

# OBSAH

<b>OBSAH</b>	5
<b>PREDHOVOR K 2. VYDANIU</b>	11
<b>PREDHOVOR K 1. VYDANIU</b>	12
<b>0. ÚVOD</b>	16
<b>1. POJEM VARIETY</b>	19
1.1. Topológia a spojité zobrazenia	19
1.2. Triedy hladkosti zobrazení kartézskych priestorov	21
1.3. Hladká štruktúra, hladká varieta	22
1.4. Hladké zobrazenia variet	27
1.5. Technický opis hladkých plôch v $\mathbb{R}^n$	31
1.6. Zhrnutie 1. kapitoly	35
<b>2. VEKTOROVÉ A TENZOROVÉ POLIA</b>	36
2.1. Krivka a funkcia na $M$	37
2.2. Dotykový (tangenciálny) priestor, vektory a vektorové polia	38
2.3. Integrálne krivky vektorového poľa	45
2.4. Lineárna algebra tenzorov (multilineárna algebra)	48
2.5. Tenzorové polia na $M$	59
2.6. Metrický tenzor na variete	63
2.7. Zhrnutie 2. kapitoly	68
<b>3. ZOBRAZENIA TENZOROV INDUKOVANÉ ZOBRAZENIAMÍ VARIET</b>	69
3.1. Zobrazenia tenzorov a tenzorových polí	69
3.2. Indukovaný metrický tenzor	75
3.3. Zhrnutie 3. kapitoly	79
<b>4. LIEOVA DERIVÁCIA</b>	80
4.1. Lokálny tok vektorového poľa	80
4.2. Lieovský prenos a Lieova derivácia	84
4.3. Vlastnosti Lieovej derivácie	87
4.4. Exponenta Lieovej derivácie	90
4.5. Geometrická interpretácia komutátora $[V, W]$ , neholonómne bázy	92
4.6. Izometrie a konformné transformácie, Killingove rovnice	95
4.7. Zhrnutie 4. kapitoly	106

<b>5. VONKAJŠIA ALGEBRA</b>	108
5.1. Motivácia - objemy rovnobežnostenov	108
5.2. $p$ -formy a vonkajší súčin	110
5.3. Vonkajšia algebra $\Lambda L^*$	117
5.4. Vnútorý súčin $i_v$	121
5.5. Orientácia v $L$	122
5.6. Determinant a zovšeobecnené Kroneckerove symboly	123
5.7. Metrická forma objemu	125
5.8. Hodgeov operátor (dualizácie) *	133
5.9. Zhrnutie 5. kapitoly	141
<b>6. DIFERENCIÁLNY POČET FORIEM</b>	142
6.1. Formy na variete	142
6.2. Vonkajšia derivácia	145
6.3. Orientovateľnosť, Hodgeov operátor a forma objemu na $M$	150
6.4. Formy s hodnotami vo vektorovom priestore $V$	156
6.5. Zhrnutie 6. kapitoly	160
<b>7. INTEGRÁLNY POČET FORIEM</b>	161
7.1. Podintegrálne výrazy ako diferenciálne formy	161
7.2. Euklidovské simplexy a reťazce	163
7.3. Simplexy a reťazce na variete	166
7.4. Integrál formy po reťazci na variete	167
7.5. Stokesova veta	168
7.6. Integrál po oblasti na orientovateľnej variete	170
7.7. Integrál po oblasti na orientovateľnej riemannovskej variete	175
7.8. Integrál a zobrazenia variet	178
7.9. Zhrnutie 7. kapitoly	180
<b>8. ŠPECIÁLNE PRÍPADY A APLIKÁCIE STOKESOVEJ VETY</b>	181
8.1. Elementárne situácie	181
8.2. Divergencia a Gaussova veta	182
8.3. Kodiferenciál a Laplaceov-deRhamov operátor	188
8.4. Greenove identity	193
8.5. Vektorová analýza v $E^3$	195
8.6. Funkcie komplexnej premennej	202
8.7. Zhrnutie 8. kapitoly	207
<b>9. POINCARÉHO LEMA A KOHOMOLÓGIE</b>	208
9.1. Jednoduché príklady uzavretých neexaktných foriem	209

9.2. Konštrukcia potenciálu na stiahnuteľných varietách	210
9.3. Kohomológie a deRhamov komplex	217
9.4. Zhrnutie 9. kapitoly	222
<b>10. LIEOVE GRUPY - ZÁKLADY</b>	<b>223</b>
10.1. Automorfizmy rôznych štruktúr a grupy	223
10.2. Lieove grupy - základné pojmy	229
10.3. Zhrnutie 10. kapitoly	233
<b>11. DIFERENCIÁLNA GEOMETRIA NA LIEOVÝCH GRUPÁCH</b>	<b>234</b>
11.1. Ľavoinvariantné tenzorové polia na Lieovej grupe	234
11.2. Lieova algebra $\mathcal{G}$ grupy $G$	242
11.3. Jednparametrické podgrupy	245
11.4. Exponenciálne zobrazenie	248
11.5. Odvodený homomorfizmus Lieových algebier	250
11.6. Invariantný integrál na $G$	251
11.7. Maticový formalizmus	253
11.8. Zhrnutie 11. kapitoly	265
<b>12. REPREZENTÁCIE LIEOVÝCH GRÚP A LIEOVÝCH ALGEBIER</b>	<b>266</b>
12.1. Základné pojmy	266
12.2. Ireducibilné a ekvivalentné reprezentácie, Schurova lema	274
12.3. Pridružená reprezentácia, Killingova-Cartanova metrika	281
12.4. Základné konštrukcie s grupami, Lieovými algebrami a ich reprezentáciami	292
12.5. Invariantné tenzory a splietajúce operátory	302
12.6.* Kohomológie Lieových algebier	3068
12.7. Zhrnutie 12. kapitoly	311
<b>13. PÔSOBENIE LIEOVÝCH GRÚP A ALGEBIER NA VARIETÁCH</b>	<b>313</b>
13.1. Pôsobenie grupy, orbita a stabilizátor	313
13.2. Štruktúra homogénnych priestorov, $G/H$	318
13.3. Nakrývajúci homomorfizmus, nakrytia $SU(2) \rightarrow SO(3)$ a $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow L_+^\uparrow$	324
13.4. Reprezentácie $G$ a $\mathcal{G}$ v priestore funkcií na $G$ -priestore, fundamentálne polia	334
13.5. Reprezentácie $G$ a $\mathcal{G}$ v priestore tenzorových polí typu $\hat{\rho}$	343
13.6. Zhrnutie 13. kapitoly	350

<b>14. HAMILTONOVSKÁ MECHANIKA A SYMPLEKTICKÉ VARIETY</b>	<b>351</b>
14.1. Poissonovská a symplektická štruktúra na variete	351
14.2. Darbouxova veta, kanonické transformácie a symplektomorfizmy	360
14.3. Poincarého-Cartanove integrálne invarianty a Liouvillova veta	366
14.4. Symetrie a zákony zachovania	371
14.5.* Momentové zobrazenie	374
14.6.* Orbity koadjungovaného pôsobenia	379
14.7.* Symplektická redukcia	386
14.8. Zhrnutie 14. kapitoly	394
<b>15. PARALELNÝ PRENOS A LINEÁRNA KONEXIA NA <math>M</math></b>	<b>395</b>
15.1. Zrýchlenie a paralelný prenos	395
15.2. Paralelný prenos a kovariantná derivácia	398
15.3. Kompatibilita s metrikou, RLC konexia	409
15.4. Geodetiky	416
15.5. Tenzor krivosti	428
15.6. Formy konexie a Cartanove štruktúrne rovnice	433
15.7. Rovnica pre odklon geodetík (Jacobiho rovnica)	446
15.8. Torzia, úplný paralelizmus a plochá konexia	450
15.9. Zhrnutie 15. kapitoly	456
<b>16. TEÓRIA POĽA V JAZYKU FORIEM</b>	<b>458</b>
16.1. Diferenciálne formy v Minkowského priestore $E^{1,3}$	458
16.2. Maxwellove rovnice v jazyku diferenciálnych foriem	465
16.3. Kalibračné transformácie, účinkový integrál	470
16.4. Tenzor energie-hybnosti, časopriestorové symetrie a zákony zachovania za ne	478
16.5.* Einsteinove rovnice gravitačného poľa, Hilbertov a Cartanov účinok	489
16.6.* Nelineárne sigma modely a harmonické zobrazenia	499
16.7. Zhrnutie 16. kapitoly	509
<b>17. DIFERENCIÁLNA GEOMETRIA NA <math>TM</math> A <math>T^*M</math></b>	<b>500</b>
17.1. Dotyková fibrácia $TM$ a kodotyková fibrácia $T^*M$	511
17.2. Pojem fibrovanej variety	515
17.3. Zobrazenia $Tf$ a $T^*f$	518
17.4. Vertikálny podpriestor, vertikálne vektory	520
17.5. Zdvihy na $TM$ a $T^*M$	522
17.6. Kanonické tenzorové polia na $TM$ a $T^*M$	527
17.7. Identity medzi zavedenými tenzorovými poľami	531

17.8. Zhrnutie 17. kapitoly	520
<b>18. HAMILTONOVE A LAGRANGEOVE ROVNICE</b>	<b>533</b>
18.1. Pole diferenciálnej rovnice druhého rádu	545
18.2. Eulerovo-Lagrangeovo pole	534
18.3. Súvis Lagrangeovej a Hamiltonovej mechaniky, Legendreovo zobrazenie	538
18.4. Symetrie zdvihnuté z bázy (konfiguračného priestoru)	541
18.5. Hamiltonián závislý od času, účinkový integrál	552
18.6. Zhrnutie 18. kapitoly	556
<b>19. LINEÁRNA KONEXIA A FIBRÁCIA REPÉROV</b>	<b>558</b>
19.1. Fibrácia repérov $\pi : LM \rightarrow M$	558
19.2. Forma konexie na $LM$	561
19.3. $k$ -rozmerná distribúcia $\mathcal{D}$ na variete $\mathcal{M}$	564
19.4. Geometrická interpretácia formy konexie: horizontálna distribúcia na $LM$	572
19.5. Horizontálna distribúcia na $LM$ a paralelný prenos na $M$	577
19.6. Tenzory na $M$ v jazyku $LM$ a ich paralelný prenos	579
19.7. Zhrnutie 19. kapitoly	584
<b>20. KONEXIA NA HLAVNEJ <math>G</math>-FIBRÁCII</b>	<b>586</b>
20.1. Hlavné $G$ -fibrácie	586
20.2. Forma konexie $\omega \in \Omega^1(P, \text{Ad})$	595
20.3. Paralelný prenos a vonkajšia kovariantná derivácia $D$	599
20.4. Forma krivosti $\Omega \in \Omega^2(P, \text{Ad})$ a explicitné vyjadrenia $D$	603
20.5.* Ohraničenie štruktúrnej grupy a konexia	612
20.6. Zhrnutie 20. kapitoly	621
<b>21. KALIBRAČNÉ TEÓRIE A KONEXIE</b>	<b>623</b>
21.1. Lokálna kalibračná invariantnosť - "tradičný" prístup	623
21.2. Zmena rezu a kalibračná transformácia	630
21.3. Rovnice paralelného prenosu veličiny typu $\rho$ v kalibrácii $\sigma$	636
21.4. Pridružená (asociovaná) fibrácia $P \times_{\rho} V$ k hlavnej fibrácii $\pi : P \rightarrow M$	642
21.5. Kalibračne invariantný účinok a pohybové rovnice	644
21.6. Nötherovské prúdy a Nötherovej veta	654
21.7. Ešte raz (na chvíľu) na $LM$	663
21.8. Zhrnutie 21. kapitoly	670

<b>Hlava 22. SPINOROVÉ POLIA A DIRACOV OPERÁTOR</b>	672
22.1. Cliffordove algebry $C(p, q)$	674
22.2. Cliffordove grupy $\text{Pin}(p, q)$ a $\text{Spin}(p, q)$	682
22.3. Spinory - lineárna algebra	688
22.4. Spinová fibrácia $\pi : SM \rightarrow M$ a spinorové polia na $M$	692
22.5. Diracov operátor	700
22.6. Zhrnutie 22. hlavy	709
<b>Dodatok A: niektoré algebraické štruktúry</b>	710
A1. Lineárne priestory	
A2. Asociatívne algebry	
A3. Lieove algebry	
A4. Moduly	
A5. Graduovanosť	
A6. Kategórie a funktoxy	
<b>Dodatok B: Slovensko-anglicko-ruský slovní(če)k</b>	722
<b>Dodatok C: V hlavných a vedľajších úlohách účinkovali</b>	724
<b>LITERATÚRA</b>	726
<b>REGISTER</b>	728
<b>REGISTER (často používaných) OZNAČENÍ</b>	739

## PREDHOVOR K 2. VYDANIU

Prvé vydanie tejto knihy z roku 2004 vyvolalo medzi čitateľmi väčší záujem, ako som očakával, a to nielen na Slovensku, ale aj v Čechách. To ma ako autora veľmi potešilo. Je však už dlhšie rozobraté, a tak po dohode s vydavateľom vychádza toto druhé, opravené a (trochu) rozšírené vydanie.

Medzitým vyšla v roku 2006 kniha v nakladateľstve Cambridge University Press aj v angličtine. Práca na jej preklade ma prinútila s odstupom času opäť prejsť celým textom, pričom som v nej vylepšil mnoho detailov, ale aj objavil dosť veľa drobných a zopár väčších chýb a nepresností. Mnohé ďalšie chyby v nej našli jej pozorní čitatelia. Priebežne aktualizovaný zoznam chýb v prvom vydaní sa dá nájsť na mojej stránke. Rád by som tu vyjadril svoju veľkú vďačnosť všetkým tým, ktorí si nájdené chyby nenechali pre seba a dali mi o nich vedieť. Pomohli mi jednak vyvarovať sa ich v anglickom vydaní, ale tiež, čo je dôležité pre knihu, ktorú držíte v rukách, aj v tomto druhom slovenskom vydaní.

Snažil som sa využiť príležitosť, ktorú mi poskytlo druhé vydanie a vykonať okrem opráv všetkých chýb, o ktorých som vedel, aj veľa drobných zmien. Nemá význam podrobne rozvádzať, v čom presne spočívajú. Za zmienku v tomto smere ale stojí prídanie registra označení (tri strany na konci knihy) a zoznamov najdôležitejších vzorcov na konci každej kapitoly (za ich zhrnutiami). Odporúčam prečítať si vždy pred štúdiom danej kapitoly jej zhrnutie, vrátane spomenutých najdôležitejších vzorcov a zopakovať to ešte raz po jej prečítaní.

Viacero ďalších informácií, ktoré môžu byť v súvislosti s knihou užitočné, možno nájsť na mojej stránke

<http://sophia.dtp.fmph.uniba.sk/~fecko>

V Bratislave, júl 2008

Marián Fecko

## PREDHOVOR K 1. VYDANIU

Táto kniha je **úvodným** textom o istej časti **matematiky**, o modernej diferenciálnej geometrii a o Lieových grupách ako jej integrálnej súčasti. Pritom je písaná hlavne **z pohľadu a pre potreby fyzikov**. Orientácia na fyziku sa prejavuje vo výbere materiálu, v spôsobe jeho podania (miere "rigoróznosti", nepoužívaní formy "definícia-veta-dôkaz"), aj v náplni úloh (sú často spojené s fyzikou).

Fyzikmi sa však potenciálna čitateľská obec knihy nevyčerpáva. Keďže je o matematike a keďže fyzika odjakživa bola a stále je pre matematiku výdatným zdrojom inšpirácie, bude užitočná **aj pre matematikov**. A všeobecnejšie pre kohokoľvek, kto má potrebné (nevelké) predbežné vedomosti (skonkretizované nižšie) a chcel by sa **prístupným spôsobom** zoznámiť s touto zaujímavou, dôležitou a živou disciplínou, ktorá čoraz viac preniká do rôznorodých oblastí modernej teoretickej fyziky, matematiky a aj ich aplikácií.

S akými **minimálnymi vedomosťami** môže prikrčiť potenciálny čitateľ k štúdiu tejto knihy? Nevyžaduje sa toho veľa. Stačia bežné vedomosti z kurzov matematickej analýzy (funkcií viacerých reálnych premenných) a lineárnej algebry, ktoré v prvom alebo druhom ročníku vysokoškolského štúdia absolvujú napríklad všetci fyzici a matematici, ale **aj väčšina** budúcich **inžinierov**. Čitateľ by teda mal rozumieť pojmom parciálna derivácia, Taylorov rozvoj a viacnásobný Riemannov integrál, vedieť násobiť matice, mal by chápať pojem podpriestor  $n$ -rozmerného lineárneho priestoru a podobne. Mal by tiež mať istú prax v zostavovaní a riešení jednoduchých sústav obyčajných diferenciálnych rovníc a rozumieť, aká myšlienka sa nimi realizuje. (Doladenie formy sa dá robiť aj "za pochodu", okrem iného pozorným čítaním Dodatkov na konci knihy.)

Typicky teda pôjde o vysokoškoláka/čku spomínaných odborov, spravidla od druhého ročníka vyššie, ale nezriedka majú potrebné vedomosti už aj mladší. Kniha je však úmyselne písaná tak, aby ju mohol bez ťažkostí študovať **aj samouk** - ktokoľvek, koho lákajú **tenzorové a spinorové polia**, či **fibrované variety**, chce sa naučiť **derivovať a integrovať diferenciálne formy**, vidieť, ako súvisia so symetriami **Lieove grupy a algebry** a ich **reprezentácie**, čo je **krivosť a torzia**, ako sa využíva **symplektická geometria** v **lagranžovskej a hamiltonovskej mechanike**, v akom zmysle hovoria **konexie a kalibračné polia** o tom istom, ako vznikajú **nötherovské prúdy** a ako súvisia so **zákonmi zachovania** atď.

Zo zamerania knihy vyplýva, že je výhodou, ak aspoň zhruba poznáme aj fyzikálny kontext, ktorého sa týkajú aplikácie. Avšak aj bez fyzikálnych vedomostí možno mať (z hľadiska samotnej geometrie) z knihy prospech. Ak sme



napríklad nikdy nevideli **Maxwellove rovnice** a netušíme, aká je ich úloha vo fyzike, nebudeme síce chápať, *prečo* sa práve im venuje taká pozornosť, ale napriek tomu budeme rozumieť, *čo* sa tu s nimi z technického hľadiska robí. Uvidíme na nich, ako sa dajú tieto **parciálne diferenciálne rovnice** vyjadriť v jazyku diferenciálnych foriem, ako pre ne vyzerá účinok, ako sa z neho pomocou **tenzora energie-hybnosti** získavajú **zákony zachovania** a podobne. A ak sa nám to bude zdať zaujímavé, môžeme si o nich prečítať niečo "tradičné" aspoň dodatočne.

Podobne, ak nevieme nič o všeobecnej teórii relativity, nebudeme síce chápať odkiaľ sa nabrala predstava o "**zakrivenom**" **priestoročase** a o **metrickom tenzore** v ňom, dozvieme sa však, čo to je priestoročas z geometrického hľadiska a čo sa v ňom dá štandardne robiť. Neprenikneme síce do fyzikálnej podstaty **Einsteinových rovníc** pre **gravitačné pole**, avšak spoznáme ich formálnu štruktúru a jednoduché a účinné technické nástroje na prácu s nimi. Zvládnutie tejto a množstva inej geometrickej techniky nám potom výrazne **uľahčí** pochopenie **fyzikálnej** stránky veci, ak si o tejto teórii prečítame, alebo vypočujeme neskôr niečo orientované fyzikálne.

Kľúčovou požiadavkou na budúceho čitateľa je veľký **záujem porozumieť** veciam, o ktorých sa tu píše a chuť zvládnuť materiál nielen platonicky (pre potreby nonšalantnej konverzácie na spoločenských večierkoch), ale aj **na pracovnej úrovni**. No a samozrejme aj prijatie prirodzeného dôsledku, že tento cieľ sa nedá dosiahnuť samotným pasívnym čítaním, ale že je nevyhnutná značná samostatná práca (z čoho by mal mať ideálny budúci čitateľ *radosť*) a jej zodpovedajúca časová investícia.

Látka sa vyjasňuje pomocou **množstva jednoduchých úloh** (je ich spolu vyše tisíc), v ktorých si čitateľ "**vlastnými rukami**" rozoberá detaily "teórie", ale aj spústu **konkrétnych príkladov**. Začiatok úlohy spoznáme podľa rámcčka, v ktorom je jej číslo (napríklad 14.4.3 označuje tretiu úlohu vo štvrtom paragrafe štrnásťtej kapitoly), koniec podľa symbolu □. Väčšina úloh (asi deväťsto) má pripojený dostatočne podrobný **návod** a niektoré, zhruba päťdesiat, aj **úplné riešenie**. Symbol • znamená začiatok "textu", ktorý nie je úlohou ("teória" alebo komentár k úlohám). Ak je pri čísle paragrafu hviezdička (napríklad 12.6.\*), znamená to, že pri prvom čítaní ho môžeme vynechať (ide do väčších detailov, alebo sa zaoberá príliš špeciálnymi otázkami). Hviezdičkou sú označené aj niektoré náročnejšie úlohy.

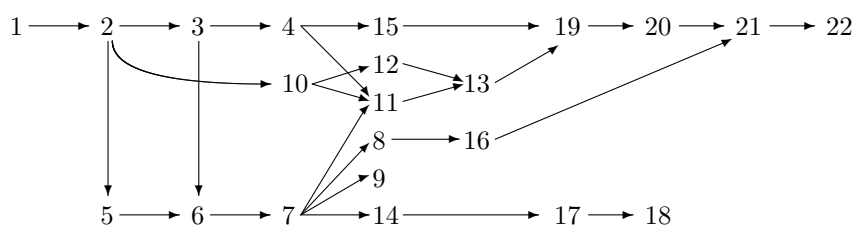
Táto kniha obsahuje dosť veľa materiálu a bude asi užitočné spomenúť, ako s ňou optimálne pracovať. Dá sa čítať rôznymi spôsobmi, ktoré závisia od toho, čo od nej očakávame a koľko úsilia sme ochotní na jej zvládnutie venovať.

Základným a najviac odporúčaným spôsobom je postupovať pekne od začiatku do konca a riešiť pritom (skoro) všetky úlohy. Toto je postup, ktorým sa z textu vyťažší maximum. Tému vidíme v dostatočnej šírke, fakty

vnímame v súvislostiach a mnohorakých aplikáciách. Vyžaduje si to však čas a trpezlivosť.

Kto jedno alebo druhé nemá, môže postupovať aj ináč. Pôjde síce opäť od začiatku do konca, ale podrobne riešiť bude len úlohy, ktoré ho niečím zaujmú alebo potrebuje ich výsledok. Pri tomto postupe sa môže stať, že niektorú úlohu nebude vedieť zvládnuť; chýba mu na to nejaké podstatné ohnivko (fakt alebo zručnosť) z preskočeného materiálu. Ak sa dá zistiť ktoré ohnivko to je (v návode sa veľmi často odvolávame na čísla potrebných predchádzajúcich úloh), nič hrozné sa nestalo, jednoducho sa treba vrátiť a chýbajúci kúsok (úlohu) si dodatočne doplniť.

Ešte rýchlejší bude postup čitateľa, ktorý sa chce od začiatku obmedziť na nejakú konkrétnu oblasť a o ostatné sa zaujíma iba do tej miery, aká je nevyhnutná pre "jeho" tému. Na pomoc takémuto čitateľovi uvádzame (približnú) **schému závislosti kapitol**:



(Táto schéma nezodpovedá skutočnosti úplne, viacero paragrafov, krátkych častí či dokonca jednotlivých úloh by si v skutočnosti vyžadovalo dokresliť do nej *ďalšie* šípky, čím by sa ale stala prakticky bezcennou.)

Z takýchto konkrétnych oblastí by sa dali spomenúť povedzme tieto:

1. geometria potrebná pre základy **všeobecnej teórie relativity (koveariantné derivácie, tenzor krivosti, geodetiky**, apod.)

Ide o líniu 1 - 2 - 3 - 4 - 15 (podobný aparát sa zide aj do pokročilej **mechaniky kontinua**). Ak chceme zvládnuť aj prácu s formami (napríklad pochopiť paragraf 15.6. o výpočte Riemannovho tenzora pomocou Cartanových štruktúrnych rovníc alebo paragraf 16.5. o Einsteinových rovniciach a ich odvodení z účinkového integrálu), potrebujeme pridať ešte kapitoly 5 - 6 - 7.

2. **elementárna** teória **Lieových grúp** a ich **reprezentácií** (bez aparátu diferenciálnej geometrie)

Línia by mohla obsahovať kapitoly (z niektorých len uvedené paragrafy) 1 - 2.4 - 10 - 11.7 - 12 - 13.1,2,3

3. **hamiltonovská** mechanika a **symplektické variety**

Minimálna trasa obsahuje kapitoly 1 - 2 - 3 - začiatok 4 - 5 - 6 - 7 - 14. Jej

pokračovanie (formulácie lagranžovskej a hamiltonovskej mechaniky na fibrových varietách  $TM$  a  $T^*M$ ) je v kapitolách 17 - 18. Ak chceme rozumieť aj pokročilejším paragrafom o symetriách (14.5.-14.7. a 18.4.), potrebujeme chápať geometriu na Lieových grupách a pôsobenia Lieových grúp na varietách (11.-13. kapitola).

#### 4. základy práce s **diferenciálnymi formami**

Trasa by mohla vyzeráť 1 - 2 - 3 - začiatok 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9, prípadne ešte pridať začiatok 16. kapitoly.

Táto kniha vznikla usporiadaním a rozšírením materiálu, ktorý už mnoho rokov prednášam študentom teoretickej fyziky FMFI UK (predtým MFF UK) v Bratislave. Formálne zodpovedá *štyrom* oficiálnym prednáškam (čo uvádzam len ako inšpiráciu pre prípadné zavedenie podobných prednášok inde), jednej väčšej a povinnej (je k nej aj cvičenie) a trom menším a výberovým (sú bez cvičenia, aktivita sa udržiava len domácimi úlohami). Väčšia, ktorá beží pod názvom "Matematická fyzika" (1 alebo 2), zodpovedá zhruba kapitolám 1-9 a 14-16. Jej náplňou sú teda základy diferenciálnej geometrie a náčrt jej hlavných aplikácií. Menšie sa týkajú Lieových grúp a ich reprezentácií (kapitoly 10-13), geometrických metód v klasickej mechanike (17-18 a zvyšok 14) a konexií a kalibračných polí (19-21).

Na záver by som sa rád poďakoval Spoločnosti autorov vedeckej a odbornej literatúry (SAVOL) za poskytnutie štedrej dotácie potrebnej na vyjdenie tohoto diela, Centru pre výskum kvantovej informácie Fyzikálneho ústavu SAV v Bratislave za príspevok na ten istý účel, Literárnemu fondu za udeľenie štipendia na dokončenie diela, kolegom z Katedry teoretickej fyziky FMFI v Bratislave, hlavne Paľovi Ševerovi a Vladovi Balekovi za mnohé obohacujúce diskusie o geometrii vo fyzike, obom (anonymným) recenzentom pre SAVOL za mimoriadne starostlivé prečítanie nie práve najkratšieho rukopisu a cenné profesionálne postrehy v posudkoch, Vladovi Bužekovi za povzbudenie v pravom čase a za dobré rady, E.Bartošovi, J.Bušovi, V.Černému, J.Hitzingerovi, J.Chlebíkovej, E.Masárovi, E.Sallerovi, S.Slizzovi a A.Šurdovi za rady a nezištnú pomoc pri realizácii elektronickej verzie textu (špeciálne s jemnosťami  $\text{T}_\text{E}_\text{X}$ -u, v ktorom som ho napísal) a svojim synom Stankovi a Mirkovi za nakreslenie obrázkov (tiež v  $\text{T}_\text{E}_\text{X}$ -u). Osobitne ďakujem mojej manželke Ľubke, ktorá spolu s našimi deťmi Stankom, Mirkom a Dankou trpezlivo znášala moje nekonečné písanie a s ním spojenú fyzickú, alebo aspoň duševnú neprítomnosť.

Budem vďačný za akékoľvek pripomienky, komentáre, nájdené chyby či návrhy na vylepšenie textu (fecko@fmph.uniba.sk).

V Bratislave, marec 2004

Marián Fecko

## 0. ÚVOD

Vo fyzike sa každú chvíľu niečo derivuje alebo integruje. Preto treba súbežne s kurzom fyziky vniknúť aj do tajov diferenciálneho a integrálneho počtu. Začína sa funkciami jednej premennej, potom sa prejde aj na prípad viacerých premenných. Do hry vstúpia viacnásobné integrály a parciálne derivácie, ktorých sa budúci adept fyziky napočíta neúrekom.

Keď sa však pozornejšie pozrieme na štruktúru výrazov, zapísaných pomocou parciálnych derivácií v skutočných fyzikálnych vzorcoch, zistíme, že isté kombinácie sa vyskytujú veľmi často, iné prakticky nikdy. Napríklad ak porovnáme frekvenciu výskytu výrazov tvaru

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad \text{a} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + 4 \frac{\partial f}{\partial z}$$

tak zistíme, že zatiaľ čo prvý (Laplaceov operátor aplikovaný na funkciu  $f$ ) sa vyskytuje veľmi často, druhý v knihách prakticky nenájdeme (ak nerátame zbierku úloh z analýzy, kde treba rátať práve túto kombináciu derivácií z didaktických dôvodov). Kombinácie, ktoré sa v knihách vyskytujú, sú spravidla výsledkom výpočtu, ktorý realizuje isté *názorné lokálne geometrické* predstavy o uvažovanej realite (napríklad fenomenologický opis difúzie látky v homogénnom prostredí). Práve takéto predstavy systematicky študuje *lokálna diferenciálna geometria*. V zhode s fyzikálnou skúsenosťou sa v nej pozoruje, že operácií, ktoré sú naozaj zaujímavé a často sa vyskytujú, je skutočne pomerne málo (dobrá správa, zvládnu sa v rozumnom čase).

Zo všeobecnej fyziky tiež poznáme fakt, že tá istá situácia sa dá opisovať pomocou *rôznych súradníc* (kartézskych, sférických, cylindrických,...) a z kontextu je zrejmé, že *výsledok* určite *nebude závisieť* od výberu týchto súradníc (čo sa ale často nedá povedať o *pracnosti* výpočtov; *to* je dôvod, prečo sa vyberajú na rôzne úlohy rôzne súradnicové sústavy). Samotné objekty a operácie s nimi sú teda nezávislé od výberu súradníc na ich opis, a preto neprekvapí, že vo vhodne vybudovanom aparáte sa bude dať veľká časť výpočtov urobiť úplne *bez súradníc* (aká veľká časť to bude, závisí od problému aj majstrovstva používateľa aparátu). Takéto "abstraktné" (bez-súradnicové) výpočty majú viacero predností. Bývajú spravidla podstatne kratšie a prehľadnejšie (dajú sa preto napríklad ľahko viackrát skontrolovať), jednotlivým krokom sa dá lepšie názorne rozumieť a podobne. Porovnajme na ilustráciu napríklad takéto rovnice

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi g = 0 & \quad \leftrightarrow \quad \xi^k g_{ij,k} + \xi^k_{,i} g_{kj} + \xi^k_{,j} g_{ik} = 0 \\ \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0 & \quad \leftrightarrow \quad \ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k = 0 \\ \nabla g = 0 & \quad \leftrightarrow \quad g_{ij,k} - \Gamma_{ijk} - \Gamma_{jik} = 0 \end{aligned}$$

V tomto texte sa postupne dozvieme, že dvojice rovníc vľavo-vpravo hovoria vždy *presne to isté*: výraz vpravo vzniká rozpísaním do (ľubovoľných) súradníc výrazu vľavo.

(Prvý prípad sú *Killingove rovnice* a ich obsahom je fakt, že Lieova derivácia  $g$  v smere  $\xi$  je nulová, t.j. že metrický tenzor  $g$  má *symetriu* danú vektorovým poľom  $\xi$ ; druhý je rovnica geodetiky a vyjadruje podmienku, že ideme rovnomerne priamočiario (= s nulovým zrýchlením); tretí je podmienka metričnosti konexie a hovorí, že pri paralelnom prenose sa bude zachovávať skalárny súčin vektorov. Komu je už teraz všetko toto jasné, môže túto knihu hneď predať a za získané peniaze si kúpiť a začať čítať nejakú rozumnejšiu a pokročilejšiu literatúru; tým, čo zostali čítať ďalej, to bude úplne jasné po prečítaní štvrtej a pätnástej kapitoly.)

Napriek maximálnemu zjednodušeniu zápisu súradnicových verzií rovníc (sumačná konvencia, zápis parciálnych derivácií pomocou čiarok) je zrejmé, že stručnosť ľavých strán je bezkonkurenčná. Ak sa preto naučíme *spoľahlivo manipulovať* s objektmi typu ľavých strán, získame tým schopnosť efektívne (nepriamo) narábať s pomerne komplikovanými výrazmi, ktoré obsahujú parciálne derivácie a pritom navyše v každom kroku rozumieť, čo *objektívne* robíme.

Analýza sa zvyčajne rozvíja v kartézskom priestore  $\mathbb{R}^n$  resp. v otvorených oblastiach v  $\mathbb{R}^n$ . V skutočnosti však mnohé priestory, na ktorých bez mihnutia oka analýzu používame, prísne vzaté otvorenými oblasťami v  $\mathbb{R}^n$  *nie sú*, hoci k nim majú veľmi blízko.

V teoretickej mechanike napríklad vyšetrujeme pohyb kyvadiel tak, že riešime (diferenciálne) Lagrangeove rovnice pre časovú závislosť súradníc v ich konfiguračných priestoroch. Pritom tieto konfiguračné priestory nie sú vždy otvorenými oblasťami v  $\mathbb{R}^n$ . Pre rovinné kyvadlo je to napríklad *kružnica*  $S^1$ . Je to síce jednorozmerný priestor, avšak je intuitívne zrejmé (a dá sa dokázať), že je to čosi *iné*, ako (otvorená oblasť v)  $\mathbb{R}^1$ . Podobne konfiguračný priestor sférického kyvadla je dvojrozmerná sféra  $S^2$ , ktorá sa líši od (otvorenej oblasti v)  $\mathbb{R}^2$ .

Všimnime si však, že dostatočne *malé okolia* ľubovoľného bodu na  $S^1$  aj  $S^2$  sú na nerozoznanie od dostatočne malých okolí ľubovoľných bodov v  $\mathbb{R}^1$ , resp.  $\mathbb{R}^2$ ; sú v nejakom zmysle "lokálne rovnaké", rozdiel je "až globálny". Aplikácie matematickej analýzy (aj vo fyzike) takto prirodzene tlačia smerom k jej rozšíreniu na všeobecnejšie priestory, akými sú otvorené oblasti v  $\mathbb{R}^n$ .

Takýmito všeobecnejšími priestormi sú *hladké variety*. Veľmi voľne povedané ide o priestory, ktoré sa *krátkozrakému pozorovateľovi* javia ako  $\mathbb{R}^n$  (pre vhodné  $n$ ), ale celkovo ("topologicky", keď si založí okuliare a vidí už dobre aj do diaľky) môžu vyzeráť úplne ináč ako  $\mathbb{R}^n$ .

Príjemnou pozornosťou podniku je fakt, že aparát, ktorý sa vybuduje na

vyššie spomínaný opis geometrických predstáv nezávisle od výberu súradníc, je zároveň automaticky vhodný aj na opis *globálnych* geometrických objektov, t.j. objektov korektne definovaných *na celej variete*. Budeme teda hovoriť aj o *globálnej analýze*, analýze na varietách. Napríklad spomenuté rovnice  $\mathcal{L}_\xi g = 0$ ,  $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$  a  $\nabla g = 0$  sú všetko rovnice na varietách a ich riešenia sú tiež globálne dobre definované objekty na varietách.

Samotný kľúčový pojem hladkej variety si zavedieme v 1. kapitole. Výklad bude hlavne intuitívny. Veľa vecí, ktoré sa podrobne rozvádzajú v matematickej literatúre o diferenciálnej *topológii*, sa spomenie len veľmi orientačne alebo dokonca sa nespomenú vôbec. Cieľom tejto úvodnej kapitoly bude povedať len to, čo treba nevyhnutne vedieť na pochopenie (už na pracovnej úrovni) hlavnej náplne tohoto textu, ktorou je diferenciálna *geometria* na varietách.

## Zhrnutie 1. kapitoly

*Hladká varieta* je základnou hracou plochou v diferenciálnej geometrii. Je to zovšeobecnenie kartézskeho priestoru  $\mathbb{R}^n$  (resp. otvorenej oblasti v  $\mathbb{R}^n$ ) na objekt, ktorý vyzerá (len) *lokálne* ako  $\mathbb{R}^n$ , ale jeho globálna štruktúra môže byť oveľa komplikovanejšia. Vždy sa však dá predstaviť ako celok zložený z *niekoľkých* kúskov homeomorfných  $\mathbb{R}^n$ . Číslo  $n$ , ktoré je rovnaké pre všetky kúsky, sa volá rozmer variety. Technická realizácia týchto myšlienok je založená na pojmach *mapa* (lokálne súradnice) a *atlas* pozostávajúci z niekoľkých máp. Kartézsky súčin  $M \times N$  dvoch variet je nová varieta, vytvorená z pôvodných variet  $M$  a  $N$ . Ľubovoľná varieta sa dá realizovať ako veľmi slušne uložená plocha v dostatočne rozmernom *kartézskom* priestore.

$(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2$	euklidovská vzdialenosť bodov v $\mathbb{R}^n$	1.1.5
$\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n[x^1, \dots, x^n]$	mapa (lokálne súradnice) v oblasti $\mathcal{O}$	1.3
$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$	zámena súradníc v oblasti $\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta$	1.3
$(\varphi_\alpha(x), \psi_\alpha(y)) \in \mathbb{R}^{n+m}$	atlas pre kartézsky súčin $X \times Y$	1.3.3
$\hat{f} \equiv \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$	súradnicové vyjadrenie $f : M \rightarrow N$	1.4
$y^{m+1} = \dots = y^n = 0$	vnorenie (časť súradníc na $N$ nulových)	1.4
$f(M) \subset N$	$f(M)$ je podvarieta $N$ ( $f$ = vloženie)	1.4
$\phi^1(x) = \dots = \phi^m(x) = 0$	hladké väzby (varieta ako plocha v $\mathbb{R}^n$ )	1.5
$x^i(u^1, \dots, u^m)$	parametrické vyjadrenie variety	1.5

## Zhrnutie 2. kapitoly

V každom bode  $x$   $n$ -rozmernej variety  $M$  existuje kanonicky istý  $n$ -rozmerný lineárny priestor  $T_x M$ , dotykový (tangenciálny) priestor v bode  $x$ . Jeho elementy sa volajú vektory v bode  $x$ . Existuje viacero navzájom ekvivalentných definícií tohoto pojmu, ktoré sú výhodné v rôznych kontextoch. Vektorové *poľa* na variete  $M$  je hladké priradenie vektora každému bodu  $x \in M$ . Integrálna krivka vektorového poľa je taká krivka, ktorá v každom bode ide tak, ako jej diktuje vektor poľa v tomto bode. Štandardné konštrukcie multilineárnej algebry (konštrukcia tenzorov typu  $\binom{p}{q}$  pre daný vektorový priestor  $L$ ) vedú k pojmu *tenzorového poľa* typu  $\binom{p}{q}$  na variete. Špeciálnymi prípadmi sú funkcie (typ  $\binom{0}{0}$ ), vektorové a kovektorové polia (typ  $\binom{1}{0}$  a  $\binom{0}{1}$ ), polia bilineárnych foriem (typ  $\binom{0}{2}$ ), v symetrickom nedegenerovanom prípade metrický

tenzor) a lineárnych operátorov (typ  $\binom{1}{1}$ ).

$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$	krivka $\gamma$ na variete $M$	2.1
$f : M \rightarrow \mathbb{R}$	funkcia $f$ na variete $M$	2.1
$e_i := \partial_i _P$	súradnicová báza v $T_P M$	2.2.6
$a^i \mapsto a'^i = J_j^i(P)a^j$	transformácia komponent vektora	2.2.6
$V(fg) = (Vf)g + f(Vg)$	Leibnizovo pravidlo pre pole $V$	2.2.8
$\dot{x}^i = V^i(x) \quad (\dot{\gamma} = V)$	rovnice pre integrálne krivky poľa $V$	2.3.1
$v = \sum_{b=1}^n v^b e_b \equiv v^b e_b$	sumačná konvencia	2.4.2
$\langle e^a, e_b \rangle = \delta_b^a$	báza $e^a$ je duálna voči $e_a$	2.4.2
$t_{a\dots b}^{c\dots d} := t(e_a, \dots, e_b; e^c, \dots, e^d)$	komponenty tenzora $t \in T_q^p(L)$	2.4.6
$v_a := g_{ab}v^b, \quad \alpha^a := g^{ab}\alpha_b$	dvíhanie a spúšťanie indexov	2.4.13
$\langle df, V \rangle := Vf$	gradient ako kovektorové pole	2.5.3
$T = (1/2)h(\dot{\Gamma}, \dot{\Gamma})$	kinetická energia sústavy $N$ bodov	2.6.7
$l[\gamma] := \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}$	funkcionál dĺžky krivky $\gamma$	2.6.9
$(\nabla f)^i := g^{ij}f_{,j} \quad (\nabla f := \sharp_g df)$	gradient ako vektorové pole	2.6

### Zhrnutie 3. kapitoly

Každé (hladké) zobrazenie bodov variet  $f : M \rightarrow N$  indukuje zobrazenie tenzorov na nich. Označuje sa  $f_*$ , ak prenáša tenzory v smere  $f$  (z  $M$  na  $N$ ) a  $f^*$ , ak ich prenáša proti smeru  $f$  (z  $N$  na  $M$ ). Pre difeomorfizmy sa dá zaviesť  $f_*$  aj  $f^*$  pre ľubovoľné tenzorové pole. Ak  $f$  nie je difeomorfizmus, môžu nastať problémy. Pre tenzorové polia typu  $\binom{0}{p}$  existuje zobrazenie  $f^*$  vždy. Špeciálnym prípadom je indukovanie metrického tenzora na  $M$  z riemannovskej variety  $(N, h)$ , čím sa získa riemannovská varieta  $(M, g)$ ,  $g = f^*h$ . Najčastejšie ide o indukovanie metrického tenzora na podvarietu  $M$  euklidovského priestoru  $N = E^n$  (alebo všeobecnejšie  $E^{r,s}$ ), na ktorom



existuje kanonický metrický tenzor  $h = \eta$ .

$f^*\psi := \psi \circ f$	pull-back funkcie $\psi$	3.1.1
$f_*[\gamma] := [f \circ \gamma]$	push-forward vektora $[\gamma]$	3.1.2
$(f_*V)\psi := V(f^*\psi)$	push-forward vektora $V$	3.1.2
$(f^*t)(U, \alpha) := t(f_*U, (f^{-1})^*\alpha)$	pull-back tenzorového poľa	3.1.6
$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$	pull-back zloženého zobrazenia	3.1.6
$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$	push-forward zloženého zobrazenia	3.1.6
$f^* \circ C = C \circ f^*$	pull-back komutuje s kontrakciami	3.1.7
$df^* = f^*d$	pull-back komutuje s gradientom	3.1.9
$g := f^*h$	indukovaný metrický tenzor	3.2.1
$g_{ij} = J_i^a h_{ab} J_j^b \equiv y^a_{,i} h_{ab} y^b_{,j}$	indukovaný metrický tenzor	3.2.1
$T = (1/2)g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$	kinetická energia v konf. priestore	3.2.9

#### Zhrnutie 4. kapitoly

Lubovoľné vektorové pole  $V$  na  $M$  indukuje zobrazenie  $\Phi_t : M \rightarrow M$ , pri ktorom sa bod  $x$  posunie o parameter  $t$  po integrálnej krivke štartujúcej v  $x$ . Hovorí sa mu tok generovaný poľom  $V$ , alebo vzhľadom na skladáciu vlastnosť  $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$  aj jednoparametrická grupa transformácií. Zobrazenie  $\Phi_t$  variety  $M$  na seba indukuje v zmysle 3. kapitoly zobrazenie tenzorových polí  $\Phi_t^*$ , ktoré generuje *lieovský prenos* tenzorov (pozdĺž integrálnych kriviek poľa  $V$ ). Mierou citlivosti (nekonštantnosti) tenzorového poľa  $A$  voči lieovskému prenosu je *Lieova derivácia*  $\mathcal{L}_V A := \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \Phi_t^* A$ . Dvomi vektorovými poľami  $V, W$  sa dá priradiť tretie, ich komutátor  $[V, W]$  (ktorý je zároveň totožný s  $\mathcal{L}_V W$ ). Dve polia komutujú práve vtedy, keď komutujú im zodpovedajúce toky; nekomutovanie vektorových polí takto vedie na javy anholonómie (závislosti od cesty). Killingov vektor je vektorové pole, v smere ktorého je lieovsky konštantný metrický tenzor. Tok Killingovho vektora je izometriou riemannovskej variety  $(M, g)$ , t.j. zobrazením  $M$  na seba, pri ktorom sa zachovávajú všetky dĺžky a uhly. Ak sa zachovávajú len uhly, ide o konformné transformácie a generujú ich konformné Killingove vektory.

$\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$	“skladacia” vlastnosť toku	4.1.2
$\Phi_t^* A = A$	pole $A$ je lieovsky invariantné	4.2
$\mathcal{L}_V A := (d/dt)_0 \Phi_t^* A$	Lieova derivácia $A$ v smere $V$	4.2
$\mathcal{L}_V(A + \lambda B) = \mathcal{L}_V A + \lambda \mathcal{L}_V B$	L. derivácia lin. kombinácie	4.3.1
$\mathcal{L}_V(A \otimes B) = \mathcal{L}_V A \otimes B + A \otimes \mathcal{L}_V B$	L. derivácia tenzor. súčinu	4.3.1
$\mathcal{L}_V \circ C = C \circ \mathcal{L}_V$	L. derivácia a kontrakcie	4.3.1
$\mathcal{L}_V W = [V, W]$	L. derivácia $W$ v smere $V$	4.3.6
$\mathcal{L}_{V+\lambda W} = \mathcal{L}_V + \lambda \mathcal{L}_W$	L. derivácia v smere lin.komb.	4.3.8
$\mathcal{L}_{[V,W]} = [\mathcal{L}_V, \mathcal{L}_W]$	L. derivácia v smere komutátora	4.3.8
$\Phi_t^* = e^{t\mathcal{L}_V} \equiv 1 + t\mathcal{L}_V + \dots$	exponenta L. derivácie	4.4.2
$\Phi_{-\epsilon}^W \circ \Phi_{-\epsilon}^V \circ \Phi_{-\epsilon^2}^{[V,W]} \circ \Phi_{\epsilon}^W \circ \Phi_{\epsilon}^V = \hat{1}$	interpretácia komutátora $[V, W]$	4.5.2
$l[f \circ \gamma, g] = l[\gamma, f^* g]$	správanie sa funkcionálu dĺžky	4.6.1
$f^* g = g$	$f$ je izometria $(M, g)$	4.6.2
$f^* g = \sigma g$	$f$ je konformná transformácia	4.6.3
$\mathcal{L}_{\xi} g = 0$	Killingove rovnice	4.6.5
$f^* \eta = \eta$	$f$ je Poincarého transformácia	4.6.10
$\mathcal{L}_{\xi} g = \chi g$	konformné Killingove rovnice	4.6.16
$\varepsilon = (1/2)\mathcal{L}_{\mathbf{u}} g$	tenzor deformácie (pruž. kont.)	4.6.24
$(1/2)\mathcal{L}_{\mathbf{v}} g$	tenzor rýchlosti def. (visk. tek.)	4.6.25

### Zhrnutie 5. kapitoly

V kontexte výpočtu objemov rovnobežnostenov (a tým aj v teórii integrovania, kde sa funkčné hodnoty násobia objemami *infinitesimalných* rovnobežnostenov) sa ukáže mimoriadny význam úplne antisymetrických čisto kovariantných tenzorov, ktorým sa hovorí formy. Celá táto kapitola študuje formy na úrovni lineárnej algebry. Okrem všeobecných vlastností, ktoré platia pre všetky tenzory, sú v hre aj dôležité špecifiká. Formy majú prirodzené  $\mathbb{Z}$ -graduovanie, funguje na nich (graduovane komutatívny) vonkajší súčin  $\wedge$  (čím vzniká graduovaná *vonkajšia* = Grassmannova algebra) a vnútorný súčin  $i_w$  (ktorý je deriváciou stupňa -1 tejto algebry). Ak je k dispozícii aj metrický tenzor a orientácia (daná formou objemu), prístupuje Hodgeov operátor  $*$ .

Prirodzenú interpretáciu tu nadobúda aj obyčajný determinant.

$\wedge := \frac{(p+q)!}{p!q!} \pi^A \circ \otimes$	vonkajší súčin foriem	5.2.4
$(\beta + \lambda\tau) \wedge \alpha = \beta \wedge \alpha + \lambda\tau \wedge \alpha$		
$\alpha \wedge (\beta + \lambda\tau) = \alpha \wedge \beta + \lambda\alpha \wedge \tau$	bilinearita súčinu $\wedge$	5.2.4
$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$	asociativita súčinu $\wedge$	5.2.4
$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$	$\mathbb{Z}$ -graduovaná komutativita $\wedge$	5.2.4
$\alpha = (1/p!) \alpha_{a\dots b} e^a \wedge \dots \wedge e^b$	vyjadrenie $p$ -formy cez $e^a$	5.2.9
$\hat{\eta}\alpha := (-1)^{\deg \alpha} \alpha$	hlavný automorfizmus v $\Lambda L^*$	5.3.3
$(i_v \alpha)(u, \dots, w) := \alpha(v, u, \dots, w)$	vnútorný súčin ( $v$ a $\alpha$ )	5.4.1
$(i_v \alpha)_{a\dots b} = v^c \alpha_{ca\dots b}$	komponentné vyjadrenie $i_v$	5.4.1
$i_v(\alpha \wedge \beta) = (i_v \alpha) \wedge \beta + (\hat{\eta}\alpha) \wedge (i_v \beta)$	grad. Leibn. pravidlo pre $i_v$	5.4.2
$\delta_{c\dots d}^{a\dots b} \equiv \delta_{[c}^{[a} \dots \delta_{d]}^{b]}$	$p$ -delta (Kroneckerov) symbol	5.6.2
$n! \det A = \varepsilon_{a\dots b} \varepsilon^{c\dots d} A_c^a \dots A_d^b$	vyjadrenie determinantu	5.6.2
$\omega_g = o(f) \sqrt{ g } f^1 \wedge \dots \wedge f^n$	metrická forma objemu	5.7.3
$\text{vol}(Au, \dots) =: (\det A) \text{vol}(u, \dots)$	determinant lin. zobr. $A$	5.7.6.
$p!(\ast\alpha)_{a\dots b} := \alpha^{c\dots d} \omega_{c\dots da\dots b}$	Hodgeov operátor duality	5.8.1
$\ast_g \ast_g = \text{sgn } g (-1)^{p(n+1)}$	kvadrát $\ast_g$ je $\pm$ jednotka	5.8.2
$\alpha \wedge \ast_g \beta =: (\alpha, \beta)_g \omega_g$	skalárny súčin $(\alpha, \beta)_g$ foriem	5.8.4
$p!(\alpha, \beta)_g = \alpha_{a\dots b} \beta^{a\dots b}$	kompon. vyjadrenie $(\alpha, \beta)_g$	5.8.4

## Zhrnutie 6. kapitoly

Študujú sa formy už ako polia na variete (*diferenciálne* formy). Okrem algebraických konštrukcií z 5. kapitoly pristupuje kľúčový pojem *vonkajšej derivácie*. Ide o deriváciu stupňa +1 Cartanovej algebry foriem na variete, ktorá je navyše nilpotentná ( $dd = 0$ ). Jednoduchým (ale užitočným) zovšeobecnením doterajších foriem sú formy s hodnotami v ľubovoľnom vektorovom

priestore (doterajšie mali hodnoty v  $\mathbb{R}$ ).

$\alpha = (1/p!) \alpha_{i\dots j}(x) dx^i \wedge \dots \wedge dx^j$	súradnicové vyjadrenie $p$ -formy	6.1.1
$D_k(a_i b) = (D_k a_i) b + (-1)^{ik} a_i (D_k b)$	derivácia stupňa $k$	6.1.7
$(d\alpha)_{i\dots jk} := (-1)^p (p+1) \alpha_{[i\dots j, k]}$	vonkajšia derivácia súradnicovo	6.2.5
$dd = 0$	vonk. derivácia je nilpotentná	6.2.5
$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (\hat{\eta}\alpha) \wedge d\beta$	grad. Leibnizovo pravidlo pre $d$	6.2.5
$\mathcal{L}_V = i_V d + d i_V$	Cartanova identita	6.2.8
$[d, \mathcal{L}_V] \equiv d \mathcal{L}_V - \mathcal{L}_V d = 0$	v. der. komutuje s Lieovou	6.2.10
$[d, f^*] \equiv d f^* - f^* d = 0$	v. der. komutuje s pull-backom	6.2.11
$d\alpha(U, V) = \dots$	Cartanov vzorec (pre $p = 1$ )	6.2.13
$d\beta(U, V, W) = \dots$	Cartanov vzorec (pre $p = 2$ )	6.2.13
$\alpha = \alpha^A E_A$	forma na $M$ s hodnotami vo $V$	6.4.1

## Zhrnutie 7. kapitoly

Rozborom konkrétnych jednoduchých príkladov sa zisťuje, že na podintegrálne výrazy je užitočné nazerať ako na diferenciálne formy zo 6. kapitoly. Definuje sa základný pojem integrálu formy po reťazci, pričom sa predpokladá elementárna znalosť bežného Riemannovho viacnásobného integrálu. Formuluje sa Stokesova veta pre diferenciálne formy (dáva do súvisu integrál formy po hranici reťazca s integrálom *vonkajšej derivácie* tejto formy po samotnom reťazci). Diskutuje sa reinterpretácia integrálu po oblasti na orientovateľnej variete ako integrálu po reťazci (vrátane tvaru Stokesovej vety) a špecifikum integrovania po *riemannovskej* variete. Odhaľuje sa jednoduché správanie sa

integrálu voči zobrazeniam variet.

$c = c_i s_p^i$	euklidovský p-reťazec	7.2
$\partial(P_0, \dots, P_p) = \dots$	hraničný operátor na simplexe	7.2.2
$\partial\partial = 0$	hranica nemá hranicu	7.2.2
$\int_c d\alpha = \int_{\partial c} \alpha$	Stokesova veta	7.5
$\text{vol}(D) := \int_D \omega$	objem oblasti $D$ na $(M, \omega)$	7.6
$\epsilon \int_D i_V \alpha = \int_{D_{\epsilon V}} \alpha$	“mincová interpretácia” formy $i_V \alpha$	7.6.11
$\int_D f := \int_D f \omega_g$	integrál prvého druhu na $(M, g, o)$	7.7
$\int \sqrt{\det(g_{\mu\nu} x^{\mu}_{,a} x^{\nu}_{,b})} du^1 \wedge du^2$	plocha dvojrozmernej oblasti	7.7.5
$\langle \rho \rangle_D := \frac{\int_D \rho \omega_g}{\int_D \omega_g}$	stredná hodnota $\rho$ cez $D$	7.7
$\int_{f(c)} \alpha = \int_c f^* \alpha$	integrál a zobrazenie variet	7.8.1

### Zhrnutie 8. kapitoly

Všeobecná Stokesova veta pre diferenciálne formy zo 7. kapitoly má mnohoraké klasické prejavy. Ukazuje, že je v nej skrytá napríklad Gaussova-Ostrogradského veta, Greenove identity, ”obyčajná” Stokesova veta z vektorovej analýzy, niektoré fakty z teórie funkcií komplexnej premennej. Zavádza sa kodiferenciál  $\delta$  (ako operátor združený k diferenciálu  $d =$  vonkajšej derivácii) a samozdružená kombinácia  $\Delta = -(d\delta + \delta d)$ , Laplaceov-deRhamov operátor (zovšeobecnenie Laplaceovho operátora na funkciách na ľubovoľné formy). V časti o vektorovej analýze sa prichádza k záveru, že operácie gra-

divergencia a rotácia sú len zamaskovaná vonkajšia derivácia.

$\mathcal{L}_V \omega_g =: (\operatorname{div} V) \omega_g$	definícia divergencie $V$	8.2.1
$\operatorname{div} V = \frac{1}{\sqrt{ g }} (\sqrt{ g } V^k)_{,k}$	súradnicové vyjadrenie $\operatorname{div} V$	8.2.1
$\langle \operatorname{div} V \rangle_D = \frac{d}{dt} \Big _{t=0} \frac{\operatorname{vol} D(t)}{\operatorname{vol} D}$	interpretácia $\operatorname{div} V$	8.2.2
$\langle \operatorname{div} V \rangle_D = \frac{\text{tok } V \text{ cez } \partial D}{\text{objem } D}$	iná interpretácia $\operatorname{div} V$	8.2.9
$\int_D (\operatorname{div} V) \omega_g = \int_{\partial D} V^i d\Sigma_i _{\partial D}$	Gaussova veta	8.2.7
$\langle \alpha, \beta \rangle := \int_D \alpha \wedge * \beta$	skalárny súčin foriem na $(M, g)$	8.3.1
$\delta := *^{-1} d * \hat{\eta}$	definícia kodiferenciálu $\delta$	8.3.2
$\langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \delta\beta \rangle + \int_{\partial D} \alpha \wedge * \beta$	základná vlastnosť kodiferenciálu	8.3.2
$\Delta := -(\delta d + d\delta) \equiv -(d^+ d + dd^+)$	Laplaceov-deRhamov operátor	8.3.3
$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{ g }} (\sqrt{ g } g^{kj} f_{,j})_{,k}$	Laplaceov-Beltramiho operátor	8.3.5
$\langle du, dv \rangle + \langle u, \Delta v \rangle = \int_{\partial D} u * dv$	“obyčajná” Greenova identita	8.4.1
$\langle u, \Delta v \rangle - \langle v, \Delta u \rangle = \dots$	“symetrická” Greenova identita	8.4.1
$f, \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}, \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, hdV$	diferenciálne formy na $E^3$	8.5.2
$d(\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}) = (\operatorname{rot} \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$	definícia $\operatorname{rot} \mathbf{A}$	8.5.4
$(\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}) \wedge (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}$	ako sa objaví vektorový súčin	8.5.8
$g = h_1^2 dx^1 \otimes dx^1 + \dots$	Lamého koeficienty	8.5.9
$d(f(z)dz) = 0$	prečo platí Cauchyho veta	8.6.5

### Zhrnutie 9. kapitoly

Forma sa volá uzavretá, ak má nulovú vonkajšiu deriváciu a exaktná, ak je vonkajšou deriváciou inej formy (svojho *potenciálu*). Vzhľadom na nilpotentnosť operátora  $d$  (t.j. platnosť  $dd = 0$ ) je exaktná forma automaticky uzavretá. Ukazuje sa, že vo fyzike často využívané opačné tvrdenie (obrátenie tvrdenia  $dd = 0$ ) všeobecne neplatí, ale konštruktívne sa overí jeho platnosť na *stiahnuteľných* varietách (resp. *lokálne*, t.j. v dostatočne malom

okolí ľubovoľného bodu na ľubovoľnej variete). To je obsah Poincarého lemy. Jemnejší pohľad na vec umožňuje aparát teórie kohomológií, v tomto prípade ide konkrétne o kohomológie *deRhamovho* komplexu.

$\hat{h} = - \int_0^\infty dt \Phi_t^* i_\xi$	homotopický operátor	9.2.3
$d \circ \hat{h} + \hat{h} \circ d = \hat{1}$	základná vlastnosť $\hat{h}$	9.2.3
$\alpha = d(\hat{h}\alpha) \equiv d\beta$	$\beta \equiv \hat{h}\alpha$ je potenciál formy $\alpha$	9.2.4
$x^k \int_0^1 d\lambda \lambda^{p-1} \alpha_{ki\dots j}(\lambda x)$	súrad. vyjadrenie $(\hat{h}\alpha)_{i\dots j}(x)$	9.2.7
$[e_a, e_b] = c_{ab}^c(x) e_c$	koeficienty anholonómie pre $e_a$	9.2.10
$e_a = \partial_a \Leftrightarrow [e_a, e_b] = 0$	holonómnosť repérneho poľa	9.2.11
$e^a = dx^a \Leftrightarrow de^a = 0$	holonómnosť korepérneho poľa	9.2.11
$Z^p := \text{Ker } d_p$	$p$ -kocykly	9.3.1
$B^p := \text{Im } d_{p-1}$	$p$ -kohranice	9.3.1
$H^p := Z^p / B^p$	$p$ -ta kohomologická grupa	9.3
$b^p := \dim H^p$	$p$ -te Bettiho číslo	9.3
$\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(M)$	deRhamov komplex variety $M$	9.3.2

## Zhrnutie 10. kapitoly

Grupy vstupujú do hry vo fyzike aj v matematike ako grupy *symetrie* čohosi, t.j. (v matematickej reči) ako grupy *automorfizmov* rôznych štruktúr. Explicitne sa vyšetrujú štruktúry, ktoré vedú na bežné klasické grupy (všeobecnú lineárnu, ortogonálnu, symplektickú, unitárnu,...). Spojením algebraického pojmu grupa a diferenciálno-topologického pojmu (analytická) varieta vzniká *Lieova grupa*. Vyššie spomínané grupy (aj iné) sú príklady Lieo-

vých grúp.

$G = \text{Aut}(X, \mathfrak{s})$	grupa automorfizmov $(X, \mathfrak{s})$	10.1
$h(Av, Aw) = h(v, w)$	$A$ zachováva bilineárnu formu $h$	10.1.4
$A_c^a h_{ab} A_d^b = h_{cd}$	kompon. vyjadrenie toho istého faktu	10.1.4
$A^T h A = h$	maticové vyjadrenie toho istého faktu	10.1.4
$\omega(Av, \dots, Aw) = \omega(v, \dots, w)$	$A$ zachováva formu objemu $\omega$	10.1.7
$A_c^a \dots A_d^b \varepsilon_{a\dots b} = \varepsilon_{c\dots d}$	kompon. vyjadrenie toho istého faktu	10.1.7
$\det A = 1$	maticové vyjadrenie toho istého faktu	10.1.7
$m(g, h) := gh$	kompozičný zákon v grupe	10.2.5
"klasické" maticové grupy	sú zhrnuté v úlohe	11.7.6

### Zhrnutie 11. kapitoly

Efektívnym nástrojom na štúdium pomerne zložitých objektov, akými sú Lieove grupy, je využitie ich bohatej diferenciálnej geometrie. Tá je dôsledkom compatibility štruktúry grupy a variety. Pomocou *ľavoinvariantných* vektorových polí sa dá Lieovej grupe kanonicky priradiť jej Lieova *algebra*, čo je objekt nepomerne jednoduchší, ako samotná grupa (je to konečnorozmerný lineárny priestor), napriek tomu však kóduje podstatnú časť informácie o grupe. Študuje sa dôležité exponenciálne zobrazenie z algebry do grupy.



$L_g h := gh, R_g h := hg$	ľavá a pravá translácia na grupe	11.1.1
$L_g^* T = T$	ľavoinvariantné tenzorové pole na $G$	11.1.4
$e_a(g) = L_{g*} E_a$	ľavoinv. repérne pole generované $E_a$	11.1.6
$(x^{-1})_k^i dx_j^k \equiv (x^{-1} dx)_j^i$	ľavoinvariantné 1-formy na $GL(n, \mathbb{R})$	11.1.9
$x_k^i \partial_j^k \equiv (x \partial)_j^i$	ľavoinv. vektorové polia na $GL(n, \mathbb{R})$	11.1.10
$[E_a, E_b] = c_{ab}^c E_c$	štruktúrne konštanty voči báze $E_a$	11.2.2
$de^a + (1/2)c_{bc}^a e^b \wedge e^c = 0$	Maurerov-Cartanov vzorec cez $e^a$	11.2.3
$\langle \theta, L_X \rangle := X, \theta = e^a E_a$	kanon. 1-forma $\theta$ na $G$ (Maurer-Cartan)	11.2.6
$d\theta + (1/2)[\theta \wedge \theta] = 0$	Maurerov-Cartanov vzorec cez $\theta$	11.2.6
$\gamma(t+s) = \gamma(t)\gamma(s)$	1-parameterická podgrupa na $G$	11.3
$\gamma^X(t) = e^{tX}$	1-parameterická podgrupa cez exp	11.4.1
$f(e^X) = e^{f'(X)}$	odvodený homomorfizmus $f'$	11.5.3
$x^{-1} dx$	kanonická 1-forma na $GL(n, \mathbb{R})$	11.7.19
$j^*(x^{-1} dx) = x^{-1}(z) dx(z)$	kanon. 1-forma na matic. grupách	11.7.21

## Zhrnutie 12. kapitoly

Lieova grupa dáva o sebe často vedieť cez svoju *reprezentáciu*, t.j. existuje homomorfizmus tejto grupy do grupy obrátiteľných lineárnych operátorov v nejakom vektorovom priestore a v danom kontexte vidíme len jej homomorfny obraz. Reprezentácia grupy automaticky indukuje aj istú (odvodenú) reprezentáciu jej Lieovej *algebry*, čo je všeobecne homomorfizmus Lieovej algebry do Lieovej algebry (všetkých) lineárnych operátorov (vo fixnom lineárnom priestore). Ak daná reprezentácia pripúšťa nejaký netriviálny invariantný podpriestor, volá sa *reducibilná*, lebo sa dá redukovať na (menšiu) reprezentáciu v tomto podpriestore. *Ireducibilné* sa takto zmenšiť nedajú. Kritériám ireducibility sa venuje Schurova lema. Ak k danému podpriestoru existuje aj invariantný doplnok, reprezentácia je ekvivalentná priamemu súčtu dvoch menších. Takýto doplnok sa dá dostať napríklad ako *ortogonálny* doplnok voči *invariantnému* skalárnemu súčinu (ak existuje; na kompaktných grupách existuje vždy a ukazuje sa, ako sa dá získať). S reprezentáciami sa dajú robiť isté konštrukcie, napríklad priamy súčet a súčin; kombináciou s ohraničením na invariantné podpriestory vo výsledku sa dá často získať spústa reprezentácií z malej zásoby na začiatku (niekedy aj všetky z jednej).

Invariantné tenzory a s nimi spojené splietajúce operátory umožňujú "meniť typ" veličín, priradiť vektorom, na ktoré pôsobí grupa cez reprezentáciu  $\rho_1$  vektory, na ktoré pôsobí cez  $\rho_2$ . Každá reprezentácia Lieovej algebry indukuje istý komplex; trochu sa venujeme jeho kohomológiám.

$\rho(1 + \epsilon X) = 1 + \epsilon \rho'(X)$	výpočet odvodenej reprezentácie $\rho'$	12.1.6
$\rho'(E_i)E_a =: \rho_{ai}^b E_b$	maticové prvky generátorov	12.1.6
$\langle \check{\rho}(g)\alpha, v \rangle := \langle \alpha, \rho(g^{-1})v \rangle$	$\check{\rho}$ je duálna reprezentácia k $\rho$	12.1.8
$h(\rho(g)v, \rho(g)w) = h(v, w)$	skalárny súčin $h$ je $\rho$ -invariantný	12.1.10
$h_{bc}\rho_{ai}^c + h_{ac}\rho_{bi}^c = 0$	kompon. vyjadrenie toho istého faktu	12.1.10
$\rho_2(g)A = A\rho_1(g)$	$A$ je splietajúci operátor pre $\rho_1$ a $\rho_2$	12.2
$ge^X g^{-1} = e^{\text{Ad}_g X}$	pridruž. reprezentácia Ad grupy $G$	12.3.1, 2
$\text{Ad}_A X = AXA^{-1}$	expl. vyjadrenie Ad pre matic. grupy	12.3.1
$\text{ad}_X Y = [X, Y]$ ( $\text{ad} \equiv \text{Ad}'$ )	pridruž. reprezentácia ad algebry $\mathcal{G}$	12.3.5
$\text{ad}_{E_i} E_j = c_{ij}^k E_k$	komponentné vyjadrenie ad	12.3.5
$K(X, Y) := \text{Tr}(\text{ad}_X \text{ad}_Y)$	Killingova-Cartanova forma na $\mathcal{G}$	12.3.8
$\hat{C}_2 := k^{ij} \rho'(E_i) \rho'(E_j)$	kvadratický Casimirov operátor	12.3.13
$(g, h) \circ (\hat{g}, \hat{h}) = (g\hat{g}, h\hat{h})$	priamy súčin grúp	12.4.7
$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g) := \rho_1(g) \otimes \rho_2(g)$	priamy súčin reprezentácií $G$	12.4.11
$(\rho_1 \otimes \rho_2)' = \rho_1' \otimes \hat{1} + \hat{1} \otimes \rho_2'$	odvodená reprezentácia pre $\rho_1 \otimes \rho_2$	12.4.11

### Zhrnutie 13. kapitoly

Osobitne dôležitým prípadom pôsobení grúp sú pre diferenciálnu geometriu ich pôsobenia na varietách. Často je na týchto varietách dodatočná štruktúra, ktorú pritom zachovávajú (napríklad akcie izometriami na riemannovských varietách, alebo symplektické akcie na symplektických varietách, pozri paragraf 14.5). Pôsobenie Lieovej grupy dáva na infinitezimálnej úrovni pôsobenie svojej Lieovej algebry, s ktorou sú úzko spojené *fundamentálne* (vektorové) *polia*. Pôsobenie na bodoch variety štandardne (postupmi z paragrafu (3.1)) indukuje pôsobenie na funkciách na variete (a všeobecnejšie na tenzorových poliach), čím sa získava dôležitá konštrukcia ( $\infty$ -rozmerných) reprezentácií grupy a jej algebry (tenzorové polia, špeciálne aj funkcie, tvoria lineárny priestor). Ohraničením na invariantné podpriestory sa z nich často

dajú vytiahnuť aj konečnorozmerné reprezentácie. Vydelenie  $G$ -invariantného podpriestoru funkcií (tenzorových polí) býva častým postupom pri riešení diferenciálnych rovníc (ansatz s istým typom symetrie).

$L_{gh} = L_g \circ L_h$	ľavé pôsobenie $G$ na $M$	13.1
$R_{gh} = R_h \circ R_g$	pravé pôsobenie $G$ na $M$	13.1
$L_{\hat{g}}[g] := [\hat{g}g]$	pôsobenie $G$ v homog. priestore $G/H$	13.2.5
$[g][\hat{g}] := [g\hat{g}]$	násobenie vo faktorgrupe $G/H$	13.2.10
$gHg^{-1} = H$	$H$ je normálna podgrupa $G$	13.2.10
$G/\text{Ker } f = \text{Im } f$	veta o homomorfizme	13.2.12
$e^{-\frac{i}{2}\alpha\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}} \mapsto e^{\alpha\mathbf{n}\cdot\mathbf{1}}$	nakrytie $SO(3)$ pomocou $SU(2)$	13.3.6
$\rho(g)\psi := \psi \circ R_g \equiv R_g^*\psi$	reprezentácia $G$ v $\mathcal{F}(M)$	13.4.1
$\xi_X(m) := (d/dt) _0 R_{\exp tX}m$	generátor pôsobenia $R_g$	13.4.3
$\rho'(X) = \xi_X$	odvodená reprezentácia v $\mathcal{F}(M)$	13.4.3
$\xi_j = (-\mathbf{r} \times \nabla)_j$	generátory rotácií v $\mathbb{R}^3$	13.4.6
$\rho(g)\psi := \hat{\rho}(g) \circ \psi \circ R_g$	reprezentácia $G$ v $\mathcal{F}(M, V)$	13.4.11
$\rho'(X) = \xi_X + \hat{\rho}'(X)$	odvodená reprezentácia v $\mathcal{F}(M, V)$	13.4.12
$R_g^*A = \hat{\rho}(g^{-1})A$	$A$ je tenzorové pole typu $\hat{\rho}$	13.5.2
$\rho(g) := \hat{\rho}(g) \circ R_g^*$	reprezentácia $G$ v $\mathcal{T}_s^r(M, V)$	13.5.3

## Zhrnutie 14. kapitoly

Z vhodného prepisu Hamiltonových kanonických rovníc sa odhaľuje, že za týmito rovnicami je skrytá elegantná geometrická štruktúra. Jej jadrom je uzavretá nedegenerovaná 2-forma  $\omega$  na fázovom priestore, *symplektická* forma. Tá umožňuje dvíhať a spúšťať indexy, podobne, ako sa to robí pomocou metrického tenzora. Vektorové pole, ktoré je analógom gradientu v riemannovskom prípade (vzniká teda dvihnutím indexu na gradiente funkcie  $f$  ako kovektorovom poli), sa tu volá *hamiltonovské* pole generované funkciou  $f$ . Zistí sa, že Hamiltonove rovnice sú vlastne rovnice pre integrálne krivky hamiltonovského poľa generovaného funkciou  $H$ , *hamiltoniánom* sústavy. Tak sa prichádza k pojmu hamiltonovská *sústava*  $(M, \omega, H)$ . Vektorové polia, ktoré generujú automorfizmy hamiltonovskej sústavy (zachovávajú teda symplektickú formu a hamiltonián) sa volajú Cartanove symetrie a ich isté zjemenie *exaktné* Cartanove symetrie. Ukazuje sa, že existuje vzájomne jednoznačná korešpondencia medzi exaktnými Cartanovými symetriami a zachovávajúcimi sa veličinami. Do väčších detailov v tomto smere idú časti

o momentovom zobrazení a symplektickej redukcii. Bohatou triedou symplektických variet sú orbity koadjungovanej akcie (čo je pôsobenie  $G$  na duáli  $\mathcal{G}^*$  svojej vlastnej Lieovej algebry  $\mathcal{G}$ ), na ktorých existuje kanonická symplektická štruktúra.

$\zeta_f = \mathcal{P}(df, \cdot)$	hamiltonovské pole cez $\mathcal{P}$	14.1.1
$\{f, g\} = \mathcal{P}(df, dg)$	Poissonova zátvorka cez $\mathcal{P}$	14.1.1
$\dot{\gamma} = \zeta_H$	Hamiltonove rovnice bezsúradnicovo	14.1.1
$i_{\zeta_f}\omega = -df$	hamiltonovské pole cez $\omega$	14.1.6
$\{f, g\} = \omega(\zeta_f, \zeta_g)$	Poissonova zátvorka cez $\omega$	14.1.8
$\omega = dp_a \wedge dq^a$	sympl. forma v kanon. súradniciach	14.2.2
$\Omega_\omega := \text{const. } \omega \wedge \dots \wedge \omega$	Liouvilleova forma objemu na $(M, \omega)$	14.3.6
$\int_{\Phi_t(\mathcal{D})} \Omega_\omega = \int_{\mathcal{D}} \Omega_\omega$	Liouvilleova veta	14.3.6
$i_V\omega = -dF, \quad VH = 0$	$V$ je exaktná Cartanova symetria	14.4.2
$\gamma_s(t) := \Phi_s^V(\gamma(t))$	nové riešenie generované symetriou	14.4.6
$\langle P(x), X \rangle := P_X(x)$	momentové zobrazenie	14.5.3
$\omega_{Z^*}(\xi_X, \xi_Y) := \langle Z^*, [X, Y] \rangle$	symplektická forma na koadj. orbite	14.6.3

## Zhrnutie 15. kapitoly

Vo viacerých aplikáciách (napríklad pri výpočte zrýchlenia hmotného bodu v mechanike) sa efektívne robia lineárne kombinácie (pri zrýchlení konkrétne odčítanie) vektorov (alebo všeobecnejšie tenzorov) v rôznych bodoch. To sa na "prázdnej" variete nedá. Štruktúra, ktorá to legalizuje, je (lineárna) *konexia*  $\nabla$  na  $M$ . Umožňuje prenášať vektory po danej ceste (od ktorej v princípe závisí) a tým aj uskutočniť vyššie spomínané porovnanie (porovnáva sa vektor v  $x$  s vektorom, ktorý sa z  $y$  *prenesie do x*). Tento prenos sa *podľa definície* volá *paralelný* (v zmysle konexie  $\nabla$ ). Najjednoduchšie sa technicky zavádza postulovaním vlastností s ním súvisiacej *kovariantnej derivácie*. Konexia umožňuje zaviesť pojem rovnej čiary (geodetiky) na  $(M, \nabla)$ .

Lineárnej konexii sú priradené dve tenzorové polia, tenzor torzie a krivosti. Ukazuje sa, že podmienka kompatibility s metrikou (zachovanie skalárnych súčinov pri paralelnom prenose) a nulovosť torzie vedú na istú jednoznačnú konexiu (RLC konexia). Tenzor krivosti kóduje, či paralelný prenos (o infinitezimálne vzdialenosti) naozaj závisí od cesty; prejavuje sa aj v správaní

sa blízkych geodetík - spôsobuje ich odklon (Jacobiho rovnica). Nenulový tenzor torzie signalizuje neuzavretie geodetického rovnobežníka. Efektívnym nástrojom na prácu s konexiou je aparát diferenciálnych foriem. Základné objekty teórie sa zakódujú do foriem a vzťahy medzi nimi sú dané Cartanovými štruktúrnymi rovnicami.

Konexia sa volá úplný paralelizmus, ak na variete existuje kovariantne konštantné repérne pole. Tenzor krivosti je vtedy nulový a porovnanie vektorov (aj všeobecných tenzorov) v rôznych (aj vzdialených) bodoch vtedy má zmysel. Úplný paralelizmus s holonómnym (súradnicovým) kovariantne konštantným repérnym poľom sa volá plochá konexia. V tomto prípade je nulový nielen tenzor krivosti, ale aj tenzor torzie.

$\nabla_a e_b =: \Gamma_{ba}^c e_c$	koeficienty konexie voči $e_a$	15.2.1
$\nabla_j \partial_i =: \Gamma_{ij}^k \partial_k$	Christoffelove symboly 2. druhu	15.2.3
$\dot{V}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{x}^k V^j = 0$	rovnice paralel. prenosu vektora	15.2.6
$\nabla g = 0 \quad (g_{ij;k} = 0)$	konexia $\nabla$ je metrická	15.3.1
$T(U, V) := \nabla_U V - \nabla_V U - [U, V]$	tenzor torzie konexie $\nabla$	15.3.3
$\Gamma_{jk}^i = (1/2)g^{il}(g_{lj,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l})$	RLC konexia	15.3.4
$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0 \quad (\ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k = 0)$	rovnica geodetiky	15.4.1
$\exp v := \gamma_v(1), \quad \dot{\gamma}_v(0) = v \in T_P M$	exp. zobrazenie so stredom v $P$	15.4.10
$\langle \alpha, ([\nabla_U, \nabla_V] - \nabla_{[U, V]})W \rangle$	Riemannov tenzor krivosti	15.5.5
$R_{ab} := R_{acb}^c, \quad R := R_a^a \equiv R_{ab}^{ab}$	Ricciho tenzor a skalárna krivosť	15.5
$\nabla_V e_a = \omega_a^b(V) e_b \quad (\omega_b^a = \Gamma_{bc}^a e^c)$	formy konexie $\omega_a^b$ voči $e_a$	15.6.1
$\omega' = A^{-1} \omega A + A^{-1} dA$	transformácia $\omega$ pri $e' = eA$	15.6.2
$de + \omega \wedge e = T, \quad d\omega + \omega \wedge \omega = \Omega$	Cartanove štruktúrne rovnice	15.6.7
$d\Omega + \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega = 0$	Bianchiho identita (pre RLC)	15.6.16
$\Omega \wedge e = 0$	Ricciho identita (pre RLC)	15.6.16
$\nabla_{\dot{\gamma}}^2 \xi = R(\dot{\gamma}, \xi) \dot{\gamma}$	Jacobiho rovnica (odklon geod.)	15.7.2
$R_{bcd}^a = 0 = T_{bc}^a$	plochá konexia	15.8.6

## Zhrnutie 16. kapitoly

(Štvor)tenzorový zápis Maxwellových rovníc v Minkowského priestor(čas)s) e odhaľuje, že tenzory, ktoré sa v nich objavujú, sú veľmi špeciálne - ide

o *diferenciálne formy*. Preto najprirodzenejším jazykom na štvorrozmernú formuláciu elektrodynamiky je jazyk diferenciálnych foriem. Formy v Minkowského priestor(čas)e majú (ako dôsledok delenia priestoročasu na "čas" a "priestor") špeciálnu štruktúru: prirodzene vzniká ich vyjadrenie pomocou dvoch *priestorových* foriem. Takéto vyjadrenie foriem (a operácií na nich) je efektívnym mostom medzi štvorrozmernou a (historicky staršou) trojrozmernou formuláciou elektrodynamiky. Formy sú užitočné nielen v elektrodynamike, ale v teórii poľa všeobecne. Jednoducho sa cez ne zapisujú *účinkové integrály* (keďže podintegrálne výrazy sú vždy formy) a rovnako jednoducho sa počítajú aj ich extrémny, ktoré dávajú pohybové rovnice (prirodzene sa v nich objavuje kodiferenciál). S priestoročasovými symetriami úzko súvisí *tenzor energie-hybnosti* poľa, ktorý vzniká variáciou účinku podľa metrického tenzora. Tento tenzor sa objavuje (ako zdroj) aj v Einsteinových rovniciach gravitačného poľa. Skúma sa ich variačná formulácia, porovnáva sa Hilbertov účinok, kde sa varíruje voči metrickému tenzoru, s Cartanovým, ktorý je funkcionálom korepérneho ("tetrádneho") poľa a foriem konexie. V nelineárnom sigma-modeli hrá úlohu poľnej premennej zobrazenie dvoch riemannovských variet. Zobrazenia, ktoré extremalizujú prirodzene zavedený účinok (vedú na "minimálne plochy") sa volajú harmonické. Takýmito zobrazeniami sa opisujú mydlové bubliny, ale aj svetoplochy v teórii strún. Variáciou voči jednému z metrických tenzorov sa dá prejsť od "kvadratického" účinku k "odmocninovému" (čo má praktický význam v opačnom smere).

$\alpha = dt \wedge \hat{s} + \hat{r}$	rozklad foriem v Mink. priestore	16.1.1
$d\alpha = dt \wedge (\partial_t \hat{r} - \hat{d}\hat{s}) + \hat{d}\hat{r}$	pôsobenie $d$ na rozloženú formu	16.1.4
$*\alpha = dt \wedge (\hat{*}\hat{r}) + \hat{*}\hat{\eta}\hat{s}$	pôsobenie $*$ na rozloženú formu	16.1.5
$\delta\alpha = dt \wedge (\hat{\delta}\hat{s}) + (-\partial_t \hat{s} - \hat{\delta}\hat{r})$	pôsobenie $\delta$ na rozloženú formu	16.1.6
$F := dt \wedge \mathbf{E}.d\mathbf{r} - \mathbf{B}.d\mathbf{S}$	2-forma elektromagnetického poľa	16.2.1
$\mathbf{j} = \rho dt - \mathbf{j}.d\mathbf{r} \equiv j_\mu dx^\mu$	1-forma prúdu	16.2.2
$\delta F = -\mathbf{j}, \quad dF = 0$	Maxwellove rovnice	16.2.1, 2
$F = dA$	$A$ je potenciál pre $F$	16.3.1
$-(1/2)\langle dA, dA \rangle - \langle A, \mathbf{j} \rangle$	účinok $S[A]$ pre elmag. pole	16.3.2
$(1/2)\langle d\phi, d\phi \rangle - (m^2/2)\langle \phi, \phi \rangle$	účinok $S[\phi]$ pre skalárne pole	16.3.7
$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$	základná vlastnosť tenzora $T^{\mu\nu}$	16.4.1
$R_{ab} - (1/2)Rg_{ab} = 8\pi T_{ab}$	Einsteinove rovnice	16.5

## Zhrnutie 17. kapitoly

S každou varietou  $M$  môžeme kanonicky spojiť ďalšie dve variety dvojnásobného rozmeru,  $TM$  a  $T^*M$ . Hrajú dôležitú úlohu ako ihriská klasickej mechaniky (lagranžovskej a hamiltonovskej). Z konštrukcie zadarmo dostávajú do vienka zaujímavú geometrickú štruktúru (aj keď samotná varieta  $M$  je "prázdna"). Sú totálnymi priestormi vektorových fibrácií, nesú (rôzne) kanonické tenzorové polia (napríklad  $T^*M$  symplektickú formu), viaceré objekty sa dajú z  $M$  dvíhať do totálnych priestorov. V ďalšej kapitole sa na nich skúma mechanika, táto obsahuje potrebnú prípravu.

$\pi : (x^a, v^a) \mapsto x^a$	kanonická projekcia na $TM$	17.1.7
$\tau : (x^a, p_a) \mapsto x^a$	kanonická projekcia na $T^*M$	17.1.7
$T(f \circ g) = Tf \circ Tg$	vlastnosť dotykového zobrazenia $Tf$	17.3.2
$\gamma(t) \mapsto \dot{\gamma}(t)$	prirodzený zdvih krivky z $M$ na $TM$	17.5.1
$\Phi_t \mapsto T\Phi_t$	zdvih toku z $M$ na $TM$	17.5.5
$\Delta = v^a \partial / \partial v^a$	Liouvillovo pole na $TM$	17.6.1
$\Delta = p_a \partial / \partial p_a$	Liouvillovo pole na $T^*M$	17.6.1
$S := 1^\uparrow = dx^a \otimes \partial / \partial v^a$	vertikálny endomorfizmus na $TM$	17.6.4
$\langle \theta_p, W \rangle := \langle p, \tau_* W \rangle$	kanonická 1-forma $\theta = p_a dx^a$ na $T^*M$	17.6.5
$\omega = d\theta = dp_a \wedge dx^a$	kanonická symplektická forma na $T^*M$	17.6.7

### Zhrnutie 18. kapitoly

Ukazuje sa, ako sa formuluje klasická mechanika na  $TM$  a  $T^*M$ . Oba prípady sú z geometrického hľadiska (v nedegenerovanom prípade) úplne rovnocenné: ide o štandardnú symplektickú dynamiku, t.j. pohyb po integrálnych krivkách hamiltonovského (dynamického) poľa. Na  $T^*M$  máme kanonickú symplektickú štruktúru, takže fixovanie funkcie  $H$  už dáva priamo dynamiku. Na  $TM$  je to trochu zamaskované; kanonickým poľom je isté tenzorové pole typu  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  a symplektická štruktúra vzniká až jeho kombináciou s (nedegenerovaným) lagranžiánom (ako funkciou na  $TM$ ). Projekciou tejto symplektickej dynamiky na bázu  $M$  vznikajú štandardné Lagrangeove rovnice (táto projekcia pridá jeden rád, takže sú 2.rádu), zatiaľ čo Hamiltonove rovnice operujú priamo v totálnom priestore  $T^*M$  a (ako každé rovnice pre integrálne krivky) sú len 1.rádu. Pomocou lagranžiánu sa konštruuje Legendreovo zobrazenie  $TM \rightarrow T^*M$ , ktoré dáva tieto dve dynamiky do súvisu. Ak hamiltonián (alebo lagranžián) závisí explicitne od času, formalizmus treba modifikovať, lebo nosná varieta je nepárnorozmerná. Do pohybových rovníc vstupuje kanonická 1-forma  $pdq - Hdt$ . Ukazuje sa, že táto forma hrá rozhodujúcu úlohu aj v konštrukcii účinkového funkcionálu.

$\theta_L := S(dL)$	Cartanova 1-forma	18.2.3
$\omega_L := d\theta_L$	Cartanova 2-forma	18.2.3
$E_L := \Delta L - L$	energia pre lagranžián $L$	18.2
$\dot{\gamma} = \zeta_{E_L}, \quad i_{\zeta_{E_L}} \omega_L = -dE_L$	Lagrangeove rovnice (na $TM$ )	18.2.6
$\langle \hat{L}(v), w \rangle := (d/dt) _0 L(v + tw)$	Legendreovo zobrazenie $\hat{L}$	18.3.1
$\hat{L} \circ \Phi_t^L = \Phi_t^H$	vzťah medzi lagr. a hamil. tokmi	18.3.4
$TR_g$	zdvih akcie $R_g$ z $M$ na $TM$	18.4.1
$T^*R_{g^{-1}}$	zdvih akcie $R_g$ z $M$ na $T^*M$	18.4.1
$\tilde{\xi}_X$	generátory zdvihnutého pôsobenia	18.4.1
$P_X = \langle \theta_L, \tilde{\xi}_X \rangle, \quad P_X = \langle \theta, \tilde{\xi}_X \rangle$	“hamiltoniány” zdvihnutých akcií	18.4.1
$L = (1/2)\overset{\circ}{g} - \overset{\circ}{\phi}$	prirodzený lagranžián na $TM$	18.4.6
$\int_{\gamma} (\hat{\theta} - H dt) \equiv \int_{\gamma} (pdq - H dt)$	účinnok pre hamiltonovskú dynamiku	18.5.6
$\int_{\hat{\gamma}} (\hat{\theta}_L - \hat{E}_L dt) \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(\hat{\gamma}(t)) dt$	účinnok pre lagranžovskú dynamiku	18.5.6

### Zhrnutie 19. kapitoly

Cieľom tejto kapitoly je preformulovať už známe fakty z teórie lineárnej konexie (15. kapitola) do nového jazyka, v ktorom sa (v ďalšej kapitole) obzvlášť jasne odhalí možnosť istého ďalekosiahleho zovšeobecnenia. Nový opis sa odohráva na novom ihrisku, variete  $LM$ , ktorá sa dá kanonicky priradiť variete  $M$ . Jej bodmi sú všemožné repéry vo všemožných bodoch na  $M$ . Zisťuje sa, že už bez konexie na  $M$  je v hre bohatá štruktúra: varieta  $LM$  je totálnym priestorom hlavnej  $GL(n, \mathbb{R})$ -fibrácie s bázou  $M$ . Konexia na  $M$  pridáva na  $LM$  ďalšiu štruktúru,  $GL(n, \mathbb{R})$ -invariantnú horizontálnu distribúciu. Pomocou nej sa dá operácia paralelného prenosu repéru po krivke  $\gamma$  na  $M$  preformulovať cez konštrukciu horizontálneho zdvihu  $\gamma^h$  krivky  $\gamma$ . Varieta  $LM$  dáva aj zaujímavú možnosť technického opisu širokej triedy geometrických objektov na  $M$  (špeciálne tenzorových polí, všeobecnejšie polí typu  $\rho$ ) ako ekvivariantných funkcií  $\Phi$  na  $LM$  a tiež opisu ich paralelného prenosu a kovariantnej derivácie (tá sa zmení na obyčajnú smerovú deriváciu funkcie  $\Phi$ ).



$\omega \equiv \omega_b^a E_a^b$	forma konexie na fibrácii repérov	19.2.1
$R_A^* \omega = A^{-1} \omega A, \langle \omega, \xi_C \rangle = C$	základné vlastnosti formy konexie	19.2.4
$U, V \in \mathcal{D} \Rightarrow [U, V] \in \mathcal{D}$	$\mathcal{D}$ je integrovateľná (Frobenius)	19.3
$\theta^i _{\mathcal{D}} = 0 \Rightarrow d\theta^i _{\mathcal{D}} = 0$	$\mathcal{D}$ je integrovateľná (iné vyjadrenie)	19.3
$V \in \mathcal{D}^h \Leftrightarrow \langle \omega, V \rangle = 0$	horizontálna distribúcia na $LM$	19.4.3
$T_e LM = \text{Ver}_e LM \oplus \text{Hor}_e LM$	rozklad indukovaný konexiou	19.4.5
$\langle \omega, \dot{\gamma} \rangle = 0$	$\hat{\gamma}$ zodpovedá autoparal. rep. poľu	19.5.1
$\Phi \circ R_A = \rho(A^{-1}) \circ \Phi$	$\Phi$ je veličina typu $\rho$	19.6
$\Phi(\gamma^h(t)) = \text{const.}$	autoparalelné pole veličín typu $\rho$	19.6.5

## Zhrnutie 20. kapitoly

Preklad pojmov súvisiacich s *lineárnou* konexiou do reči fibrácie repérov, ktorý sa udial v 19. kapitole, odhaľuje možnosť zovšeobecnenia. Namiesto  $\pi : LM \rightarrow M$  sa uvažuje  $\pi : P \rightarrow M$ , hlavná fibrácia s grupou  $G$ . Konexiou v tejto fibrácii sa nazve horizontálna distribúcia v totálnom priestore  $P$ , ktorá je invariantná voči pôsobeniu grupy  $G$ . Technicky sa opisuje formou konexie  $\omega$ , čo je istá 1-forma s hodnotami v Lieovej algebre  $\mathcal{G}$  grupy  $G$ . Analógmi repérov sú body variety  $P$  a ich paralelný prenos sa stotožní s horizontálnym zdvihom krivky z bázy, po ktorej sa robí prenos. (Lokálna) závislosť tohoto paralelného prenosu od cesty sa dá jednoducho vyjadriť v termínoch integrovateľnosti horizontálnej distribúcie a ako miera tejto integrovateľnosti vstúpi do hry (cez Frobeniovo kritérium) pojem 2-formy krivosti  $\Omega$  (má tiež hodnoty v  $\mathcal{G}$ ). Ako formálny nástroj na výpočet formy krivosti sa zavádza vonkajšia kovariantná derivácia  $D$ ; pomocou nej dostávame vyjadrenie  $\Omega = D\omega = d\omega + (1/2)[\omega \wedge \omega]$ . Počíta sa tiež pôsobenie  $D$  na ďalšej triede dôležitých objektov, na horizontálnych formách typu  $\rho$ , kde sa získava výsledok  $D\alpha = d\alpha + \rho'(\omega)\hat{\wedge}\alpha$ . Dvojnásobná aplikácia  $D$  dáva Bianchiho a Ricciho identity. Ak je na  $M$  definovaná nejaká štruktúra, dá sa pomocou nej často zostrojiť istá podfibrácia hlavnej fibrácie, na ktorej pôsobí len podgrupa pôvodnej grupy; hovorí sa o ohraničení štruktúrnej podgrupy. Napríklad metrickému tenzoru na  $M$  zodpovedá fibrácia ortonormovaných repérov (podfibrácia fibrácie repérov). Za istých podmienok sa na podfibráciu dedí aj

konexia; naopak konexia na podfibrácii indukuje konexiu na celej fibrácii, ktorá je špeciálna v tom, že rešpektuje štruktúru, ktorá súvisí s podfibráciou.

$R_{g^*}\text{Hor}_p P = \text{Hor}_{pg} P$	horizont. distr. je $G$ -invariantná	20.2.1
$\omega_p := \Psi_p^{-1} \circ \text{ver} : T_p P \rightarrow \mathcal{G}$	1-forma konexie v bode $p \in P$	20.2.4
$R_g^* \omega = \text{Ad}_{g^{-1}} \omega, \langle \omega, \xi_X \rangle = X$	zákl. vlastnosti formy konexie	20.2.5
$\pi \circ \gamma^h = \gamma, \gamma^h(0) = p$		20.3.2
$\langle \omega, (\dot{\gamma}^h) \rangle = 0$	horiz. zdvih $\gamma$ , začiatok v $p \in P$	20.3.2
$(\text{hor } \alpha)(U, \dots) := \alpha(\text{hor } U, \dots)$	horizontálna časť formy	20.3.4
$D\alpha := \text{hor } d\alpha$	vonkajšia kovar. derivácia formy	20.3.5
$\Omega := D\omega = \Omega^i E_i$	2-forma krivosti na $P$	20.4.1, 3
$\Omega = d\omega + (1/2)[\omega \wedge \omega]$	Cartanova štruktúrna rovnica	20.4.3
$D\alpha = d\alpha + \rho'(\omega)\hat{\wedge}\alpha$	$D$ na hor. formy typu $\rho$	20.4.6
$DD\omega \equiv D\Omega = d\Omega + [\omega \wedge \Omega] = 0$	Bianchiho identita	20.4.4, 7
$DD\alpha = \rho'(\Omega)\hat{\wedge}\alpha$	Ricciho identita	20.4.8
$\Omega = 0 \Rightarrow \exists \sigma : \sigma^* \omega = 0$	nulová krivosť $\Rightarrow$ úplný paral.	20.4.11

## Zhrnutie 21. kapitoly

Konexie v hlavnej  $G$ -fibrácii sa dávajú do súvisu s kalibračnými poľami, ktoré sú známe z fyziky. Najprv sa opisuje štandardný "fyzikálny" prístup, ktorý spočíva v zlokálnení symetrie účinku, ktorý už je "globálne" invariantný. Toto zlokálnenie pridáva k teórii ďalšie polia s konkrétnymi transformačnými pravidlami a konkrétnou interakciou s pôvodnými poľami. Ukáže sa, že tieto polia sa dajú interpretovať aj z pohľadu teórie konexií. Konkrétne sa nahliadne, že fixovanie kalibrácie je dané výberom lokálneho rezu  $\sigma$  hlavnej fibrácie, kalibračné potenciály (v tejto kalibrácii) sa získavajú stiahnutím formy konexie na bázu (pomocou rezu), kalibračné transformácie súvisia so zmenou rezu, intenzita kalibračného poľa sa získava stiahnutím formy krivosti a látkové polia stiahnutím ekvivariantnej funkcie na  $P$ . Odvodí sa rovnice paralelného prenosu ľubovoľnej veličiny typu  $\rho$  v kalibrácii  $\sigma$ . Zavedie sa pojem asociovanej vektorovej fibrácie (ktorá vznikne z hlavnej fibrácie nahradením pôvodného vlákna reprezentačným priestorom grupy  $G$ ). Ukazuje sa, akú štruktúru majú účinkové integrály, ktoré sú lokálne kalibračne invariantné a ako sa z nich odvodí pohybové rovnice (sú zovšeobecnením Maxwellových rovníc z elektrodynamiky, ktorá je kalibračnou teóriou

s grupou  $U(1)$ . Zoznamujeme sa s Nötherovej vetou, ktorá dáva do súvisu symetrie účinkových integrálov so zákonmi zachovania. Táto veta vrhá nové svetlo aj na staršie výsledky v tomto smere, spojenie zákonov zachovania s tenzorom energie-hybnosti v teórii poľa a s exaktnými Cartanovými symetriami v hamiltonovskej mechanike. V poslednom paragrafe sa vraciame na fibráciu repérov  $LM$  a zoznamujeme sa s kanonickou 1-formou  $\theta$  s hodnotami v  $\mathbb{R}^n$ . Táto forma úzko súvisí s torziou na  $M$ . Vysvetľuje sa tam tiež ako sa dá (pre lineárnu konexiu) využiť vonkajšia kovariantná derivácia  $\mathcal{D}$  na báze  $M$ .

$\phi \mapsto e^{-i\alpha(x)}\phi, \quad A \mapsto A + d\alpha(x)$	$U(1)$ -lok. kalibr. transformácia	21.1.2
$\hat{\sigma}(x) = \sigma(x)S(x) \equiv R_{S(x)}\sigma(x)$	dva rezy vo vzťahu cez $S \in G^{\mathcal{U}}$	21.2.1
$\hat{\phi} = B^{-1}\phi$	lok. kalibr. transf. látkového poľa	21.2.5
$\hat{\mathcal{A}} = B^{-1}\mathcal{A}B + B^{-1}dB$	to isté pre kalibračný potenciál	21.2.5
$\hat{\mathcal{F}} = B^{-1}\mathcal{F}B$	to isté pre intenzitu poľa	21.2.5
$\dot{v} + \langle \mathcal{A}, \dot{\gamma} \rangle v = 0$	rovnica paral. prenosu	21.3.2
$S[\phi, \mathcal{A}] = -(1/2)\langle \mathcal{D}\mathcal{A}, \mathcal{D}\mathcal{A} \rangle_k$ $+ (1/2)\langle \mathcal{D}\phi, \mathcal{D}\phi \rangle_h$ $- (m^2/2)\langle \phi, \phi \rangle_h$	účinnok viazanej sústavy $(\phi, \mathcal{A})$	21.5.6
$\mathcal{D}^+\mathcal{F} = -\mathcal{J}$		
$\mathcal{D}\mathcal{F} = 0$		
$(\mathcal{D}^+\mathcal{D} - m^2)\phi = 0$	zodpovedajúce pohybové rovnice	21.5.6
$S[\rho(e^{\epsilon s(x)})\psi] = S[\psi] + \epsilon\langle ds, j \rangle_k$	výpočet nötherovského prúdu $j$	21.6.1
$j_i = T(\xi_{E_i}, \cdot)$	nöther. prúd za Killingov vektor	21.6.6
$\Theta := D\theta$	torzia vo formalizme na $LM$	21.7.2

## Zhrnutie 22. kapitoly

Špeciálne ortogonálne grupy  $SO(p, q)$  majú univerzálne dvojlistové nakrývajúce grupy, ktoré sa volajú spinové grupy a označujú sa  $\text{Spin}(p, q)$ . Celá ich teória sa systematicky buduje pomocou Cliffordových algebier. Konštruuje sa izomorfizmus týchto algebier na vhodné maticové algebry (ich verná reprezentácia) a pomocou neho sa zavádza pojem spinora ako vektora reprezentačného priestoru Cliffordovej algebry. Spinové grupy sú podmnožiny v Cliffordovej algebre a preto ohraňovanie spomínanej vernej reprezentácie algebry je aj reprezentáciou spinovej grupy. Tým na spinoroch pôsobí aj spinová grupa (a dvojznačne aj ortogonálna grupa). Táto jej reprezentácia sa volá spinorová. Pre niektoré špeciálne hodnoty  $(p, q)$  existujú špeciálne typy spinorov (weyllovské, majoranovské, ...). Spinová štruktúra na  $M$  je hlavná fibrácia nad  $M$  (spinová fibrácia), ktorá dvojlistovo nakrýva fibráciu ortonormovaných repérov a vo vláknach ktorej pôsobí spinová grupa. Spinová štruktúra sa nedá zaviesť na každej variete. Ekvivariantné funkcie typu  $\rho$  na totálnom priestore spinovej fibrácie (a tiež ich stiahnutia na bázu pomocou rezu), kde  $\rho$  je spinorová reprezentácia, sa volajú spinorové polia na  $M$ . Poľu 1-foriem typu  $\rho$  zodpovedá Raritovo-Schwingerovo pole. Na spinorové polia pôsobí špeciálny operátor prvého rádu, ktorý sa volá Diracov operátor. Vznikol vo fyzike v kvantovej teórii relativistického elektrónu - vyskytuje sa v Diracovej rovnici.

$e^a e^b + e^b e^a = 2g^{ab}$	vzťahy pre Cliffordov súčin	22.1.1
$u = \alpha_1 \dots \alpha_k, \quad g(\alpha_j, \alpha_j) = \pm 1$	prvky grupy $\text{Pin}(p, q)$	22.2.1
$u e^a u^{-1} =: (A^{-1})_b^a e^b$	nakrytie $\text{Spin}(p, q) \rightarrow SO(p, q)$	22.2.3
$(1/2)e^a e^b \mapsto \mathcal{E}^{ab}$	odv. izom. $\text{spin}(p, q) \rightarrow so(p, q)$	22.2.7
$\gamma^a := \rho(e^a)$	$\gamma$ -matice	22.3.1
$\mathcal{D}\psi = d\psi + (1/4)\hat{\omega}_{ab}\gamma^a\gamma^b\psi$	vonk. kovar. der. spinor. poľa	22.5.1
$\chi_\mu^\alpha(x)dx^\mu E_\alpha \equiv \chi_a^\alpha(x)e^a(x)E_\alpha$	Raritovo-Schwingerovo pole	22.5
$\mathcal{D} := i_{\mathcal{E}} \circ D \equiv \gamma^a i_{\mathcal{E}_a} D$	Diracov operátor na $SM$	22.5.3
$\mathcal{D} = i_{\mathcal{E}} \circ \mathcal{D} \equiv \gamma^a i_{e_a} \mathcal{D}$	Diracov operátor na $M$	22.5.3
$\mathcal{D}\psi = \gamma^a e_a^\mu (\partial_\mu \psi + (1/4)\omega_{bc\mu}\gamma^b\gamma^c\psi)$	Dir. operátor na spinor. poli	22.5.4
$\mathcal{D}\psi = \gamma^a e_a^\mu (\partial_\mu \psi + (1/2)\alpha_\mu \gamma_5 \psi)$	zjednodušenie pre 2-rozm. $M$	22.5.4
$\rho(u)_\tau^\alpha \rho(u^{-1})_\beta^\sigma A_b^a \gamma^{b\tau}_\sigma = \gamma^{a\alpha}_\beta$	$\gamma$ -matice sú inv. tenzory	22.5.11

## LITERATÚRA

- [1] В.И. **Арнольд**: Математические методы классической механики, Москва, Наука, 1979; tiež Едиториал УРСС 1999 (anglický preklad V.I.Arnold: Mathematical methods of classical mechanics, New York, Springer-Verlag, 1978)
- [2] I.M.**Benn**,R.W.**Tucker**: An Introduction to Spinors and Geometry with Applications in Physics, Bristol, Adam Hilger 1989
- [3] G.**Birkhoff**, S.**Mac Lane**: Prehľad modernej algebry, Bratislava, Alfa, 1979 (A Survey of Modern Algebra, The Macmillan Company, Inc., New York 1965)
- [4] M.**Crampin**, F.A.E.**Pirani**: Applicable Differential Geometry, Cambridge, Cambridge University Press, 1987
- [5] Б.А. **Дубровин**, С.П. **Новиков**, А.Т. **Фоменко**: Современная геометрия, Москва, Наука 1979 (anglický preklad B.A.Dubrovin,S.P.Novikov, A.T.Fomenko: Modern geometry - methods and applications, New York, Springer-Verlag, 1984, 1985)
- [6] H.**Flanders**: Differential Forms (with Applications to Physical Sciences), New York, Academic Press 1963
- [7] J.**Garaj**: Základy vektorového počtu, Bratislava, SVTL 1963
- [8] И.М. **Гельфанд**: Лекции по линейной алгебре, Москва, Наука 1948, 1971 (anglický preklad I.M.Gelfand: Lectures on linear algebra, New York, Interscience Publishers, 1961)
- [9] M.**Göckeler**,T.**Schücker**: Differential Geometry, Gauge Theories and Gravity, Cambridge, Cambridge University Press, 1987
- [10] M.**Hejný**,I.**Kulich**,J.**Tvarožek**: Čo je topológia, Bratislava, Alfa, 1983
- [11] S.**Chandrasekhar**: The Mathematical Theory of Black Holes, New York, Clarendon 1983 (ruský preklad Moskva, Mir, 1986)
- [12] Ch.J.**Isham**: Modern Differential Geometry for Physicists, Singapore, World Scientific, 1989
- [13] J.**Korbaš**: Lineárna algebra a geometria 1., Vydavateľstvo UK, 2003
- [14] А.И. **Кострикин**, Ю.И. **Манин**: Линейная алгебра и геометрия, Москва, Наука, 1986
- [15] D.**Krupka**: Úvod do analýzy na varietách, Praha, SPN, 1986
- [16] A.P.**Lightman**, W.H.**Press**, R.H.**Price**, S.A.**Teukolsky**: Problem Book in Relativity and Gravitation, Princeton, Princeton University Press, 1975 (ruský preklad Moskva, Mir, 1979)
- [17] M.**Medved**: Dynamické systémy, Bratislava, Veda, 1988 (anglický preklad Fundamentals of Dynamical Systems and Bifurcation Theory, Bristol, Adam Hilger, 1992)
- [18] Ch.W.**Misner**,K.S.**Thorne**,J.A.**Wheeler**: Gravitation, San Francisco, Freeman, 1973 (ruský preklad Moskva, Mir, 1977)

- [19] А.С.Мищенко,Ю.П.Соловев, А.Т.Фоменко: Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии, Москва, Издательство Московского Университета 1981
- [20] Ch.Nash,S.Sen: Topology and Geometry for Physicists, London, Academic Press, 1983 (1992)
- [21] В.А.Рубаков: Классические калибровочные поля, Москва, Едиториал УРСС, 1999; (anglický preklad V.A.Rubakov: Classical theory of gauge fields, Princeton, Princeton University Press, 2002)
- [22] B.F.Schutz: Geometrical Methods of Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1982 (ruský preklad Moskva, Mir 1984)
- [23] А.С.Шварц: Квантовая теория поля и топология, Москва, Наука 1989; (anglický preklad A.S.Schwarz: Quantum field theory and topology, Berlin, Springer Verlag, 1993)
- [24] S.Sternberg: Group Theory and Physics, Cambridge University Press, 1995
- [25] N.Straumann: General Relativity and Relativistic Astrophysics, Berlin, Springer-Verlag, 1984 (1991)
- [26] W.Thirring: Lehrbuch der Mathematischen Physik; 2 - Klassische Feldtheorie, Wien, Springer-Verlag, 1978
- [27] A.Trautman: Differential Geometry for Physicists, Napoli, Bibliopolis, 1984
- [28] A.Trautman: Fiber Bundles, Gauge Fields, and Gravitation, v zborníku A.Held: General relativity and Gravitation, str.287-308, New York, Plenum Press, 1980
- [29] N.M.J.Woodhouse: Geometric Quantization, Oxford, Oxford University Press, 1980
- [30] P.Zlatoš: Lineárna algebra a geometria, 2006  
<http://thales.doa.fmph.uniba.sk/zlatos>

## REGISTER

**A**

absolútna derivácia 398, 402, 407  
 adaptovaná báza 58  
 -á na podpriestor  $W$  565  
 -é súradnice 24  
 adiabatický proces 571  
 adiabata 571  
 adjungovaný 139  
 afinná konexia 618, 663  
 -á grupa 229, 235, 241, 244, 247  
 -é transformácie 229  
 akcia = pôsobenie 313  
 - efektívna 342  
 - tranzitívna 315, 560, 587  
 algebraicky uzavreté pole 277  
 algebra  
 - asociatívna 40, 52, 714  
 - funkcií na variete  $M$  40  
 - horizontálnych foriem na  $P$  602  
 - kvaterniónov 678  
 - Lieova 89, 98, 242, 716  
 - pozorovateľných 357  
 $\mathcal{A}$ -modul 717  
 Ampérov zákon 469  
 anihilátor 59, 228, 392, 565  
 anihilovať 565  
 ansatz 101  
 antikomutujúce premenné 127  
 antisamoduálna forma 204  
 antisymetrická časť 111  
 atlas 23  
 automorfizmus 223, 358, 715, 716  
 - grupy 282  
 - Lieovej algebry 283  
 autonómna sústava 46  
 autoparalelná veličina 638, 642  
 -é pole 399, 403, 407, 578  
 azimut 77, 452

**B**

báza fibrácie 515  
 Bettiho čísla 219  
 Bianchiho identita 442, 606, 608, 635  
 biharmonické súradnice 76  
 bilinéarne spárenie 168, 713  
 bivektorové pole 352  
 bodkované indexy 332  
 bodovosť konštrukcie 60  
 boost 100, 331

**C**

Cartanova algebra 142  
 -ova 1-forma 535  
 -ova 2-forma 535  
 -ova symetria 371  
 - - exaktná 371, 541  
 -ove štruktúrne rovnice 437, 606, 634  
 -ove vzorce 149, 306  
 -ov účinok 495  
 Casimirove operátory 288, 336  
 Cauchyho veta 205  
 Cauchyho-Riemannove vzťahy 103, 204  
 celkový moment hybnosti 342  
 centrálné pole 551  
 Clebschov-Gordanov rad 305  
 Cliffordova algebra 138, 674, 675  
 -ov súčin 675  
 cyklické súradnice 543  
 cyklus 217  
 $C^k$ -atlas 23  
 $C^k$ -príbuzná mapa 23  
 $C^k$ -varieta 23  
 $C^k$ -štruktúra 23

**Č**

časový vývoj stavov 359  
 čistý stav 358, 385

**D**

D'Alambertov operátor 463  
 Darbouxova veta 361  
 deformačná retrakcia 215  
 degenerovaný rovnobežnosten 109  
 deRhamov komplex 218  
 derivácia algebry funkcií 43  
 - Cartan. alg. stupňa +1 147, 602  
 - tenzorovej algebry 87  
 - asociatívnej algebry 715  
 - Lieovej algebry 310, 716  
 - stupňa  $k$  719  
 determinant matice 125  
 determinant zobrazenia 132  
 difeomorfizmus 28, 224  
 difeomorfné variety 28  
 diferenciálne formy 108  
 - typu  $\rho$  345  
 diferenciál (zobrazenia) 70  
 diferenciál (v komplexe) 217  
 Diracov operátor 673, 702  
 -ova reprezentácia 690  
 -ova rovnica 673  
 -ovské spinory 690  
 Dirichletova úloha 193, 194  
 diskrétna topológia 19  
 divergencia vekt. poľa 182, 197  
 dĺžka krivky 65, 66, 96  
 dotyková fibrácia 514, 517  
 -ový funktor 519, 524  
 -ový priestor 39  
 -ový vektor 45  
 druhá veta termodynamická 571  
 dráha (cesta) 66  
 duálna báza 48  
 -ny priestor 48  
 dvojhľadínová sústava 385  
 dvojlistové nakrytie 324, 715  
 dvojznačná reprezentácia 333  
 dvíhanie indexov 56

**E**

efektívna akcia 342  
 - potenciálna energia 551

Einsteinova-Cartanova teória 493  
 Einsteinove rovnice 489  
 -ove rovnice vo vákuu 492  
 -ove 1-formy 495  
 -ov tenzor 489  
 ekvivalentné fibrácie 516, 588  
 -né funkcie 601  
 -né reprezentácie 276  
 ekvivariantný izomorfizmus 276  
 -ný difeomorfizmus 588  
 -né zobr. 275, 317, 320, 376, 580, 591  
 endomorfizmus 253  
 energia 536  
 energia poľa 481  
 entropia 572  
 euklidovská grupa 543  
 -ské transformácie 99, 339  
 -ský priestor 99  
 -ský  $p$ -simplex 164  
 Eulerova-Lagrangeova 1-forma 426, 476  
 Eulerovo-Lagrangeovo pole 536  
 Eulerov-Lagrangeov výraz 537  
 Eulerove uhly 263  
 exaktná forma 208  
 -ná symplektická forma 354  
 -né Cartanove symetrie 371, 541  
 -né prvky 217  
 exponenciálna grupa 262  
 -ne zobrazenie 248, 422

**F**

faktoralgebra 119, 715, 716  
 faktorpriestor 219  
 Faradayov indukčný zákon 468  
 fázový priestor 357, 363, 543  
 - objem 368  
 - tok 359  
 fibrovaná varieta 515  
 fibrované zobrazenie 516, 617  
 fibrácia 515  
 -cia hlavná 586  
 -cia repérov 559  
 -cia afinných repérov 663  
 -cia ortonormovaných repérov 614



fiber 515  
 $\mathcal{F}(M)$ -linearita 60  
 formy (diferenciálne) 108  
 forma konexie 433, 562  
 - krivosti 434, 604  
 - objemu 128, 152, 225, 368  
 - typu  $\rho$  345  
 - typu Ad 598  
 - s hodnotami vo  $V$  156  
 - torzie 434  
 1-forma konexie 597  
 - práce 571  
 - tepla 571  
 - prúdu 466  
 2-formy torzie 665  
 2-forma elmag. poľa 465  
 3-formy prúdu 466  
 Foucaultovo kyvadlo 414  
 -ov uhol 433, 446  
 Fourierov rozklad 346  
 $f$ -príbuzné 70, 81  
 Frobeniovo kritérium 567  
 fundamentálna reprezentácia 332  
 -ne pole pôsobenia  $R_g$  335  
 funkcia 37  
 funkcionál dĺžky 426

**G**

Gaussov integrál 127  
 $\gamma$ -matice 688, 692  
 -ova krivosť 439  
 -ova veta 184, 199  
 -ov zákon 469  
 generátor algebry 118  
 - modulu 44  
 - reprezentácie 268  
 - pôsobenia (akcie) 336  
 geodetické okolie 421  
 -á deviácia 449  
 geodetika 397, 546  
 $G$ -invariantný lagranžian 542  
 globalizovať 62  
 globálna trivializácia 516, 588  
 -ne hamiltonovská 375, 382, 542

-na kalibračná transformácia 627, 628  
 gradient 61, 66, 197  
 graduovaná algebra 53, 117, 719  
 -ná Lieova algebra 144, 719  
 -ne komutatívna 112, 143  
 -ný komutátor 144  
 graf zobrazenia 29  
 gravitino 701  
 Greenove identity 193  
 -va veta 182

**H**

hamiltonián 353, 385  
 Hamiltonove rovnice 47  
 hamiltonovská sústava 363, 536  
 -ské pole 352, 355, 536  
 -ský tok 359  
 harmonická funkcia 193, 204, 205, 502  
 -ké zobrazenie 503  
 Hausdorffov priestor 20  
 Heisenbergov obraz 359  
 hermitovský skalárny súčin 227  
 Hilbertov účinok 490  
 hladká distribúcia 564, 565  
 -ká štruktúra 24  
 -ká varieta 23  
 -ká väzba 31  
 -ké pôsobenie 314  
 -ké vektorové pole 43  
 -ké tenzorové pole 60  
 hlavný automorfizmus 118  
 -ná  $G$ -fibrácia 560, 586  
 -ný homogénny priestor 320, 560, 587  
 hmotnostný člen 474, 475  
 Hodgeov operátor 133  
 holomorfná funkcia 103, 204, 205  
 holonomická grupa 433  
 holonómia 433  
 homeomorfizmus 19  
 homogénna forma 117  
 -e súradnice 25  
 -y člen 52  
 -y priestor 315, 319, 382, 587  
 -y tenzor 101

- homológia 217
  - homotópia 211, 609
  - homotopická nule 609
  - é cesty 609
  - é zobrazenia 211
  - ý operátor 211, 216
  - homotétia 97
  - Hopfova fibrácia 590, 592, 595, 694
  - vo zobrazenie 28
  - horizontálna distribúcia 574
  - a forma 389, 602
  - a forma typu  $\rho$  701
  - a krivka 578
  - y podpriestor 574, 595
  - y rez 611
  - y vektor 574, 597
  - y zdvih krivky 578, 600
  - y zdvih vektora 574, 599
  - hranica 217
  - hraničný operátor 164, 167, 218
  - hustota lagranžiánu 472
  - hustota 176
  - skalárna 128, 154, 582
  - tenzorová 585
  - hybnosť poľa 481
  - hyperplocha 32
- CH**
- charakteristický podpriestor 140
  - chirálné spinory 690, 691
  - Christoffelove symboly 402
  - 1. druhu 411
- I**
- ideál 296, 356, 372, 391, 715, 716
  - indexová gymnastika 56
  - indukovaný metrický tenzor 58, 75
  - integrálna krivka 45
  - e invarianty Cartanove 367
  - integrál prvého druhu 177
  - druhého druhu 177
  - intenzita kalibr. poľa 628, 629, 646
  - interakčný člen 472, 476
  - invariantná forma 366
  - é pole 84
  - ý lagranžián 542
  - ý podpriestor 274
  - ý skalárny súčin 272
  - ý tenzor 303
  - inverzia 487
  - ireducibilná reprezentácia 274
  - izometria 22, 56, 96, 503, 659
  - izotrópný 101
- J**
- Jacobiho identita 358
  - rovnica 449
  - jednoducho súvislá 324
  - jednparametrická podgrupa 245
  - á grupa transformácií 82
- K**
- kalibračná grupa 623
  - á podmienka 212
  - á transformácia 476, 623, 631, 633
  - e invariantný 473, 645
  - é pole 623
  - ý potenciál 627, 629, 637
  - kanonická hybnosť 543
  - á plochá konexia 601
  - á projekcia 28, 318, 511, 515
  - á 1-forma na  $G$  244, 262, 284
  - á 1-forma na  $LM$  664
  - á 1-forma na  $T^*M$  529
  - é spárenie 63, 713
  - é súradnice 362, 512
  - á symplektická forma na  $T^*M$  529
  - é transformácie 363
  - é vloženie 174
  - kartézsky priestor 20
  - y súčin variet 25
  - Kählerova-Atiyahova algebra 676
  - Kählerove fermióny 704
  - Killingova-Cartanova forma 286
  - Killingove rovnice 97, 424
  - ove vektory 98, 338, 480, 546, 548
  - kinetická energia 65, 545
  - ý člen 472, 474, 475

- kladná definitnosť 54  
 Kleinova-Gordonova rovnica 474  
 Kleinova fľaša 31  
 koadjungované pôsobenie 376, 379  
 -á reprezentácia 292  
 kocyklus 217, 377  
 kodiferenciál 189, 443, 644  
 kodotyková fibrácia 514, 517  
 -ý priestor 59  
 koeficienty konexie 401  
 - anholonómie 214, 445, 703  
 koexaktnosť 215  
 kohomologická grupa 219  
 -á trieda 218  
 -é kocykly 217  
 kohomológia 217, 219  
 -ie Lieovej algebry 308  
 kohranica 217  
 komomentové zobrazenie 379  
 kompaktná Lieova grupa 253, 274  
 -á Lieova algebra 291  
 -á varieta 189  
 kompatibilné štruktúry 230  
 kompenzačné pole 628  
 komplexná Lieova grupa 234  
 komplexná varieta 26  
 - reprezentácia 277  
 komplex 217, 308  
 komponenty poľa 42, 43  
 -ty tenzora 51  
 -ta súvislosti jednotky 261  
 -tné formy 156  
 -tné funkcie 341  
 -tné polia 344  
 kompozičný zákon 231  
 komutatívna grupa 278  
 komutátor 89, 716  
 konexia na hlavnej  $G$ -fibrácii 595  
 konečne generovaný 44  
 konfiguračný priestor 77, 541  
 konformne invariantná 136, 489  
 -á transformácia 97, 488, 659  
 -á trieda 505  
 -é preškáľovanie metriky 135, 485  
 -é Killingove vektory 102, 485  
 -é Killingove rovnice 102  
 kongruencia 47  
 konjugácia 282, 314  
 konjugovaná podgrupa 316  
 kontaktná forma 554  
 -á štruktúra 554  
 kontragradietná reprezentácia 270  
 kontrakcia 53, 300  
 kontúr 173  
 korepérne pole 94  
 kotangenciálny priestor 58  
 kouzavretá forma 204, 205, 215  
 kovariantná derivácia 400, 627  
 -á divergencia 443  
 -ý gradient 396  
 -ý funktor 519  
 -ý kodiferenciál 647  
 -ý tenzor 71  
 -e konštantné pole 406, 453  
 kovektor 48, 59  
 krivka 37  
 krivočiare súradnice 24  
 krivosť skalárna 431  
 - Gaussova 439  
 $k$ -rozmerná hladká distribúcia 564  
 kvadratický Casimirov operátor 288  
 kvaternióny 714  
 kvázilineárna sústava 46
- L**
- Lagrangeova veta 319  
 -e rovnice 419, 426, 534  
 Lamého koeficienty 200  
 Laplaceova rovnica 193  
 Laplaceov-Beltramiho operátor 186, 434  
 Laplaceov-deRhamov operátor 189  
 látkové pole 629, 648  
 Legendreovo zobrazenie 539  
 lema o vyrovnaní 83  
 Levi-Civitova konexia 411  
 Levi-Civitov symbol 123  
 Lieova algebra 89, 243, 716  
 -a derivácia 80, 86

- a grupa 230, 234
  - a podgrupa 234
  - a zátvorka 89
  - a superalgebra 144, 719
  - sky konštantné 86
  - ský prenos 85
  - lift (zdvih) 522
  - lineárna konexia 400
  - e formy 48
  - e pole 615
  - y priestor 710
  - y funkcionál 40
  - y operátor 43, 85
  - Liouvillova forma 368
  - a rovnica 385
  - a veta 368
  - o pole 545
  - lokálna trivializácia 515
  - a kal. transformácia 625, 627, 631
  - e izometrické variety 101
  - e kalibračne invariantný 645
  - e Lorentzove transformácie 498
  - e súradnice 23
  - e súčinová štruktúra 515
  - e triviálne 516
  - y homeomorfizmus 324
  - y rez 517, 562
  - y tok 80
  - Lorentzova grupa 224, 277, 328
  - a (štvor)sila 477
  - ská varieta 486
  - loxodróna 77, 452
- E**
- Ľavoinvariantné tenzorové pole 235
  - ý metrický tenzor 289
  - Ľavá akcia (pôsobenie) 313, 717
  - á regulárna reprezentácia 335
  - á translácia 234, 338
  - á zvyšková trieda 318
  - ý  $G$ -priestor 322
- M**
- magnetický náboj (monopól) 478
  - Majoranova reprezentácia 688
  - malá grupa 316
  - mapa 23
  - matica hustoty 385
  - maticová algebra 714
  - grupa 234
  - Maurerova-Cartanova 1-forma 244
  - Maurerove-Cartanove vzťahy 244
  - maximálny  $C^k$ -atlas 23
  - Maxwellov posuvný prúd 469
  - metrická forma objemu 129
  - konexia 409
  - ý tenzor 54, 613
  - minimálna interakcia (väzba) 629, 645
  - Minkowského priestor 65, 458
  - množina úrovne 32
  - modul 44
  - modulo 2 120
  - momentové zobrazenie 379, 542
  - moment hybnosti poľa 481
  - morfizmus hlavných fibrácií 617
  - vektorových fibrácií 519
  - Cartanových algebier 143, 602
  - tenzorových algebier 74
  - multilineárne 50
  - mydlové bubliny 507
  - Möbiov list (pásik) 151
  - ova transformácia 321
- N**
- nabité častice 629
  - náboj 279, 651
  - nadplocha 32
  - nakrytie 324
  - nakrývajúci homomorfizmus 324
  - neabelovská kalibračná grupa 648
  - nebodkovaný spinor 332
  - nedegenerovaná 2-forma 354
  - ý (= regulárny)lagranžian 535
  - neholonómne repérne pole 94
  - nehomogénna forma 120
  - nelineárne pole 509, 630
  - realizácie 322
  - y sigma model 509

- neorientovateľná varieta 152
  - nepárne parametre 144
  - nepárny voči chiralite 708
  - nesingulárny lagranžian 535
  - nesúradnicové repérne pole 94
  - Neumannova okr. podmienka 194
  - Newtonov-Leibnizov vzorec 181
  - Nijenhuisov tenzor 538
  - nilpotentný 164, 167, 217, 308
  - $n$ -listové nakrytie 324
  - normálna podgrupa 322
  - ne súradnice 249, 423
  - ová derivácia 194
  - Nötherovej veta 655
  - ské náboje 655
  - ské prúdy 655
  - nulové body 81
  - ý rez 588
- O**
- objem oblasti 175, 172, 506
  - podvariety 177
  - rovnobežnostena 108
  - obojstranne invariantný integrál 253
  - -ý metrický tenzor 289
  - -á forma objemu 291
  - obojstranný ideál 119
  - obrátenie Poincarého lemy 212
  - odvodená reprezentácia 270
  - ohraničenie fibrácie 613, 618
  - na podgrupu 267
  - reprezentácie 274
  - štruktúrnej grupy 613
  - formy 174
  - ohraničujúca 1-forma 565
  - $\Omega$ -divergencia 369
  - operátor dualizácie 133
  - krivosti 428
  - kvadrátu momentu hybnosti 289
  - paralelného prenosu 404, 407
  - spinu 342
  - orbita 315
  - orbitálny moment hybnosti 338
  - orientovaný atlas 152
  - objem 109
  - eľná varieta 32, 152, 236, 577, 665
  - orientácia v  $L$  122
  - ortogonálne matice 224
  - e súradnice 64
  - a grupa 225
  - a transformácia 684
  - y doplnok 275
  - ortonormovaná báza 55
  - otvorená množina 19
  - é pokrytie 23
- P**
- paralelizovateľná 223, 236, 577, 665
  - paralelný prenos 404, 407
  - e prenášaná veličina typu  $\rho$  641
  - e prenášaný zovšeob. repér 601
  - parametrické vyjadrenie 32
  - parametrizácia 37
  - Pauliho matice 258, 304, 692
  - $p$ -delta 123
  - per partes 182
  - pevné body 81
  - pfaffián 126
  - Pfaffove formy 571
  - plochá konexia 453, 502
  - podalgebra 715, 716
  - fibrácia 613
  - reprezentácia 274
  - varieta 29
  - podmienka integrovateľnosti 569
  - nestlačiteľnosti 184
  - Poincarého lema 212
  - transformácie 99
  - Poissonov tenzor 352
  - a rovnica 193, 194
  - e zátvorky 352
  - ské pôsobenie 379, 382, 387, 542
  - ská varieta 352
  - polarizačný vektor 385
  - polárny rozklad 330
  - pole posunutí 104
  - rovnice 2. rádu 534
  - rýchlostí 105, 184

- typu  $\rho$  582
- polopriamy súčin grúp 295
- súčet Lieových algebier 296
- poloprosté Lieove algebry 288
- polylineárne zobrazenie 50
- póly funkcie 207
- pôsobí sprava, zľava 313
- pôsobenie grupy 313
- potenciál 208
- na energia 66, 545, 544
- ové silové pole 66
- pozorovateľná 357
- práca sily 213
- pravá translácia 234, 338
- á akcia (pôsobenie) 129, 313
- á regulárna reprezentácia 335
- ý  $G$ -priestor 313
- pravoinv. forma objemu 273
- predĺženie fibrácie 618, 694
- preurčené rovnice 97
- priamy súčet l. pr. 52, 228, 575, 710
- asociatívnych algebier 715
- Lieových algebier 293, 717
- reprezentácií 297
- priamy súčin grúp 292
- reprezentácií 297
- pridružená fibrácia 642
- reprezentácia = Ad 283
- priestorová oblasť 464
- á forma 460
- á Stokesova veta 464
- á vonkajšia derivácia 461
- ý Hodgeov operátor 462
- ý kodiferenciál 463
- ý Laplaceov-deRhamov oper. 463
- priestoročas 65, 458, 489
- priestorupodobná nadplocha 77
- princíp ekvivalencie 486
- prirodzený lagranžian 545
- ý parameter 420
- ý zdvih krivky 522, 555
- voči difeomorf. 191, 478, 659
- Procova rovnica 475
- projektor 111, 280

- projektovateľné pole 71, 251
- projektívny priestor 25
- prvá veta termodynamická 571
- pseudometrický tenzor 54
- euklidovský priestor 99
- ortogonálna grupa 224
- ortogonálna matica 224
- sféra 76
- riemannovská varieta 63
- pull-back 69, 70, 72, 73
- push-forward 70, 73
- p-forma 110
- p-forma na variete 142
- p-refazec 164
- p-refazec na variete 166

## R

- rád (konečnej) grupy 235
- rang bivektora 354
- formy 139
- lineárneho zobrazenia 58
- 2-formy 354
- tenzora 51
- Raritovo-Schwingerovo pole 701
- reducibilná reprezentácia 274
- redukcia fibrácie 618
- (symplektická) grupou  $G$  390
- ovaná hamil. sústava 391
- ovaná symplektická varieta 390
- ované pole 390
- ovaný fázový priestor 390
- regulárny lagranžian 535
- relatívna invariantnosť 366
- a rýchlosť 448
- e zrýchlenie 448
- reparametrizácia krivky 46, 66
- začne invariantný 66, 507
- reprezentácia grupy 267
- Lieovej algebry 268
- Cliffordovej algebry 688, 690
- repérne pole 94
- rez 568
- rezíduum 207
- Ricciho formy 489

- identita 442, 608, 635
- koeficienty rotácie 444, 703
- tenzor 431
- Riemannova konexia 411
- ov tenzor (krivosti) 430
- ovská geometria 63
- ovská varieta 63
- $\rho$ -invariantný skalárny súčin 271
- $\mathbb{R}$ -linearita 60
- rotačné matice (Wignerove) 347
- rotácia (vektorového poľa) 197
- rovnica kontinuity 467
- e paral. prenosu 404, 407, 638 642
- rovnomerný priamočiary pohyb 396
- rozklad jednotky 280
- grupy 318
- rozložiteľná forma 139
- rozmer reprezentácie 267
- rozšírenie fibrácie 618
- ný fázový priestor 552
  
- S**
- samoduálna forma 204
- samointerakcia 648
- samozdružený operátor 190
- sférické funkcie 348
- Schrödingerov obraz 359
- Schurova lema 277, 278
- siločiary 45
- singulárny reťazec 218
- skalárna elektrodynamika 625
- a hustota 128, 154, 582
- a krivosť 431
- e pole 474, 499, 502
- y súčin 54, 136, 188
- y potenciál 471
- smerová derivácia 40
- soldering 586
- spinorové indexy 700
- á reprezentácia 328, 332, 688
- é pole 499
- é pole na báze 695
- spinory 328, 688
- spinová fibrácia 618, 693
  
- á konexia 444, 696, 703
- á štruktúra 694
- splietajúci operátor 276, 300
- spojité zobrazenie 19
- spúšťanie indexov 56
- stabilizátor 316
- stabilný bod 315
- stacionárna podgrupa 316
- e prúdenie (tečenie) 47, 184
- stavová veličina 208, 571
- stereografická projekcia 24
- stiahnuteľná varieta 210
- Stokesova veta 174, 199, 215
- stredná hodnota 178
- stredovanie cez grupu 273
- stupeň 117
- superalgebra 719
- komutátor 144, 719
- matematika 120
- súradnicová báza 42, 43, 61, 93
- á krivka 39
- é vyjadrenie 27, 37,
- súvislý priestor 260
- súčinová fibrácia 515, 568
- á hlavná fibrácia 587
- svetočiara 476, 508
- plocha 508
- Sylvestrova veta 54
- symetrizácia 114
- symetrická konexia 410
- symplektická forma 354
- á grupa 225
- á redukcia 548
- á varieta 354, 536
- é pole 355
- é zobrazenie 359
- ý ortogonálny doplnok 387
- é pôsobenie (akcia) 374
- symplektomorfizmus 358, 359
  
- Š**
- štandardná orientácia 150
- á topológia v  $\mathbb{R}^n$  21
- é horizontálne polia 577

-á hladká štruktúra v  $\mathbb{R}^n$  24  
 -ý  $n$ -simplex v  $\mathbb{R}^n$  165  
 -ý (plochý) metr. tenzor v  $\mathbb{R}^n$  63  
 štrukt. konštanty 243, 706, 715, 717  
 štvorpotenciál 470  
 štvorsila 477  
 štvorzrýchlenie 477

**T**

tabuľka násobenia 235  
 tangenciálny priestor 39  
 teleparalelizmus 453  
 tenzor deformácie 104  
 - energie hybnosti 479, 489, 658  
 - kontrakcie 63  
 - krivosti 430  
 - napätia 105  
 - rýchlosti deformácie 105  
 - torzie 410  
 tenzorová algebra 52  
 -á fibrácia 643  
 -á hustota 582  
 -á operácia 53  
 -é pole 59, 582  
 -é pole typu  $\rho$  345  
 -ý súčin tenzorov 51  
 -ý súčin priestorov 160, 711  
 -ý súčin matíc 712  
 -ý súčin algebier 715  
 teória kohomológií 217  
 - momentu hybnosti 288  
 - strún 508  
 termodynamika 570  
 tetradný formalizmus 94, 444  
 -e pole 94, 443, 494, 703  
 -ový postulát 444  
 tok 47  
 topologický priestor 19  
 topológia 19  
 torus 28, 34  
 torzia 410, 450, 665  
 totálny priestor 515  
 tranz. pôsob. (akcia) 315, 560, 587  
 triedy  $C^k$  21

triviálna fibrácia 516, 588  
 - topológia 19  
 typické vlákno 515  
 typu Ad 598

**U**

unimodulárne repéry 619  
 unitárna reprezentácia 272  
 - matica 227  
 univerzálne nakrytie 715  
 -a nakrývajúca grupa 324, 685  
 uzavretá forma 208  
 -á plocha 174  
 -ý prvok 217  
 $U(1)$ -náboj 279

**Ú**

úplne reducibilná 275  
 úplný zdvih 525, 527, 541, 542, 545  
 -ý paralelizmus 453, 610  
 účinok 418

**V**

variácia potenciálu 471  
 - počiatočných podmienok 447  
 -čná derivácia 472  
 varieta repérov 558  
 - hladká 23  
 väzby 77  
 vektorová fibrácia 517, 588, 643  
 -é pole 42, 475  
 -ý súčin 199  
 -ý potenciál 471  
 vektor spinu 385  
 veličina typu  $\rho$  582, 601, 641  
 vertikálna akcia 388, 560  
 -y podpriestor 520, 561, 573, 595  
 -e pole 388  
 -a distribúcia 573  
 -y endomorfizmus 529  
 -y zdvih kovektora 525  
 -y zdvih vektora 523  
 -y zdvih tenzora 524  
 -y vektor 521



veta o homomorfizme 323  
 - "o vnorení" 30  
 viacznačná reprezentácia 333  
 vielbeinové pole 94, 444, 507, 703  
 v involúcii 372  
 vlastná funkcia 348  
 -ná hodnota 348  
 -ná Lorentzova grupa 685  
 -ná ortochróna Lor. grupa 328, 590  
 -ný čas 476  
 vlákno v bode  $x$  515  
 vlnový operátor 463  
 vloženie 29, 75  
 vnorenie 29, 75  
 vnútorná derivácia 716  
 -ý súčin 121, 355  
 -ý automorfizmus 282, 717  
 voľná akcia (pôsob.) 342, 560, 587  
 vonkajšia algebra 117, 127  
 -a derivácia (kovariantná) 147 (602)  
 -a normála 173  
 -í súčin 112, 157  
 vytvárajúca funkcia 364  
 výkon elektrického poľa 477  
 významné repéry 619

**W**

Weylova báza 238  
 -e spinory 691  
 Wignerove rotačné funkcie 347

**Z**

zachovávajúca sa veličina 372, 480  
 zachováva orientáciu 171  
 zámena súradníc 23  
 združený 139  
 zdvih 522  
 - pôsobenia grupy 542  
 - zobrazenia 132, 518  
 $\mathbb{Z}_2$ -graduovanosť 692  
 zlomkovo-lineárna transf. 321  
 zložky 42, 43, 51  
 zmiešaný stav 357, 385  
 zobrazenie 22  
 - fibrácií 516  
 zovšeobecnená sila 419  
 -é súradnice 77  
 zrýchlenie 395, 477  
 zúženie 53

## REGISTER (často používaných) OZNAČENÍ

absolútna derivácia v smere krivky $\gamma$	$\nabla_{\dot{\gamma}}$	12.3.2
algebra (hladkých) funkcií na $M$	$\mathcal{F}(M)$	2.2.5
algebra pozorovateľných	$\mathcal{A}(M)$	14.1.9
algebra (asociatívna) reálnych $n \times n$ matíc	$\mathbb{R}(n), M_n(\mathbb{R})$	11.7.1
algebra (Lieova) reálnych $n \times n$ matíc	$gl(n, \mathbb{R})$	11.7.2
algebra tenzorových polí na $M$	$\mathcal{T}(M)$	2.5
Cartanova algebra diferenciálnych foriem na $M$	$\Omega(M)$	6.1
Cartanova 1-forma a 2-forma (na $TM$ )	$\theta_L, \omega_L$	18.2.3
Cliffordova algebra	$C(L, g), C(p, q)$	22.1
Diracov operátor	$\mathcal{D}$	22.5.3
Diracov operátor na báze $M$	$\mathcal{D}$	22.5.3
dotyková fibrácia	$\pi : TM \rightarrow M$	17.1.1
dotykové zobrazenie v bode $x \in M$	$T_x f$	3.1.2
dotykový vektor ku krivke $\gamma$	$\dot{\gamma}$	2.2.2
dotykový priestor v bode $x \in M$	$T_x M$	2.2.2
duálny priestor	$L^*$	2.4.1
Einsteinov tenzor	$G_{ab}$	16.5.
elektrické a magnetické polia	$\mathbf{E}, \mathbf{B}$	9.2.9
euklidovský priestor	$E^n$	2.6
fibrácia ortonormálnych repérov	$\pi : OM \rightarrow M$	20.5.5
fibrácia repérov	$\pi : LM \rightarrow M$	19.1.1
forma konexie na totálnom priestore $P$	$\omega$	20.2.5
formy konexie (lineárna konexia na $M$ )	$\omega_b^a$	15.6.1
forma krivosti na totálnom priestore $P$	$\Omega$	20.4.1
formy krivosti (lineárna konexia na $M$ )	$\Omega_b^a$	15.6.3
formy torzie	$T^a$	15.6.3
fundamentálne pole (generátor pôsobenia)	$\xi_X$	13.4.3
hamiltonovské pole generované funkciou $f$	$\zeta_f$	14.1.6
Hodgeov operátor dualizácie	$*, *g$	5.8.1

horizontálna distribúcia	$\mathcal{D}^h$	19.4.3
horizontálny zdvih krivky $\gamma$	$\gamma^h$	20.3.2
horizontálny zdvih vektora $v$	$v^h$	20.3.1
horizontálne $p$ -formy typu $\rho$ na $P$	$\bar{\Omega}^p(P, \rho)$	21.2
hraničný operátor	$\partial$	7.2.2
Christoffelove symboly	$\Gamma_{ij}^k$	15.2.3
intenzita kalibračného poľa	$F$	21.2.4
intenzita kalibračného poľa (reprezentovaná)	$\mathcal{F}$	21.2.4
kalibračný potenciál	$A$	21.2.4
kalibračný potenciál (reprezentovaný)	$\mathcal{A}$	21.2.4
kanonická 1-forma na $G$ (Maurer-Cartan)	$\theta = \theta^i E_i$	11.2.6
kanonická 1-forma na $T^*M$	$\theta = p_a dq^a$	17.6.5
kanonická 1-forma na $LM$	$\theta = \theta^a E_a$	21.7.1
kanonická 2-forma na $LM$ s konexiou	$\Theta = D\theta = \Theta^a E_a$	21.7.2
kanonické spárenie $L$ a $L^*$	$\langle \alpha, v \rangle$	2.4.2
kanonické (Darbouxove) súradnice na $(M, \omega)$	$(q^a, p_a)$	14.2.2
koadjungované pôsobenie (reprezentácia)	$\text{Ad}^*$	12.3.19
kodiferenciál	$\delta, \delta_g$	8.3.2
kodotyková fibrácia	$\tau : T^*M \rightarrow M$	17.1.4
kodotykový priestor v bode $x \in M$	$T_x^*M$	2.5
komutátor v Lieovej algebre $\mathcal{G}$ grupy $G$	$[X, Y]$	11.2.2
konjugácia prvkom $g$	$I_g$	12.3.1
kontragradientná (duálna) reprezentácia	$\check{\rho}$	12.1.8
kovariantná derivácia v smere poľa $V$	$\nabla_V$	15.2.1
kvaternióny, komplexné a reálne čísla	$\mathbb{H}, \mathbb{C}, \mathbb{R}$	22.1.4
Laplaceov-deRhamov operátor	$\Delta, \Delta_g$	8.3.3
Lieova algebra grupy $G, H, \dots$	$\mathcal{G}, \mathcal{H}, \dots$	11.2.2
Lieova derivácia v smere poľa $V$	$\mathcal{L}_V$	4.2
Lieova grupa	$G, H, \dots$	10.2
metrická forma objemu	$\omega_g$	5.7.3
operátor krivosti	$R(U, V)$	15.5.1
ortogonálna grupa	$O(n), O(n, \mathbb{R})$	10.1.5
Poissonov tenzor	$\mathcal{P}$	14.1.1
Poissonova zátvorka funkcií $f$ a $g$	$\{f, g\}$	14.1.1

pravé a ľavé pôsobenie grupy	$R_g, L_g$	13.1
pridružená reprezentácia Lieovej grupy	$\text{Ad}, \text{Ad}_g$	12.3.2
pridružená reprezentácia Lieovej algebry	$\text{ad}, \text{ad}_X$	12.3.5
pseudo-euklidovský priestor	$E^{r,s}$	2.6
pseudo-ortogonálna grupa	$O(r, s)$	10.1.5
pull-back	$f^*$	3.1.4
push-forward	$f_*$	3.1.2
reprezentácia grupy	$\rho(g)$	13.1
Ricciho tenzor	$R_{ab}$	15.5.
skalárna krivosť	$R$	15.5
skalárny súčin foriem v $(L, g)$	$(\alpha, \beta)_g$	5.8.4
skalárny súčin foriem na $(M, g)$	$\langle \alpha, \beta \rangle$	8.3.1
skalárny súčin foriem z $\bar{\Omega}^p(P, \rho)$	$\langle \alpha, \beta \rangle_h$	21.5.1
spinová fibrácia	$\pi : SM \rightarrow M$	22.4
symplektická forma	$\omega$	14.1.4
symplektická grupa	$\text{Sp}(m, \mathbb{R})$	10.1.6
špeciálna ortogonálna grupa	$SO(n), SO(n, \mathbb{R})$	10.1.8
špeciálna unitárna grupa	$SU(n)$	10.1.12
štruktúrne konštanty voči $E_i$	$c_{jk}^i$	11.2.2
tenzorové polia typu $(r, s)$ na $M$	$\mathcal{T}_s^r(M)$	2.5.2
tenzory typu $(r, s)$ v $L$	$T_s^r(L)$	2.4.5
tok generovaný vektorovým poľom $V$	$\Phi_t^V, \Phi_t$	2.3
unitárna grupa	$U(n)$	10.1.12
účinkový integrál (funkcionál)	$S[\gamma], S[A], \dots$	15.4.4
vnútorný súčin	$i_v, v_\perp$	5.4.1
vonkajšia algebra priestoru $L$	$\Lambda L^*$	5.3
vonkajšia derivácia	$d$	6.2.5
vonkajšia kovariantná derivácia	$D$	20.3.5
vonkajšia kovariantná derivácia na báze	$\mathcal{D}$	21.2.4
vonkajší súčin foriem	$\alpha \wedge \beta$	5.4.1
vonkajší súčin foriem s hodnotami v $\mathcal{G}$	$[\alpha \wedge \beta]$	11.2.6
vonkajší súčin foriem s hodnotami v $\mathcal{G}$ a $W$	$\alpha \dot{\wedge} \beta$	20.4.5
všeobecná afinná grupa	$GA(n, \mathbb{R})$	10.1.15
všeobecná lineárna grupa	$GL(n, \mathbb{R})$	10.1.3
2-forma elektromagnetického poľa	$F$	16.2.1