OBSAH

PREDHOVOR

Táto kniha je **úvodným** textom o istej časti **matematiky**, o modernej diferenciálnej geometrii a o Lieových grupách ako jej integrálnej súčasti. Pritom je písaná hlavne **z pohľadu** a **pre potreby fyzikov**. Orientácia na fyziku sa prejavuje vo výbere materiálu, v spôsobe jeho podania (miere "rigoróznosti", nepoužívaní formy "definícia-veta-dôkaz"), aj v náplni úloh (sú často spojené s fyzikou).

Fyzikmi sa však potenciálna čitateľská obec knihy nevyčerpáva. Keďže je o matematike a keďže fyzika odjakživa bola a stále je pre matematiku výdatným zdrojom inšpirácie, bude užitočná **aj pre matematikov**. A všeobecnejšie pre kohokoľvek, kto má potrebné (neveľké) predbežné vedomosti (skonkretizované nižšie) a chcel by sa **prístupným spôsobom** zoznámiť s touto zaujímavou, dôležitou a živou disciplínou, ktorá čoraz viac preniká do rôznorodých oblastí modernej teoretickej fyziky, matematiky a aj ich aplikácií.

S akými **minimálnymi vedomosťami** môže prikročiť potenciálny čitateľ k štúdiu tejto knihy? Nevyžaduje sa toho veľa. Stačia bežné vedomosti z kurzov matematickej analýzy (funkcií viacerých reálnych premenných) a lineárnej algebry, ktoré v prvom alebo druhom ročníku vysokoškolského štúdia absolvujú napríklad všetci fyzici a matematici, ale **aj väčšina** budúcich **inžinierov**. Čitateľ by teda mal rozumieť pojmom parciálna derivácia, Taylorov rozvoj a viacnásobný Riemannov integrál, vedieť násobiť matice, mal by chápať pojem podpriestor n-rozmerného lineárneho priestoru a podobne. Mal by tiež mať istú prax v zostavovaní a riešení jednoduchých sústav obyčajných diferenciálnych rovníc a rozumieť, aká myšlienka sa nimi realizuje.(Doladenie formy sa dá robiť aj "za pochodu", okrem iného pozorným čítaním Dodatkov na konci knihy.)

Typicky teda pôjde o vysokoškoláka/čku spomínaných odborov, spravidla od druhého ročníka vyššie, ale nezriedka majú potrebné vedomosti už aj mladší. Kniha je však úmyselne písaná tak, aby ju mohol bez ťažkostí študovať **aj samouk** - ktokoľvek, koho lákajú **tenzorové** a **spinorové polia**, či **fibrované variety**, chce sa naučiť **derivovať a integrovať diferenciálne formy**, vidieť, ako súvisia so symetriami **Lieove grupy a algebry** a ich **reprezentácie**, čo je **krivosť** a **torzia**, ako sa využíva **symplektická geometria** v **lagranžovskej** a **hamiltonovskej mechanike**, v akom zmysle hovoria **konexie** a **kalibračné polia** o tom istom, ako vznikajú **nötherovské prúdy** a ako súvisia so **zákonmi zachovania** atď.

Zo zamerania knihy vyplýva, že je výhodou, ak aspoň zhruba poznáme aj fyzikálny kontext, ktorého sa týkajú aplikácie. Avšak aj bez fyzikálnych vedomostí možno mať (z hľadiska samotnej geometrie) z knihy prospech. Ak sme napríklad nikdy nevideli **Maxwellove rovnice** a netušíme, aká je ich úloha vo fyzike, nebudeme síce chápať, *prečo* sa práve im venuje taká pozornosť, ale napriek tomu budeme rozumieť, *čo* sa tu s nimi z technického hľadiska robí. Uvidíme na nich, ako sa dajú tieto **parciálne diferenciálne rovnice** vyjadriť v jazyku diferenciálnych foriem, ako pre ne vyzerá účinok, ako sa z neho pomocou **tenzora energie-hybnosti** získavajú **zákony zachovania** a podobne. A ak sa nám to bude zdať zaujímavé, môžeme si o nich prečítať niečo "tradičné" aspoň dodatočne.

Podobne, ak nevieme nič o všeobecnej teórii relativity, nebudeme síce chápať odkiaľ sa nabrala predstava o **"zakrivenom" priestoročase** a o **metrickom tenzore** v ňom, dozvieme sa však, čo to je priestoročas z geometrického hľadiska a čo sa v ňom dá štandardne robiť. Neprenikneme síce do fyzikálnej podstaty **Einsteinových rovníc** pre **gravitačné pole**, avšak spoznáme ich formálnu štruktúru a jednoduché a účinné technické nástroje na prácu s nimi. Zvládnutie tejto a množstva inej geometrickej techniky nám potom výrazne **uľahčí** pochopenie **fyzikálnej** stránky veci, ak si o tejto teórii prečítame, alebo vypočujeme neskôr niečo orientované fyzikálne.

Kľúčovou požiadavkou na budúceho čitateľa je veľký **záujem porozumieť** veciam, o ktorých sa tu píše a chuť zvládnuť materiál nielen platonicky (pre potreby nonšalantnej konverzácie na spoločenských večierkoch), ale aj **na pracovnej úrovni**. No a samozrejme aj prijatie prirodzeného dôsledku, že tento cieľ sa nedá dosiahnuť samotným pasívnym čítaním, ale že je nevyhnutná značná samostatná práca (z čoho by mal mať ideálny budúci čitateľ *radosť*) a jej zodpovedajúca časová investícia.

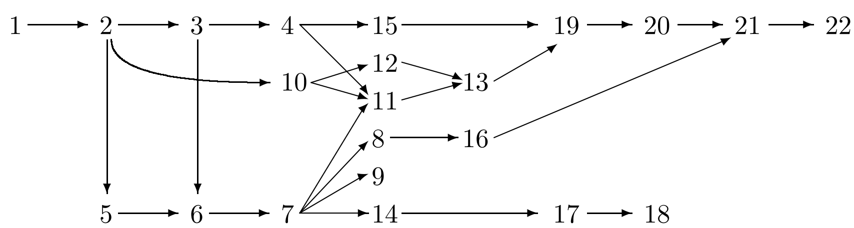
Látka sa vyjasňuje pomocou **množstva jednoduchých úloh** (je ich spolu vyše tisíc), v ktorých si čitateľ "**vlastnými rukami**" rozoberá detaily "teórie", ale aj spústu **konkrétnych príkladov**. Začiatok úlohy spoznáme podľa rámčeka, v ktorom je jej číslo (napríklad $\boxed{14.4.3}$ označuje tretiu úlohu vo štvrtom paragrafe štrnástej kapitoly), koniec podľa symbolu □. Väčšina úloh (asi deväťsto) má pripojený dostatočne podrobný **návod** a niektoré, zhruba päťdesiat, aj **úplné riešenie**. Symbol • znamená začiatok "textu", ktorý nie je úlohou ("teória" alebo komentár k úlohám). Ak je pri čísle paragrafu hviezdička (napríklad 12.6.*), znamená to, že pri prvom čítaní ho môžeme vynechať (ide do väčších detailov, alebo sa zaoberá príliš špeciálnymi otázkami). Hviezdičkou sú označené aj niektoré náročnejšie úlohy.

Táto kniha obsahuje dosť veľa materiálu a bude asi užitočné spomenúť, ako s ňou optimálne pracovať. Dá sa čítať rôznymi spôsobmi, ktoré závisia od toho, čo od nej očakávame a koľko úsilia sme ochotní na jej zvládnutie venovať.

Základným a najviac odporúčaným spôsobom je postupovať pekne od začiatku do konca a riešiť pritom (skoro) všetky úlohy. Toto je postup, ktorým sa z textu vyťaží maximum. Tému vidíme v dostatočnej šírke, fakty vnímame v súvislostiach a mnohorakých aplikáciách. Vyžaduje si to však čas a trpezlivosť.

Kto jedno alebo druhé nemá, môže postupovať aj ináč. Pôjde síce opäť od začiatku do konca, ale podrobne riešiť bude len úlohy, ktoré ho niečím zaujmú alebo potrebuje ich výsledok. Pri tomto postupe sa môže stať, že niektorú úlohu nebude vedieť zvládnuť; chýba mu na to nejaké podstatné ohnivko (fakt alebo zručnosť) z preskočeného materiálu. Ak sa dá zistiť ktoré ohnivko to je (v návode sa veľmi často odvolávame na čísla potrebných predchádzajúcich úloh), nič hrozné sa nestalo, jednoducho sa treba vrátiť a chýbajúci kúsok (úlohu) si dodatočne doplniť.

Ešte rýchlejší bude postup čitateľa, ktorý sa chce od začiatku obmedziť na nejakú konkrétnu oblasť a o ostatné sa zaujíma iba do tej miery, aká je nevyhnutná pre "jeho" tému. Na pomoc takémuto čitateľovi uvádzame (približnú) **schému závislosti kapitol**:



(Táto schéma nezodpovedá skutočnosti úplne, viacero paragrafov, krátkych častí či dokonca jednotlivých úloh by si v skutočnosti vyžadovalo dokresliť do nej *ďalšie* šípky, čím by sa ale stala prakticky bezcennou.)

Z takýchto konkrétnych oblastí by sa dali spomenúť povedzme tieto:

1. geometria potrebná pre základy **všeobecnej teórie relativity** (**kovariantné derivácie**, **tenzor krivosti**, **geodetiky**, apod.)

Ide o líniu 1 - 2 - 3 - 4 - 15 (podobný aparát sa zíde aj do pokročilej **mechaniky kontinua**). Ak chceme zvládnuť aj prácu s formami (napríklad pochopiť paragraf 15.6. o výpočte Riemannovho tenzora pomocou Cartanových štruktúrnych rovníc alebo paragraf 16.5. o Einsteinových rovniciach a ich odvodení z účinkového integrálu), potrebujeme pridať ešte kapitoly 5 - 6 - 7.

2. **elementárna** teória **Lieových grúp** a ich **reprezentácií** (bez aparátu diferenciálnej geometrie)

Línia by mohla obsahovať kapitoly (z niektorých len uvedené paragrafy) 1 - 2.4 - 10 - 11.7 - 12 - 13.1,2,3

3. **hamiltonovská** mechanika a **symplektické variety**

Minimálna trasa obsahuje kapitoly 1 - 2 - 3 - začiatok 4 - 5 - 6 - 7 - 14. Jej pokračovanie (formulácie lagranžovskej a hamiltonovskej mechaniky na fibrovaných varietách TM a T^*M) je v kapitolách 17 - 18. Ak chceme rozumieť aj pokročilejším paragrafom o symetriách (14.5.-14.7. a 18.4.), potrebujeme chápať geometriu na Lieových grupách a pôsobenia Lieových grúp na varietách (11.-13. kapitola).

4. základy práce s **diferenciálnymi formami**

Trasa by mohla vyzerať 1 - 2 - 3 - začiatok 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9, prípadne ešte pridať začiatok 16. kapitoly.

Táto kniha vznikla usporiadaním a rozšírením materiálu, ktorý už mnoho rokov prednášam študentom teoretickej fyziky FMFI UK (predtým MFF UK) v Bratislave. Formálne zodpovedá *štyrom* oficiálnym prednáškam (čo uvádzam len ako inšpiráciu pre prípadné zavedenie podobných prednášok inde), jednej väčšej a povinnej (je k nej aj cvičenie) a trom menším a výberovým (sú bez cvičenia, aktivita sa udržiava len domácimi úlohami). Väčšia, ktorá beží pod názvom "Matematická fyzika" (1 alebo 2), zodpovedá zhruba kapitolám 1-9 a 14-16. Jej náplňou sú teda základy diferenciálnej geometrie a náčrt jej hlavných aplikácií. Menšie sa týkajú Lieových grúp a ich reprezentácií (kapitoly 10-13), geometrických metód v klasickej mechanike (17-18 a zvyšok 14) a konexií a kalibračných polí (19-21).

Na záver by som sa rád poďakoval Spoločnosti autorov vedeckej a odbornej literatúry (SAVOL) za poskytnutie štedrej dotácie potrebnej na vyjdenie tohoto diela, Centru pre výskum kvantovej informácie Fyzikálneho ústavu SAV v Bratislave za príspevok na ten istý účel, Literárnemu fondu za udelenie štipendia na dokončenie diela, kolegom z Katedry teoretickej fyziky FMFI v Bratislave, hlavne Paľovi Ševerovi a Vladovi Balekovi za mnohé obohacujúce diskusie o geometrii vo fyzike, obom (anonymným) recenzentom pre SAVOL za mimoriadne starostlivé prečítanie nie práve najkratšieho rukopisu a cenné profesionálne postrehy v posudkoch, Vladovi Buženkovi za povzbudenia v pravom čase a za dobré rady, E.Bartošovi, J.Bušovi, V.Černému, J.Hitzingerovi, J.Chlebíkovej, E.Masárovi, E.Sallerovi, S.Sliszovi a A.Šurdovi za rady a nezištnú pomoc pri realizácii elektronickej verzie textu (špeciálne s jemnosťami TEX-u, v ktorom som ho napísal) a svojim synom Stankovi a Mirkovi za nakreslenie obrázkov (tiež v TEX-u). Osobitne ďakujem mojej manželke Ľubke, ktorá spolu s našimi deťmi Stankom, Mirkom a Dankou trpezlivo znášala moje nekonečné písanie a s ním spojenú fyzickú, alebo aspoň duševnú neprítomnosť.

Budem vďačný za akékoľvek pripomienky, komentáre, nájdené chyby či návrhy na vylepšenie textu (fecko@ fmph.uniba.sk).

V Bratislave, marec 2004

Marián Fecko

0. ÚVOD

Vo fyzike sa každú chvíľu niečo derivuje alebo integruje. Preto treba súbežne s kurzom fyziky vnikať aj do tajov diferenciálneho a integrálneho počtu. Začína sa funkciami jednej premennej, potom sa prejde aj na prípad viacerých premenných. Do hry vstúpia viacnásobné integrály a parciálne derivácie, ktorých sa budúci adept fyziky napočíta neúrekom.

Keď sa však pozornejšie pozrieme na štruktúru výrazov, zapísaných pomocou parciálnych derivácií v skutočných fyzikálnych vzorcoch, zistíme, že isté kombinácie sa vyskytujú veľmi často, iné prakticky nikdy. Napríklad ak porovnáme frekvenciu výskytu výrazov tvaru

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}+4\frac{\partial f}{\partial z}$$

tak zistíme, že zatiaľ čo prvý (Laplaceov operátor aplikovaný na funkciu f) sa vyskytuje veľmi často, druhý v knihách prakticky nenájdeme (ak nerátame zbierku úloh z analýzy, kde treba rátať práve túto kombináciu derivácií z didaktických dôvodov). Kombinácie, ktoré sa v knihách vyskytujú, sú spravidla výsledkom výpočtu, ktorý realizuje isté *názorné lokálne geometrické* predstavy o uvažovanej realite (napríklad fenomenologický opis difúzie látky v homogénnom prostredí). Práve takéto predstavy systematicky študuje *lokálna diferenciálna geometria.* V zhode s fyzikálnou skúsenosťou sa v nej pozoruje, že operácií, ktoré sú naozaj zaujímavé a často sa vyskytujú, je skutočne pomerne málo (dobrá správa, zvládnu sa v rozumnom čase).

Zo všeobecnej fyziky tiež poznáme fakt, že tá istá situácia sa dá opisovať pomocou *rôznych súradníc* (kartézskych, sférických, cylindrických,...) a z kontextu je zrejmé, že *výsledok* určite *nebude závisieť* od výberu týchto súradníc (čo sa ale často nedá povedať o *pracnosti* výpočtov; *to* je dôvod, prečo sa vyberajú na rôzne úlohy rôzne súradnicové sústavy). Samotné objekty a operácie s nimi sú teda nezávislé od výberu súradníc na ich opis, a preto neprekvapí, že vo vhodne vybudovanom aparáte sa bude dať veľká časť výpočtov urobiť úplne *bez súradníc* (aká veľká časť to bude, závisí od problému aj majstrovstva používateľa aparátu). Takéto "abstraktné" (bezsúradnicové) výpočty majú viacero predností. Bývajú spravidla podstatne kratšie a prehľadnejšie (dajú sa preto napríklad ľahko viackrát skontrolovať), jednotlivým krokom sa dá lepšie názorne rozumieť a podobne. Porovnajme na ilustráciu napríklad takéto rovnice

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi g = 0 &\qquad\leftrightarrow\qquad & \xi^k g_{ij,k} + \xi^k{}_{,i} g_{kj} + \xi^k{}_{,j} g_{ik} &= 0 \\
\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0 &\qquad\leftrightarrow\qquad & \ddot x^i + \Gamma^i_{jk}\dot x^j \dot x^k &= 0 \\
\nabla g = 0 &\qquad\leftrightarrow\qquad & g_{ij,k} - \Gamma_{ijk} - \Gamma_{jik} &= 0
\end{aligned}$$

V tomto texte sa postupne dozvieme, že dvojice rovníc vľavo-vpravo hovoria vždy *presne to isté*: výraz vpravo vzniká rozpísaním do (ľubovoľných) súradníc výrazu vľavo.

(Prvý prípad sú *Killingove rovnice* a ich obsahom je fakt, že Lieova derivácia g v smere ξ je nulová, t.j. že metrický tenzor g má *symetriu* danú vektorovým poľom ξ; druhý je rovnica geodetiky a vyjadruje podmienku, že ideme rovnomerne priamočiaro (= s nulovým zrýchlením); tretí je podmienka metričnosti konexie a hovorí, že pri paralelnom prenose sa bude zachovávať skalárny súčin vektorov. Komu je už teraz všetko toto jasné, môže túto knihu hneď predať a za získané peniaze si kúpiť a začať čítať nejakú rozumnejšiu a pokročilejšiu literatúru; tým, čo zostali čítať ďalej, to bude úplne jasné po prečítaní štvrtej a pätnástej kapitoly.)

Napriek maximálnemu zjednodušeniu zápisu súradnicových verzií rovníc (sumačná konvencia, zápis parciálnych derivácií pomocou čiarok) je zrejmé, že stručnosť ľavých strán je bezkonkurenčná. Ak sa preto naučíme *spoľahlivo manipulovať* s objektmi typu ľavých strán, získame tým schopnosť efektívne (nepriamo) narábať s pomerne komplikovanými výrazmi, ktoré obsahujú parciálne derivácie a pritom navyše v každom kroku rozumieť, čo *objektívne* robíme.

Analýza sa zvyčajne rozvíja v kartézskom priestore $\mathbb{R}^n$ resp. v otvorených oblastiach v $\mathbb{R}^n$. V skutočnosti však mnohé priestory, na ktorých bez mihnutia oka analýzu používame, prísne vzaté otvorenými oblasťami v $\mathbb{R}^n$ *nie sú*, hoci k nim majú veľmi blízko.

V teoretickej mechanike napríklad vyšetrujeme pohyb kyvadiel tak, že riešime (diferenciálne) Lagrangeove rovnice pre časovú závislosť súradníc v ich konfiguračných priestoroch. Pritom tieto konfiguračné priestory nie sú vždy otvorenými oblasťami v $\mathbb{R}^n$. Pre rovinné kyvadlo je to napríklad *kružnica* S^1. Je to síce jednorozmerný priestor, avšak je intuitívne zrejmé (a dá sa dokázať), že je to čosi *iné*, ako (otvorená oblasť v) $\mathbb{R}^1$. Podobne konfiguračný priestor sférického kyvadla je dvojrozmerná sféra S^2, ktorá sa líši od (otvorenej oblasti v) $\mathbb{R}^2$.

Všimnime si však, že dostatočne *malé okolia* ľubovoľného bodu na S^1 aj S^2 sú na nerozoznanie od dostatočne malých okolí ľubovoľných bodov v $\mathbb{R}^1$, resp. $\mathbb{R}^2$; sú v nejakom zmysle "lokálne rovnaké", rozdiel je "až globálny". Aplikácie matematickej analýzy (aj vo fyzike) takto prirodzene tlačia smerom k jej rozšíreniu na všeobecnejšie priestory, akými sú otvorené oblasti v $\mathbb{R}^n$.

Takýmito všeobecnejšími priestormi sú *hladké variety.* Veľmi voľne povedané ide o priestory, ktoré sa *krátkozrakému pozorovateľovi* javia ako $\mathbb{R}^n$ (pre vhodné n), ale celkovo ("topologicky", keď si založí okuliare a vidí už dobre aj do diaľky) môžu vyzerať úplne ináč ako $\mathbb{R}^n$.

Príjemnou pozornosťou podniku je fakt, že aparát, ktorý sa vybuduje na vyššie spomínaný opis geometrických predstáv nezávisle od výberu súradníc, je zároveň automaticky vhodný aj na opis *globálnych* geometrických objektov, t.j. objektov korektne definovaných *na celej variete*. Budeme teda hovoriť aj o *globálnej analýze*, analýze na varietách. Napríklad spomenuté rovnice $\mathcal{L}_\xi g = 0$, $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$ a $\nabla g = 0$ sú všetko rovnice na varietách a ich riešenia sú tiež globálne dobre definované objekty na varietách.

Samotný kľúčový pojem hladkej variety si zavedieme v 1. kapitole. Výklad bude hlavne intuitívny. Veľa vecí, ktoré sa podrobne rozvádzajú v matematickej literatúre o diferenciálnej *topológii*, sa spomenie len veľmi orientačne alebo dokonca sa nespomenú vôbec. Cieľom tejto úvodnej kapitoly bude povedať len to, čo treba nevyhnutne vedieť na pochopenie (už na pracovnej úrovni) hlavnej náplne tohoto textu, ktorou je diferenciálna *geometria* na varietách.

Zhrnutie 1. kapitoly

Hladká varieta je základnou hracou plochou v diferenciálnej geometrii. Je to zovšeobecnenie kartézskeho priestoru $\mathbb{R}^n$ (resp. otvorenej oblasti v $\mathbb{R}^n$) na objekt, ktorý vyzerá (len) *lokálne* ako $\mathbb{R}^n$, ale jeho globálna štruktúra môže byť oveľa komplikovanejšia. Vždy sa však dá predstaviť ako celok zlepený *z niekoľkých* kúskov homeomorfných $\mathbb{R}^n$; číslo n, ktoré je rovnaké pre všetky kúsky, sa volá rozmer variety. Technická realizácia týchto myšlienok je založená na pojmoch *mapa* (lokálne súradnice) a *atlas* pozostávajúci z niekoľkých máp. Kartézsky súčin $M \times N$ dvoch variet je nová varieta, vytvorená z pôvodných variet M a N. Ľubovoľná varieta sa dá realizovať ako veľmi slušne uložená plocha v dostatočne rozmernom *kartézskom* priestore.

Zhrnutie 2. kapitoly

V každom bode x n-rozmernej variety M existuje kanonicky istý n-rozmerný lineárny priestor T_xM, dotykový (tangenciálny) priestor v bode x. Jeho elementy sa volajú vektory v bode x. Existuje viacero navzájom ekvivalentných definícií tohoto pojmu, ktoré sú výhodné v rôznych kontextoch. Vektorové *pole* na variete M je hladké priradenie vektora každému bodu $x \in M$. Integrálna krivka vektorového poľa je taká krivka, ktorá v každom bode ide tak, ako jej diktuje vektor poľa v tomto bode. Štandardné konštrukcie multilineárnej algebry (konštrukcia tenzorov typu $\binom{p}{q}$ pre daný vektorový priestor L) vedú k pojmu *tenzorového poľa* typu $\binom{p}{q}$ na variete. Špeciálnymi prípadmi sú funkcie (typ $\binom{0}{0}$), vektorové a kovektorové polia (typ $\binom{1}{0}$ a $\binom{0}{1}$), polia bilineárnych foriem (typ $\binom{0}{2}$, v symetrickom nedegenerovanom prípade metrický tenzor) a lineárnych operátorov (typ $\binom{1}{1}$).

Zhrnutie 3. kapitoly

Každé (hladké) zobrazenie bodov variet $f : M \to N$ indukuje zobrazenie tenzorov na nich. Označuje sa f_*, ak prenáša tenzory v smere f (z M na N) a f^*, ak ich prenáša proti smeru f (z N na M). Pre difeomorfizmy sa dá zaviesť f_* aj f^* pre ľubovoľné tenzorové pole. Ak f nie je difeomorfizmus, môžu nastať problémy. Pre tenzorové polia typu $\binom{0}{p}$ existuje zobrazenie f^* vždy. Špeciálnym prípadom je indukovanie metrického tenzora na

M z riemannovskej variety (N,h), čím sa získa riemannovská varieta (M,g), $g = f^*h$. Najčastejšie ide o indukovanie metrického tenzora na podvariety M euklidovského priestoru $N = E^n$ (alebo všeobecnejšie $E^{r,s}$), na ktorom existuje kanonický metrický tenzor $h = \eta$.

Zhrnutie 4. kapitoly

Ľubovoľné vektorové pole V na M indukuje zobrazenie $\Phi_t : M \to M$, pri ktorom sa bod x posunie o parameter t po integrálnej krivke štartujúcej v x. Hovorí sa mu tok generovaný poľom V, alebo vzhľadom na skladaciu vlastnosť $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$ aj jednoparametrická grupa transformácií. Zobrazenie Φ_t variety M na seba indukuje v zmysle 3. kapitoly zobrazenie tenzorových polí Φ_t^*, ktoré generuje *lieovský prenos* tenzorov (pozdĺž integrálnych kriviek poľa V). Mierou citlivosti (nekonštantnosti) tenzorového poľa A voči lieovskému prenosu je *Lieova derivácia* $\mathcal{L}_V A := \frac{d}{dt}\big|_0 \Phi_t^* A$. Dvom vektorovým poliam V, W sa dá priradiť tretie, ich komutátor $[V,W]$ (ktorý je zároveň totožný s $\mathcal{L}_V W$). Dve polia komutujú práve vtedy, keď komutujú im zodpovedajúce toky; nekomutovanie vektorových polí takto vedie na javy anholonómie (závislosti od cesty). Killingov vektor je vektorové pole, v smere ktorého je lieovsky konštantný metrický tenzor. Tok Killingovho vektora je izometriou riemannovskej variety (M,g), t.j. zobrazením M na seba, pri ktorom sa zachovávajú všetky dĺžky a uhly. Ak sa zachovávajú len uhly, ide o konformné transformácie a generujú ich konformné Killingove vektory.

Zhrnutie 5. kapitoly

V kontexte výpočtu objemov rovnobežnostenov (a tým aj v teórii integrovania, kde sa funkčné hodnoty násobia objemami *infinitezimálnych* rovnobežnostenov) sa ukáže mimoriadny význam úplne antisymetrických čisto kovariantných tenzorov, ktorým sa hovorí formy. Celá táto kapitola študuje formy na úrovni lineárnej algebry. Okrem všeobecných vlastností, ktoré platia pre všetky tenzory, sú v hre aj dôležité špecifiká. Formy majú prirodzené $\mathbb{Z}$-graduovanie, funguje na nich (graduovane komutatívny) vonkajší súčin $\wedge$ (čím vzniká graduovaná *vonkajšia* = Grassmannova algebra) a vnútorný súčin i_v (ktorý je deriváciou stupňa -1 tejto algebry). Ak je k dispozícii aj metrický tenzor a orientácia (daná formou objemu), pristupuje Hodgeov operátor $*$. Prirodzenú interpretáciu tu nadobúda aj obyčajný determinant.

Zhrnutie 6. kapitoly

Študujú sa formy už ako polia na variete (*diferenciálne* formy). Okrem algebraických konštrukcií z 5. kapitoly pristupuje kľúčový pojem *vonkajšej derivácie*. Ide o deriváciu stupňa +1 Cartanovej algebry foriem na variete, ktorá je navyše nilpotentná ($dd = 0$). Jednoduchým (ale užitočným) zovšeobecnením doterajších foriem sú formy s hodnotami v ľubovoľnom vektorovom priestore (doterajšie mali hodnoty v $\mathbb{R}$).

Zhrnutie 7. kapitoly

Rozborom konkrétnych jednoduchých príkladov sa zisťuje, že na podintegrálne výrazy je užitočné nazerať ako na diferenciálne formy zo 6. kapitoly. Definuje sa základný pojem integrálu formy po reťazci, pričom sa predpokladá elementárna znalosť bežného Riemannovho viacnásobného integrálu. Formuluje sa Stokesova veta pre diferenciálne formy (dáva do súvisu integrál formy po hranici reťazca s integrálom *vonkajšej derivácie* tejto formy po samotnom reťazci). Diskutuje sa reinterpretácia integrálu po oblasti na orientovateľnej variete ako integrálu po reťazci (vrátane tvaru Stokesovej vety) a špecifikum integrovania po *riemannovskej* variete. Odhaľuje sa jednoduché správanie sa integrálu voči zobrazeniam variet.

Zhrnutie 8. kapitoly

Všeobecná Stokesova veta pre diferenciálne formy zo 7. kapitoly má mnohoraké klasické prejavy. Ukazuje, že je v nej skrytá napríklad Gaussova-Ostrogradského veta, Greenove identity, "obyčajná" Stokesova veta z vektorovej analýzy, niektoré fakty z teórie funkcií komplexnej premennej. Zavádza sa kodiferenciál δ (ako operátor združený k diferenciálu d = vonkajšej derivácii) a samozdružená kombinácia $\Delta = -(d\delta + \delta d)$, Laplaceov-deRhamov operátor (zovšeobecnenie Laplaceovho operátora na funkciách na ľubovoľné formy). V časti o vektorovej analýze sa prichádza k záveru, že operácie gradient, rotácia a divergencia sú len zamaskovaná vonkajšia derivácia.

Zhrnutie 9. kapitoly

Forma sa volá uzavretá, ak má nulovú vonkajšiu deriváciu a exaktná, ak je vonkajšou deriváciou inej formy (svojho *potenciálu*). Vzhľadom na nilpotentnosť operátora d (t.j. platnosti $dd = 0$) je exaktná forma automaticky uzavretá (Poincarého lema). Ukazuje sa, že vo fyzike často využívané opačné tvrdenie (obrátenie Poincarého lemy) všeobecne neplatí, ale konštruktívne sa overí jeho platnosť na *stiahnuteľných* varietách (resp. *lokálne*, t.j. v dostatočne malom okolí ľubovoľného bodu na ľubovoľnej variete). Jemnejší pohľad na vec umožňuje aparát teórie kohomológií, v tomto prípade ide konkrétne o kohomológie *deRhamovho* komplexu.

Zhrnutie 10. kapitoly

Grupy vstupujú do hry vo fyzike aj v matematike ako grupy *symetrie* čohosi, t.j. (v matematickej reči) ako grupy *automorfizmov* rôznych štruktúr. Explicitne sa vyšetrujú štruktúry, ktoré vedú na bežné klasické grupy (všeobecnú lineárnu, ortogonálnu, symplektickú, unitárnu,...). Spojením algebraického pojmu grupa a diferenciálno-topologického pojmu (analytická) varieta vzniká *Lieova grupa*. Vyššie spomínané grupy (aj iné) sú príklady Lieových grúp.

Zhrnutie 11. kapitoly

Efektívnym nástrojom na štúdium pomerne zložitých objektov, akými sú Lieove grupy, je využitie ich bohatej diferenciálnej geometrie. Tá je dôsledkom kompatibility štruktúry grupy a variety. Pomocou *ľavoinvariantných* vektorových polí sa dá Lieovej grupe kanonicky priradiť jej Lieova *algebra*, čo je objekt nepomerne jednoduchší, ako samotná grupa (je to konečnorozmerný lineárny priestor), napriek tomu však kóduje podstatnú časť informácie o grupe. Študuje sa dôležité exponenciálne zobrazenie z algebry do grupy.

Zhrnutie 12. kapitoly

Lieova grupa dáva o sebe často vedieť cez svoju *reprezentáciu*, t.j. existuje homomorfizmus tejto grupy do grupy obrátiteľných lineárnych operátorov v nejakom vektorovom priestore a v danom kontexte vidíme len jej homomorfný obraz. Reprezentácia grupy automaticky indukuje aj istú (odvodenú) reprezentáciu jej Lieovej *algebry*, čo je všeobecne homomorfizmus Lieovej algebry do Lieovej algebry (všetkých) lineárnych operátorov (vo fixnom lineárnom priestore). Ak daná reprezentácia pripúšťa nejaký netriviálny invariantný podpriestor, volá sa *reducibilná*, lebo sa dá redukovať na (menšiu) reprezentáciu v tomto podpriestore. *Ireducibilné* sa takto zmenšiť nedajú. Kritériám ireducibility sa venuje Schurova lema. Ak k danému podpriestoru existuje aj invariantný doplnok, reprezentácia je ekvivalentná priamemu súčtu dvoch menších. Takýto doplnok sa dá dostať napríklad ako *ortogonálny* doplnok voči *invariantnému* skalárnemu súčinu (ak existuje; na kompaktných grupách existuje vždy a ukazuje sa, ako sa dá získať). S reprezentáciami sa dajú robiť isté konštrukcie, napríklad priamy súčet a súčin; kombináciou s ohraničením na invariantné podpriestory vo výsledku sa dá často získať spústa reprezentácií z malej zásoby na začiatku (niekedy aj všetky z jednej). Invariantné tenzory a s nimi spojené splietajúce operátory umožňujú "meniť typ" veličín, priradiť vektorom, na ktoré pôsobí grupa cez reprezentáciu ρ_1 vektory, na ktoré pôsobí cez ρ_2. Každá reprezentácia Lieovej algebry indukuje istý komplex; trochu sa venujeme jeho kohomológiám.

Zhrnutie 13. kapitoly

Osobitne dôležitým prípadom pôsobení grúp sú pre diferenciálnu geometriu ich pôsobenia na varietách. Často je na týchto varietách dodatočná štruktúra, ktorú pritom zachovávajú (napríklad akcie izometriami na riemannovských varietách, alebo symplektické akcie na symplektických varietách, pozri paragraf 14.5). Pôsobenie Lieovej grupy dáva na infinitezimálnej úrovni pôsobenie svojej Lieovej algebry, s ktorou sú úzko spojené *fundamentálne* (vektorové) *polia*. Pôsobenie na bodoch variety štandardne (postupmi z paragrafu (3.1)) indukuje pôsobenie na funkciách na variete (a všeobecnejšie na tenzorových poliach), čím sa získava dôležitá konštrukcia (∞-rozmerných) reprezentácií grupy a jej algebry (tenzorové polia, špeciálne aj funkcie, tvoria lineárny priestor). Ohraničením na invariantné podpriestory sa z nich často dajú vytiahnuť aj konečnorozmerné reprezentácie. Vydelenie G-invariantného podpriestoru funkcií (tenzorových polí) býva častým postupom pri riešení diferenciálnych rovníc (ansatz s istým typom symetrie).

Zhrnutie 14. kapitoly

Z vhodného prepisu Hamiltonových kanonických rovníc sa odhaľuje, že za týmito rovnicami je skrytá elegantná geometrická štruktúra. Jej jadrom je uzavretá nedegenerovaná 2-forma ω na fázovom priestore, *symplektická* forma. Tá umožňuje dvíhať a spúšťať indexy, podobne, ako sa to robí pomocou metrického tenzora. Vektorové pole, ktoré je analógom gradientu v riemannovskom prípade (vzniká teda dvihnutím indexu na gradiente funkcie f ako *ko*vektorovom poli), sa tu volá *hamiltonovské* pole generované funkciou f. Zistí sa, že Hamiltonove rovnice sú vlastne rovnice pre integrálne krivky hamiltonovského poľa generovaného funkciou H, *hamiltoniánom* sústavy. Tak sa prichádza k pojmu hamiltonovská *sústava* (M, ω, H). Vektorové polia, ktoré generujú automorfizmy hamiltonovskej sústavy (zachovávajú teda symplektickú formu a hamiltonián) sa volajú Cartanove symetrie a ich isté zjemnenie *exaktné* Cartanove symetrie. Ukazuje sa, že existuje vzájomne jednoznačná korešpondencia medzi exaktnými Cartanovými symetriami a zachovávajúcimi sa veličinami. Do väčších detailov v tomto smere idú časti o momentovom zobrazení a symplektickej redukcii. Bohatou triedou symplektických variet sú orbity koadjungovanej akcie (čo je pôsobenie G na duáli $\mathcal{G}^*$ svojej vlastnej Lieovej algebry $\mathcal{G}$), na ktorých existuje kanonická symplektická štruktúra.

Zhrnutie 15. kapitoly

Vo viacerých aplikáciách (napríklad pri výpočte zrýchlenia hmotného bodu v mechanike) sa efektívne robia lineárne kombinácie (pri zrýchlení konkrétne odčítanie) vektorov (alebo všeobecnejšie tenzorov) v rôznych bodoch. To sa na "prázdnej" variete nedá. Štruktúra, ktorá to legalizuje, je (lineárna) *konexia* ∇ na M. Umožňuje prenášať vektory po danej ceste (od ktorej v princípe závisí) a tým aj uskutočniť vyššie spomínané porovnanie (porovnáva sa vektor v x s vektorom, ktorý sa z y *prenesie do* x). Tento prenos sa *podľa definície* volá *paralelný* (v zmysle konexie ∇). Najjednoduchšie sa technicky zavádza postulovaním vlastností s ním súvisiacej *kovariantnej derivácie*. Konexia umožňuje zaviesť pojem rovnej čiary (geodetiky) na (M, ∇). Lineárnej konexii sú priradené dve tenzorové polia, tenzor torzie a krivosti. Ukazuje sa, že podmienka kompatibility s metrikou (zachovanie skalárnych súčinov pri paralelnom prenose) a nulovosť torzie vedú na istú jednoznačnú konexiu (RLC konexia). Tenzor krivosti kóduje, či paralelný prenos (o infinitezimálne vzdialenosti) naozaj závisí od cesty; prejavuje sa aj v správaní sa blízkych geodetík - spôsobuje ich odklon (Jacobiho rovnica). Nenulový tenzor torzie signalizuje neuzavretie geodetického rovnobežníka. Efektívnym nástrojom na prácu s konexiou je aparát diferenciálnych foriem. Základné objekty teórie sa zakódujú do foriem a vzťahy medzi nimi sú dané Cartanovými štruktúrnymi rovnicami.

Zhrnutie 16. kapitoly

(Štvor)tenzorový zápis Maxwellových rovníc v Minkowského priestor(očas)e odhaľuje, že tenzory, ktoré sa v nich objavujú, sú veľmi špeciálne - ide o *diferenciálne formy*. Preto najprirodzenejším jazykom na štvorrozmernú formuláciu elektrodynamiky je jazyk diferenciálnych foriem. Formy v Minkowského priestor(očas)e majú (ako dôsledok delenia priestoročasu na "čas" a "priestor") špeciálnu štruktúru: prirodzene vzniká ich vyjadrenie pomocou dvoch *priestorových* foriem. Takéto vyjadrenie foriem (a operácií na nich) je efektívnym mostom medzi štvorrozmernou a (historicky staršou) trojrozmernou formuláciou elektrodynamiky. Formy sú užitočné nielen v elektrodynamike, ale v teórii poľa všeobecne. Jednoducho sa cez ne zapisujú *účinkové integrály* (keďže podintegrálne výrazy sú vždy formy) a rovnako jednoducho sa počítajú aj ich extrémy, ktoré dávajú pohybové rovnice (prirodzene sa v nich objavuje kodiferenciál). S priestoročasovými symetriami úzko súvisí *tenzor energie-hybnosti* poľa, ktorý vzniká variáciou účinku podľa metrického tenzora. Tento tenzor sa objavuje (ako zdroj) aj v Einsteinových rovniciach gravitačného poľa. Skúma sa ich variačná formulácia, porovnáva sa Hilbertov účinok, kde sa varíruje voči metrickému tenzoru, s Cartanovým, ktorý je funkcionálom korepérneho ("tetrádneho") poľa a foriem konexie. V nelineárnom sigma-modeli hrá úlohu poľnej premennej zobrazenie dvoch riemannovských variet. Zobrazenia, ktoré extremalizujú prirodzene zavedený účinok (vedú na "minimálne plochy") sa volajú harmonické. Takýmito zobrazeniami sa opisujú mydlové bubliny, ale aj svetoplochy v teórii strún. Variáciou voči jednému z metrických tenzorov sa dá prejsť od "kvadratického" účinku k "odmocninovému" (čo má praktický význam v opačnom smere).

Zhrnutie 17. kapitoly

S každou varietou M môžeme kanonicky spojiť ďalšie dve variety dvojnásobného rozmeru, TM a T^*M. Hrajú dôležitú úlohu ako ihriská klasickej mechaniky (lagranžovskej a hamiltonovskej). Z konštrukcie zadarmo dostávajú do vienka zaujímavú geometrickú štruktúru (aj keď samotná varieta M je "prázdna"). Sú totálnymi priestormi vektorových fibrácií, nesú (rôzne) kanonické tenzorové polia (napríklad T^*M symplektickú formu), viaceré objekty sa dajú z M dvíhať do totálnych priestorov. V ďalšej kapitole sa na nich skúma mechanika, táto obsahuje potrebnú prípravu.

Zhrnutie 18. kapitoly

Ukazuje sa, ako sa formuluje klasická mechanika na TM a T^*M. Oba prípady sú z geometrického hľadiska (v nedegenerovanom prípade) úplne rovnocenné: ide o štandardnú symplektickú dynamiku, t.j. pohyb po integrálnych krivkách hamiltonovského (dynamického) poľa. Na T^*M máme kanonickú symplektickú štruktúru, takže fixovanie funkcie H už dáva priamo dynamiku. Na TM je to trochu zamaskované; kanonickým poľom je isté tenzorové pole typu $\binom{1}{1}$ a symplektická štruktúra vzniká až jeho kombináciou s (nedegenerovaným) lagranžiánom (ako funkciou na TM). Projekciou tejto symplektickej dynamiky na bázu M vznikajú štandardné Lagrangeove rovnice (táto projekcia pridá jeden rád, takže sú 2.rádu), zatiaľ čo Hamiltonove rovnice operujú priamo v totálnom priestore T^*M a (ako každé rovnice pre integrálne krivky) sú len 1.rádu. Pomocou lagranžiánu sa konštruuje Legendreovo zobrazenie $TM \to T^*M$, ktoré dáva tieto dve dynamiky do súvisu.

Zhrnutie 19. kapitoly

Cieľom tejto kapitoly je preformulovať už známe fakty z teórie lineárnej konexie (15. kapitola) do nového jazyka, v ktorom sa (v ďalšej kapitole) obzvlášť jasne odhalí možnosť istého ďalekosiahleho zovšeobecnenia. Nový opis sa odohráva na novom ihrisku, variete LM, ktorá sa dá kanonicky priradiť variete M. Jej bodmi sú všemožné repéry vo všemožných bodoch na M. Zisťuje sa, že už bez konexie na M je v hre bohatá štruktúra: varieta LM je totálnym priestorom hlavnej $GL(n,\mathbb{R})$-fibrácie s bázou M. Konexia na M pridáva na LM ďalšiu štruktúru, $GL(n,\mathbb{R})$-invariantnú horizontálnu distribúciu. Pomocou nej sa dá operácia paralelného prenosu repéru po krivke γ na M preformulovať cez konštrukciu horizontálneho zdvihu γ^h krivky γ. Varieta LM dáva aj zaujímavú možnosť technického opisu širokej triedy geometrických objektov na M (špeciálne tenzorových polí, všeobecnejšie polí typu ρ) ako ekvivariantných funkcií Φ na LM a tiež opisu ich paralelného prenosu a kovariantnej derivácie (tá sa zmení na obyčajnú smerovú deriváciu funkcie Φ).

Zhrnutie 20. kapitoly

Preklad pojmov súvisiacich s *lineárnou* konexiou do reči fibrácie repérov, ktorý sa udial v 19.kapitole, odhaľuje možnosť zovšeobecnenia. Namiesto $\pi : LM \to M$ sa uvažuje $\pi : P \to M$, hlavná fibrácia s grupou G. Konexiou v tejto fibrácii sa nazve horizontálna distribúcia v totálnom priestore P, ktorá je invariantná voči pôsobeniu grupy G. Technicky sa opisuje formou konexie ω, čo je istá 1-forma s hodnotami v Lieovej algebre $\mathcal{G}$ grupy G. Analógmi repérov sú body variety P a ich paralelný prenos sa stotožní s horizontálnym zdvihom krivky z bázy, po ktorej sa robí prenos. (Lokálna) závislosť tohoto paralelného prenosu od cesty sa dá jednoducho vyjadriť v termínoch integrovateľnosti horizontálnej distribúcie a ako miera tejto integrovateľnosti vstúpi do hry (cez Frobeniovo kritérium) pojem 2-formy krivosti Ω (má tiež hodnoty v $\mathcal{G}$). Ako formálny nástroj na výpočet formy krivosti sa zavádza vonkajšia kovariantná derivácia D; pomocou nej dostávame vyjadrenie $\Omega = D\omega$. Ak je na M definovaná nejaká štruktúra, dá sa pomocou nej často zostrojiť istá podfibrácia hlavnej fibrácie, na ktorej pôsobí len podgrupa pôvodnej grupy; hovorí sa o ohraničení štruktúrnej podgrupy. Napríklad metrickému tenzoru na M zodpovedá fibrácia ortonormovaných repérov (podfibrácia fibrácie repérov). Za istých podmienok sa na podfibráciu dedí aj konexia; naopak konexia na podfibrácii indukuje konexiu na celej fibrácii, ktorá je špeciálna v tom, že rešpektuje štruktúru, ktorá súvisí s podfibráciou.

Zhrnutie 21. kapitoly

Konexie v hlavnej G-fibrácii sa dávajú do súvisu s kalibračnými poľami, ktoré sú známe z fyziky. Najprv sa opisuje štandardný "fyzikálny" prístup, ktorý spočíva v zlokálnení symetrie účinku, ktorý už je "globálne" invariantný. Toto zlokálnenie pridáva k teórii ďalšie polia s konkrétnymi transformačnými pravidlami a konkrétnou interakciou s pôvodnými poľami. Ukáže sa, že tieto polia sa dajú interpretovať aj z pohľadu teórie konexií. Konkrétne sa nahliadne, že fixovanie kalibrácie je dané výberom lokálneho rezu σ hlavnej fibrácie, kalibračné potenciály (v tejto kalibrácii) sa získavajú stiahnutím formy konexie na bázu (pomocou rezu), kalibračné transformácie súvisia so zmenou rezu, intenzita kalibračného poľa sa získava stiahnutím formy krivosti a látkové polia stiahnutím ekvivariantnej funkcie na P. Odvodia sa rovnice paralelného prenosu ľubovoľnej veličiny typu ρ v kalibrácii σ. Zavedie sa pojem asociovanej vektorovej fibrácie (ktorá vznikne z hlavnej fibrácie nahradením pôvodného vlákna reprezentačným priestorom grupy G). Ukazuje sa, akú štruktúru majú účinkové integrály, ktoré sú lokálne kalibračne invariantné a ako sa z nich odvodia pohybové rovnice (sú zovšeobecnením Maxwellových rovníc z elektrodynamiky, ktorá je kalibračnou teóriou s grupou $U(1)$). Zoznamujeme sa s Nötherovej vetou, ktorá dáva do súvisu symetrie účinkových integrálov so zákonmi zachovania. Táto veta vrhá nové svetlo aj na staršie výsledky v tomto smere, spojenie zákonov zachovania s tenzorom energie-hybnosti v teórii poľa a s exaktnými Cartanovými symetriami v hamiltonovskej mechanike.

Zhrnutie 22. kapitoly

Špeciálne ortogonálne grupy $SO(p,q)$ majú univerzálne dvojlistové nakrývajúce grupy, ktoré sa volajú spinové grupy a označujú sa Spin $(p,,q)$. Celá ich teória sa systematicky buduje pomocou Cliffordových algebier. Konštruuje sa izomorfizmus týchto algebier na vhodné maticové algebry (ich verná reprezentácia) a pomocou neho sa zavádza pojem spinora ako vektora reprezentačného priestoru Cliffordovej algebry. Spinové grupy sú podmnožiny v Cliffordovej algebre a preto ohraničenie spomínanej vernej reprezentácie algebry je aj reprezentáciou spinovej grupy. Tým na spinoroch pôsobí aj spinová grupa (a dvojznačne aj ortogonálna grupa). Táto jej reprezentácia sa volá spinorová. Pre niektoré špeciálne hodnoty (p,q) existujú špeciálne typy spinorov (weylovské, majoranovské, ...). Spinová štruktúra na M je hlavná fibrácia nad M (spinová fibrácia), ktorá dvojlistovo nakrýva fibráciu ortonormovaných repérov a vo vláknach ktorej pôsobí spinová grupa. Spinová štruktúra sa nedá zaviesť na každej variete. Ekvivariantné funkcie typu ρ na totálnom priestore spinovej fibrácie (a tiež ich stiahnutia na bázu pomocou rezu), kde ρ je spinorová reprezentácia, sa volajú spinorové polia na M. Poľu 1-foriem typu ρ zodpovedá Raritovo-Schwingerovo pole. Na spinorové polia pôsobí špeciálny operátor prvého rádu, ktorý sa volá Diracov operátor. Vznikol vo fyzike v kvantovej teórii relativistického elektrónu - vyskytuje sa v Diracovej rovnici.

LITERATÚRA

[**1**] В.И.**Арнольд**: Математические методы классической механики, Москва, Наука, 1979; tiež Едиториал УРСС 1999 (anglický preklad V.I.Arnold: Mathematical methods of classical mechanics, New York, Springer-Verlag, 1978)
[**2**] I.M.**Benn**,R.W.**Tucker**: An Introduction to Spinors and Geometry with Applications in Physics, Bristol, Adam Hilger 1989
[**3**] G.**Birkhoff**, S.**Mac Lane**: Prehľad modernej algebry, Bratislava, Alfa, 1979 (A Survey of Modern Algebra, The Mamillan Company, Inc., New York 1965)
[**4**] M.**Crampin**, F.A.E.**Pirani**: Applicable Differential Geometry, Cambridge University Press, 1987
[**5**] Б.А.**Дубровин**,С.П.**Новиков**,А.Т.**Фоменко**: Современная геометрия, Москва, Наука 1979 (anglický preklad B.A.Dubrovin,S.P.Novikov, A.T.Fomenko: Modern geometry - methods and applications, New York, Springer-Verlag, 1984, 1985)
[**6**] H.**Flanders**: Differential Forms (with Applications to Physical Sciences), New York, Academic Press 1963
[**7**] J.**Garaj**: Základy vektorového počtu, Bratislava, SVTL 1963
[**8**] И.М.**Гельфанд**: Лекции по линейной алгебре, Москва, Наука 1948, 1971 (anglický preklad I.M.Gelfand: Lectures on linear algebra, New York, Interscience Publishers, 1961)
[**9**] M.**Göckeler**,T.**Schücker**: Differential Geometry, Gauge Theories and Gravity, Cambridge University Press, 1987
[**10**] M.**Hejný**,I.**Kulich**,J.**Tvarožek**: Čo je topológia, Bratislava, Alfa, 1983
[**11**] S.**Chandrasekhar**: The Mathematical Theory of Black Holes, New York, Clarendon 1983 (ruský preklad Moskva, Mir, 1986)
[**12**] Ch.J.**Isham**: Modern Differential Geometry for Physicists, Singapore, World Scientific, 1989
[**13**] J.**Korbaš**: Lineárna algebra a geometria 1., Vydavateľstvo UK, 2003
[**14**] А.И.**Кострикин**, Ю.И.**Манин**: Линейная алгебра и геометрия, Москва, Наука, 1986
[**15**] A.P.**Lightman**, W.H.**Press**, R.H.**Price**, S.A.**Teukolsky**: Problem Book in Relativity and Gravitation, Princeton University Press, 1975 (ruský preklad Moskva, Mir, 1979)
[**16**] M.**Medveď**: Dynamické systémy, Bratislava, Vydavateľstvo UK, 2000
[**17**] Ch.W.**Misner**,K.S.**Thorne**,J.A.**Wheeler**: Gravitation, San Francisco, Freeman, 1973 (ruský preklad Moskva, Mir, 1977)
[**18**] А.С.**Мищенко**,Ю.П.**Соловев**, А.Т.**Фоменко**: Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии, Москва, Издательство Московского Университета 1981

[**19**] Ch.**Nash**,S.**Sen**: Topology and Geometry for Physicists, London, Academic Press, 1983 (1992)

[**20**] В.А.**Рубаков**: Классические калибровочные поля, Москва, Едиториал УРСС, 1999; (anglický preklad V.A.Rubakov: Classical theory of gauge fields, Princeton, Princeton University Press, 2002)

[**21**] B.F.**Schutz**: Geometrical Methods of Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1982 (ruský preklad Moskva, Mir 1984)

[**22**] А.С.**Шварц**: Квантовая теория поля и топология, Москва, Наука 1989; (anglický preklad A.S.Schwarz: Quantum field theory and topology, Berlin, Springer Verlag, 1993)

[**23**] S.**Sternberg**: Group Theory and Physics, Cambridge University Press, 1995

[**24**] N.**Straumann**: General Relativity and Relativistic Astrophysics, Berlin, Springer-Verlag, 1984 (1991)

[**25**] W.**Thirring**: Lehrbuch der Mathematischen Physik; 2 - Klassische Feldtheorie, Wien, Springer-Verlag 1978

[**26**] A.**Trautman**: Differential Geometry for Physicists, Napoli, Bibliopolis 1984

[**27**] A.**Trautman**: Fiber Bundles, Gauge Fields, and Gravitation, v zborníku A.Held: General relativity and Gravitation, str.287-308, New York, Plenum Press, 1980

[**28**] N.M.J.**Woodhouse**: Geometric Quantization, Oxford, Oxford University Press, 1980

REGISTER

D

E

F

G

H

Ľ

M

N

R

S

Š