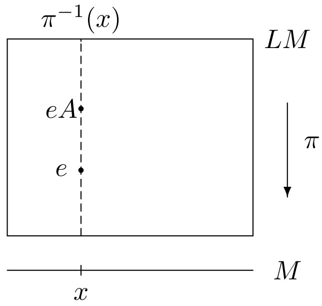
Domáce úlohy k predmetu
KONEXIE A KALIBRAČNÉ POLIA
Marián Fecko
Letný semester 2023/2024

K prednáške z 19.2.2024

$\boxed{19.1.3}$ Nech $\pi : LM \to M$ je fibrácia repérov. Ukázať, že na variete LM máme prirodzenú štruktúru pravého $GL(n, \mathbb{R})$-priestoru kompatibilného s fibrovaním, t.j. podrobnejšie že



$i)$ ak $A \in GL(n, \mathbb{R})$, tak zobrazenie

$$R_A : LM \to LM \qquad e \mapsto R_A e = eA$$

je pravé pôsobenie $GL(n, \mathbb{R})$ na LM
$ii)$ v súradniciach (x^i, y^a_b) vyzerá

$$R_A : (x^i, y^a_b) \mapsto (x'^i, y'^a_b) \equiv (x^i, y^a_c A^c_b)$$
$$\text{t.j.} \qquad (x', y') = (x, yA)$$

$iii)$ toto pôsobenie je *voľné* ((13.4.14), všetky stacionárne podgrupy sú triviálne) a *vo vlákne tranzitívne*
$iv)$ toto pôsobenie je *vertikálne*,

$$\pi \circ R_A = \pi$$

t.j. transformuje body LM vždy len v rámci jedného vlákna (na obrázku zvislá prerušovaná čiara)

$\boxed{\text{bez čísla}}$ Predstavme si, že na n-rozmernej variete M máme aj metriku a orientáciu, takže môžeme hovoriť o *pravotočivých ortonormovaných* repéroch. Podobne ako sme uvažovali varietu LM, definujeme varietu OM, ktorej bodmi budú všetky pravotočivé ortonormované repéry vo všetkých bodoch variety M.
$i)$ Aký je rozmer variety OM?
$ii)$ Pre $M =$ euklidovská rovina zaveďte explicitne lokálne súradnice na OM!
$iii)$ Aká grupa pôsobí *všeobecne* na OM?
$iv)$ Ako vyzerá v súradniciach toto pôsobenie pre prípad z časti $ii)$?

K prednáške z 26.2.2024

$\boxed{19.2.1}$ Nech $\hat{\omega}$ sú formy konexie ∇ voči repérnemu poľu $e(x)$ v oblasti $\mathcal{O}$ a nech (x^i, y^a_b) sú súradnice v $\hat{\mathcal{O}} \equiv \pi^{-1}(\mathcal{O})$ zavedené voči $e(x)$ (19.1.1). Definujme v oblasti $\hat{\mathcal{O}} \equiv \pi^{-1}(\mathcal{O})$ maticovú 1-formu

$$\omega \equiv \omega_{\mathcal{O}} := y^{-1}(\pi^*\hat{\omega})y + y^{-1}dy$$
$$\text{t.j. detailne} \qquad \omega^a_b := (y^{-1})^a_c(\pi^*\hat{\omega}^c_d)y^d_b + (y^{-1})^a_c dy^c_b$$

Overiť, že
i) ak to isté zopakujeme v oblasti $\mathcal{O}'$ s repérnym poľom e' (pričom na prieniku s $\mathcal{O}$ platí $e' = eA(x)$) a súradnicami (x'^i, y'^a_b) vztiahnutými voči nemu, tak na prieniku $\hat{\mathcal{O}} \cap \hat{\mathcal{O}}'$ platí

$$\omega_{\mathcal{O}} = \omega_{\mathcal{O}'}$$

Vďaka tomu je na LM vlastne definovaná *globálna* maticová 1-forma

$$\omega \equiv \omega^a_b E^b_a \in \Omega^1(LM, gl(n, \mathbb{R}))$$

Túto globálnu 1-formu ω na LM s hodnotami v $gl(n, \mathbb{R})$ budeme volať *forma konexie.*
Návod: *i*) pomocou (19.1.3) a (15.6.2)

$$\begin{aligned}
\omega_{\mathcal{O}'} &:= y'^{-1}(\pi^*\hat{\omega'})y' + y'^{-1}dy' \\
&= (A^{-1}y)^{-1}(\pi^*(A^{-1}\hat{\omega}A) + \pi^*(A^{-1}dA))A^{-1}y + (A^{-1}y)^{-1}d(A^{-1}y) = \dots \\
&= \omega_{\mathcal{O}}
\end{aligned}$$

(uvedomiť si, že súradnicový zápis $\pi^*\hat{\omega}$ a π^*A je taký istý, ako zápis $\hat{\omega}$ a A)
ii) v každej konkrétnej oblasti $\hat{\mathcal{O}}$ je $\omega := \omega_{\mathcal{O}}$; výpočet ukazuje, že táto definícia nezávisí od výberu súradníc a repérneho poľa na $\mathcal{O}$

$\boxed{19.2.4}$ Overiť, že forma konexie ω
i) je typu Ad, t.j. správa sa voči akcii R_A grupy $GL(n, \mathbb{R})$ na LM nasledovne

$$R^*_A\omega = Ad_{A^{-1}}\omega \equiv A^{-1}\omega A$$

alebo podrobnejšie

$$R^*_A\omega^a_b = (A^{-1})^a_c\omega^c_d A^d_b$$

ii) spĺňa identitu

$$\langle \omega, \xi_C \rangle = C$$

kde ξ_C je fundamentálne pole akcie R_A zodpovedajúce $C \in gl(n, \mathbb{R})$
iii) spĺňa tiež identity

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\xi_C}\omega &= -\mathrm{ad}_C\omega \equiv -[C, \omega] \\
i_{\xi_C}\omega &= C \\
i_{\xi_C}d\omega &= -[C, \omega]
\end{aligned}$$

Návod: *i*), *ii*) priamy výpočet v súradniciach, (19.1.3), (19.1.4), (19.2.1) *iii*) prvá je infinitezimálna verzia *i*) (položiť $A(t) = \exp(tC)$ a derivovať v nule), tretia kombináciou prvých dvoch (6.2.8)

K prednáške zo 4.3.2024

$\boxed{19.2.2}$ Zdôvodniť, že
i) lokálne rezy

$$\sigma : \mathcal{O} \to LM$$

fibrácie $\pi : LM \to M$ sú v $1-1$ vzťahu s repérnymi poľami na $\mathcal{O} \subset M$
ii) ak $\sigma \leftrightarrow e(x) \leftrightarrow (x^i, y^a_b)$, tak súradnicové vyjadrenie (tohto) rezu je

$$x^i \mapsto (x^i, y^a_b = \delta^a_b) \qquad \text{t.j.} \qquad x^i(x) = x^i \quad y^a_b(x) = \delta^a_b$$

Návod: *i*) $e(x) = \sigma(x)$; (17.3.8); *ii*) definícia súradníc (x^i, y^a_b) a pojmu rez

$\boxed{19.2.3}$ Nech $\sigma : \mathcal{O} \to LM$ je lokálny rez, $e(x)$ jemu zodpovedajúce repérne pole na $\mathcal{O}$, $\hat{\omega}$ forma konexie (na $\mathcal{O} \subset M$) voči $e(x)$, $\omega \in \Omega^1(LM, gl(n, \mathbb{R}))$ forma konexie na LM. Ukázať, že

$$\hat{\omega} = \sigma^*\omega$$

Návod: v $\pi^{-1}(\mathcal{O})$ je $\omega = y^{-1}(\pi^*\hat{\omega})y + y^{-1}dy$ a rez je v súradniciach (19.2.2) $\sigma : x^i \mapsto (x^i, y^a_b = \delta^a_b)$; odtiaľ $\sigma^*\omega = \sigma^*\pi^*\hat{\omega} = (\pi \circ \sigma)^*\hat{\omega} \equiv \hat{\omega}$

K prednáške z 11.3.2024

$\boxed{19.3.7}$ Overiť, že (aj) podľa Frobeniovho kritéria je distribúcia $\mathcal{D}$ z úlohy (19.3.4) a (19.3.5) neintegrovateľná
Návod: $[e_1, e_2] = -2\partial_z \neq ae_1 + be_2$

• V jazyku ohraničujúcich 1-foriem θ^i Frobeniovo kritérium hovorí, že distribúcia $\mathcal{D}$ je integrovateľná práve vtedy, keď pre ľubovoľné vektory $U, V \in \mathcal{D}$ platí $d\theta^i(U, V) = 0$, t.j. keď *ohraničenie* všetkých 2-foriem $d\theta^i$ na distribúciu $\mathcal{D}$ dáva nulu:

$$\mathcal{D} \text{ integrovateľná} \qquad \Leftrightarrow \qquad \{U, V \in \mathcal{D} \Rightarrow d\theta^i(U, V) = 0\}$$

$\boxed{19.3.9}$ Overiť, že (aj) podľa tejto verzie Frobeniovho kritéria je distribúcia $\mathcal{D}$ z úlohy (19.3.4) neintegrovateľná
Návod: $d\theta(e_1, e_2) = 2 \ (\neq 0)$

• Spomeňme ešte, že formová verzia Frobeniovho kritéria sa niekedy dá nájsť aj ako (ekvivalentné) tvrdenie, že $\mathcal{D}$ je integrovateľná práve keď existuje $(n-k)^2$ 1-foriem σ^i_j takých, že platí $d\theta^i = \sigma^i_j \wedge \theta^j$

$$\mathcal{D} \text{ integrovateľná} \qquad \Leftrightarrow \qquad \{\exists \sigma^i_j : d\theta^i = \sigma^i_j \wedge \theta^j\}$$

$\boxed{19.3.10}$ Overiť, že (aj) podľa tretej verzie Frobeniovho kritéria je distribúcia $\mathcal{D}$ z úlohy (19.3.4) neintegrovateľná
Návod: $d\theta = 2dx \wedge dy \neq \sigma \wedge \theta$ pre žiadnu 1-formu σ (skúsiť $\sigma = adx + bdy + cdz$ a dostať spor)

K prednáške z 18.3.2024

$\boxed{\text{bez čísla}}$ Uvažujme múdrosti, ktoré sme sa naučili o fibrácii repérov $\pi : LM \to M$, pre prípad $M = S^1$ = kružnica. Ako lokálnu súradnicu na nej budeme používať bežný uhol φ.
i) Ako vyzerajú teraz súradnice typu (x^i, y^a_b)? A ako projekcia π?
ii) Ako v nich vyzerá akcia grupy $GL(n, \mathbb{R})$ a fundamentálne pole ξ_C?
iii) Ako v nich vyzerá *najvšeobecnejšia* forma konexie ω?
iv) Ako potom vyzerá *explicitne* horizontálny zdvih vektorového poľa?
v) Ako v nich vyzerá *najvšeobecnejšie vertikálne* vektorové pole?

$\boxed{\text{bez čísla}}$ Uvažujme ešte raz ten prípad $M = S^1$ = kružnica.
i) Ako v nich vyzerá najvšeobecnejší horizontálny vektor?
ii) Ako vyzerajú (a koľko ich je) horizontálne zdvihy ∂^h_i?
iii) Zvoľte nejakú úplne konkrétnu formu konexie a urobte horizontálny zdvih (v jej zmysle) krivky $\varphi(t) = t$!

Poznámka: Pojem „horizontálny zdvih poľa" si pozrite v 19.4.4 (napr. koniec návodu :-), krivky v 19.5.2

K prednáške z 25.3.2024

$\boxed{\text{bez čísla}}$ Podľa prednášky je vektorové pole na M nahraditeľné vhodným zobrazením

$$\Phi^v : LM \to \mathbb{R}^n \qquad e \mapsto \Phi^v(e) \equiv \hat{v}$$

Prakticky (v súradniciach (x^i, y^a_b)) to je (rozmyslite si) sada funkcií

$$\hat{v}^a(x, y)$$

Vhodné zobrazenie Φ^v je také, ktoré spĺňa (abstraktne zapísanú) podmienku

$$\Phi^v(eA) = A^{-1}\Phi^v(e)$$

i) Napíšte túto podmienku v súradnicovom balení (t.j. pre funkcie $\hat{v}^a(x,y)$).
ii) Nájdite explicitne jej všeobecné riešenie.
iii) Určte to riešenie, ktoré zodpovedá vektorovému poľu $V = V^a(x)e_a$, kde e_a je repérne pole, voči ktorému sa zaviedli súradnice (x^i, y^a_b)
iv) Zopakujte to isté pre *kovektorové* pole $\alpha = \alpha_a(x)e^a$.
Návod: *ii*) napíšte podmienku z *i*) pre $y =$ jednotková matica

K prednáške z 8.4.2024

Ďalšie kritérium triviálnosti akejkoľvek (nielen hlavnej) fibrovanej variety, ktoré je užitočné do života, znie (uvádzame ho bez dôkazu)

$$\text{stiahnuteľná báza} \qquad \Rightarrow \qquad \text{triviálna fibrácia}$$

Všimneme si, že toto kritérium nedáva (na rozdiel od (20.1.3)) konštruktívny návod, ako konkrétne nájsť globálnu trivializáciu; hovorí len, že určite existuje.

*Ne*triviálne fibrácie teda *musia* mať *ne*stiahnuteľné bázy. Nestiahnuteľnosť bázy však nestačí na netriviálnosť, čo ukazuje napríklad každá *súčinová* fibrácia s nestiahnuteľnou bázou. Pozrime sa na jeden trochu zaujímavejší príklad použitia tohoto kritéria.

$\boxed{20.1.6}$ *Vlastná ortochrónna Lorentzova grupa* $G \equiv L^\uparrow_+$ (také $\Lambda \in SO(1,3)$, že $\Lambda^0_0 \geq 1$, takže neobracia sa smer času $\leftrightarrow$ ortochronnosť) prirodzene pôsobí zľava na stĺpčekoch $x \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^0, \mathbf{x})$ z $E^{1,3}$ (bodoch Minkowského priestoru)

$$x \mapsto \Lambda x$$

Nech H je stabilizátor bodu $\hat{x} \equiv (1,0,0,0)$. Ukázať, že
i) orbita bodu $\hat{x}$ je (homogénny priestor)

$$M = \text{horný hyperboloid} \;=\; \{x \in \mathbb{E}^{1,3} \mid \eta(x,x) = 1,\; x^0 > 0\}$$

ii) ako varieta $M \sim \mathbb{R}^3$
iii) $H \approx SO(3)$
iv)

$$\pi : L^\uparrow_+ \to M$$

je *triviálna* hlavná $SO(3)$-fibrácia, a teda platí

$$L^\uparrow_+ \sim \mathbb{R}^3 \times SO(3)$$

Návod: *i*) (10.1.5), (13.1.8); *ii*) $(x^0, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{x}$; *iii*) (13.1.11); *iv*) (13.2.7), (20.1.2), $M \sim \mathbb{R}^3$ je stiahnuteľná
Poznámka: Výsledok *iv*) znamená, že zadať prvok grupy $G \equiv L_+^\uparrow$ je to isté, ako zadať vhodnú *dvojicu* $(\mathbf{a}, A)$. Aký by mohol byť význam jednotlivých členov tejto dvojice?

K prednáške z 15.4.2024

$\boxed{13.5.5}$ Uvažujme ako M kružnicu S^1 so štandardným polárnym uhlom φ a na nej bežné pôsobenie $G = U(1) = SO(2)$ (rotáciu) danú vzťahom

$$e^{i\alpha} : \varphi \mapsto \varphi + \alpha$$

Overiť, že
i) fundamentálne pole $\xi \equiv \xi_{E_1}$ akcie, zodpovedajúce bázovému prvku $X \equiv E_1 = i \in u(1)$, je

$$\xi = \partial_\varphi$$

ii) ak uvažujeme ako $\hat{\rho}$ ireducibilnú reprezentáciu $\hat{\rho}_n$ z úlohy (12.2.10), tak (infinitezimálna) podmienka na *funkcie typu* $\hat{\rho}_n$ znie

$$\partial_\varphi \Phi_n(\varphi) = -in\Phi_n(\varphi) \qquad \Rightarrow \qquad \Phi_n(\varphi) = \Phi_n(0)e^{-in\varphi}$$

iii) *Fourierov rozklad* funkcií na kružnici (do radu podľa funkcií $\sim e^{-in\varphi}$) sa dá chápať ako rozklad podľa *funkcií typu* $\hat{\rho}$ pre *všemožné ireducibilné* reprezentácie grupy $U(1)$
iv) diferenciály $d\Phi_n$ funkcií Φ_n sú 1-formy typu $\hat{\rho}_n$ na kružnici:

$$\mathcal{L}_\xi(d\Phi_n) = -in(d\Phi_n)$$

Návod: *ii*) (13.5.4)*iii*; *iv*) (6.2.10)

$\boxed{\text{bez čísla}}$ Uvažujme *súčinovú* hlavnú $U(1)$-fibráciu s bázou $\mathbb{R}$

$$\pi : \mathbb{R} \times U(1) \to \mathbb{R}$$

(Pozri text tesne pred 20.1.1.) Body totálneho priestoru $P = \mathbb{R} \times U(1)$ sú teda usporiadané dvojice $(x, e^{i\varphi})$, projekcia je $(x, e^{i\varphi}) \mapsto x$ a pôsobenie grupy je $R_{e^{i\alpha}}(x, e^{i\varphi}) = (x, e^{i\varphi}e^{i\alpha})$. Ako lokálne súradnice na P budeme brať (x, φ).
i) Vyjadrite v súradniciach pôsobenie grupy $U(1)$ na P
ii) Vyjadrite v súradniciach fundamentálne pole ξ_X tohoto pôsobenia
iii) Napíšte *najvšeobecnejšiu* 1-formu σ s hodnotami v uvažovanej Lieovej algebre
iv) Nájdite najvšeobecnejšiu 1-formu *konexie* ω na P

v) Napíšte najvšeobecnejšie *horizontálne* vektorové pole W na P (voči ω z časti *iv*)
vi) Napíšte horizontálny zdvih ∂_x^h bázového súradnicového poľa ∂_x na M
vii) Napíšte horizontálny zdvih $\gamma^h(t)$ krivky $\gamma(t) \leftrightarrow x(t) = t$ (voči *nejako fixovanej* konexii ω z časti *iv*)
Návod: *iii*) naša Lieova algebra je $u(1)$ a jej báza je ...; *iv*) chce sa od nej $R_g^*\omega = \text{Ad}_{g^{-1}}\omega$ plus $\langle \omega, \xi_X \rangle = X$; fakt 20.2.6; *v*) chce sa od neho $\langle \omega, W \rangle = 0$; *vi*) chce sa od neho navyše, aby sa projektoval na ∂_x

K prednáške z 22.4.2024

$\boxed{20.3.4}$ Definujme pre ľubovoľnú p-formu α na P novú p-formu $\text{hor}\,\alpha$ (jej *horizontálnu časť*) predpisom

$$(\text{hor}\,\alpha)(U, \dots, V) := \alpha(\text{hor}\,U, \dots, \text{hor}\,V)$$

Overiť, že
i) definícia je korektná (výsledkom je naozaj p-forma)
ii) zobrazenie $\text{hor} : \Omega^p(P) \to \Omega^p(P)$ je projekcia, t.j. platí

$$\text{hor} \circ \text{hor} = \text{hor}$$

iii) *horizontálne formy* (t.j. také, že $\text{hor}\,\alpha = \alpha$) sa anulujú, ak čo len jeden ich argument je vertikálny

$$\text{hor}\,\alpha = \alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad i_W\alpha = 0 \text{ pre vertikálne } W$$

iv) pre formu konexie platí $\text{hor}\,\omega = 0$
v) na lineárnej kombinácii a súčine platí

$$\text{hor}\,(\alpha + \lambda\beta) = \text{hor}\,\alpha + \lambda \text{hor}\,\beta \qquad \text{hor}\,(\alpha \wedge \beta) = (\text{hor}\,\alpha) \wedge (\text{hor}\,\beta)$$

takže operátor hor je (endo)*morfizmus* Cartanovej algebry $\Omega(P)$ diferenciálnych foriem na P; jeho obraz je podalgebra Cartanovej algebry

$$\bar{\Omega}(P) := \text{Im}\,\text{hor} \leq \Omega(P) \qquad \textit{algebra horizontálnych foriem na } P$$

vi) ak operátor hor aplikujeme štandardným spôsobom na formy typu ρ (t.j. s hodnotami vo (V, ρ), $\text{hor}\,(\alpha^A E_A) := (\text{hor}\,\alpha^A)E_A$, (6.4.4)), tak hor zachováva typ ρ foriem, na ktoré pôsobí

$$\alpha \text{ je typu } \rho \qquad \Rightarrow \qquad \text{hor}\,\alpha \text{ je typu } \rho$$

Návod: *i*) $V \mapsto \text{hor}\,V$ je $\mathcal{F}$-lineárna operácia; *ii*) obe strany si predstaviť na všeobecných argumentoch; *vi*) $R_g^* \circ \text{hor} = \text{hor} \circ R_g^*$ podľa (20.2.1) □

$\boxed{20.3.5}$ Definujme na P *vonkajšiu kovariantnú deriváciu* diferenciálnych foriem predpisom

$$D\alpha := \text{hor}\, d\alpha$$

t.j. ako horizontálnu časť z ich (obyčajnej) vonkajšej derivácie. Overiť, že
i) je to zobrazenie $D : \Omega^p(P) \to \bar{\Omega}^{p+1}(P)$
ii) na lineárnej kombinácii a súčine sa správa podobne ako "obyčajná" vonkajšia derivácia

$$D(\alpha + \lambda\beta) = D\alpha + \lambda D\beta \qquad\qquad D(\alpha \wedge \beta) = (D\alpha) \wedge \text{hor}\, \beta + (\hat{\eta}\ \text{hor}\, \alpha) \wedge D\beta$$

takže operátor D sa v Cartanovej podalgebre $\bar{\Omega}(P)$ *horizontálnych* foriem na P správa ako *derivácia stupňa* $+1$
iii) ak operátor D aplikujeme štandardným spôsobom na formy typu ρ (t.j. s hodnotami vo (V, ρ), $D(\alpha^A E_A) := (D\alpha^A)E_A$, (6.4.4)), tak D zachováva typ ρ foriem, na ktoré pôsobí

$$\alpha \text{ je typu } \rho \qquad \Rightarrow \qquad D\alpha \text{ je typu } \rho$$

Návod: *ii*) vlastnosti d a hor; *iii*) $R_g^* \circ D = D \circ R_g^*$ podľa (20.3.4)

K prednáške zo 6.5.2024

$\boxed{\text{bez čísla}}$ Pripomeňme na začiatku grupu $GA(1, \mathbb{R})$ a jej Lieovu algebru $ga(1, \mathbb{R})$ (pozri 11.7.10):

$$GA(1, \mathbb{R}) \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow (a, b)$$
$$ga(1, \mathbb{R}) \leftrightarrow \begin{pmatrix} X^1 & X^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv X^1 E_1 + X^2 E_2 \equiv X$$

Uvažujme *súčinovú* hlavnú $GA(1, \mathbb{R})$-fibráciu s bázou $\mathbb{R}^2$

$$\pi : \mathbb{R}^2 \times GA(1, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$$

(Pozri text tesne pred 20.1.1) Ako sme sa naučili v úlohe 10.2.6, body grupy $GA(1, \mathbb{R})$ sa dajú predstaviť ako body roviny (u, v) s $u \neq 0$ (t.j. s vynechanou osou v) a súčin v nej je daný vzorcom

$$(u, v) \circ (a, b) = (au, bu + v)$$

Súradnicovo sú teda body totálneho priestoru $P = \mathbb{R}^2 \times GA(1, \mathbb{R})$ dané ako (x, y, u, v), projekcia je $(x, y, u, v) \mapsto (x, y)$ a pôsobenie grupy vyzerá

$$R_{(a,b)}(x, y, u, v) = (x, y, au, bu + v)$$

i) Vyjadrite v súradniciach (x, y, u, v) fundamentálne pole ξ_X tohoto pôsobenia
ii) Overte, že výrazom

$$\omega = \omega^1 E_1 + \omega^2 E_2 = \frac{1}{u} \begin{pmatrix} du & dv \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je daná 1-forma istej konexie ω na P
iii) Nájdite 2-formu *krivosti*

$$\Omega = \Omega^1 E_1 + \Omega^2 E_2 = \begin{pmatrix} \Omega^1 & \Omega^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tejto konexie ω na P
iv) Závisí paralelný prenos v zmysle tejto konexie od cesty?
Návod: *i*) jednotkový prvok grupy je $(a, b) = (1, 0)$; *ii*) má spĺňať dve známe vlastnosti $R_g^* \omega = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \omega$ plus $\langle \omega, \xi_X \rangle = X$; prvá z nich sa ľahšie overuje vo svojej infinitezimálnej verzii $\mathcal{L}_{\xi_X} \omega = -[X, \omega]$ (20.2.7); *iii*) je na to Cartanov vzorec z prednášky (takže nuda; samozrejme za predpokladu, že vieme komutátor $[E_1, E_2]$; ak ho nevieme, tak si ho najprv musíme vyrátať (čo ale môže zabrať aj vyše pol minúty, preto je určite lepšie nahliadnuť do 11.2.4))

(O dosť pracnejšie je nájdenie *najvšeobecnejšej* 1-formy konexie ω na (tomto našom) P. Zovšeobecnenie pre všeobecnú bázu M - my tu máme $\mathbb{R}^2$ - sa dá nájsť v Additional material, konkrétne k 20.2.5.)

K prednáške z 13.5.2024

$\boxed{\text{bez čísla}}$ Uvažujme kužeľ daný v obyčajnom euklidovskom priestore rovnicou (v kartézskych resp. v cylindrických súradniciach)

$$z^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{resp.} \qquad z(r, \varphi) = r$$

(jeho sklon je teda 45°C). Predstavme si na ňom vodorovnú kružnicu vo výške $z = R$.
i) Vyrátajte, o koľko sa otočí vektor, ak ho (paralelne) prenesieme dookola po tejto kružnici
ii) Vyrátajte tenzor krivosti tohoto kužeľa (v zmysle RLC konexie)
iii) Uvedomte si, čo je na získaných výsledkoch (vzatých spolu, nie jednotlivo) zaujímavé
Návod: *i*) komu sa chce pocvičiť v oficiálnych výpočtoch, indukuje na kužeľ metriku, lagranžovskou technikou nájde Christoffelove symboly, napíše rovnice paralelného prenosu a vyrieši ich; komu sa to chce robiť z obrázku, rozstrihne kužeľ, položí ho do roviny (dá sa to, sú lokálne izometrické), tam sa

vektor prenesie ,,obyčajne" (ako v rovine, t.j. jednoducho posunie) a napokon sa kužeľ späť zlepí a pozrie sa, kam na ňom smeruje prenesený vektor - spozoruje sa, že je otočený o uhol, ktorý závisí (pre všeobecný kužeľ) od ,,uhlového deficitu", t.j. od uhla, ktorý treba z roviny (prakticky - pre konečný kužeľ - z kruhu) vystrihnúť, aby sme mohli zo získaného zvyšku skrútením vytvoriť daný kužeľ; *ii*) komu sa chce pocvičiť v oficiálnych výpočtoch: kužeľ je dvojrozmerná plocha a naučili sme sa napr. používať Cartanove štruktúrne rovnice (15.6.10-12); ináč - overiť, že kužeľ je izometrický rovine; potom si spomenúť, ako to je z tohoto hľadiska s rovinou