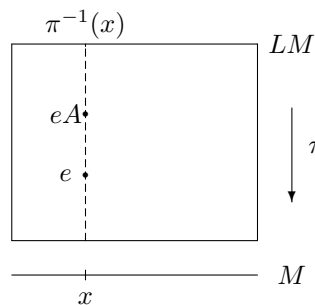


Domáce úlohy k predmetu
KONEXIE A KALIBRAČNÉ POLIA
 Marián Fecko
 Letný semester 2023/2024

K prednáške z 19.2.2024

19.1.3 Nech $\pi : LM \rightarrow M$ je fibrácia repérov. Ukázať, že na variete LM máme prirodzenú štruktúru pravého $GL(n, \mathbb{R})$ -priestoru kompatibilného s fibrováním, t.j. podrobnejšie že
i) ak $A \in GL(n, \mathbb{R})$, tak zobrazenie



$$R_A : LM \rightarrow LM \quad e \mapsto R_A e = eA$$

je pravé pôsobenie $GL(n, \mathbb{R})$ na LM
ii) v súradniciach (x^i, y_b^a) vyzerá

$$R_A : (x^i, y_b^a) \mapsto (x'^i, y_b'^a) \equiv (x^i, y_c^a A_b^c)$$

t.j. $(x', y') = (x, yA)$

- iii)* toto pôsobenie je *voľné* ((13.4.14), všetky stacionárne podgrupy sú triviálne) a *vo vláknach tranzitívne*
iv) toto pôsobenie je *vertikálne*,

$$\pi \circ R_A = \pi$$

t.j. transformuje body LM vždy len v rámci jedného vlákna (na obrázku zvislá prerušovaná čiara)

bez čísla Predstavme si, že na n -rozmernej variete M máme aj metriku a orientáciu, takže môžeme hovoriť o *pravotočivých ortonormovaných* repéroch. Podobne ako sme uvažovali varietu LM , definujeme varietu OM , ktorej bodmi budú všetky pravotočivé ortonormované repéry vo všetkých bodoch variety M .

- i)* Aký je rozmer variety OM ?
ii) Pre $M =$ euklidovská rovina zaveďte explicitne lokálne súradnice na OM !
iii) Aká grupa pôsobí *všeobecne* na OM ?
iv) Ako vyzerá v súradniciach toto pôsobenie pre prípad z časti *ii)*?

K prednáške z 26.2.2024

19.2.1 Nech $\hat{\omega}$ sú formy konexie ∇ voči repérnemu poľu $e(x)$ v oblasti \mathcal{O} a nech (x^i, y_b^a) sú súradnice v $\hat{\mathcal{O}} \equiv \pi^{-1}(\mathcal{O})$ zavedené voči $e(x)$ (19.1.1). Definujme v oblasti $\hat{\mathcal{O}} \equiv \pi^{-1}(\mathcal{O})$ maticovú 1-formu

$$\omega \equiv \omega_{\mathcal{O}} := y^{-1}(\pi^*\hat{\omega})y + y^{-1}dy$$

t.j. detailne $\omega_b^a := (y^{-1})_c^a(\pi^*\hat{\omega}_d^c)y_b^d + (y^{-1})_c^a dy_b^c$

Overiť, že

i) ak to isté zopakujeme v oblasti \mathcal{O}' s repérnym poľom e' (pričom na prieniku s \mathcal{O} platí $e' = eA(x)$) a súradnicami $(x'^i, y_b'^a)$ vzťahnutými voči nemu, tak na prieniku $\hat{\mathcal{O}} \cap \hat{\mathcal{O}'}$ platí

$$\omega_{\mathcal{O}} = \omega_{\mathcal{O}'}$$

Vďaka tomu je na LM vlastne definovaná *globálna* maticová 1-forma

$$\omega \equiv \omega_b^a E_a^b \in \Omega^1(LM, gl(n, \mathbb{R}))$$

Túto globálnu 1-formu ω na LM s hodnotami v $gl(n, \mathbb{R})$ budeme volať *forma konexie*.

Návod: i) pomocou (19.1.3) a (15.6.2)

$$\begin{aligned} \omega_{\mathcal{O}'} &:= y'^{-1}(\pi^*\hat{\omega}')y' + y'^{-1}dy' \\ &= (A^{-1}y)^{-1}(\pi^*(A^{-1}\hat{\omega}A) + \pi^*(A^{-1}dA))A^{-1}y + (A^{-1}y)^{-1}d(A^{-1}y) = \dots \\ &= \omega_{\mathcal{O}} \end{aligned}$$

(uvedomiť si, že súradnicový zápis $\pi^*\hat{\omega}$ a π^*A je taký istý, ako zápis $\hat{\omega}$ a A)

ii) v každej konkrétnej oblasti $\hat{\mathcal{O}}$ je $\omega := \omega_{\mathcal{O}}$; výpočet ukazuje, že táto definícia nezávisí od výberu súradníc a repérneho poľa na \mathcal{O}

19.2.4 Overiť, že forma konexie ω

i) je typu Ad, t.j. správa sa voči akcii R_A grupy $GL(n, \mathbb{R})$ na LM nasledovne

$$R_A^*\omega = Ad_{A^{-1}}\omega \equiv A^{-1}\omega A$$

alebo podrobnejšie

$$R_A^*\omega_b^a = (A^{-1})_c^a \omega_d^c A_b^d$$

ii) spĺňa identitu

$$\langle \omega, \xi_C \rangle = C$$

kde ξ_C je fundamentálne pole akcie R_A zodpovedajúce $C \in gl(n, \mathbb{R})$
iii) spĺňa tiež identity

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\xi_C}\omega &= -\text{ad}_C\omega \equiv -[C, \omega] \\ i_{\xi_C}\omega &= C \\ i_{\xi_C}d\omega &= -[C, \omega]\end{aligned}$$

Návod: *i*), *ii*) priamy výpočet v súradniciach, (19.1.3), (19.1.4), (19.2.1) *iii*) prvá je infinitezimálna verzia *i*) (položiť $A(t) = \exp(tC)$ a derivovať v nule), tretia kombináciou prvých dvoch (6.2.8)

K prednáške zo 4.3.2024

19.2.2 Zdôvodniť, že
i) lokálne rezy

$$\sigma : \mathcal{O} \rightarrow LM$$

fibrácie $\pi : LM \rightarrow M$ sú v 1 – 1 vzťahu s repérnymi poľami na $\mathcal{O} \subset M$
ii) ak $\sigma \leftrightarrow e(x) \leftrightarrow (x^i, y_b^a)$, tak súradnicové vyjadrenie (tohto) rezu je

$$x^i \mapsto (x^i, y_b^a = \delta_b^a) \quad \text{t.j.} \quad x^i(x) = x^i \quad y_b^a(x) = \delta_b^a$$

Návod: *i*) $e(x) = \sigma(x)$; (17.3.8); *ii*) definícia súradníc (x^i, y_b^a) a pojmu rez

19.2.3 Nech $\sigma : \mathcal{O} \rightarrow LM$ je lokálny rez, $e(x)$ jemu zodpovedajúce repérne pole na \mathcal{O} , $\hat{\omega}$ forma konexie (na $\mathcal{O} \subset M$) voči $e(x)$, $\omega \in \Omega^1(LM, gl(n, \mathbb{R}))$ forma konexie na LM . Ukázať, že

$$\hat{\omega} = \sigma^*\omega$$

Návod: v $\pi^{-1}(\mathcal{O})$ je $\omega = y^{-1}(\pi^*\hat{\omega})y + y^{-1}dy$ a rez je v súradniciach (19.2.2) $\sigma : x^i \mapsto (x^i, y_b^a = \delta_b^a)$; odtiaľ $\sigma^*\omega = \sigma^*\pi^*\hat{\omega} = (\pi \circ \sigma)^*\hat{\omega} \equiv \hat{\omega}$

K prednáške z 11.3.2024

19.3.7 Overiť, že (aj) podľa Frobeniovho kritéria je distribúcia \mathcal{D} z úlohy (19.3.4) a (19.3.5) neintegrovateľná

Návod: $[e_1, e_2] = -2\partial_z \neq ae_1 + be_2$

• V jazyku ohraničujúcich 1-foriem θ^i Frobeniovo kritérium hovorí, že distribúcia \mathcal{D} je integrovateľná práve vtedy, keď pre ľubovoľné vektory $U, V \in \mathcal{D}$ platí $d\theta^i(U, V) = 0$, t.j. keď *ohraničenie* všetkých 2-foriem $d\theta^i$ na distribúciu \mathcal{D} dáva nulu:

$$\mathcal{D} \text{ integrovateľná} \quad \Leftrightarrow \quad \{U, V \in \mathcal{D} \Rightarrow d\theta^i(U, V) = 0\}$$

19.3.9 Overiť, že (aj) podľa tejto verzie Frobeniovho kritéria je distribúcia \mathcal{D} z úlohy (19.3.4) neintegrovateľná

Návod: $d\theta(e_1, e_2) = 2 (\neq 0)$

- Spomeňme ešte, že formová verzia Frobeniovho kritéria sa niekedy dá nájsť aj ako (ekvivalentné) tvrdenie, že \mathcal{D} je integrovateľná práve keď existuje $(n-k)^2$ 1-foriem σ_j^i takých, že platí $d\theta^i = \sigma_j^i \wedge \theta^j$

$$\mathcal{D} \text{ integrovateľná} \quad \Leftrightarrow \quad \{\exists \sigma_j^i : d\theta^i = \sigma_j^i \wedge \theta^j\}$$

19.3.10 Overiť, že (aj) podľa tretej verzie Frobeniovho kritéria je distribúcia \mathcal{D} z úlohy (19.3.4) neintegrovateľná

Návod: $d\theta = 2dx \wedge dy \neq \sigma \wedge \theta$ pre žiadnu 1-formu σ (skúsiť $\sigma = adx + bdy + cdz$ a dostať spor)

K prednáške z 18.3.2024

bez čísla Uvažujme múdrosti, ktoré sme sa naučili o fibrácii repérov $\pi : LM \rightarrow M$, pre prípad $M = S^1 =$ kružnica. Ako lokálnu súradnicu na nej budeme používať bežný uhol φ .

- Ako vyzerajú teraz súradnice typu (x^i, y_b^a) ? A ako projekcia π ?
- Ako v nich vyzerá akcia grupy $GL(n, \mathbb{R})$ a fundamentálne pole ξ_C ?
- Ako v nich vyzerá *najvšeobecnejšia* forma konexie ω ?
- Ako potom vyzerá *explicitne* horizontálny zdvih vektorového poľa?
- Ako v nich vyzerá *najvšeobecnejšie vertikálne* vektorové pole?

bez čísla Uvažujme ešte raz ten prípad $M = S^1 =$ kružnica.

- Ako v nich vyzerá najvšeobecnejší horizontálny vektor?
- Ako vyzerajú (a koľko ich je) horizontálne zdvihy ∂_i^h ?
- Zvoľte nejakú úplne konkrétnu formu konexie a urobte horizontálny zdvih (v jej zmysle) krivky $\varphi(t) = t!$

Poznámka: Pojem „horizontálny zdvih poľa“ si pozrite v 19.4.4 (napr. koniec návodu :-), krivky v 19.5.2

K prednáške z 25.3.2024

bez čísla Podľa prednášky je vektorové pole na M nahraditeľné vhodným zobrazením

$$\Phi^v : LM \rightarrow \mathbb{R}^n \quad e \mapsto \Phi^v(e) \equiv \hat{v}$$

Prakticky (v súradniciach (x^i, y_b^a)) to je (rozmyslite si) sada funkcií

$$\hat{v}^a(x, y)$$

Vhodné zobrazenie Φ^v je také, ktoré spĺňa (abstraktne zapísanú) podmienku

$$\Phi^v(eA) = A^{-1}\Phi^v(e)$$

i) Napíšte túto podmienku v súradnicovom balení (t.j. pre funkcie $\hat{v}^a(x, y)$).

ii) Nájdite explicitne jej všeobecné riešenie.

iii) Určte to riešenie, ktoré zodpovedá vektorovému poľu $V = V^a(x)e_a$, kde e_a je repérne pole, voči ktorému sa zaviedli súradnice (x^i, y_b^a)

iv) Zopakujte to isté pre *kovektorové* pole $\alpha = \alpha_a(x)e^a$.

Návod: ii) napíšte podmienku z i) pre $y =$ jednotková matica

K prednáške z 8.4.2024

Ďalšie kritérium triviálnosti akejkolvek (nielen hlavnej) fibrovanej variety, ktoré je užitočné do života, znie (uvádzame ho bez dôkazu)

$$\text{stiahnuteľná báza} \quad \Rightarrow \quad \text{triviálna fibrácia}$$

Všimneme si, že toto kritérium nedáva (na rozdiel od (20.1.3)) konštruktívny návod, ako konkrétne nájsť globálnu trivializáciu; hovorí len, že určite existuje.

Netriviálne fibrácie teda *musia* mať *nestiahnuteľné* bázy. Nestiahnuteľnosť bázy však nestačí na netriviálnosť, čo ukazuje napríklad každá *súčinová* fibrácia s nestiahnuteľnou bázou. Pozrime sa na jeden trochu zaujímavejší príklad použitia tohoto kritéria.

20.1.6 *Vlastná ortochrónna Lorentzova grupa* $G \equiv L_+^\uparrow$ (také $\Lambda \in SO(1, 3)$, že $\Lambda_0^0 \geq 1$, takže neobracia sa smer času \leftrightarrow ortochronnosť) prirodzene pôsobí zľava na stĺpčekoch $x \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^0, \mathbf{x})$ z $E^{1,3}$ (bodoch Minkovského priestoru)

$$x \mapsto \Lambda x$$

Nech H je stabilizátor bodu $\hat{x} \equiv (1, 0, 0, 0)$. Ukázať, že

i) orbita bodu \hat{x} je (homogénny priestor)

$$M = \text{horný hyperboloid} = \{x \in \mathbb{E}^{1,3} \mid \eta(x, x) = 1, x^0 > 0\}$$

ii) ako varieta $M \sim \mathbb{R}^3$

iii) $H \approx SO(3)$

iv)

$$\pi : L_+^\uparrow \rightarrow M$$

je *triviálna* hlavná $SO(3)$ -fibrácia, a teda platí

$$L_+^\uparrow \sim \mathbb{R}^3 \times SO(3)$$

Návod: *i*) (10.1.5), (13.1.8); *ii*) $(x^0, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{x}$; *iii*) (13.1.11); *iv*) (13.2.7), (20.1.2), $M \sim \mathbb{R}^3$ je stiahnuteľná

Poznámka: Výsledok *iv*) znamená, že zadať prvok grupy $G \equiv L_+^\uparrow$ je to isté, ako zadať vhodnú dvojicu (\mathbf{a}, A) . Aký by mohol byť význam jednotlivých členov tejto dvojice?

K prednáške z 15.4.2024

13.5.5 Uvažujme ako M kružnicu S^1 so štandardným polárnym uhlom φ a na nej bežné pôsobenie $G = U(1) = SO(2)$ (rotáciu) danú vzťahom

$$e^{i\alpha} : \varphi \mapsto \varphi + \alpha$$

Overiť, že

i) fundamentálne pole $\xi \equiv \xi_{E_1}$ akcie, zodpovedajúce bázovému prvku $X \equiv E_1 = i \in u(1)$, je

$$\xi = \partial_\varphi$$

ii) ak uvažujeme ako $\hat{\rho}$ ireducibilnú reprezentáciu $\hat{\rho}_n$ z úlohy (12.2.10), tak (infinitesimalna) podmienka na funkcie typu $\hat{\rho}_n$ znie

$$\partial_\varphi \Phi_n(\varphi) = -in\Phi_n(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \Phi_n(\varphi) = \Phi_n(0)e^{-in\varphi}$$

iii) *Fourierov rozklad* funkcií na kružnici (do radu podľa funkcií $\sim e^{-in\varphi}$) sa dá chápať ako rozklad podľa funkcií typu $\hat{\rho}$ pre všemožné ireducibilné reprezentácie grupy $U(1)$

iv) diferenciály $d\Phi_n$ funkcií Φ_n sú 1-formy typu $\hat{\rho}_n$ na kružnici:

$$\mathcal{L}_\xi(d\Phi_n) = -in(d\Phi_n)$$

Návod: *ii*) (13.5.4)*iii*; *iv*) (6.2.10)

bez čísla Uvažujme *súčinovú* hlavnú $U(1)$ -fibráciu s bázou \mathbb{R}

$$\pi : \mathbb{R} \times U(1) \rightarrow \mathbb{R}$$

(Pozri text tesne pred 20.1.1.) Body totálneho priestoru $P = \mathbb{R} \times U(1)$ sú teda usporiadané dvojice $(x, e^{i\varphi})$, projekcia je $(x, e^{i\varphi}) \mapsto x$ a pôsobenie grupy je $R_{e^{i\alpha}}(x, e^{i\varphi}) = (x, e^{i\varphi}e^{i\alpha})$. Ako lokálne súradnice na P budeme brať (x, φ) .

i) Vyjadrite v súradniciach pôsobenie grupy $U(1)$ na P

ii) Vyjadrite v súradniciach fundamentálne pole ξ_X tohoto pôsobenia

iii) Napíšte *najvšeobecnejšiu* 1-formu σ s hodnotami v uvažovanej Lieovej algebre

iv) Nájdite *najvšeobecnejšiu* 1-formu *konexie* ω na P

v) Napíšte najvšeobecnejšie *horizontálne* vektorové pole W na P (voči ω z časti *iv*)

vi) Napíšte horizontálny zdvih ∂_x^h bázo­vého súradnicového poľa ∂_x na M

vii) Napíšte horizontálny zdvih $\gamma^h(t)$ krivky $\gamma(t) \leftrightarrow x(t) = t$ (voči *nejako* *fixovanej* konexii ω z časti *iv*)

Návod: *iii*) naša Lieova algebra je $u(1)$ a jej báza je ...; *iv*) chce sa od nej $R_g^* \omega = \text{Ad}_{g^{-1}} \omega$ plus $\langle \omega, \xi_X \rangle = X$; fakt 20.2.6; *v*) chce sa od neho $\langle \omega, W \rangle = 0$; *vi*) chce sa od neho navyše, aby sa projektoval na ∂_x

K prednáške z 22.4.2024

20.3.4 Definujme pre ľubovoľnú p -formu α na P novú p -formu hor α (jej *horizontálnu časť*) predpisom

$$(\text{hor } \alpha)(U, \dots, V) := \alpha(\text{hor } U, \dots, \text{hor } V)$$

Overiť, že

i) definícia je korektná (výsledkom je naozaj p -forma)

ii) zobrazenie hor : $\Omega^p(P) \rightarrow \Omega^p(P)$ je projekcia, t.j. platí

$$\text{hor} \circ \text{hor} = \text{hor}$$

iii) *horizontálne formy* (t.j. také, že hor $\alpha = \alpha$) sa anulujú, ak čo len jeden ich argument je vertikálny

$$\text{hor } \alpha = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad i_W \alpha = 0 \text{ pre vertikálne } W$$

iv) pre formu konexie platí hor $\omega = 0$

v) na lineárnej kombinácii a súčine platí

$$\text{hor}(\alpha + \lambda\beta) = \text{hor } \alpha + \lambda \text{hor } \beta \quad \text{hor}(\alpha \wedge \beta) = (\text{hor } \alpha) \wedge (\text{hor } \beta)$$

takže operátor hor je (endo)morfizmus Cartanovej algebry $\Omega(P)$ diferenciálnych foriem na P ; jeho obraz je podalgebra Cartanovej algebry

$$\bar{\Omega}(P) := \text{Im hor} \leq \Omega(P) \quad \text{algebra horizontálnych foriem na } P$$

vi) ak operátor hor aplikujeme štandardným spôsobom na formy typu ρ (t.j. s hodnotami vo (V, ρ) , hor $(\alpha^A E_A) := (\text{hor } \alpha^A) E_A$, (6.4.4)), tak hor zachováva typ ρ foriem, na ktoré pôsobí

$$\alpha \text{ je typu } \rho \quad \Rightarrow \quad \text{hor } \alpha \text{ je typu } \rho$$

Návod: *i*) $V \mapsto \text{hor } V$ je \mathcal{F} -lineárna operácia; *ii*) obe strany si predstavíť na všeobecných argumentoch; *vi*) $R_g^* \circ \text{hor} = \text{hor} \circ R_g^*$ podľa (20.2.1) \square

20.3.5 Definujme na P *vonkajšiu kovariantnú deriváciu* diferenciálnych foriem predpisom

$$D\alpha := \text{hor } d\alpha$$

t.j. ako horizontálnu časť z ich (obyčajnej) vonkajšej derivácie. Overiť, že $i)$ je to zobrazenie $D : \Omega^p(P) \rightarrow \bar{\Omega}^{p+1}(P)$

$ii)$ na lineárnej kombinácii a súčine sa správa podobne ako "obyčajná" vonkajšia derivácia

$$D(\alpha + \lambda\beta) = D\alpha + \lambda D\beta \qquad D(\alpha \wedge \beta) = (D\alpha) \wedge \text{hor } \beta + (\hat{\eta} \text{ hor } \alpha) \wedge D\beta$$

takže operátor D sa v Cartanovej podalgebre $\bar{\Omega}(P)$ *horizontálnych* foriem na P správa ako *derivácia stupňa +1*

$iii)$ ak operátor D aplikujeme štandardným spôsobom na formy typu ρ (t.j. s hodnotami vo (V, ρ) , $D(\alpha^A E_A) := (D\alpha^A)E_A$, (6.4.4)), tak D zachováva typ ρ foriem, na ktoré pôsobí

$$\alpha \text{ je typu } \rho \qquad \Rightarrow \qquad D\alpha \text{ je typu } \rho$$

Návod: $ii)$ vlastnosti d a hor ; $iii)$ $R_g^* \circ D = D \circ R_g^*$ podľa (20.3.4)