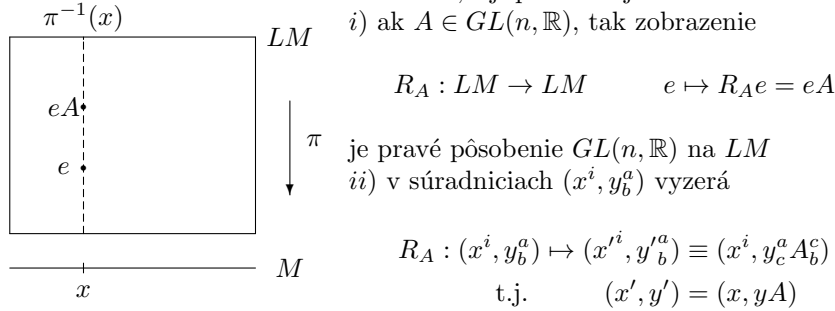


Domáce úlohy k predmetu  
KONEXIE A KALIBRAČNÉ POLIA  
Marián Fecko  
Letný semester 2025/2026

**K prednáške z 19.2.2026**

**19.1.3** Nech  $\pi : LM \rightarrow M$  je fibrácia repérov. Ukázať, že na variete  $LM$  máme prirodzenú štruktúru pravého  $GL(n, \mathbb{R})$ -priestoru kompatibilného s fibrováním, t.j. podrobnejšie že  
i) ak  $A \in GL(n, \mathbb{R})$ , tak zobrazenie



iii) toto pôsobenie je *voľné* ((13.4.14), všetky stacionárne podgrupy sú tri-  
viálne) a *vo vláknach tranzitívne*  
iv) toto pôsobenie je *vertikálne*,

$$\pi \circ R_A = \pi$$

t.j. transformuje body  $LM$  vždy len v rámci jedného vlákna (na obrázku zvislá prerušovaná čiara)

**bez čísla** Predstavme si, že na  $n$ -rozmernej variete  $M$  máme aj metriku a orientáciu, takže môžeme hovoriť o *pravotočivých ortonormovaných* repéroch. Podobne ako sme uvažovali varietu  $LM$ , definujeme varietu  $OM$ , ktorej bodmi budú všetky pravotočivé ortonormované repéry vo všetkých bodoch variety  $M$ .

- i) Aký je rozmer variety  $OM$ ?
- ii) Pre  $M =$  euklidovská rovina zavedte explicitne lokálne súradnice na  $OM$ !
- iii) Aká grupa pôsobí *všeobecne* na  $OM$ ?
- iv) Ako vyzerá v súradniciach toto pôsobenie pre prípad z časti ii)?

**K prednáške z 26.2.2026**

**19.2.1** Nech  $\hat{\omega}$  sú formy konexie  $\nabla$  voči repérnemu poľu  $e(x)$  v oblasti  $\mathcal{O}$  a nech  $(x^i, y_b^a)$  sú súradnice v  $\hat{\mathcal{O}} \equiv \pi^{-1}(\mathcal{O})$  zavedené voči  $e(x)$  (19.1.1). Definujme v oblasti  $\hat{\mathcal{O}} \equiv \pi^{-1}(\mathcal{O})$  maticovú 1-formu

$$\omega \equiv \omega_{\mathcal{O}} := y^{-1}(\pi^*\hat{\omega})y + y^{-1}dy$$

t.j. detailne  $\omega_b^a := (y^{-1})_c^a(\pi^*\hat{\omega}_d^c)y_b^d + (y^{-1})_c^a dy_b^c$

Overiť, že

i) ak to isté zopakujeme v oblasti  $\mathcal{O}'$  s repérnym poľom  $e'$  (pričom na prieniku s  $\mathcal{O}$  platí  $e' = eA(x)$ ) a súradnicami  $(x'^i, y_b'^a)$  vztiahnutými voči nemu, tak na prieniku  $\hat{\mathcal{O}} \cap \hat{\mathcal{O}}'$  platí

$$\omega_{\mathcal{O}} = \omega_{\mathcal{O}'}$$

Vďaka tomu je na  $LM$  vlastne definovaná *globálna* maticová 1-forma

$$\omega \equiv \omega_b^a E_a^b \in \Omega^1(LM, gl(n, \mathbb{R}))$$

Túto globálnu 1-formu  $\omega$  na  $LM$  s hodnotami v  $gl(n, \mathbb{R})$  budeme volať *forma konexie*.

Návod: i) pomocou (19.1.3) a (15.6.2)

$$\begin{aligned} \omega_{\mathcal{O}'} &:= y'^{-1}(\pi^*\hat{\omega}')y' + y'^{-1}dy' \\ &= (A^{-1}y)^{-1}(\pi^*(A^{-1}\hat{\omega}A) + \pi^*(A^{-1}dA))A^{-1}y + (A^{-1}y)^{-1}d(A^{-1}y) = \dots \\ &= \omega_{\mathcal{O}} \end{aligned}$$

(uvedomiť si, že súradnicový zápis  $\pi^*\hat{\omega}$  a  $\pi^*A$  je taký istý, ako zápis  $\hat{\omega}$  a  $A$ )

ii) v každej konkrétnej oblasti  $\hat{\mathcal{O}}$  je  $\omega := \omega_{\mathcal{O}}$ ; výpočet ukazuje, že táto definícia nezávisí od výberu súradníc a repérneho poľa na  $\mathcal{O}$

**19.2.4** Overiť, že forma konexie  $\omega$

i) je typu Ad, t.j. správa sa voči akcii  $R_A$  grupy  $GL(n, \mathbb{R})$  na  $LM$  nasledovne

$$R_A^*\omega = Ad_{A^{-1}}\omega \equiv A^{-1}\omega A$$

alebo podrobnejšie

$$R_A^*\omega_b^a = (A^{-1})_c^a \omega_d^c A_b^d$$

ii) spĺňa identitu

$$\langle \omega, \xi_C \rangle = C$$

kde  $\xi_C$  je fundamentálne pole akcie  $R_A$  zodpovedajúce  $C \in gl(n, \mathbb{R})$   
*iii)* spĺňa tiež identity

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\xi_C} \omega &= -\text{ad}_C \omega \equiv -[C, \omega] \\ i_{\xi_C} \omega &= C \\ i_{\xi_C} d\omega &= -[C, \omega]\end{aligned}$$

Návod: *i)*, *ii)* priamy výpočet v súradniciach, (19.1.3), (19.1.4), (19.2.1) *iii)* prvá je infinitezimálna verzia *i)* (položť  $A(t) = \exp(tC)$  a derivovať v nule), tretia kombináciou prvých dvoch (6.2.8)

### K prednáške z 5.3.2026

**19.3.7** Overiť, že (aj) podľa Frobeniovho kritéria je distribúcia  $\mathcal{D}$  z úlohy (19.3.4) a (19.3.5) neintegrovateľná

Návod:  $[e_1, e_2] = -2\partial_z \neq ae_1 + be_2$

• V jazyku ohraničujúcich 1-foriem  $\theta^i$  Frobeniovo kritérium hovorí, že distribúcia  $\mathcal{D}$  je integrovateľná práve vtedy, keď pre ľubovoľné vektory  $U, V \in \mathcal{D}$  platí  $d\theta^i(U, V) = 0$ , t.j. keď *ohraničenie* všetkých 2-foriem  $d\theta^i$  na distribúciu  $\mathcal{D}$  dáva nulu:

$$\mathcal{D} \text{ integrovateľná} \quad \Leftrightarrow \quad \{U, V \in \mathcal{D} \Rightarrow d\theta^i(U, V) = 0\}$$

**19.3.9** Overiť, že (aj) podľa tejto verzie Frobeniovho kritéria je distribúcia  $\mathcal{D}$  z úlohy (19.3.4) neintegrovateľná

Návod:  $d\theta(e_1, e_2) = 2 (\neq 0)$

• Spomeňme ešte, že formová verzia Frobeniovho kritéria sa niekedy dá nájsť aj ako (ekvivalentné) tvrdenie, že  $\mathcal{D}$  je integrovateľná práve keď existuje  $(n-k)^2$  1-foriem  $\sigma_j^i$  takých, že platí  $d\theta^i = \sigma_j^i \wedge \theta^j$

$$\mathcal{D} \text{ integrovateľná} \quad \Leftrightarrow \quad \{\exists \sigma_j^i : d\theta^i = \sigma_j^i \wedge \theta^j\}$$

**19.3.10** Overiť, že (aj) podľa tretej verzie Frobeniovho kritéria je distribúcia  $\mathcal{D}$  z úlohy (19.3.4) neintegrovateľná

Návod:  $d\theta = 2dx \wedge dy \neq \sigma \wedge \theta$  pre žiadnu 1-formu  $\sigma$  (skúsiť  $\sigma = adx + bdy + cdz$  a dostať spor)

### K prednáške z 12.3.2026

**bez čísla** Uvažujme múdrosti, ktoré sme sa naučili o fibrácii repérov  $\pi : LM \rightarrow M$ , pre prípad  $M = S^1 =$  kružnica. Ako lokálnu súradnicu na nej budeme používať bežný uhol  $\varphi$ .

- i) Ako vyzerajú teraz súradnice typu  $(x^i, y_b^a)$ ? A ako projekcia  $\pi$ ?
- ii) Ako v nich vyzerá akcia grupy  $GL(n, \mathbb{R})$  a fundamentálne pole  $\xi_C$ ?
- iii) Ako v nich vyzerá *najvšeobecnejšia* forma konexie  $\omega$ ?
- iv) Ako potom vyzerá *explicitne* horizontálny zdvih vektorového poľa?
- v) Ako v nich vyzerá *najvšeobecnejšie vertikálne* vektorové pole?

bez čísla Uvažujme ešte raz ten prípad  $M = S^1 =$  kružnica.

- i) Ako v nich vyzerá najvšeobecnejší horizontálny vektor?
- ii) Ako vyzerajú (a koľko ich je) horizontálne zdvihy  $H_i \equiv \partial_i^h$ ?
- iii) Zvoľte nejakú úplne konkrétnu formu konexie a urobte horizontálny zdvih (v jej zmysle) krivky  $\varphi(t) = t!$

Poznámka: Keď poriadne dopočítate tie dve veci z prednášky, ktoré som tam len začal a explicitne nedorobil, ľahko zvládnete pojem „horizontálny zdvih poľa” (z 19.4.4, napr. koniec návodu :-)) a krivky z 19.5.2 (ten bol aj na prednáške).

### K prednáške z 19.3.2026

bez čísla Podľa prednášky je vektorové pole na  $M$  nahraditeľné vhodným zobrazením

$$\Phi^v : LM \rightarrow \mathbb{R}^n \quad e \mapsto \Phi^v(e) \equiv \hat{v}$$

Prakticky (v súradniciach  $(x^i, y_b^a)$ ) to je (rozmyslite si) sada funkcií

$$\hat{v}^a(x, y)$$

Vhodné zobrazenie  $\Phi^v$  je také, ktoré spĺňa (abstraktne zapísanú) podmienku

$$\Phi^v(eA) = A^{-1}\Phi^v(e)$$

- i) Napíšte túto podmienku v súradnicovom balení (t.j. pre funkcie  $\hat{v}^a(x, y)$ ).
  - ii) Nájdite explicitne jej všeobecné riešenie.
  - iii) Určte to riešenie, ktoré zodpovedá vektorovému poľu  $V = V^a(x)e_a$ , kde  $e_a$  je repérne pole, voči ktorému sa zaviedli súradnice  $(x^i, y_b^a)$
  - iv) Zopakujte to isté pre *kovektorové* pole  $\alpha = \alpha_a(x)e^a$ .
- Návod: ii) napíšte podmienku z i) pre  $y =$  jednotková matica