

## VEKTOROVÁ ANALÝZA V DVOCH ROZMEROCH

MARIÁN FECKO

ABSTRAKT. Vektorová analýza v trojrozmernom priestore patrí k základnej matematickej výbave pri aplikáciách matematiky vo fyzike a v technike. Jej dvojrozmerná verzia je ale známa málo. V tomto texte sa pozrieme práve na ňu. Necháme sa pritom viesť teóriou diferenciálnych foriem. Pre čitateľa, ktorý prácu s formami neovláda, budú síce odvodenia asi nejasné, ale výsledky vyjadríme aj v elementárnom jazyku.

### 1. ÚVOD

Žijeme v trojrozmernom svete. Preto je aj matematika, ktorá súvisí s trojrozmerným priestorom, obzvlášť dôležitá a prepracovaná.

Ukazuje sa, že *vektorová analýza* sa na stručné a jasné matematické uchopenie spústy dôležitých javov okolo nás (difúzia, šírenie tepla, elektrina, magnetizmus, gravitačné pole, ...) hodí priam ideálne (pozri napr. [1, 2, 3, 4, 5]). Sú v nej definované užitočné pojmy (napríklad tok vektorového poľa cez plochu) a pre tieto pojmy sú odvodené užitočné a netriviálne výsledky (ako napríklad Gaussova veta).

Podstatne menej známa je dvojrozmerná verzia vektorovej analýzy. Mala by hrať pre opis javov, na ktoré stačí rovina (alebo dvojrozmerná plocha) tú istú úlohu, akú hrá jej štandardná verzia v 3D. Ako presne sa ale menia matematické vzťahy pri prechode z 3D do 2D nemusí byť vždy celkom očividné.

V tomto texte si preto posvietime práve na tento problém: Ako vlastne vyzerá analógia trojrozmernej vektorovej analýzy, použiteľná v dvoch rozmeroch?

Dá sa k tomu pristupovať rôzne, pozri napr. [8, 9]. My sa skúsime nechať viesť logikou teórie *diferenciálnych foriem*. Pre čitateľa, ktorý s formami nemá žiadnu skúsenosť a túto teóriu vníma len ako „panské huncútsvo“, to možno vyzerá ako ísť kanónom na vrabce. Je ale známe (pozri napr. §8.5 v knihe [6]), že práve tento pohľad je v *trojrozmernom* prípade mimoriadne poučný a efektívny: Vyskočia z neho napríklad automaticky všetky dôležité *diferenciálne operátory* aj vzťahy medzi nimi (rot, grad aj div sú len zamaskované verzie *vonkajšej* derivácie foriem). A takisto aj *integrálne vety*, v ktorých tieto operátory vystupujú (ako špeciálne prejavy stále tej istej *Stokesovej* vety pre formy).

V tomto článku si ukážeme, že prístup cez diferenciálne formy nesklame ani tu.

Ak formy (a teda ani vektorovú analýzu v jazyku foriem) nepoznáme, odvodenia budú síce asi technicky nejasné, ale:

---

2010 MSC. Primárni 53A45, 58A10; Sekundárni 76Mxx.

Kľúčová slova. Vektorová analýza, rotácia, gradient, divergencia, diferenciálne formy.

1. *Výsledky* jasné budú, lebo ich vyjadríme aj v *elementárnom* jazyku, takže na pochopenie toho, *ako to celé dopadlo*, formy nepotrebujeme.

2. Navyše hrubá myšlienka sa hádam pochytiť predsa len bude dať, a tak nás možno tie formy napokon predsa len očaria, čo spôsobí, že si o nich možno skúsime niekedy v budúcnosti prečítať viac.

## 2. AKO TO FUNGUJE V TROCH ROZMEROCH

Vo vektorovej analýze často počuť slovné spojenia typu „integrvať vektorové pole po ploche“ (čím získame jeho tok (flux) cez tú plochu). Z teórie integrovania však vyplýva (pozri napr. 7. kapitolu v [6]), že

- integrujú sa vždy len diferenciálne *formy*,
- po  $p$ -rozmernej oblasti sa integruje  $p$ -forma.

Takže ak niečo integrujeme

- po krivke, musí to byť 1-forma,
- po ploche, musí to byť 2-forma a
- po objeme, musí to byť 3-forma.

Ako si potom ale máme vysvetliť fakt, že pod tým plošným integrálom, kde má byť správne 2-forma, býva výraz štruktúry  $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ , t.j. nevidieť tam to *vektorové pole*  $\mathbf{A}$  je ako zaprieť nos medzi očami? Odpoveď je, že to, čo tam naozaj vidíme, je *celok*  $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$  a ten je 2-forma. Je však *jednoznačne parametrizovaná* vektorovým poľom  $\mathbf{A}$ .

Celkovo to s tými parametrizáciami foriem v  $E^3$  (trojrozmernom euklidovskom priestore) vyzerá takto (pozri napr. ten spomínaný paragraf 8.5 v [6]): Existujú tam 0-formy, 1-formy, 2-formy a 3-formy (to je za samotnú trojrozmernosť priestoru) a na každom tomto stupni máme operáciu *vonkajšej derivácie*  $d$ , ktorá zvyšuje stupeň formy o 1 a v kvadráte dáva nulu (to existuje v ľubovoľne rozmernom priestore). Zodpovedá tomu diagram

$$\Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \xrightarrow{d} \Omega^3, \quad dd = 0. \quad (2.1)$$

(ide o *de Rhamov komplex*; priestor  $p$ -foriem v  $E^3$  tu označujeme  $\Omega^p$ ). Keďže na  $E^3$  máme aj (bežný euklidovský) *metrický tenzor*, na  $p$ -formách pribúda *Hodgeov operátor*. Je to všeobecne kanonický lineárny izomorfizmus (označuje sa hviezdíčkou) lineárnych priestorov  $p$ -foriem a  $(n-p)$ -foriem, ktorý v kvadráte dáva plus/mínus identitu. (V  $E^3$  na každom stupni plus. Pritom  $n$  je rozmer uvažovaného priestoru.)

V trojrozmernom priestore to teda dáva tieto dva kanonické izomorfizmy:

$$\Omega^0 \xleftrightarrow{*} \Omega^3 \quad \Omega^1 \xleftrightarrow{*} \Omega^2 \quad *^{-1} = * \quad (2.2)$$

Umožňujú nám „stotožniť“ 2-formy s 1-formami a tiež 3-formy s 0-formami. (Ak niekde potrebujeme 2-formu  $\beta$ , môžeme ju *parametrizovať* 1-formou  $\alpha$ , t.j. zapísať v tvare  $*\alpha$ , kde  $\alpha$  je jednoznačná 1-forma:  $\alpha = *\beta$ .) „Naozaj“ teda potrebujeme už len 0-formy (čo sú *funkcie*; ich lineárny priestor označíme  $\mathcal{F}$ ) a 1-formy (ostatné si už parametrizujeme cez ne).

Metrický tenzor ale dáva ešte ďalšie dva dôležité kanonické izomorfizmy, a to (navzájom inverzné) operácie *dvíhania a spúšťania indexov* (označujú sa  $\sharp$  a  $\flat$ , čo je inšpirované zo zápisu  $\hat{n}^t$ ). Robia vektorové pole z 1-formy ( $\sharp$ ) a naopak ( $\flat$ ). Ak označíme lineárny priestor vektorových polí v  $E^3$  ako  $\mathfrak{X}$ , máme

$$\Omega^1 \begin{matrix} \xrightarrow{\sharp} \\ \xleftarrow{\flat} \end{matrix} \mathfrak{X}, \quad \sharp^{-1} = \flat, \quad \flat^{-1} = \sharp. \quad (2.3)$$

Vďaka tomu môžeme zabudnúť aj na 1-formy a úplne si vystačíme<sup>1</sup> len s *funkciami a vektorovými poľami*! Diferenciálne formy v priestore  $E^3$  teda *akoby* úplne vypadli z hry! Vyjadříme to (komutatívnym) diagramom:

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega^0 & \xrightarrow{d} & \Omega^1 & \xrightarrow{d} & \Omega^2 & \xrightarrow{d} & \Omega^3 \\ id \downarrow & & \downarrow \sharp & & \downarrow \sharp * & & \downarrow * \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{a_0} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{a_1} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{a_2} & \mathcal{F} \end{array} \quad (2.4)$$

Zvislé šípky označujú kanonické izomorfizmy jednotlivých stupňov foriem (horný riadok) na skalárne polia  $\mathcal{F}$  a vektorové polia  $\mathfrak{X}$ . Ak ich obrátíme, dostaneme ekvivalentný diagram:

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega^0 & \xrightarrow{d} & \Omega^1 & \xrightarrow{d} & \Omega^2 & \xrightarrow{d} & \Omega^3 \\ id \uparrow & & \uparrow \flat & & \uparrow * \flat & & \uparrow * \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{a_0} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{a_1} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{a_2} & \mathcal{F} \end{array} \quad (2.5)$$

Aplikáciou týchto šípiek (smerom hore) na skalárne a vektorové polia (na  $f$  a  $\mathbf{A}$ ) dostaneme práve štandardné objekty, ktoré vidáme pod integrálmi (pozri paragraf 8.5 v [6])

$$f \in \Omega^0, \quad \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \in \Omega^1, \quad \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \in \Omega^2, \quad fdV \in \Omega^3. \quad (2.6)$$

Šípky  $a_0, a_1, a_2$  v spodnom riadku oboch diagramov sú *efektívne* operácie (zloženie zodpovedajúcich troch šípiek - hore, doprava a dolu) na objektoch v spodnom riadku, ktoré „nahrádzajú“ operáciu vonkajšej derivácie (šípiek  $d$ ), ktorá sa tam „naozaj“ deje na formách v hornom riadku. Z diagramov vidíme, že

$$a_0 = \sharp d, \quad a_1 = \sharp * d \flat, \quad a_2 = * d * \flat. \quad (2.7)$$

Ide zjavne o *diferenciálne* operátory *prvého* rádu, lebo obsahujú jedno  $d$ . Ak ich zrátame v kartézskych súradniciach v  $E^3$ , zistíme, že sú to akurát známe operátory

<sup>1</sup>Funkcie a vektorové polia tak pripomínajú *esenciálne* aminokyseliny vo výžive: Všetkých aminokyselín je síce cca 20, ale stačí, keď máme v strave dost esenciálnych (tých je len zhruba polovica), zvyšné si už dokáže telo vyrobiť z nich. V trojrozmernom euklidovskom priestore si dokážeme vyrobiť *akékoľvek* formy z funkcií alebo vektorových polí.

grad, rot a div, takže diagram (2.4) v skutočnosti vyzerá:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \Omega^0 & \xrightarrow{d} & \Omega^1 & \xrightarrow{d} & \Omega^2 & \xrightarrow{d} & \Omega^3 \\
 \text{id} \downarrow & & \downarrow \# & & \downarrow \#* & & \downarrow * \\
 \mathcal{F} & \xrightarrow{\text{grad}} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{\text{rot}} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{\text{div}} & \mathcal{F}
 \end{array} \tag{2.8}$$

Z faktu  $dd = 0$  (pozri (2.1)) a komutativity diagramu okamžite dostávame známe identity

$$\text{rot grad} = 0, \quad \text{div rot} = 0. \tag{2.9}$$

(zloženie susedných šípok hore dáva nulu, tak to musí platiť aj pre spodné).

Z troch susedných štvorcov diagramu (2.8) a parametrizácie (2.6) sa dajú poskladať aj tieto tri užitočné diferenciálne vzťahy

$$df = \text{grad } f \cdot d\mathbf{r}, \quad d(\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}) = (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}, \quad d(\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}) = (\text{div } \mathbf{A})dV. \tag{2.10}$$

Aby sme z nich dostali integrálne vety, odvoláme sa na všeobecnú *Stokesovu vetu* (pozri paragraf 7.5 v [6]) z teórie diferenciálnych foriem: Ak  $\alpha$  je  $p$ -forma,  $D$  je  $(p+1)$ -rozmerná oblasť a  $\partial D$  jej  $p$ -rozmerná hranica, tak platí

$$\int_D d\alpha = \int_{\partial D} \alpha. \tag{2.11}$$

Pre tri výrazy  $d\alpha$  z (2.10) dostaneme tri základné integrálne vety vektorovej analýzy:

$$\text{veta o gradiente} \quad \int_c \text{grad } f \cdot d\mathbf{r} := f(B) - f(A) \tag{2.12}$$

$$\text{Stokesova veta} \quad \int_S (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} := \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \tag{2.13}$$

$$\text{Gaussova veta} \quad \int_V (\text{div } \mathbf{A})dV := \oint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \tag{2.14}$$

### 3. AKO TO FUNGUJE V 2D

De Rhamov komplex, teda analóg (2.1), sa v dvojrozmernom prípade zjednodušuje na

$$\Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2, \quad dd = 0. \tag{3.1}$$

Kľúčový rozdiel je v pôsobení Hodgeovej hviezdičky:

$$\Omega^0 \xleftrightarrow{*} \Omega^2 \quad \Omega^1 \xleftrightarrow{*} \Omega^1 \tag{3.2}$$

Ľavý vzťah je prirodzeným analógom ľavého vzťahu v (2.2), stotožňuje okrajové stupne foriem; explicitne:

$$*f = fdS \quad *(fdS) = f \quad dS \equiv dx \wedge dy = \text{2-forma plochy} \tag{3.3}$$

To umožňuje zabudnúť na 2-formy a vyjadrovať ich cez 0-formy, teda cez funkcie (skalárne polia).

Pravý vzťah je ale úplne iný: Zatiaľ čo (2.2) je izomorfizmom *dvoch rôznych* priestorov, v (3.2) je to izomorfizmus *jedného* priestoru (priestoru 1-foriem) *na seba* (rôzny od identity). Explicitne, v bežných kartézskych súradniciach  $(x, y)$  v rovine

$$*dx = dy, \quad *dy = -dx. \quad (3.4)$$

To neznamená, že nemôžeme zabudnúť na 1-formy. Znamená to, že v 2D máme až *dva kanonické* spôsoby, ako môžeme 1-formy nahradiť vektorovými poľami! Jeden je taký, ako sa to robilo v 3D, teda operácia  $\sharp$  (dvihnutie indexu). Vyzerá:

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^0 & \xrightarrow{d} & \Omega^1 & \xrightarrow{d} & \Omega^2 \\ id \downarrow & & \downarrow \sharp & & \downarrow * \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{a_0} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{a_1} & \mathcal{F} \end{array} \quad (3.5)$$

Aplikáciou týchto šípiek (smerom hore) na skalárne a vektorové polia (na  $f$  a  $\mathbf{A}$ ) dostaneme opäť štandardné objekty, ktoré vidáme pod integrálmi:

$$f \in \Omega^0 \quad \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \equiv A_x dx + A_y dy \in \Omega^1 \quad f dS \in \Omega^2 \quad (3.6)$$

Pribudol však druhý – najprv aplikujeme hviezdičku (po čom máme stále 1-formu) a až potom dvihneme index. Máme teda *dva rôzne* analógy diagramu (2.4):

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^0 & \xrightarrow{d} & \Omega^1 & \xrightarrow{d} & \Omega^2 \\ id \downarrow & & \downarrow \sharp & & \downarrow * \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{a_0} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{a_1} & \mathcal{F} \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} \Omega^0 & \xrightarrow{d} & \Omega^1 & \xrightarrow{d} & \Omega^2 \\ id \downarrow & & \downarrow \sharp * & & \downarrow * \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{b_0} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{b_1} & \mathcal{F} \end{array} \quad (3.7)$$

Vidíme, že aj v 2D-vektorovej analýze vystačíme s *vektorovými a skalárnymi* poľami (dolné riadky). Z diagramov poskladáme vyjadrenia spodných (efektívnych) šípiek:

$$a_0 = \sharp d, \quad a_1 = *db, \quad b_0 = \sharp * d, \quad b_1 = *d *^{-1} b. \quad (3.8)$$

Ak tieto (diferenciálne) operátory zrátame v (kartézskych) súradniciach  $(x, y)$ , zistíme, že dva z nich sú prirodzené analógy situácie v 3D (gradient a divergencia), zvyšné dva sú „nové“, špecifické pre 2D:

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^0 & \xrightarrow{d} & \Omega^1 & \xrightarrow{d} & \Omega^2 \\ id \downarrow & & \downarrow \sharp & & \downarrow * \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{\text{grad}} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{\text{rot}_3} & \mathcal{F} \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} \Omega^0 & \xrightarrow{d} & \Omega^1 & \xrightarrow{d} & \Omega^2 \\ id \downarrow & & \downarrow \sharp * & & \downarrow * \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{\text{Ham}} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{-\text{div}} & \mathcal{F} \end{array} \quad (3.9)$$

(Označenie  $b_0 = \text{Ham}$  zdôvodníme v paragrafe 4 a  $a_1 = \text{rot}_3$  v paragrafe 5.) Abstraktne teda máme

$$\text{grad} = \sharp d, \quad \text{rot}_3 = *db, \quad \text{Ham} = \sharp * d, \quad \text{div} = - * d *^{-1} b. \quad (3.10)$$

a ich pôsobenie vyzerá

$$\text{grad}: f \mapsto (\partial_x f, \partial_y f), \quad (3.11)$$

$$\text{rot}_3: (A_x, A_y) \mapsto (\partial_x A_y - \partial_y A_x), \quad (3.12)$$

$$\text{Ham}: f \mapsto (-\partial_y f, \partial_x f), \quad (3.13)$$

$$\text{div}: (A_x, A_y) \mapsto (\partial_x A_x + \partial_y A_y). \quad (3.14)$$

Lahko overíme aj nulový výsledok zloženia spodných šípok (v oboch diagramoch)

$$\text{rot}_3 \circ \text{grad} = 0, \quad \text{div} \circ \text{Ham} = 0. \quad (3.15)$$

Naozaj,

$$\text{rot}_3 \circ \text{grad}: f \mapsto \text{rot}_3(\partial_x f, \partial_y f) = (\partial_x \partial_y f - \partial_y \partial_x f) = 0, \quad (3.16)$$

$$\text{div} \circ \text{Ham}: f \mapsto \text{div}(-\partial_y f, \partial_x f) = (-\partial_x \partial_y f + \partial_y \partial_x f) = 0. \quad (3.17)$$

Je to analóg (2.9). Všimnime si, že tu máme tiež dve identity, ale nie preto, že uplatníme  $dd = 0$  na rôznych stupňoch v jednom diagrame, ale na rovnakých stupňoch v dvoch rôznych diagramoch.

Stojí tiež za povšimnutie, že keď zložíme šípky z rôznych diagramov, dostaneme (v oboch prípadoch) ďalší známy operátor, *Laplaceov* operátor  $\Delta$ ,

$$\text{div} \circ \text{grad} = \Delta, \quad \text{rot}_3 \circ \text{Ham} = \Delta. \quad (3.18)$$

Naozaj,

$$\text{div} \circ \text{grad}: f \mapsto \text{div}(\partial_x f, \partial_y f) = (\partial_x^2 + \partial_y^2)f \equiv \Delta f, \quad (3.19)$$

$$\text{rot}_3 \circ \text{Ham}: f \mapsto \text{rot}_3(-\partial_y f, \partial_x f) = (\partial_x^2 + \partial_y^2)f \equiv \Delta f. \quad (3.20)$$

#### 4. HAMILTONOVSKÉ POLIA

Označenie  $\text{Ham } f$  v (3.13) je skratka pre *hamiltonovské pole* generované funkciou  $f$ . Je to kľúčový objekt v teórii hamiltonovských sústav (detaily pozri napr. v 14. kapitole v [6]). Ako sa to objavilo tu?

Ukazuje sa, že naša *plošná* forma  $\omega \equiv dS$  spomínaná v (3.3) je zároveň *symplektická* forma (vyhovuje jej definícii; všeobecne to je „uzavretá a nedegenerovaná 2-forma“). A všade tam, kde máme symplektickú formu, máme aj predpis na konštrukciu hamiltonovských (vektorových) polí:

$$f \mapsto \text{Ham } f \quad i_{\text{Ham } f} \omega := -df \quad (4.1)$$

Ak zrátame, ako funguje (4.1) tu, dostaneme presne (3.13).

To vrhá nové svetlo aj na druhý výsledok v (3.15). Fakt, že divergencia hamiltonovského poľa (generovaného hocijakou funkciou) je nulová je ekvivalentný dobre známej *Liouvillovej vete* z klasickej mechaniky (pozri 14.3.7 v [6]). Tá hovorí, že sa pri časovom vývoji zachováva *objem* (tu plocha) vo *fázovom* priestore (tu našom 2D priestore).

## 5. POMOCNÝ TRETÍ ROZMER

Čitateľ sa môže ľahko presvedčiť, že:

1. Ak urobíme z funkcie  $f(x, y)$  v 2D rovine pomocné vektorové pole v 3D priestore

$$\mathbf{u} = (0, 0, -f(x, y)) \quad (5.1)$$

(skúste opísať, ako vyzerá), tak jeho rotácia dopadne takto:

$$\text{rot } \mathbf{u} = (-\partial_y f, \partial_x f, 0) \equiv (\text{Ham } f, 0) \quad (5.2)$$

2. Ak urobíme z vektorového poľa  $\mathbf{A}$  v 2D rovine pomocné vektorové pole v 3D priestore

$$\mathcal{A} = (\mathbf{A}, 0) \equiv (A_x(x, y), A_y(x, y), 0) \quad (5.3)$$

(skúste opísať, ako vyzerá), tak jeho rotácia dopadne takto:

$$\text{rot } \mathcal{A} = (0, 0, \partial_x A_y - \partial_y A_x) \equiv (0, 0, \text{rot}_3 \mathbf{A}) \quad (5.4)$$

Čo tieto dva jednoduché výpočty odhaľujú?

Po prvé to, že naše dve „nové“ operácie 2D vektorovej analýzy,  $a_1 \equiv \text{rot}_3$  a  $b_0 \equiv \text{Ham}$ , sa dajú nájsť aj skryté na špeciálnych miestach výstupov špeciálne zvolených vstupov 3D vektorovej analýzy. Prístup opisovaný v tomto článku nachádza ich tvar a vlastnosti „vnútorne“, bez odkazu na dodatočné rozmery.

A po druhé vidíme motiváciu pre označenie operácie  $\text{rot}_3$ . Teda hlavne na ten index 3 (menovite že  $\text{rot}_3 \mathbf{A} = (\text{rot } \mathcal{A})_3$ ). Motivácia na samotné označenie  $\text{rot}$  (čo by malo súvisieť s nejakým *krútením sa*) sa rieši už v 3D vektorovej analýze (súvisí napríklad s *vírovým* tečením kvapaliny; pozri pár slov o tom v odseku 9.2).

## 6. INTEGRÁLNE IDENTITY A GREENOVA VETA

Integrálne vety pre 2D-vektorovú analýzu získame opäť z univerzálnej Stokesovej vety (2.11) pre formy. Technika je rovnaká, aká sa použila na konci paragrafu 2 pre 3D prípad.

Keďže v dvoch diagramoch v (3.9) máme až *štyri* základné štvorce (s hornou šípkou d), očakávame štyri integrálne vety.

Najprv si poskladáme príslušné štyri diferenciálne identity (analógy výrazov (2.10)). Z jednotlivých štvorcov postupne dostávame:

$$df = \text{grad } f \cdot d\mathbf{r} \quad df = - * (\text{Ham } f \cdot d\mathbf{r}) \quad (6.1)$$

$$d(\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}) = (\text{rot}_3 \mathbf{A})dS \quad d * (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}) = (\text{div } \mathbf{A})dS \quad (6.2)$$

Ich preintegrovanie a nasadenie Stokesovej vety (2.11) dáva:

$$\int_C \text{grad } f \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A) \quad \int_C * (\text{Ham } f \cdot d\mathbf{r}) = f(A) - f(B) \quad (6.3)$$

$$\int_S (\text{rot}_3 \mathbf{A})dS = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad \int_S (\text{div } \mathbf{A})dS = \oint * (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}) \quad (6.4)$$

Ak si podintegrálne výrazy explicitne vyjadríme (pomocou (3.4) a (3.11)–(3.14)), zistíme, že obe identity v (6.3) hovoria to isté a podobne obe identity v (6.4)

hovorí to isté. Dostali sme teda *len dve* navzájom rôzne integrálne identity. Po vhodnom premenovaní premenných vyzerajú takto:

$$\text{veta o gradiente} \quad \int_c (\partial_x f) dx + (\partial_y f) dy := f(B) - f(A) \quad (6.5)$$

$$\text{Greenova veta} \quad \int_S (\partial_x g - \partial_y f) dx dy := \oint_{\partial S} f dx + g dy \quad (6.6)$$

Prvou je 2D verzia vety o gradiente. Tá je dobre známa a platí v každom rozmere. Dáva do súvisu integrál po krivke  $c$  s „integrálom“ po jej hranici  $\partial c$  (čo sú dva body,  $A$ , jej začiatok a  $B$ , jej koniec).

Druhou je Greenova veta. Tá je tiež dobre známa a je špecifická pre dvojrozmerný priestor. Dáva do súvisu integrál po ploche  $S$  s integrálom po jej hranici (čo je uzavretá krivka  $\partial S$ ). (Venuje sa jej aj pekný článok [7] publikovaný v tomto časopise.)

## 7. KOLMÉ VEKTOROVÉ POLE

Ako sme už spomínali v paragrafe 3, špecifikom dvoch rozmerov je fakt, že Hodgeova hviezdička zobrazuje 1-formy opäť na seba (pozri (3.2)). Tie sú však v bijekcii s vektorovými poľami (cez  $\sharp$  a  $\flat$ ), takže efektívne hviezdička indukuje aj kanonický izomorfizmus *vektorových poľí* na seba

$$\sharp * \flat : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}. \quad (7.1)$$

Výpočet dáva

$$\sharp * \flat : (A_x, A_y) \mapsto (-A_y, A_x), \quad \text{t.j.} \quad \mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}_{\pi/2}. \quad (7.2)$$

Výsledok označujeme  $\mathbf{A}_{\pi/2}$ , lebo z komponent je zrejmé, že v každom bode vzniká vektor nového poľa *otočením* vektora pôvodného poľa o  $\pi/2$  v kladnom zmysle, t.j. proti smeru hodinových ručičiek. (Je to kompatibilné s faktom, že na 1-formách je *kvadrát* hviezdičky *minus* identita, pozri (3.4)).

Zobrazenie (7.2) je ekvivalentné praktickému vzorčeku:

$$* (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}) =: \mathbf{A}_{\pi/2} \cdot d\mathbf{r} \quad (7.3)$$

Potom kombináciou s (6.1) dostávame pre vzťah gradientu a hamiltonovského poľa toto

$$\text{Ham } f = (\text{grad } f)_{\pi/2} \quad (7.4)$$

čo je zrejmé aj z vyjadrení (3.11) a (3.13). Ak  $f(x, y)$  opisuje výšku kopca niekde v teréne, vieme, že vektorové pole  $\text{grad } f$  ukazuje v každom bode smer najprudšieho stúpania (a  $-\text{grad } f$  smer najprudšieho klesania). Potom vektorové pole  $\text{Ham } f$  ukazuje v každom bode smer nulového stúpania, čiže smer *pozdĺž vrstevníc*.

## 8. POINCARÉHO LEMA

Pripomeňme na úvod, čo táto užitočná lema tvrdí.

Fakt  $dd = 0$  hovorí, že ak je forma  $\alpha$  exaktná (t.j.  $\alpha = d\beta$ ), tak je aj uzavretá ( $d\alpha = 0$ ). Opačná implikácia všeobecne neplatí, ale Poincarého lema zaručuje, že



v oblasti *stiahnuteľnej do bodu* (napríklad v oblasti, kde fungujú jedny súradnice) predsa len platí.

V 3D vektorovej analýze to dáva často používané a užitočné tvrdenia (obrátenia implikácií v (2.9))

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = \operatorname{grad} f, \quad \operatorname{div} \mathbf{a} = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathbf{b}. \quad (8.1)$$

V jazyku diagramu (2.8) to hovorí, že ak nejaká šípka v dolnom riadku dáva nulu, vstup je výstupom predchádzajúcej šípky.

A čo dá táto dedukcia v 2D vektorovej analýze, t.j. pre diagramy (3.9)? Toto:

$$\operatorname{rot}_3 \mathbf{a} = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = \operatorname{grad} f, \quad \operatorname{div} \mathbf{a} = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = \operatorname{Ham} f. \quad (8.2)$$

S jedným použitím týchto faktov sa stretneme v paragrafe 9.

## 9. 2D VEKTOROVÁ ANALÝZA V 2D HYDRODYNAMIKE

2D vektorová analýza môže byť užitočná napríklad pri opise 2D tečenia v hydrodynamike. Takéto tečenie sa opisuje *rýchlostným poľom*  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ . Z rovnice kontinuity (ktorá vyjadruje zachovanie hmotnosti pri tečení) vyplýva, že ak je hustota hmotnosti  $\rho$  konštantná, rýchlostné pole má nulovú divergenciu:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{nestlačiteľná kvapalina} \quad (9.1)$$

### 9.1. Nestlačiteľná kvapalina a prúdová funkcia

Porovnajme druhé implikácie v (8.1) a (8.2). Vidíme, že ak má nejaké vektorové pole v 2D nulovú divergenciu, nie je rotáciou iného (ľubovoľného) vektorového poľa, ako to poznáme z 3D, ale je *hamiltonovským* poľom generovaným ľubovoľnou funkciou  $f(x, y)$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \operatorname{Ham} f, \quad \text{t.j.} \quad (v_x, v_y) = (-\partial_y f, \partial_x f). \quad (9.2)$$

Dá sa povedať, že toto rýchlostné pole je *potenciálové* v zmysle, že komponenty poľa sa počítajú ako derivácie akejkoľvek veličiny, tu funkcie (potenciálu)  $f$ . Ale to pole sa nepočíta ako zvyčajný gradient potenciálu (ako to je napríklad pre elektrické pole v elektrostatike), ale inou kombináciou parciálnych derivácií. Konkrétne nám vyšlo, že z  $f$  treba urobiť hamiltonovské pole.

Aký je fyzikálny význam funkcie  $f$ ?

Po prvé, ľahko sa overí, že derivácia funkcie  $f$  v smere *prúdnic* daného tečenia je nulová:

$$\dot{f} \equiv \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) = \dot{x}(\partial_x f) + \dot{y}(\partial_y f) = \dot{x}v_y - \dot{y}v_x = 0 \quad (9.3)$$

lebo na prúdnici  $\mathbf{r}(t) \equiv (x(t), y(t))$  je  $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y})$ .

Funkcia  $f$  je teda *konštantná* na prúdniciach. Ak by sa nám ju podarilo nájsť, z podmienky

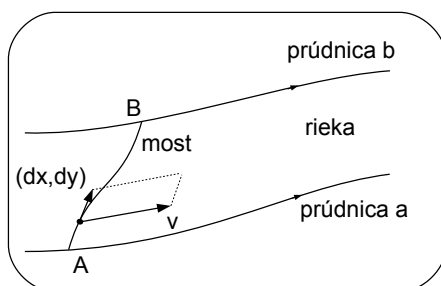
$$f(x, y) = \text{const.} \quad (9.4)$$

získame *tvár prúdnic*, čiže obrázok nášho 2D tečenia.<sup>2</sup> Preto sa funkcia  $f$  volá *prúdová funkcia* (stream function).

Po druhé, uvedomíme si, že samotná *hodnota* funkcie  $f$  v bode  $A$  nemôže mať priamy fyzikálny význam, keďže je zrejmé, že  $f$  má vôľu v aditívnej konštante. Význam ale môže mať *rozdiel* hodnôt v dvoch bodoch  $A$  a  $B$ , t.j.  $f(B) - f(A)$ . V elektrostatičke, kde je (elektrické) pole (mínus) gradientom potenciálu, tak dostaneme *napätie*. Čo dostaneme tu, kde je (rýchlostné) pole hamiltonovským poľom zodpovedajúcim tomuto „potenciálu“?

Ukazuje sa, že to dáva celkový *prietok* tekutiny za jednotku času cez (ľubovoľnú) krivku, ktorá spája tieto dva body. Ak teda nakreslíme dve prúdnice, ktoré prechádzajú cez tieto dva body, ide o celkový prietok popod (ľubovoľný) most ponad rieku, ktorá tečie medzi týmito dvoma prúdnicami.

Dá sa to nahliadnuť aj na obrázku (pozri obr. 1) a zrátať „na prstoch“.



**Obrázok 1.** Cez bod  $A$  prechádza prúdnic  $a$ , cez bod  $B$  prúdnic  $b$ . Prúdnic medzi nimi tvoria „rieku“. Z bodu  $A$  do bodu  $B$  ide ponad rieku most. Plocha kosodĺžnika je prietok rieky (za jednotku času) popod malý kúsok  $(dx, dy)$  mosta..

Druhá identita v (6.1) nám dáva

$$df = - * (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}) = - * (v_x dx + v_y dy) = v_y dx - v_x dy, \quad (9.5)$$

kde sme použili (3.4). Ak teda pokročíme (po tej spojnicí bodov  $A$  a  $B$ ) o malý vektor  $(dx, dy)$ , funkčná hodnota funkcie  $f$  sa zmení o  $df = v_y dx - v_x dy$ . To vpravo je však veľkosť *plôšky kosodĺžnika* s hranami  $(dx, dy)$  a  $(v_x, v_y)$ . No a to je presne prietok tekutiny s rýchlosťou  $(v_x, v_y)$  cez malý kúsok  $(dx, dy)$  tej spojnice, t.j. *plocha*, ktorá týmto kúskom pretečie za jednotku času. (V 3D situácii to bol *objem* tekutiny, ktorý pretečie cez plošku  $d\mathbf{S}$  a výraz preň bol  $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ .) Celková zmena  $f$  na trase medzi  $A$  a  $B$  je potom zodpovedajúci *integrál* po tej ceste, čo dáva *celkový prietok* cez celú spojnicu.

<sup>2</sup>Nevidno z neho *smer* tečenia ani *veľkosť rýchlosti* toho tečenia. Tento obrázok by zároveň ukazoval *vrstevnice* kopca s výškou  $f(x, y)$ , spomínané na konci paragrafu 7. Ak by sme prúdovú funkciu použili na opis výšky fiktívneho kopca, kvapalina by na príslušnej turistickej mape tiekla pozdĺž vrstevníc.

## 9.2. Nevírové prúdenie a jeho potenciál

Teraz sa venujme prvej implikácii v (8.2). Vidíme, že ak má nejaké vektorové pole v 2D nulovú hodnotu  $\text{rot}_3 \mathbf{a}$ , je *gradientom* nejakej funkcie  $g(x, y)$ . Pre rýchlostné pole  $\mathbf{v}$  tak

$$\text{rot}_3 \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \text{grad } g, \quad \text{t.j. } (v_x, v_y) = (\partial_x g, \partial_y g). \quad (9.6)$$

Čo ale *fyzikálne* hovorí fakt  $\text{rot}_3 \mathbf{v} = 0$ ?

V 3D prípade sa *vektorové* pole  $\text{rot } \mathbf{v}$  volá *vírovosť* (vorticity). Ukazuje sa, že v danom bode je to dvojnásobok (vektora) uhlovej rýchlosti, ktorou sa točí „kvapka“ so stredom v danom bode.

*Skalárna* funkcia  $\text{rot}_3 \mathbf{v}$  je 2D verzia vírovosti tečenia. (Volá sa tiež vírovosť.) Ak by sme položili niekam na hladinu daného 2D tečenia malé teliesko z korku, točilo by sa uhlovou rýchlosťou  $2 \text{rot}_3 \mathbf{v}$ .

Podmienka  $\text{rot}_3 \mathbf{v} = 0$  teda opisuje *nevírové* prúdenie. Ako vidíme z (9.6), takéto prúdenie je tiež „potenciálové“, tentokrát navyše v tom bežnom zmysle (že vektorové pole sa počíta ako gradient potenciálu).

## 9.3. Odkiaľ sem príde komplexná analýza

Predstavme si, že opisujeme 2D tečenie, ktoré je *súčasne* „nestlačiteľné“ a nevírové. Potom podľa (9.2) a (9.6) platí

$$\mathbf{v} = \text{Ham } f = \text{grad } g, \quad \text{t.j. } (v_x, v_y) = (-\partial_y f, \partial_x f) = (\partial_x g, \partial_y g). \quad (9.7)$$

Posledné znamienko rovnosti v (9.7) však vyjadruje presne *Cauchyho-Riemannove vzťahy*; hovoria, že funkcia komplexnej premennej

$$h(z), \quad h = f + ig, \quad z = x + iy \quad (9.8)$$

je analytická. Ľahko sa zráta, že rýchlostné pole je ukryté v jej derivácii

$$h'(z) = v_y + iv_x. \quad (9.9)$$

Naozaj,

$$2\partial_z h(z) = (\partial_x - i\partial_y)(f + ig) = 2(v_y + iv_x). \quad (9.10)$$

Viac sa dá o tom dočítať v knihách o hydrodynamike, napr. [10].

## 10. ZÁVER

V tomto článku sme sa pozreli na 2D analóg vektorovej analýzy. Prístup bol založený na využití diferenciálnych foriem. Spočíval v zopakovaní logiky, ktorá vedie k lepšiemu pochopeniu štandardnej 3D vektorovej analýzy. Tento postup je „vnútorný“, nevyužíva sa vnorenie 2D priestoru do pomocného 3D priestoru. Ukazuje sa, aké diferenciálne operátory tu figurujú (analógy grad, rot a div z 3D), aké sú medzi nimi vzťahy a do akých integrálnych identít vstupujú. Výsledky sú prezentované aj v štandardnom jazyku (t.j. bez foriem).

## LITERATÚRA

- [1] J. Garaj: *Základy vektorového počtu*, SVTL, Bratislava, 1963.
- [2] B. Spain: *Vector Analysis*, D. Van Nostrand Company, 1975.
- [3] J. E. Marsden: *Vector Calculus*, W. H. Freeman & Company, 1976.
- [4] H. M. Schey: *Div, Grad, Curl, and All That: An Informal Text on Vector Calculus*, W. W. Norton & Company, 2004.
- [5] D. Fleisch: *A Student's Guide to Maxwell's Equations*, CUP, Cambridge, 2008.
- [6] M. Fecko: *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov*, Iris, Bratislava, 2004, 2009, 2018; CUP, Cambridge, 2006, 2011.
- [7] R. Mařík: *Greenova věta a její aplikace*, Kvaternion (2018), No. 1–2, 15–24.
- [8] P. Olver: *Vector Calculus in Two Dimensions*, online <https://www-users.math.umn.edu/~olver/lnc/vc2.pdf>.
- [9] Khan Academy: *Formal definition of curl in two dimensions*, online <https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/greens-theorem-and-stokes-theorem/formal-definitions-of-divergence-and-curl/a/defining-curl>.
- [10] L. D. Landau, E. M. Lifshitz: *Fluid Mechanics*, Pergamon Press (Second Edition), 1987.

Marián Fecko, Katedra teoretickej fyziky, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave, Mlynská dolina F2, 84248 Bratislava, Slovenská republika,  
e-mail: [marian.fecko@fmph.uniba.sk](mailto:marian.fecko@fmph.uniba.sk)