológiám.

Zhrnutie 13. kapitoly

Osobitne dôležitým prípadom pôsobení grúp sú pre diferenciálnu geometriu ich pôsobenia na varietách. Často je na týchto varietách dodatočná štruktúra, ktorú pritom zachovávajú (napríklad akcie izometriami na riemannovských varietách, alebo symplektické akcie na symplektických varietách, pozri paragraf 14.5). Pôsobenie Lieovej grupy dáva na infinitezimálnej úrovni pôsobenie svojej Lieovej algebry, s ktorou sú úzko spojené *fundamentálne* (vektorové) *polia*. Pôsobenie na bodoch variety štandardne (postupmi z paragrafu (3.1)) indukuje pôsobenie na funkciách na variete (a všeobecnejšie na tenzorových poliach), čím sa získava dôležitá konštrukcia (∞ -rozmerných) reprezentácií grupy a jej algebry (tenzorové polia, špeciálne aj funkcie, tvoria lineárny priestor). Ohraničením na invariantné podpriestory sa z nich často dajú vytiahnuť aj konečnorozmerné reprezentácie. Vydelenie G -invariantného podpriestoru funkcií (tenzorových polí) býva častým postupom pri riešení diferenciálnych rovníc (ansatz s istým typom symetrie).

Zhrnutie 14. kapitoly

Z vhodného prepisu Hamiltonových kanonických rovníc sa odhaľuje, že

za týmito rovnicami je skrytá elegantná geometrická štruktúra. Jej jadrom je uzavretá nede degenerovaná 2-forma ω na fázovom priestore, *symplektická* forma. Tá umožňuje dvíhať a spúšťať indexy, podobne, ako sa to robí pomocou metrického tenzora. Vektorové pole, ktoré je analógom gradientu v riemannovskom prípade (vzniká teda dvihnutím indexu na gradiente funkcie f ako kovektorovom poli), sa tu volá *hamiltonovské* pole generované funkciou f . Zistí sa, že Hamiltonove rovnice sú vlastne rovnice pre integrálne krivky hamiltonovského poľa generovaného funkciou H , *hamiltoniánom* sústavy. Tak sa prichádza k pojmu hamiltonovská *sústava* (M, ω, H) . Vektorové polia, ktoré generujú automorfizmy hamiltonovskej sústavy (zachovávajú teda symplektickú formu a hamiltonián) sa volajú Cartanove symetrie a ich isté zjemenie *exaktné* Cartanove symetrie. Ukazuje sa, že existuje vzájomne jednoznačná korešpondencia medzi exaktnými Cartanovými symetriami a zachovávajúcimi sa veličinami. Do väčších detailov v tomto smere idú časti o momentovom zobrazení a symplektickej redukcii. Bohatou triedou symplektických variet sú orbity koadjungovanej akcie (čo je pôsobenie G na duáli \mathcal{G}^* svojej vlastnej Lieovej algebry \mathcal{G}), na ktorých existuje kanonická symplektická štruktúra.

Zhrnutie 15. kapitoly

Vo viacerých aplikáciách (napríklad pri výpočte zrýchlenia hmotného bodu v mechanike) sa efektívne robia lineárne kombinácie (pri zrýchlení konkrétne odčítanie) vektorov (alebo všeobecnejšie tenzorov) v rôznych bodoch. To sa na "prázdnej" variete nedá. Štruktúra, ktorá to legalizuje, je (lineárna) *konexia* ∇ na M . Umožňuje prenášať vektory po danej ceste (od ktorej v princípe závisí) a tým aj uskutočniť vyššie spomínané porovnanie (porovnáva sa vektor v x s vektorom, ktorý sa z y *prenesie do* x). Tento prenos sa *podľa definície* volá *paralelný* (v zmysle konexie ∇). Najjednoduchšie sa technicky zavádza postulovaním vlastností s ním súvisiacej *kovariantnej derivácie*. Konexia umožňuje zaviesť pojem rovnej čiary (geodetiky) na (M, ∇) . Lineárnej konexii sú priradené dve tenzorové polia, tenzor torzie a krivosti. Ukazuje sa, že podmienka kompatibility s metrikou (zachovanie skalárnych súčínov pri paralelnom prenose) a nulovosť torzie vedú na istú jednoznačnú konexiu (RLC konexia). Tenzor krivosti kóduje, či paralelný prenos (o infinitezimálne vzdialenosti) naozaj závisí od cesty; prejavuje sa aj v správaní sa blízkych geodetík - spôsobuje ich odklon (Jacobiho rovnica). Nenulový tenzor torzie signalizuje neuzavretie geodetického rovnobežníka. Efektívnym nástrojom na prácu s konexiou je aparát diferenciálnych foriem. Základné objekty teórie sa zakódujú do foriem a vzťahy medzi nimi sú dané Cartanovými štruktúrnymi rovnicami.

Zhrnutie 16. kapitoly

(Štvor)tenzorový zápis Maxwellových rovníc v Minkowského priestor(očas)e odhaľuje, že tenzory, ktoré sa v nich objavujú, sú veľmi špeciálne - ide o *diferenciálne formy*. Preto najprirodzenejším jazykom na štvorrozmernú formuláciu elektrodynamiky je jazyk diferenciálnych foriem. Formy v Minkowského priestor(očas)e majú (ako dôsledok delenia priestoročasu na "čas" a "priestor") špeciálnu štruktúru: prirodzene vzniká ich vyjadrenie pomocou dvoch *priestorových* foriem. Takéto vyjadrenie foriem (a operácií na nich) je efektívnym mostom medzi štvorrozmernou a (historicky staršou) trojrozmernou formuláciou elektrodynamiky. Formy sú užitočné nielen v elektrodynamike, ale v teórii poľa všeobecne. Jednoducho sa cez ne zapisujú *účinkové integrály* (keďže podintegrálne výrazy sú vždy formy) a rovnako jednoducho sa počítajú aj ich extrémny, ktoré dávajú pohybové rovnice (prirodzene sa v nich objavuje kodiferenciál). S priestoročasovými symetriami úzko súvisí *tenzor energie-hybnosti* poľa, ktorý vzniká variáciou účinku podľa metrického tenzora. Tento tenzor sa objavuje (ako zdroj) aj v Einsteinových rovniciach gravitačného poľa. Skúma sa ich variačná formulácia, porovnáva sa Hilbertov účinok, kde sa varíruje voči metrickému tenzoru, s Cartanovým, ktorý je funkcionálom korepérneho ("tetrádneho") poľa a foriem konexie. V nelineárnom sigma-modeli hrá úlohu poľnej premennej zobrazenie dvoch riemannovských variet. Zobrazenia, ktoré extremalizujú prirodzene zavedený účinok (vedú na "minimálne plochy") sa volajú harmonické. Takýmito zobrazeniami sa opisujú mydlové bubliny, ale aj svetoplochy v teórii strún. Variáciou voči jednému z metrických tenzorov sa dá prejsť od "kvadratického" účinku k "odmocninovému" (čo má praktický význam v opačnom smere).

Zhrnutie 17. kapitoly

S každou varietou M môžeme kanonicky spojiť ďalšie dve variety dvojnásobného rozmeru, TM a T^*M . Hrajú dôležitú úlohu ako ihriská klasickej mechaniky (lagranžovskej a hamiltonovskej). Z konštrukcie zadarmo dostávajú do vienka zaujímavú geometrickú štruktúru (aj keď samotná varieta M je "prázdna"). Sú totálnymi priestormi vektorových fibrácií, nesú (rôzne) kanonické tenzorové polia (napríklad T^*M symplektickú formu), viaceré objekty sa dajú z M dvíhať do totálnych priestorov. V ďalšej kapitole sa na nich skúma mechanika, táto obsahuje potrebnú prípravu.

Zhrnutie 18. kapitoly

Ukazuje sa, ako sa formuluje klasická mechanika na TM a T^*M . Oba prípady sú z geometrického hľadiska (v nedegenerovanom prípade) úplne rovnocenné: ide o štandardnú symplektickú dynamiku, t.j. pohyb po integrálnych krivkách hamiltonovského (dynamického) poľa. Na T^*M máme kanonickú symplektickú štruktúru, takže fixovanie funkcie H už dáva priamo dynamiku. Na TM je to trochu zamaskované; kanonickým poľom je isté tenzorové pole typu $\binom{1}{1}$ a symplektická štruktúra vzniká až jeho kombináciou s (nedegenerovaným) lagranžiánom (ako funkciou na TM). Projekciou tejto symplektickej dynamiky na bázu M vznikajú štandardné Lagrangeove rovnice (táto projekcia pridá jeden rád, takže sú 2.rádu), zatiaľ čo Hamiltonove rovnice operujú priamo v totálnom priestore T^*M a (ako každé rovnice pre integrálne krivky) sú len 1.rádu. Pomocou lagranžiánu sa konštruuje Legendreovo zobrazenie $TM \rightarrow T^*M$, ktoré dáva tieto dve dynamiky do súvisu.

Zhrnutie 19. kapitoly

Cieľom tejto kapitoly je preformulovať už známe fakty z teórie lineárnej konexie (15. kapitola) do nového jazyka, v ktorom sa (v ďalšej kapitole) obzvlášť jasne odhalí možnosť istého ďalekosiahleho zovšeobecnenia. Nový opis sa odohráva na novom ihrisku, variete LM , ktorá sa dá kanonicky priradiť variete M . Jej bodmi sú všemožné repéry vo všemožných bodoch na M . Zisťuje sa, že už bez konexie na M je v hre bohatá štruktúra: varieta LM je totálnym priestorom hlavnej $GL(n, \mathbb{R})$ -fibrácie s bázou M . Konexia na M pridáva na LM ďalšiu štruktúru, $GL(n, \mathbb{R})$ -invariantnú horizontálnu distribúciu. Pomocou nej sa dá operácia paralelného prenosu repéru po krivke γ na M preformulovať cez konštrukciu horizontálneho zdvihu γ^h krivky γ . Varieta LM dáva aj zaujímavú možnosť technického opisu širokej triedy geometrických objektov na M (špeciálne tenzorových polí, všeobecnejšie polí typu ρ) ako ekvariantných funkcií Φ na LM a tiež opisu ich paralelného prenosu a kovariantnej derivácie (tá sa zmení na obyčajnú smerovú deriváciu funkcie Φ).

Zhrnutie 20. kapitoly

Preklad pojmov súvisiacich s *lineárnou* konexiou do reči fibrácie repérov,

ktorý sa udial v 19.kapitole, odhaľuje možnosť zovšeobecnenia. Namiesto $\pi : LM \rightarrow M$ sa uvažuje $\pi : P \rightarrow M$, hlavná fibrácia s grupou G . Konexiou v tejto fibrácii sa nazve horizontálna distribúcia v totálnom priestore P , ktorá je invariantná voči pôsobeniu grupy G . Technicky sa opisuje formou konexie ω , čo je istá 1-forma s hodnotami v Lieovej algebre \mathcal{G} grupy G . Analógmi repérov sú body variety P a ich paralelný prenos sa stotožní s horizontálnym zdvihom krivky z bázy, po ktorej sa robí prenos. (Lokálna) závislosť tohoto paralelného prenosu od cesty sa dá jednoducho vyjadriť v termínoch integrovateľnosti horizontálnej distribúcie a ako miera tejto integrovateľnosti vstúpi do hry (cez Frobeniovo kritérium) pojem 2-formy krivosti Ω (má tiež hodnoty v \mathcal{G}). Ako formálny nástroj na výpočet formy krivosti sa zavádza vonkajšia kovariantná derivácia D ; pomocou nej dostávame vyjadrenie $\Omega = D\omega$. Ak je na M definovaná nejaká štruktúra, dá sa pomocou nej často zostrojiť istá podfibrácia hlavnej fibrácie, na ktorej pôsobí len podgrupa pôvodnej grupy; hovorí sa o ohraňujúcej štruktúrnej podgrupy. Napríklad metrickému tenzoru na M zodpovedá fibrácia ortonormovaných repérov (podfibrácia fibrácie repérov). Za istých podmienok sa na podfibráciu dedí aj konexia; naopak konexia na podfibrácii indukuje konexiu na celej fibrácii, ktorá je špeciálna v tom, že rešpektuje štruktúru, ktorá súvisí s podfibráciou.

Zhrnutie 21. kapitoly

Konexie v hlavnej G -fibrácii sa dávajú do súvisu s kalibračnými poľami, ktoré sú známe z fyziky. Najprv sa opisuje štandardný "fyzikálny" prístup, ktorý spočíva v zlokálnení symetrie účinku, ktorý už je "globálne" invariantný. Toto zlokálnenie pridáva k teórii ďalšie polia s konkrétnymi transformačnými pravidlami a konkrétnou interakciou s pôvodnými poľami. Ukáže sa, že tieto polia sa dajú interpretovať aj z pohľadu teórie konexií. Konkrétne sa nahliadne, že fixovanie kalibrácie je dané výberom lokálneho rezu σ hlavnej fibrácie, kalibračné potenciály (v tejto kalibrácii) sa získavajú stiahnutím formy konexie na bázu (pomocou rezu), kalibračné transformácie súvisia so zmenou rezu, intenzita kalibračného poľa sa získava stiahnutím formy krivosti a látkové polia stiahnutím ekvivalentnej funkcie na P . Odvodí sa rovnice paralelného prenosu ľubovoľnej veličiny typu ρ v kalibrácii σ . Zavedie sa pojem asociovanej vektorovej fibrácie (ktorá vznikne z hlavnej fibrácie nahradením pôvodného vlákna reprezentačným priestorom grupy G). Ukazuje sa, akú štruktúru majú účinkové integrály, ktoré sú lokálne kalibračne invariantné a ako sa z nich odvodí pohybové rovnice (sú zovšeobecnením Maxwellových rovníc z elektrodynamiky, ktorá je kalibračnou teóriou s grupou $U(1)$). Zoznamujeme sa s Nötherovej vetou, ktorá dáva do súvisu symetrie účinkových integrálov so zákonmi zachovania. Táto veta vrhá nové

svetlo aj na staršie výsledky v tomto smere, spojenie zákonov zachovania s tenzorom energie-hybnosti v teórii poľa a s exaktnými Cartanovými symetriami v hamiltonovskej mechanike.

Zhrnutie 22. kapitoly

Špeciálne ortogonálne grupy $SO(p, q)$ majú univerzálne dvojlistové nakrývajúce grupy, ktoré sa volajú spinové grupy a označujú sa $\text{Spin}(p, q)$. Celá ich teória sa systematicky buduje pomocou Cliffordových algebier. Konštruuje sa izomorfizmus týchto algebier na vhodné maticové algebry (ich verná reprezentácia) a pomocou neho sa zavádza pojem spinora ako vektora reprezentačného priestoru Cliffordovej algebry. Spinové grupy sú podmnožiny v Cliffordovej algebry a preto ohraničenie spomínanej vernej reprezentácie algebry je aj reprezentáciou spinovej grupy. Tým na spinoroch pôsobí aj spinová grupa (a dvojznačne aj ortogonálna grupa). Táto jej reprezentácia sa volá spinorová. Pre niektoré špeciálne hodnoty (p, q) existujú špeciálne typy spinorov (weyllovské, majoranovské, ...). Spinová štruktúra na M je hlavná fibrácia nad M (spinová fibrácia), ktorá dvojlistovo nakrýva fibráciu ortonormovaných repérov a vo vláknach ktorej pôsobí spinová grupa. Spinová štruktúra sa nedá zaviesť na každej variete. Ekvivariantné funkcie typu ρ na totálnom priestore spinovej fibrácie (a tiež ich stiahnutia na bázu pomocou rezu), kde ρ je spinorová reprezentácia, sa volajú spinorové polia na M . Poľu 1-foriem typu ρ zodpovedá Raritovo-Schwingerovo pole. Na spinorové polia pôsobí špeciálny operátor prvého rádu, ktorý sa volá Diracov operátor. Vznikol vo fyzike v kvantovej teórii relativistického elektrónu - vyskytuje sa v Diracovej rovnici.

LITERATÚRA

- [1] В.И.Арнольд: Математические методы классической механики, Москва, Наука, 1979; tiež Едиториал УРСС 1999 (anglický preklad V.I.Arnold: Mathematical methods of classical mechanics, New York, Springer-Verlag, 1978)
- [2] I.M.Benn,R.W.Tucker: An Introduction to Spinors and Geometry with Applications in Physics, Bristol, Adam Hilger 1989
- [3] G.Birkhoff, S.Mac Lane: Prehľad modernej algebry, Bratislava, Alfa, 1979 (A Survey of Modern Algebra, The Mamillan Company, Inc., New York 1965)
- [4] M.Crampin, F.A.E.Pirani: Applicable Differential Geometry, Cambridge University Press, 1987
- [5] Б.А.Дубровин,С.П.Новиков,А.Т.Фоменко: Современная геометрия, Москва, Наука 1979 (anglický preklad B.A.Dubrovin,S.P.Novikov, A.T.Fomenko: Modern geometry - methods and applications, New York, Springer-Verlag, 1984, 1985)
- [6] H.Flanders: Differential Forms (with Applications to Physical Sciences), New York, Academic Press 1963
- [7] J.Garaj: Základy vektorového počtu, Bratislava, SVTL 1963
- [8] И.М.Гельфанд: Лекции по линейной алгебре, Москва, Наука 1948, 1971 (anglický preklad I.M.Gelfand: Lectures on linear algebra, New York, Interscience Publishers, 1961)
- [9] M.Göckeler,T.Schücker: Differential Geometry, Gauge Theories and Gravity, Cambridge University Press, 1987
- [10] М.Неjný,І.Кулич,Ј.Тварожек: Čo je topológia, Bratislava, Alfa, 1983
- [11] S.Chandrasekhar: The Mathematical Theory of Black Holes, New York, Clarendon 1983 (ruský preklad Moskva, Mir, 1986)
- [12] Ch.J.Isham: Modern Differential Geometry for Physicists, Singapore, World Scientific, 1989
- [13] J.Korbaš: Lineárna algebra a geometria 1., Vydavateľstvo UK, 2003
- [14] А.И.Кострикин, Ю.И.Манин: Линейная алгебра и геометрия, Москва, Наука, 1986
- [15] A.P.Lightman, W.H.Press, R.H.Price, S.A.Teukolsky: Problem Book in Relativity and Gravitation, Princeton University Press, 1975 (ruský preklad Moskva, Mir, 1979)
- [16] M.Medved: Dynamické systémy, Bratislava, Vydavateľstvo UK, 2000
- [17] Ch.W.Misner,K.S.Thorne,J.A.Wheeler: Gravitation, San Francisco, Freeman, 1973 (ruský preklad Moskva, Mir, 1977)
- [18] А.С.Мищенко,Ю.П.Соловев, А.Т.Фоменко: Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии, Москва, Издательство Московского Университета 1981

- [19] Ch.Nash,S.Sen: Topology and Geometry for Physicists, London, Academic Press, 1983 (1992)
- [20] В.А.Рубаков: Классические калибровочные поля, Москва, Едиториал УРСС, 1999; (anglický preklad V.A.Rubakov: Classical theory of gauge fields, Princeton, Princeton University Press, 2002)
- [21] В.Ф.Шutz: Geometrical Methods of Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1982 (ruský preklad Moskva, Mir 1984)
- [22] А.С.Шварц: Квантовая теория поля и топология, Москва, Наука 1989; (anglický preklad A.S.Schwarz: Quantum field theory and topology, Berlin, Springer Verlag, 1993)
- [23] S.Sternberg: Group Theory and Physics, Cambridge University Press, 1995
- [24] N.Straumann: General Relativity and Relativistic Astrophysics, Berlin, Springer-Verlag, 1984 (1991)
- [25] W.Thirring: Lehrbuch der Mathematischen Physik; 2 - Klassische Feldtheorie, Wien, Springer-Verlag 1978
- [26] A.Trautman: Differential Geometry for Physicists, Napoli, Bibliopolis 1984
- [27] A.Trautman: Fiber Bundles, Gauge Fields, and Gravitation, v zborníku A.Held: General relativity and Gravitation, str.287-308, New York, Plenum Press, 1980
- [28] N.M.J.Woodhouse: Geometric Quantization, Oxford, Oxford University Press, 1980

REGISTER

A

absolútna derivácia 390, 393, 398
 adaptovaná báza 57
 -á na podpriestor W 552
 -é súradnice 23
 adiabatický proces 558
 adiabata 558
 adjungovaný 136
 afinná konexia 604, 648
 -á grupa 223, 228, 234, 237, 240
 -é transformácie 223
 akcia = pôsobenie 304
 - efektívna 333
 - tranzitívna 306, 547, 573
 algebraicky uzavreté pole 269
 algebra
 - asociatívna 39, 51, 698
 - funkcií na variete M 39
 - horizontálnych foriem na P 588
 - kvaterniónov 662
 - Lieova 87, 96, 235, 700
 - pozorovateľných 348
 \mathcal{A} -modul 701
 Ampérov zákon 459
 anihilátor 58, 222, 383, 552
 anihilovať 552
 ansatz 99
 antikomutujúce premenné 124
 antisamoduálna forma 200
 antisymetrická časť 108
 atlas 22
 automorfizmus 217, 349, 699, 700
 - grupy 274
 - Lieovej algebry 275
 autonómna sústava 45
 autoparalelná veličina 623, 627
 -é pole 390, 394, 398, 565
 azimut 75, 443

B

báza fibrácie 504
 Bettiho čísla 214
 Bianchiho identita 433, 592, 594, 620
 biharmonické súradnice 74
 bilinéarne spárenie 165, 697
 bivektorové pole 343
 bodkované indexy 323
 bodovosť konštrukcie 59
 boost 98, 322

C

Cartanova algebra 139
 -ova 1-forma 523
 -ova 2-forma 523
 -ova symetria 362
 - - exaktná 362, 529
 -ove štruktúrne rovnice 428, 592, 619
 -ove vzorce 146, 298
 -ov účinok 485
 Casimirove operátory 280, 327
 Cauchyho veta 201
 Cauchyho-Riemannove vzťahy 101, 200
 celkový moment hybnosti 333
 centrálna pole 539
 Clebschov-Gordanov rad 293
 Cliffordova algebra 135, 658, 659
 -ov súčin 659
 cyklické súradnice 531
 cyklus 212
 C^k -atlas 22
 C^k -príbuzná mapa 22
 C^k -varietá 22
 C^k -štruktúra 22

Č

časový vývoj stavov 350
 čistý stav 348, 376

D

D’Alambertov operátor 453
 Darbouxova veta 352
 deformačná retrakcia 215
 degenerovaný rovnobežnosten 106
 deRhamov komplex 213
 derivácia algebry funkcií 42
 - Cartan. alg. stupňa +1 144, 588
 - tenzorovej algebry 85
 - asociatívnej algebry 699
 - Lieovej algebry 302, 700
 - stupňa k 703
 determinant matice 122
 determinant zobrazenia 129
 difeomorfizmus 27, 218
 difeomorfné variety 27
 diferenciálne formy 105
 - typu ρ 336
 diferenciál (zobrazenia) 68
 diferenciál (v komplexe) 212
 Diracov operátor 657, 686
 -ova reprezentácia 674
 -ova rovnica 657
 -ovské spinory 674
 Dirichletova úloha 189, 190
 diskrétna topológia 18
 divergencia vekt. poľa 178, 193
 dĺžka krivky 64, 65, 94
 dotyková fibrácia 503, 506
 -ový funktor 508, 513
 -ový priestor 38
 -ový vektor 44
 druhá veta termodynamická 558
 dráha (cesta) 65
 duálna báza 47
 -ny priestor 47
 dvojhladinová sústava 376
 dvojlistové nakrytie 315, 669
 dvojznačná reprezentácia 324
 dvíhanie indexov 55

E

efektívna akcia 333
 - potenciálna energia 539

Einsteinova-Cartanova teória 483
 Einsteinove rovnice 479
 -ove rovnice vo vákuu 482
 -ove 1-formy 485
 -ov tenzor 479
 ekvivalentné fibrácie 505, 574
 -né funkcie 587
 -né reprezentácie 268
 ekvivariantný izomorfizmus 268
 -ný difeomorfizmus 574
 -né zobr. 267, 308, 311, 367, 567, 577
 endomorfizmus 246
 energia 524
 energia poľa 471
 entropia 559
 euklidovská grupa 531
 -ské transformácie 97, 330
 -ský priestor 97
 -ský p -simplex 161
 Eulerova-Lagrangeova 1-forma 417, 466
 Eulerovo-Lagrangeovo pole 524
 Eulerov-Lagrangeov výraz 525
 Eulerove uhly 256
 exaktná forma 203
 -ná symplektická forma 345
 -né Cartanove symetrie 362, 529
 -né prvky 212
 exponenciálna grupa 255
 -ne zobrazenie 241, 413

F

faktoralgebra 116, 699, 700
 faktorpriestor 214
 Faradayov indukčný zákon 458
 fázový priestor 348, 354, 531
 - objem 359
 - tok 350
 fibrovaná varieta 504
 fibrované zobrazenie 505, 603
 fibrácia 504
 -cia hlavná 572
 -cia repérov 546
 -cia afinných repérov 648
 -cia ortonormovaných repérov 600

fíber 504
 $\mathcal{F}(M)$ -linearita 59
 formy (diferenciálne) 105
 forma konexie 424, 549
 - krivosti 425, 590
 - objemu 125, 149, 219, 359
 - typu ρ 336
 - typu Ad 584
 - s hodnotami vo V 153
 - torzie 425
 1-forma konexie 583
 - práce 558
 - tepla 558
 - prúdu 456
 2-formy torzie 650
 2-forma elmag. poľa 455
 3-formy prúdu 456
 Foucaultovo kyvadlo 405
 -ov uhol 424, 437
 Fourierov rozklad 337
 f -príbuzné 69, 80
 Frobeniovo kritérium 554
 fundamentálna reprezentácia 323
 -ne pole pôsobenia R_g 327
 funkcia 36
 funkcionál dĺžky 417

G

Gaussov integrál 124
 γ -matice 672, 676
 -ova krivosť 430
 -ova veta 180, 195
 -ov zákon 459
 generátor algebry 115
 - modulu 43
 - reprezentácie 260
 - pôsobenia (akcie) 327
 geodetické okolie 412
 -á deviácia 440
 geodetika 388, 534
 G -invariantný lagranžián 530
 globalizovať 61
 globálna trivializácia 505, 574
 -ne hamiltonovská 366, 373, 530

-na kalibračná transformácia 612, 616
 gradient 60, 65, 193
 graduovaná algebra 52, 114, 703
 -ná Lieova algebra 141, 703
 -ne komutatívna 109, 140
 -ný komutátor 141
 graf zobrazenia 28
 gravitíno 685
 Greenove identity 189
 -va veta 178

H

hamiltonián 344, 376
 Hamiltonove rovnice 46
 hamiltonovská sústava 354, 524
 -ské pole 343, 346, 524
 -ský tok 350
 harmonická funkcia 189, 200, 201, 492
 -ké zobrazenie 493
 Hausdorffov priestor 19
 Heisenbergov obraz 350
 hermitovský skalárny súčin 221
 Hilbertov účinok 480
 hladká distribúcia 551, 552
 -ká štruktúra 23
 -ká varieta 22
 -ká väzba 30
 -ké pôsobenie 305
 -ké vektorové pole 42
 -ké tenzorové pole 59
 hlavný automorfizmus 115
 -ná G -fibrácia 547, 572
 -ný homogénny priestor 311, 547, 573
 hmotnostný člen 464, 465
 Hodgeov operátor 130
 holomorfná funkcia 101, 200, 201
 holonomická grupa 424
 holonómia 424
 homeomorfizmus 18
 homogénna forma 114
 -e súradnice 24
 -y člen 51
 -y priestor 306, 310, 373, 573
 -y tenzor 99

homológia 212
 homotópia 206, 595
 homotopická nule 595
 -é cesty 595
 -é zobrazenia 206
 -ý operátor 206, 211
 homotétia 95
 Hopfova fibrácia 576, 578, 581, 678
 -vo zobrazenie 27
 horizontálna distribúcia 561
 -a forma 380, 588
 -a forma typu ρ 685
 -a krivka 565
 -y podpriestor 561, 581
 -y rez 597
 -y vektor 561, 583
 -y zdvih krivky 565, 586
 -y zdvih vektora 561, 585
 hranica 212
 hraničný operátor 161, 164, 213
 hustota lagranžianu 462
 hustota 173
 - skalárna 125, 151, 569
 - tenzorová 569
 hybnosť poľa 471
 hyperplocha 31

CH

charakteristický podpriestor 137
 chirálne spinory 674, 675
 Christoffelove symboly 393
 - 1. druhu 402

I

ideál 288, 347, 363, 382, 699, 700
 indexová gymnastika 55
 indukovaný metrický tenzor 73
 integrálna krivka 44
 -e invarianty Cartanove 358
 integrál prvého druhu 174
 - druhého druhu 174
 intenzita kalibr. poľa 613, 614, 631
 interakčný člen 462, 466
 invariantná forma 357

-é pole 84
 -ý lagranžian 530
 -ý podpriestor 266
 -ý skalárny súčin 263
 -ý tenzor 295
 inverzia 477
 ireducibilná reprezentácia 266
 izometria 21, 55, 94, 493, 644
 izotrópny 99

J

Jacobiho identita 349
 - rovnica 440
 jednoducho súvislá 315
 jednoparametrická podgrupa 238
 -á grupa transformácií 80

K

kalibračná grupa 608
 -á podmienka 207
 -á transformácia 461, 608, 616, 618
 -e invariantný 463, 630
 -é pole 608
 -ý potenciál 612, 614, 622
 kanonická hybnosť 531
 -á plochá konexia 597
 -á projekcia 27, 309, 500, 504
 -á 1-forma na G 237, 255, 276
 -á 1-forma na LM 649
 -á 1-forma na T^*M 518
 -é spárenie 62, 697
 -é súradnice 353, 501
 -á symplektická forma na T^*M 518
 -é transformácie 354
 -é vloženie 171
 kartézsky priestor 19
 -y súčin variet 24
 Kählerova-Atiyahova algebra 660
 Kählerove fermióny 688
 Killingova-Cartanova forma 278
 Killingove rovnice 95, 415
 -ove vektory 96, 329, 470, 534, 536
 kinetická energia 64, 533
 -ý člen 462, 464, 465

- kladná definitnosť 53
 Kleinova-Gordonova rovnica 464
 Kleinova fľaša 33
 koadjungované pôsobenie 367, 370
 -á reprezentácia 284
 kocyklus 212, 368
 kodiferenciál 185, 434, 629
 kodotyková fibrácia 503, 506
 -ý priestor 58
 koeficienty konexie 392
 - anholonómie 209, 436, 687
 koexaktnosť 210
 kohomologická grupa 214
 -á trieda 213
 -é kocykly 212
 kohomológia 212, 214
 -ie Lieovej algebry 300
 kohranica 212
 komomentové zobrazenie 370
 kompaktná Lieova grupa 246, 266
 -á Lieova algebra 283
 -á varieta 185
 kompatibilné štruktúry 224
 kompenzačné pole 613
 komplexná Lieova grupa 226
 komplexná varieta 25
 - reprezentácia 269
 komplex 212, 300
 komponenty poľa 41, 42
 -ty tenzora 50
 -ta súvislosti jednotky 254
 -tné formy 153
 -tné funkcie 332
 -tné polia 335
 kompozičný zákon 225
 komutatívna grupa 270
 komutátor 87, 700
 konexia na hlavnej G -fibrácii 581
 konečne generovaný 43
 konfiguračný priestor 75, 529
 konformne invariantná 133, 479
 -á transformácia 95, 478, 644
 -á trieda 495
 -é preškáľovanie metriky 132, 475
 -é Killingove vektory 100, 475
 -é Killingove rovnice 100
 kongruencia 46
 konjugácia 274, 305
 konjugovaná podgrupa 307
 kontaktná forma 542
 -á štruktúra 542
 kontragradientná reprezentácia 262
 kontrakcia 52, 292
 kontúr 170
 korepérne pole 92
 kotangenciálny priestor 58
 kouzavretá forma 200, 201, 210
 kovariantná derivácia 391, 612
 -á divergencia 434
 -ý gradient 396
 -ý funktor 508
 -ý kodiferenciál 632
 -ý tenzor 69
 -e konštantné pole 397, 444
 kovektor 47, 58
 krivka 36
 krivočiare súradnice 23
 krivosť skalárna 422
 - Gaussova 430
 k -rozmerná hladká distribúcia 551
 kvadratický Casimirov operátor 280
 kvaternióny 698
 kvázilineárna sústava 45
- L**
- Lagrangeova veta 310
 -e rovnice 410, 417, 522
 Lamého koeficienty 196
 Laplaceova rovnica 189
 Laplaceov-Beltramiho operátor 186, 434
 Laplaceov-deRhamov operátor 185
 látkové pole 614, 633
 Legendreovo zobrazenie 527
 lema o vyrovnaní 81
 Levi-Civitova konexia 402
 Levi-Civitov symbol 120
 Lieova algebra 87, 236, 700
 -a derivácia 78, 84

-a grupa 224, 226
 -a podgrupa 226
 -a zátvorka 87
 -a superalgebra 141, 703
 -sky konštantné 84
 -ský prenos 83
 lift (zdvih) 511
 lineárna konexia 391
 -e formy 47
 -e pole 601
 -y priestor 694
 -y funkcionál 39
 -y operátor 42, 83
 Liouvillova forma 359
 -a rovnica 376
 -a veta 359
 -o pole 533
 lokálna trivializácia 504
 -a kal. transformácia 610, 612, 616
 -e izometrické variety 99
 -e kalibračne invariantný 630
 -e Lorentzove transformácie 488
 -e súradnice 22
 -e súčinná štruktúra 504
 -e triviálne 505
 -y homeomorfizmus 315
 -y rez 506, 549
 -y tok 78
 Lorentzova grupa 218, 269, 319
 -a (štvor)sila 467
 -ská varieta 476
 loxodróma 75, 443

E

Ľavoinvariantné tenzorové pole 228
 -ý metrický tenzor 281
 Ľavá akcia (pôsobenie) 304, 701
 -á regulárna reprezentácia 326
 -á translácia 227, 329
 -á zvyšková trieda 309
 -ý G -priestor 304

M

magnetický náboj (monopól) 458

Majoranova reprezentácia 672
 malá grupa 307
 mapa 22
 matica hustoty 376
 maticová algebra 698
 - grupa 226
 Maurerova-Cartanova 1-forma 237
 Maurerove-Cartanove vzťahy 237
 maximálny C^k -atlas 22
 Maxwellov posuvný prúd 459
 metrická forma objemu 126
 - konexia 400
 -ý tenzor 53, 599
 minimálna interakcia (väzba) 614, 630
 Minkowského priestor 64, 448
 množina úrovne 31
 modul 43
 modulo 2 117
 momentové zobrazenie 370, 530
 moment hybnosti poľa 471
 morfizmus hlavných fibrácií 603
 - vektorových fibrácií 508
 - Cartanových algebier 140, 588
 - tenzorových algebier 72
 multilineárne 49
 mydlové bubliny 497
 Möbiov list (pásik) 148
 -ova transformácia 312

N

nabité častice 614
 náboj 271, 636
 nadplocha 31
 nakrytie 315
 nakrývajúci homomorfizmus 315
 neabelovská kalibračná grupa 633
 nebodkovaný spinor 323
 nedegenerovaná 2-forma 345
 -ý (= regulárny)lagranžian 523
 neholonómne repérne pole 92
 nehomogénna forma 114
 nelineárne pole 489, 601
 - realizácie 304
 -y sigma model 489

- neorientovateľná varieta 149
 - nepárne parametre 141
 - nepárny voči chiralite 692
 - nesingulárny lagranžian 523
 - nesúradnicové repérne pole 92
 - Neumannova okr. podmienka 190
 - Newtonov-Leibnizov vzorec 177
 - Nijenhuisov tenzor 525
 - nilpotentný 161, 164, 212, 300
 - n -listové nakrytie 315
 - normálna podgrupa 313
 - ne súradnice 242, 414
 - ová derivácia 190
 - Nötherovej veta 640
 - ské náboje 640
 - ské prúdy 640
 - nulové body 79
 - ý rez 574
- O**
- objem oblasti 172, 169, 496
 - podvariety 174
 - rovnobežnostena 105
 - obojsstranne invariantný integrál 246
 - -ý metrický tenzor 281
 - -á forma objemu 283
 - obojsstranný ideál 116
 - obrátenie Poincarého lemy 207
 - odvodená reprezentácia 262
 - ohraničenie fibrácie 599, 604
 - na podgrupu 259
 - reprezentácie 266
 - štruktúrnej grupy 599
 - formy 171
 - ohraničujúca 1-forma 552
 - Ω -divergencia 360
 - operátor dualizácie 130
 - krivosti 419
 - kvadrátu momentu hybnosti 281
 - paralelného prenosu 395, 398
 - spinu 333
 - orbita 306
 - orbitálny moment hybnosti 329
 - orientovaný atlas 149
- objem 106
 - eľná varieta 31, 149, 229, 564, 650
 - orientácia v L 119
 - ortogonálne matice 218
 - e súradnice 63
 - a grupa 219
 - a transformácia 668
 - y doplnok 267
 - ortonormovaná báza 54
 - otvorená množina 18
 - é pokrytie 22
- P**
- paralelizovateľná 217, 229, 564, 650
 - paralelný prenos 395, 398
 - e prenášaná veličina typu ρ 626
 - e prenášaný zovšeob. repér 587
 - parametrické vyjadrenie 31
 - parametrizácia 36
 - Pauliho matice 251, 296, 676
 - p -delta 120
 - per partes 178
 - pevné body 79
 - pfaffián 123
 - Pfaffove formy 558
 - plochá konexia 444, 492
 - podalgebra 699, 700
 - fibrácia 599
 - reprezentácia 266
 - varieta 28
 - podmienka integrovateľnosti 556
 - nestlačiteľnosti 180
 - Poincarého lema 203
 - transformácie 97
 - Poissonov tenzor 343
 - a rovnica 189, 190
 - e zátvorky 343
 - ské pôsobenie 370, 373, 378, 530
 - ská varieta 343
 - polarizačný vektor 376
 - polárny rozklad 321
 - pole posunutí 102
 - rovnice 2. rádu 522
 - rýchlostí 103, 180

- typu ρ 569
 - polopriamy súčin grúp 287
 - súčet Lieových algebier 288
 - poloprosté Lieove algebry 280
 - polylineárne zobrazenie 49
 - póly funkcie 202
 - pôsobí sprava, zľava 304
 - pôsobenie grupy 304
 - potenciál 203
 - na energia 65, 533, 535
 - ové silové pole 65
 - pozorovateľná 348
 - práca sily 208
 - pravá translácia 227, 329
 - á akcia (pôsobenie) 126, 304
 - á regulárna reprezentácia 326
 - ý G -priestor 304
 - pravoinv. forma objemu 265
 - predĺženie fibrácie 604, 678
 - preurčené rovnice 95
 - priamy súčet l. pr. 51, 222, 562, 694
 - asociatívnych algebier 699
 - Lieových algebier 285, 701
 - reprezentácií 289
 - priamy súčin grúp 284
 - reprezentácií 289
 - pridružená fibrácia 627
 - reprezentácia = Ad 275
 - priestorová oblasť 454
 - á forma 450
 - á Stokesova veta 454
 - á vonkajšia derivácia 451
 - ý Hodgeov operátor 452
 - ý kodiferenciál 453
 - ý Laplaceov-deRhamov oper. 453
 - priestoročas 64, 448, 479
 - priestorupodobná nadplocha 75
 - princíp ekvivalencie 476
 - prirodzený lagranžián 533
 - ý parameter 411
 - ý zdvih krivky 511, 543
 - voči difeomorf. 187, 468, 644
 - Procova rovnica 465
 - projektor 108, 272
 - projektovateľné pole 69, 244
 - projektívny priestor 24
 - prvá veta termodynamická 558
 - pseudometrický tenzor 53
 - euklidovský priestor 97
 - ortogonálna grupa 218
 - ortogonálna matica 218
 - sféra 74
 - riemannovská varieta 62
 - pull-back 67, 68, 70, 71
 - push-forward 68, 71
 - p-forma 107
 - p-forma na variete 139
 - p-refazec 161
 - p-refazec na variete 163
- R**
- rád (konečnej) grupy 228
 - rang bivektora 345
 - formy 136
 - lineárneho zobrazenia 57
 - 2-formy 345
 - tenzora 50
 - Raritovo-Schwingerovo pole 685
 - reducibilná reprezentácia 266
 - redukcia fibrácie 604
 - (symplektická) grupou G 381
 - ovaná hamil. sústava 382
 - ovaná symplektická varieta 381
 - ované pole 381
 - ovaný fázový priestor 381
 - regulárny lagranžián 523
 - relatívna invariantnosť 357
 - a rýchlosť 439
 - e zrýchlenie 439
 - reparametrizácia krivky 45, 65
 - začne invariantný 65, 497
 - reprezentácia grupy 259
 - Lieovej algebry 260
 - Cliffordovej algebry 672, 674
 - repérne pole 92
 - rez 555
 - rezíduum 202
 - Ricciho formy 479

- identita 433, 594, 620
 - koeficienty rotácie 435, 687
 - tenzor 422
 Riemannova konexia 402
 -ov tenzor (krivosti) 421
 -ovská geometria 62
 -ovská varieta 62
 ρ -invariantný skalárny súčin 263
 \mathbb{R} -linearita 59
 rotačné matice (Wignerove) 338
 rotácia (vektorového poľa) 193
 rovnica kontinuity 457
 -e paral. prenosu 395, 398, 623 627
 rovnomerný priamočiary pohyb 387
 rozklad jednotky 272
 - grupy 309
 rozložiteľná forma 136
 rozmer reprezentácie 259
 rozšírenie fibrácie 604
 -ný fázový priestor 540

S

samoduálna forma 200
 samointerakcia 633
 samozdružený operátor 186
 sférické funkcie 338
 Schrödingerov obraz 350
 Schurova lema 269, 270
 siločiary 44
 singulárny reťazec 213
 skalárna elektrodynamika 610
 -a hustota 125, 151, 569
 -a krivosť 422
 -e pole 464, 489, 492
 -y súčin 53, 133, 184
 -y potenciál 461
 smerová derivácia 39
 soldering 572
 spinorové indexy 684
 -á reprezentácia 319, 323, 672
 -é pole 489
 -é pole na báze 679
 spinory 319, 672
 spinová fibrácia 604, 677

-á konexia 435, 680, 687
 -á štruktúra 678
 splietajúci operátor 268, 292
 spojité zobrazenie 18
 spúšťanie indexov 55
 stabilizátor 307
 stabilný bod 306
 stacionárna podgrupa 307
 -e prúdenie (tečenie) 46, 180
 stavová veličina 203, 558
 stereografická projekcia 23
 stiahnuteľná varieta 205
 Stokesova veta 171, 195, 210
 stredná hodnota 175
 stredovanie cez grupu 265
 stupeň 114
 superalgebra 703
 -komutátor 141, 703
 -matematika 117
 súradnicová báza 41, 42, 60, 91
 -á krivka 38
 -é vyjadrenie 26, 36,
 súvislý priestor 253
 súčinná fibrácia 504, 555
 -á hlavná fibrácia 573
 svetočiara 466, 498
 -plocha 498
 Sylvestrova veta 53
 symetrizácia 111
 symetrická konexia 401
 symplektická forma 345
 -á grupa 219
 -á redukcia 536
 -á varieta 345, 524
 -é pole 346
 -é zobrazenie 350
 -ý ortogonálny doplnok 378
 -é pôsobenie (akcia) 365
 symplektomorfizmus 349, 350

Š

štandardná orientácia 147
 -á topológia v \mathbb{R}^n 20
 -é horizontálne polia 564

-á hladká štruktúra v \mathbb{R}^n 23
 -ý n -simplex v \mathbb{R}^n 162
 -ý (plochý) metr. tenzor v \mathbb{R}^n 62
 štrukt. konštanty 236, 690, 699, 701
 štvorpotenciál 460
 štvorsila 467
 štvorzrýchlenie 467

T

tabuľka násobenia 228
 tangenciálny priestor 38
 teleparalelizmus 444
 tenzor deformácie 102
 - energie hybnosti 469, 479, 643
 - kontrakcie 62
 - krivosti 421
 - napätia 103
 - rýchlosti deformácie 103
 - torzie 401
 tenzorová algebra 51
 -á fibrácia 628
 -á hustota 569
 -á operácia 52
 -é pole 58, 569
 -é pole typu ρ 336
 -ý súčin tenzorov 50
 -ý súčin priestorov 157, 695
 -ý súčin matíc 696
 -ý súčin algebier 699
 teória kohomológií 212
 - momentu hybnosti 280
 - strún 498
 termodynamika 557
 tetrádny formalizmus 92, 435
 -e pole 92, 434, 484, 687
 -ový postulát 435
 tok 46
 topologický priestor 18
 topológia 18
 torus 27, 33
 torzia 401, 441, 650
 totálny priestor 504
 tranz. pôsob. (akcia) 306, 547, 573
 triedy C^k 20

triviálna fibrácia 505, 574
 - topológia 18
 typické vlákno 504
 typu Ad 584

U

unimodulárne repéry 605
 unitárna reprezentácia 264
 - matica 221
 univerzálne nakrytie 669
 -a nakrývajúca grupa 315, 669
 uzavretá forma 203
 -á plocha 171
 -ý prvok 212
 $U(1)$ -náboj 271

Ú

úplne reducibilná 267
 úplný zdvih 514, 516, 529, 530, 533
 -ý paralelizmus 444, 596
 účinok 409

V

variácia potenciálu 461
 - počiatočných podmienok 438
 -čná derivácia 462
 varieta repérov 545
 - hladká 22
 väzby 75
 vektorová fibrácia 506, 574, 628
 -é pole 41, 465
 -ý súčin 195
 -ý potenciál 461
 vektor spinu 376
 veličina typu ρ 569, 587, 626
 vertikálna akcia 379, 547
 -y podpriestor 509, 548, 560, 581
 -e pole 379
 -a distribúcia 560
 -y endomorfizmus 518
 -y zdvih kovektora 514
 -y zdvih vektora 512
 -y zdvih tenzora 513
 -y vektor 510

veta o homomorfizme 314

- "o vnorení" 29

viacznačná reprezentácia 324

vielbeinové pole 92, 435, 497, 687

v involúcii 363

vlastná funkcia 339

-ná hodnota 339

-ná Lorentzova grupa 669

-ná ortochrónna Lor. grupa 319, 576

-ný čas 466

vlákno v bode x 504

vlnový operátor 453

vloženie 28, 73

vnorenie 28, 73

vnútorná derivácia 700

-ý súčin 118, 346

-ý automorfizmus 274, 701

voľná akcia (pôsob.) 333, 547, 573

vonkajšia algebra 114, 124

-a normála 170

-a kovariantná derivácia 588

-í súčin 109, 154

vytvárajúca funkcia 355

výkon elektrického poľa 467

významné repéry 605

W

Weylova báza 231

-e spinory 675

Wignerove rotačné funkcie 338

Z

zachovávajúca sa veličina 363, 470

zachováva orientáciu 168

zámena súradníc 22

združený 136

zdvih 511

- pôsobenia grupy 530

- zobrazenia 129, 507

\mathbb{Z}_2 -graduovanosť 676

zlomkovo-lineárna transf. 312

zložky 41, 42, 50

zmiešaný stav 348, 376

zobrazenie 21

- fibrácií 505

zovšeobecnená sila 410

-é súradnice 75

zrýchlenie 386, 467

zúženie 52