Čo sú diferenciálne formy a čo z nich má fyzik

Marián Fecko

Oddelenie teoretickej fyziky
KTFDF FMFI UK
Bratislava
fecko@fmph.uniba.sk

Seminár Katedry fyziky FEI STU,
Bratislava, 25. marca 2011

Prirodzené otázky:

- Som bezúhonný fyzik, hrozí mi stretnutie s diferenciálnou formou? Ak áno, ako spoznám, že k tomu došlo?

Prirodzené otázky:

- Som bezúhonný fyzik, hrozí mi stretnutie s diferenciálnou formou? Ak áno, ako spoznám, že k tomu došlo?
- Ako sa mám správať, keď už k tomu dôjde? Čo si môžem voči nim dovoliť?

Prirodzené otázky:

- Som bezúhonný fyzik, hrozí mi stretnutie s diferenciálnou formou? Ak áno, ako spoznám, že k tomu došlo?
- Ako sa mám správať, keď už k tomu dôjde? Čo si môžem voči nim dovoliť?
- Dá sa s formami spriateliť a stojí to za to? Ako sa nám formy odvďačia za ponúknuté priateľstvo?

Prirodzené otázky:

- Som bezúhonný fyzik, hrozí mi stretnutie s diferenciálnou formou? Ak áno, ako spoznám, že k tomu došlo?
- Ako sa mám správať, keď už k tomu dôjde? Čo si môžem voči nim dovoliť?
- Dá sa s formami spriateliť a stojí to za to? Ako sa nám formy odvďačia za ponúknuté priateľstvo?
- V ktorých oblastiach fyziky z nich môžeme mať prospech?

Prirodzené otázky:

- Som bezúhonný fyzik, hrozí mi stretnutie s diferenciálnou formou? Ak áno, ako spoznám, že k tomu došlo?
- Ako sa mám správať, keď už k tomu dôjde? Čo si môžem voči nim dovoliť?
- Dá sa s formami spriateliť a stojí to za to? Ako sa nám formy odvďačia za ponúknuté priateľstvo?
- V ktorých oblastiach fyziky z nich môžeme mať prospech?
- Aké fyzikálne veličiny (a následne zákony pre ne) sa dajú zapísať cez formy a čo z tohoto zápisu vidno?

Obsah

Diferenciálne formy ako podintegrálne výrazy

Diferenciálne formy sa dajú zaviesť rôzne.
Pre potreby tejto prednášky prijmeme
postoj najhrubšieho pragmatizmu.
Podľa neho sú diferenciálne formy jednoducho podintegrálne výrazy:

$$\text{diferenciálne formy} \;=\; \text{podintegrálne výrazy}$$

Preto každý, kto už videl integrály, videl aj výrazy za znakom integrálu a teda videl už aj diferenciálne formy :-)

Diferenciálne formy v rovine

V rovine poznáme dvojaké integrály - krivkové a plošné:

$$\begin{array}{rcl} \text{krivkový} & \leftrightarrow & \int A(x,y)dx + B(x,y)dy \\ \text{plošný} & \leftrightarrow & \int A(x,y)dxdy \end{array}$$

Znamená to, že sme už veľakrát videli

$$\begin{array}{rcl} \text{1-formy} & \leftrightarrow & A(x,y)dx + B(x,y)dy \\ \text{2-formy} & \leftrightarrow & A(x,y)dxdy \end{array}$$

v rovine.

Diferenciálne formy na sfére

Na sfére (napríklad na povrchu zemegule) poznáme dvojaké integrály - krivkové a plošné:

$$\begin{array}{rcl} \text{krivkový} & \leftrightarrow & \int A(\vartheta,\varphi)d\vartheta + B(\vartheta,\varphi)d\varphi \\ \text{plošný} & \leftrightarrow & \int A(\vartheta,\varphi)d\vartheta d\varphi \end{array}$$

Znamená to, že sme už veľakrát videli

$$\begin{array}{rcl} \text{1-formy} & \leftrightarrow & A(\vartheta,\varphi)d\vartheta + B(\vartheta,\varphi)d\varphi \\ \text{2-formy} & \leftrightarrow & A(\vartheta,\varphi)d\vartheta d\varphi \end{array}$$

na sfére.

Diferenciálne formy v priestore

V priestore poznáme trojaké integrály - krivkové, plošné a objemové:

$$\begin{aligned}
\text{krivkový} &\quad \leftrightarrow \quad \int A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz \\
\text{plošný} &\quad \leftrightarrow \quad \int A(x,y,z)dxdy + B(x,y,z)dydz + C(x,y,z)dxdz \\
\text{objemový} &\quad \leftrightarrow \quad \int A(x,y,z)dxdydz
\end{aligned}$$

Znamená to, že sme už veľakrát videli

$$\begin{aligned}
\text{1-formy} &\quad \leftrightarrow \quad A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz \\
\text{2-formy} &\quad \leftrightarrow \quad A(x,y,z)dxdy + B(x,y,z)dydz + C(x,y,z)dxdz \\
\text{3-formy} &\quad \leftrightarrow \quad A(x,y,z)dxdydz
\end{aligned}$$

v priestore.

Ako spoznám p-formu

Vidíme, že formy obsahujú nejaké funkcie vpredu a súčin niekoľkých diferenciálov súradníc. Pravidlo na terminológiu vyzerá takto:

0-formy	$\leftrightarrow$	žiadne diferenciály súradníc
1-formy	$\leftrightarrow$	lineárne v diferenciáloch súradníc
2-formy	$\leftrightarrow$	súčiny dvoch diferenciálov súradníc
3-formy	$\leftrightarrow$	súčiny troch diferenciálov súradníc
...	$\leftrightarrow$	...
p-formy	$\leftrightarrow$	súčiny p diferenciálov súradníc

Špeciálne sa dodefinovali aj 0-formy ako objekty, kde nie sú žiadne diferenciály súradníc, čiže 0-formy = funkcie.

Diferenciálne formy sa dajú integrovať

Rovno z nášho zavedenia vyplýva,
že diferenciálne formy sa dajú integrovať.
A je zrejmé aj základné pravidlo:

p- formy sa integrujú po p-rozmerných oblastiach

Znak $\wedge$ - diferenciály súradníc antikomutujú

Pri práci s formami sa zaužíval zápis pomocou špeciálneho súčinu diferenciálov súradníc.
Volá sa vonkajší súčin a spĺňa prečudesné pravidlo:

Diferenciály súradníc antikomutujú

T.j. napríklad

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= -dy \wedge dx \\ dx \wedge dx &= -dx \wedge dx = 0 \\ dx \wedge dy \wedge dz &= dz \wedge dx \wedge dy \\ d\vartheta \wedge d\varphi &= -d\varphi \wedge d\vartheta \end{aligned}$$

Možné stupne foriem v danom priestore

Po novom teda napríklad

$$\begin{aligned} \text{2-formy} \quad &\leftrightarrow \quad A dx \wedge dy + B dy \wedge dz + C dx \wedge dz \\ \text{3-formy} \quad &\leftrightarrow \quad A dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

Vidím tiež, že zaujímavé stupne v danom n-rozmernom priestore sú len

$$p = 0, 1, 2, \dots, n$$

Napríklad v rovine xy sú zaujímavé len formy troch stupňov:

0-formy 1-formy 2-formy

(Sú len 2 diferenciály súradníc - dx a dy - takže pre tri a viac-formy by sa museli nevyhnutne opakovať aspoň dva rovnaké a taký člen je nulový z antikomutatívnosti súčinu $\wedge$.)

Prechod k iným súradniciam (1)

Prejdime v rovine od kartézskych súradníc k polárnym. Potom môžeme formu

$$\alpha = A(x,y)dx \wedge dy$$

prepísať do polárnych súradníc. Robí sa to takto: Najprv

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= dx(r,\varphi) \wedge dy(r,\varphi) \equiv d(r\cos\varphi) \wedge d(r\sin\varphi) \\ &= (dr\cos\varphi - r\sin\varphi d\varphi) \wedge (dr\sin\varphi + r\cos\varphi d\varphi) \\ &= rdr \wedge d\varphi \end{aligned}$$

Využilo sa

$$\begin{aligned} dr \wedge dr &= 0 \\ d\varphi \wedge d\varphi &= 0 \\ dr \wedge d\varphi &= -d\varphi \wedge dr \end{aligned}$$

Prechod k iným súradniciam (2)

Funkciu $A(x, y)$ jednoducho prepíšeme ako funkciu premenných r, φ

$$A(x(r, \varphi), y(r, \varphi))$$

Spolu dostaneme

$$A(x, y)dx \wedge dy = A(x(r, \varphi), y(r, \varphi))r dr \wedge d\varphi$$

"Zadarmo" (bez integrovania) sme dostali jakobián r vo vzorci

$$\int A(x, y)dxdy = \int A(x(r, \varphi), y(r, \varphi))r drd\varphi$$

Prechod k iným súradniciam (3)

Nie je to náhoda, rovnako dostaneme vo sférických súradniciach

$$dx \wedge dy \wedge dz = r^2 \sin \vartheta dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi$$

a v cylindrických súradniciach

$$dx \wedge dy \wedge dz = r dr \wedge d\varphi \wedge dz$$

Tam sú ale presne jakobiány, ktoré majú vyskočiť pri prepise integrálov do sférických a cylindrických súradníc.
A pritom sme žiadne integrály nerobili :-)

Prvé poučenia (1)

Diferenciálna forma je čosi objektívne
(nezávislé od výberu súradníc),
čo ale môžeme vyjadriť v rôznych súradniciach.
Napríklad sme videli, že

$$\begin{aligned} \alpha &= dx \wedge dy \\ &= r dr \wedge d\varphi \end{aligned}$$

alebo

$$\begin{aligned} \beta &= dx \wedge dy \wedge dz \\ &= r^2 \sin\vartheta dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi \\ &= r dr \wedge d\varphi \wedge dz \end{aligned}$$

Prvé poučenia (2)

Ak medzi diferenciály súradníc natlačíme symbol $\wedge$
a akceptujeme prečudesné pravidlo o ich antikomutácii,
dostaneme niektoré netriviálne výsledky z integrálneho počtu
bez toho, že by sme naozaj integrovali.

Vonkajší súčin dvoch foriem, $\alpha \wedge \beta$

Dajú sa (medzi sebou) násobiť. A to spôsobom každý s každým (pravidlo maximálnej promiskuity)
a keď dôjde na diferenciály súradníc, použiť $\wedge$. Napr. ak v $\mathbb{R}^3$

$$\alpha = ydx + zdy \qquad \beta = ydx \wedge dy + x^2 dy \wedge dz$$

tak

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= (ydx + zdy) \wedge (ydx \wedge dy + x^2 dy \wedge dz) \\ &= y^2 dx \wedge dx \wedge dy + xy^2 dx \wedge dy \wedge dz + \dots \\ &= xy^2 dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

Vnútorný súčin vektorového poľa V a formy α (1)

Vektorové polia sa dajú stotožniť so smerovými deriváciami a tie sú realizované diferenciálnymi operátormi prvého rádu

$$V = V^1(x)\partial_1 + \cdots + V^n(x)\partial_n$$

(Teda aj samotné parciálne derivácie $\partial/\partial x^i$ sú vektorové polia :-)
Napríklad

$$V = -y\partial_x + x\partial_y = \partial_\varphi$$

je vektorové pole v rovine (vyjadrené v dvojakých súradniciach) a

$$U = \frac{Q}{r^2}\partial_r = \frac{Q}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z)$$

je vektorové pole v priestore
(= elektrické pole bodového náboja Q umiestneného v počiatku)

Vnútorný súčin vektorového poľa V a formy α (2)

Vnútorný súčin $i_V\alpha$ sa robí takto (čudne):

1. pre $\alpha = f(x)$ (t.j. pre 0-formy) je

$$i_V f = 0$$

2. pre $\alpha = dx^i$ (t.j. pre diferenciály súradníc) je

$$i_V(dx^i) = V^i$$

3. pre súčet a (vonkajší) súčin foriem je

$$\begin{aligned} i_V(\alpha + \beta) &= i_V\alpha + i_V\beta \\ i_V(\alpha \wedge \beta) &= (i_V\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (i_V\beta) \end{aligned}$$

Vnútorný súčin vektorového poľa V a formy α (3)

Vidno, že

$$i_V(\text{p-formy}) = (\text{p-1})\text{-forma}$$

Napr. ak v $\mathbb{R}^3$

$$V = -y\partial_x + x\partial_y \qquad \beta = ydx \wedge dy + x^2 dy \wedge dz$$

tak

$$\begin{aligned}
i_V\beta &= i_V(ydx \wedge dy + x^2 dy \wedge dz) \\
&= (i_V y)dx \wedge dy + y(i_V dx) \wedge dy - ydx \wedge (i_V dy) + \dots \\
&= yV^x dy - yV^y dx + x^2 V^y dz - x^2 V^z dy \\
&= -y^2 dy - xydx + x^3 dz
\end{aligned}$$

Operátor $*$ (Hodgeov)

V jednoduchých prípadoch funguje takto:

$$*(dx^i \wedge \cdots \wedge dx^j) = \pm dx^k \wedge \cdots \wedge dx^l$$

kde vpravo sú práve tie diferenciály, ktoré vľavo chýbajú.
(Na to $\pm$ je isté pravidlo.) Je zrejmé, že

$$*(\text{p-formy}) = (\text{n-p})\text{-forma}$$

Teda napríklad v rovine

$$*dx = dy \qquad * dy = -dx$$

zatiaľ čo v priestore

$$*dx = dy \wedge dz \qquad * (dx \wedge dz) = -dy$$

V zložitejších prípadoch je to násobok toho, čo sa povedalo

Vonkajšia derivácia $d\alpha$ (1)

Formy sa dajú aj derivovať. A to (aj) takto:
Pre jednoduché členy

$$d(f dx^i \wedge \cdots \wedge dx^j) = df \wedge dx^i \wedge \cdots \wedge dx^j$$

kde ako zvyčajne

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n$$

Pre súčet takýchto členov súčet výsledkov pre každý zvlášť.
Takže napríklad pre 2-formu β v $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} d\beta &= d(y dx \wedge dy + x^2 dy \wedge dz) \\ &= d(y dx \wedge dy) + d(x^2 dy \wedge dz) \\ &= dy \wedge dx \wedge dy + d(x^2) \wedge dy \wedge dz \\ &= 2x dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

Vonkajšia derivácia $d\alpha$ (2)

Je zrejmé, že

$$d(\text{p-formy}) = (\text{p+1})\text{-forma}$$

Je trochu menej zrejmé, že

$$d(d\alpha) = 0 \qquad \text{t.j.} \qquad dd = 0$$

A je ešte menej zrejmé, že na súčine sa "d" správa takto

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta)$$

(ak α je p-forma).

Stokesova veta (pre diferenciálne formy)

A už vonkoncom nie je zrejmé, že platí

Stokesova veta: $$\int_D d\alpha = \int_{\partial D} \alpha$$

Tu je α ľubovoľná p-forma
(v ľubovoľnom n-rozmernom priestore)
a D je ľubovoľná (p+1)-rozmerná oblasť v tomto priestore.
Ukazuje sa, že všetky známe vety, ktoré dávajú do rovnosti dva integrály po nejakej oblasti a jej hranici
(Gaussova, Stokesova, Greenove identity, ...)
sú špeciálne prípady tejto všeobecnej Stokesovej vety.

Poincarého lema

Nech α je uzavretá, t.j. (podľa definície)

$$d\alpha = 0$$

Jeden z dôvodov môže byť ten, že tá α je exaktná

$$\alpha = d\beta \qquad \beta = \text{ potenciál formy } \alpha$$

(keďže $dd = 0$, bude $d\alpha = d(d\beta) = 0$).
Môže to byť aj z iného dôvodu? Ukazuje sa, že všeobecne áno, ale Poincarého lema hovorí, že lokálne nie.
T.j. že v istom okolí ľubovoľného bodu má každá uzavretá forma potenciál.
(Na jeho výpočet je vzorec; je tam ale vôľa $\beta \mapsto \beta + d\sigma$).

Diferenciálne formy v obyčajnom E^3

Sme v obyčajnom E^3 so súradnicami x, y, z.
Potom máme tri diferenciály súradníc, dx, dy, dz.
V E^3 žijú formy štyroch stupňov:

0-formy   1-formy   2-formy   3-formy

Zaveďme nasledujúce označenia foriem:
Plošné 2-formy

$$dS_x = dy \wedge dz \qquad dS_y = dz \wedge dx \qquad dS_z = dx \wedge dy$$

a objemovú 3-formu

$$dV = dx \wedge dy \wedge dz$$

Užitočné zápisy foriem v obyčajnom E^3

Všetky formy v E^3 sa teda dajú zapísať takto:

$$\begin{array}{rcl} 0-\mathit{formy}: & \alpha = & f \\ 1-\mathit{formy}: & \alpha = & \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} \equiv A^x dx + A^y dy + A^z dz \\ 2-\mathit{formy}: & \alpha = & \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} \equiv A^x dS_x + A^y dS_y + A^z dS_z \\ 3-\mathit{formy}: & \alpha = & f dV \end{array}$$

kde

$$\begin{array}{rcl} f(\mathbf{r}) & = & \text{funkcia v } E^3 \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) & = & \text{vektorové pole v } E^3 \end{array}$$

Všetky formy sa teda dajú „nahradiť" (parametrizovať) skalárnymi a vektorovými poľami.

Ako sa tu prejavuje vonkajšia derivácia (1)

Vonkajšia deriváca tu funguje takto

$$\text{0-formy} \quad \xrightarrow{d} \quad \text{1-formy} \quad \xrightarrow{d} \quad \text{2-formy} \quad \xrightarrow{d} \quad \text{3-formy}$$

takže efektívne musí generovať tri diferenciálne operácie:

$$\text{skalár} \quad \xrightarrow{d} \quad \text{vektor} \quad \xrightarrow{d} \quad \text{vektor} \quad \xrightarrow{d} \quad \text{skalár}$$

Čo sú tieto tri operácie?

Ako sa tu prejavuje vonkajšia derivácia (2)

Na odpoveď treba explicitne vyrátať d-čko na uvedených troch typoch foriem. Keď sa to urobí, vychádza toto:

$$\begin{aligned} df &= (\mathrm{grad}\, f)\cdot d\mathbf{r} \\ d(\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}) &= (\mathrm{rot}\, \mathbf{A})\cdot d\mathbf{S} \\ d(\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}) &= (\mathrm{div}\, \mathbf{A})dV \end{aligned}$$

Všetky tri diferenciálne operácie z vektorovej analýzy sú len zamaskovaná vonkajšia derivácia d na formách.

Ako sa tu prejavuje Stokesova veta

Univerzálna Stokesova veta pre formy

$$\int_D d\alpha = \int_{\partial D} \alpha$$

tu takto nadobúda tri rôzne známe podoby

$$\begin{aligned}
\int_c (\mathrm{grad}\, f) \cdot d\mathbf{r} &= f(b) - f(a) \\
\int_S (\mathrm{rot}\, \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} &= \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \\
\int_V (\mathrm{div}\, \mathbf{A}) dV &= \oint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}
\end{aligned}$$

Ako sa tu prejavuje $dd = 0$

Ak na výsledky

$$\begin{aligned} df &= (\mathrm{grad}\, f) \cdot d\mathbf{r} \\ d(\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}) &= (\mathrm{rot}\, \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \\ d(\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}) &= (\mathrm{div}\, \mathbf{A}) dV \end{aligned}$$

aplikujeme ešte raz operáciu d, dostaneme tvrdenia

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathrm{rot}\, \mathrm{grad}\, f) \cdot d\mathbf{S} \\ 0 &= (\mathrm{div}\, \mathrm{rot}\, \mathbf{A}) dV \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

čo ale znamená, že platia operátorové identity

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\, \mathrm{grad} &= 0 \\ \mathrm{div}\, \mathrm{rot} &= 0 \end{aligned}$$

Ako sa tu prejavuje Poincarého lema

Identity

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\mathrm{grad} &= 0 \\ \mathrm{div}\,\mathrm{rot} &= 0 \end{aligned}$$

vyjadrujú implikácie

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathrm{grad}\, f \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{A} = 0 \\ \mathbf{A} = \mathrm{rot}\,\mathbf{C} \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0 \end{aligned}$$

Poincarého lema hovorí, že lokálne platia aj opačné implikácie:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathrm{grad}\, f \quad &\Leftarrow \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{A} = 0 \\ \mathbf{A} = \mathrm{rot}\,\mathbf{C} \quad &\Leftarrow \quad \mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0 \end{aligned}$$

Ako sa tu prejavuje vonkajší a vnútorný súčin

Napríklad takto:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r})\wedge(\mathbf{B}\cdot d\mathbf{r}) &= (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{S} \\
(\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r})\wedge(\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}) &= (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})dV \\
(\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r})\wedge(\mathbf{B}\cdot d\mathbf{r})\wedge(\mathbf{C}\cdot d\mathbf{r}) &= [(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}]dV \\
i_{\mathbf{A}}(\mathbf{B}\cdot d\mathbf{r}) &= (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \\
i_{\mathbf{A}}(\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}) &= (\mathbf{B}\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{r} \\
i_{\mathbf{A}}(f dV) &= f\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}
\end{aligned}
$$

Všimnime si, že sa objavil vektorový súčin vektorov ako efektívne vyjadrenie vonkajšieho súčinu dvoch 1-foriem (a tiež vnútorného súčinu vektora a 2-formy).

Ako sa tu prejavuje Hodgeov operátor $*$

Keďže sme v 3-rozmernom priestore, tak

$$\text{0-formy} \overset{*}{\leftrightarrow} \text{3-formy} \qquad \text{1-formy} \overset{*}{\leftrightarrow} \text{2-formy}$$

Detailne to vychádza takto (mimoriadne jednoducho :-)

$$\begin{aligned} *f &= f dV \\ *(f dV) &= f \\ *(\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}) &= \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \\ *(\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}) &= \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$

Diferenciálne formy v Minkowského priestore $E^{1,3}$

Sme v Minkowského (časo)priestore $E^{1,3}$ so súradnicami t, x, y, z.
Potom máme štyri diferenciály súradníc, dt, dx, dy, dz.
V $E^{1,3}$ žijú formy piatich stupňov:

0-formy 1-formy 2-formy 3-formy 4-formy

Triviálny (ale veľmi užitočný) fakt:
každý člen nejakej konkrétnej formy α obsahuje diferenciál dt
práve raz alebo ani raz
(lebo $dt \wedge dt = 0$:-)

Užitočné zápisy foriem v Minkowského priestore $E^{1,3}$

Pozbierame osobitne členy s jedným dt a bez dt.
Dostaneme

$$\alpha = dt \wedge \hat{s} + \hat{r}$$

kde formy $\hat{s}$ a $\hat{r}$ už neobsahujú dt.
Obsahujú len diferenciály dx, dy, dz. Teda sú akoby v E^3!
A tie poznáme z vektorovej analýzy - vyjadrujú sa cez skalárne a vektorové polia v E^3.
Preto sa aj formy v $E^{1,3}$ dajú vyjadriť
cez skalárne a vektorové polia v E^3.

Explicitné vyjadrenia α v Minkowského priestore $E^{1,3}$

Naozaj urobené to dá toto:

$$
\begin{array}{lccl}
0-\textit{formy}: & \alpha & = & f \\
1-\textit{formy}: & \alpha & = & f\,dt + \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} \\
2-\textit{formy}: & \alpha & = & dt\wedge(\mathbf{a}\cdot d\mathbf{r}) + \mathbf{b}\cdot d\mathbf{S} \\
3-\textit{formy}: & \alpha & = & dt\wedge(\mathbf{a}\cdot d\mathbf{S}) + f\,dV \\
4-\textit{formy}: & \alpha & = & f\,dt\wedge dV
\end{array}
$$

Čiže napríklad na zadanie 2-formy potrebujeme dve vektorové polia.
Ak tá 2-forma opisuje nejaký fyzikálny objekt, pôjde o objekt, ktorý sme doteraz opisovali dvoma vektorovými poľami.

Ako tu dopadne $d\alpha$

Ak vyrátame vonkajšie derivácie uvedených foriem, vyjde:

$$
\begin{aligned}
df &= (\partial_t f)dt + (\operatorname{grad} f)\cdot d\mathbf{r} \\
d(f\,dt + \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r}) &= dt\wedge(\partial_t \mathbf{a} - \operatorname{grad} f)\cdot d\mathbf{r} + (\operatorname{rot}\mathbf{a})\cdot d\mathbf{S} \\
d(dt\wedge \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} + \mathbf{b}\cdot d\mathbf{S}) &= dt\wedge(\partial_t \mathbf{b} - \operatorname{rot}\mathbf{a})\cdot d\mathbf{S} + (\operatorname{div} b)dV \\
d(dt\wedge \mathbf{a}\cdot d\mathbf{S} + f\,dV) &= (\partial_t f - \operatorname{div} a)dt\wedge dV
\end{aligned}
$$

Dôležité pozorovanie: v zátvorkách vpravo sa objavili kombinácie, ktoré sa vyskytujú v elektromagnetizme!

2-forma elektromagnetického poľa F (1)

Menovite pre 2-formu

$$F := dt \wedge \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

dostaneme

$$dF = dt \wedge (-\partial_t \mathbf{B} - \mathrm{rot}\, \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} - (\mathrm{div}\, \mathbf{B}) dV$$

Vidno, že polovica Maxwellových rovníc

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{B} + \mathrm{rot}\, \mathbf{E} &= 0 \\ \mathrm{div}\, \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

je jednoduché tvrdenie, že

$$dF = 0$$

2-forma elektromagnetického poľa F (2)

Ak na 2-formu F aplikujeme najprv $*$ a až potom d, dostaneme

$$\begin{aligned} F &= dt \wedge \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ *F &= -dt \wedge \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} - \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \\ d(*F) &= dt \wedge (-\partial_t \mathbf{E} + \operatorname{rot} \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} - (\operatorname{div} \mathbf{E}) dV \end{aligned}$$

Ak to porovnáme s druhou polovicou Maxwellových rovníc

$$\begin{aligned} -\partial_t \mathbf{E} + \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mathbf{j} \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= \rho \end{aligned}$$

tak vľavo vidíme rovnaké kombinácie. Vpravo však nie sú nuly.

3-forma prúdu

Výraz (3-forma) $d * F$ sa teda nemá rovnať nule,
ale inej 3-forme, poskladanej z ρ a $\mathbf{j}$:
zavedieme 3-formu prúdu

$$J := dt \wedge (-\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{S} + \rho dV$$

a pomocou nej zapíšeme druhú polovicu Maxwellových rovníc ako

$$d * F = -J$$

Maxwellove rovnice v jazyku foriem

Maxwellove rovnice tak nadobudli mimoriadne kompaktný tvar: hovoria, že

$$\begin{aligned} d * F &= -J \\ dF &= 0 \end{aligned}$$

Polia sú v 2-forme

$$F := dt \wedge \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

a ich zdroje sú v 3-forme

$$J := dt \wedge (-\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{S} + \rho dV$$

Dôsledky štruktúry rovníc (1)

Ak aplikujeme na rovnice operáciu d, dostaneme

$$\begin{aligned} d(d * F) &= d(-J) \\ d(dF) &= d0 \end{aligned}$$

Dôsledkom Maxwellových rovníc je teda rovnica

$$dJ = 0$$

Bez jej splnenia sú rovnice nekonzistentné :-(
Čo hovorí?

Zákon zachovania náboja (1)

Preintegrujeme ju cez 4-rozmerný objem D_4
a použijeme Stokesovu vetu:

$$0 = dJ$$

$$0 = \int_{D_4} dJ = \int_{\partial D_4} J$$

Dostávame, že

$$\int_{\partial D_4} dt \wedge \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial D_4} \rho dV$$

Zákon zachovania náboja (2)

Zvoľme teraz D_4 tvaru valca nad trojrozmerným objemom D_3

$$D_4 = D_3 \times I \qquad I = \langle t_1, t_2 \rangle$$

Potom

$$\begin{aligned} \partial D_4 &= \partial D_3 \times I - D_3 \times \partial I \\ &= \partial D_3 \times I - D_3 \times \{t_2\} + D_3 \times \{t_1\} \end{aligned}$$

a dostaneme

$$\int_{D_{3;t_2}} \rho dV = \int_{D_{3;t_1}} \rho dV + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial D_3} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

čo je bilancia náboja v oblasti D_3.
Ukazuje, že platí lokálny zákon zachovania náboja.

Potenciál a kalibračná vôľa

Poincarého lema hovorí, že

$$dF = 0 \quad \Rightarrow \quad F = dA = d(A + d\chi) \equiv dA'$$

2-forma poľa teda má potenciál (= 1-forma)

$$A = \phi dt - \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

Vyjadrenia polí:

$$\begin{aligned} F &= dA \\ dt \wedge \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= dt \wedge (-\partial_t \mathbf{A} - \operatorname{grad} \phi) \cdot d\mathbf{r} - (\operatorname{rot} \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

Ako vyzerajú polia v inej sústave (1)

Detailne

$$\begin{aligned} F &= dt \wedge \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ &= E_x dt \wedge dx + E_y dt \wedge dy + E_z dt \wedge dz + \\ &\quad B_x dz \wedge dy + B_y dx \wedge dz + B_z dy \wedge dx \end{aligned}$$

Jednotlivé zložky polí teda identifikujem podľa toho, pri akej dvojici diferenciálov súradníc stoja.

Zložky formy - poznámka bokom

Mimochodom to F sa dá písať aj takto

$$\begin{aligned} F &= E_x dx^0 \wedge dx^1 + E_y dx^0 \wedge dx^2 + E_z dx^0 \wedge dx^3 + \\ &\quad B_x dx^3 \wedge dx^2 + B_y dx^1 \wedge dx^3 + B_z dx^2 \wedge dx^1 \\ &\equiv F_{01} dx^0 \wedge dx^1 + F_{02} dx^0 \wedge dx^2 + F_{03} dx^0 \wedge dx^3 + \\ &\quad F_{32} dx^3 \wedge dx^2 + F_{13} dx^1 \wedge dx^3 + F_{21} dx^2 \wedge dx^1 \end{aligned}$$

t.j.

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

Všeobecná p-forma v takomto zápise vyzerá

$$\alpha = \frac{1}{p!} \alpha_{\mu\ldots\nu}(x) dx^\mu \wedge \cdots \wedge dx^\nu$$

Ako vyzerajú polia v inej sústave (2)

V nečiarkovanej nech je konštantné elektrické pole

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0) \qquad \mathbf{B} = (0, 0, 0)$$

t.j.

$$F = E_x dt \wedge dx + E_y dt \wedge dy$$

Ak sa čiarkovaná sústava pohybuje rýchlosťou V v smere osi x, tak Lorentzove transformácie dávajú

$$t = \gamma(t' - Vx') \qquad x = \gamma(x' - Vt') \qquad y = y' \qquad z = z'$$

$$dt = \gamma(dt' - Vdx') \quad dx = \gamma(dx' - Vdt') \quad dy = dy' \quad dz = dz'$$

Ako vyzerajú polia v inej sústave (3)

Potom

$$
\begin{aligned}
F &\equiv E_x dt \wedge dx + E_y dt \wedge dy \\
&= E_x[\gamma(dt' - Vdx')] \wedge [\gamma(dx' - Vdt')] + E_y[\gamma(dt' - Vdx')] \wedge dy' \\
&= (E_x)dt' \wedge dx' + (\gamma E_y)dt' \wedge dy' - (\gamma V E_y)dx' \wedge dy' \\
&\equiv E'_x dt' \wedge dx' + E'_y dt' \wedge dy' - B'_z dx' \wedge dy'
\end{aligned}
$$

Takže Lorentzove transformácie polí vyšli

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} &= (E_x, E_y, 0) \qquad && \mathbf{B} = (0,0,0) \\
\mathbf{E}' &= (E_x, \gamma E_y, 0) \qquad && \mathbf{B}' = (0,0,V\gamma E_y)
\end{aligned}
$$

Čiarkovaný pozorovateľ vidí aj magnetické pole.
Objektívna je forma F, "delenie na" **E** a **B** závisí od pozorovateľa.

Rozšírený fázový priestor

Hamiltonove rovnice

$$\dot{x}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a} \qquad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial x^a}$$

patria do zlatého fondu (klasickej) teoretickej mechaniky.

$$\begin{aligned} x^a &= \text{konfiguračný priestor} \\ x^a, p_a &= \text{fázový priestor} \\ x^a, p_a, t &= \text{rozšírený fázový priestor} \end{aligned}$$

Hamiltonián $H(x^a, p_a, t)$ je funkciou v rozšírenom fázovom priestore.

Dôležitá 1-forma

Keďže v rozšírenom fázovom priestore máme súradnice x^a, p_a, t, každá 1-forma tam má tvar

$$\alpha = A_a(x,p,t)dx^a + B^a(x,p,t)dp_a + C(x,p,t)dt$$

Veľmi dôležitou sa ukazuje byť 1- forma

$$\sigma = p_a dx^a - H(x,p,t)dt$$

Prečo? Uvažujme krivku

$$\gamma \leftrightarrow (x^a(t), p_a(t), t)$$

Potom jej "vektor rýchlosti" je

$$\dot{\gamma} = \dot{x}^a(t)\partial_{x^a} + \dot{p}_a(t)\partial_{p_a} + \partial_t$$

Hamiltonove rovnice bezsúradnicovo (1)

Zrátajme 1-formu $i_{\dot\gamma} d\sigma$.

$$\begin{aligned} \sigma &= p_a dx^a - H dt \\ d\sigma &= dp_a \wedge dx^a - dH \wedge dt \\ i_{\dot\gamma} d\sigma &= \left(\dot p_a + \frac{\partial H}{\partial x^a}\right) dx^a + \left(-\dot x^a + \frac{\partial H}{\partial p_a}\right) dp_a - \left(\dot x^a \frac{\partial H}{\partial x^a} + \dot p_a \frac{\partial H}{\partial p_a}\right) dt \end{aligned}$$

Vynulovanie prvých dvoch zátvoriek
1. automaticky vynuluje aj tretiu
2. je ekvivalentné platnosti Hamiltonových rovníc

Hamiltonove rovnice bezsúradnicovo (2)

Znamená to, že 2n Hamiltonových rovníc

$$\dot{x}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a} \qquad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial x^a}$$

hovorí presne to isté, ako jedna geometrická (bezsúradnicová) rovnica

$$i_{\dot{\gamma}} d\sigma = 0$$

Účinkový integrál pre hamiltonovskú mechaniku

Princíp extremálneho účinku:
každej trajektórii priradím číslo (účinok = účinkový integrál)
a riešenia pohybových rovníc dávajú extremály tohoto integrálu.
Ako má vyzerať ten integrál, aby dával akurát $i_{\dot\gamma} d\sigma = 0$?
Keďže sa integruje po čiare, pod integrálom musí byť 1-forma.
Aká?
Rovnica ponúka 1-formu σ. Preto sa skúsi

$$S[\gamma] = \int_\gamma \sigma \qquad \left(= \int_{t_1}^{t_2} (p_a \dot{x}^a - H) dt \right)$$

Ľahko sa overí, že to funguje :-)

Ďalšie veci v hamiltonovskej mechanike

Veľa ďalších vecí sa v hamiltonovskej mechanike robí veľmi výhodne pomocou foriem.
(Zhruba: Čím sú pojmovo náročnejšie, tým výhodnejšie.)

Extrémny názor:
"Hamiltonian mechanics cannot be understood without differential forms".
(V.I.Arnoľd: Mathematical Methods of Classical Mechanics)

Ďalšie použitie - je toho veľmi veľa :-)

- čokoľvek neholonómne
- neholonómne väzby v mechanike
- termodynamika (Pfaffove formy = 1-formy)
- Berryho fáza v kvantovej mechanike
- symetrie a zákony zachovania
- teória kalibračných polí (k.potenciál = 1-forma, k.pole = 2-forma)
- výpočet tenzora krivosti cez formy krivosti vo VTR (Cartan)
- topologické invarianty (aj v teórii tuhých látok)
- atď., atď., atď. ...

Zhrnutie

Argumenty v prospech používania foriem:
- poskytujú invariantný zápis objektov
(nezávislý od súradníc, špeciálne vo fyzike od pozorovateľa)
- dajú sa integrovať (nič iné sa nedá :-)
- dajú sa derivovať (pritom d súvisí s integrálom cez Stokesa)
- ľahko sa s nimi manipuluje
- dajú sa s nimi robiť užitočné, jednoduché a účinné kúzla
- sú to globálne objekty ("na varietách")

Argument proti používaniu foriem:
- treba tomu venovať trochu času (naučiť sa to) :-)

Dá sa bez nich vyžiť? (1)

Dá sa bez nich vyžiť?

Určite áno.

Dá sa bez nich vyžiť? (2)

Ale PREČO žiť bez nich,

keď S NIMI JE SVET VESELŠÍ?

Čo čítať ďalej

H. Flanders.
Differential Forms (with Applications to Physical Sciences)..
New York: Academic Press, 1963

Čo čítať ďalej

- H. Flanders.
  Differential Forms (with Applications to Physical Sciences)..
  New York: Academic Press, 1963
- V.I. Arnold.
  Mathematical Methods of Classical Mechanics.
  New York: Springer-Verlag., 1978

Čo čítať ďalej

- H. Flanders.
  Differential Forms (with Applications to Physical Sciences)..
  New York: Academic Press, 1963
- V.I. Arnold.
  Mathematical Methods of Classical Mechanics.
  New York: Springer-Verlag., 1978
- Ch.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler.
  Gravitation.
  San Francisco: Freeman.Springer, Berlin Heidelberg, 1973

Čo čítať ďalej

- H. Flanders.
  Differential Forms (with Applications to Physical Sciences)..
  New York: Academic Press, 1963
- V.I. Arnold.
  Mathematical Methods of Classical Mechanics.
  New York: Springer-Verlag., 1978
- Ch.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler.
  Gravitation.
  San Francisco: Freeman.Springer, Berlin Heidelberg, 1973
- M. Fecko.
  Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov.
  Bratislava, Iris, 2004,2008; Cambridge University Press 2006

Čo čítať ďalej

- H. Flanders.
  Differential Forms (with Applications to Physical Sciences)..
  New York: Academic Press, 1963
- V.I. Arnold.
  Mathematical Methods of Classical Mechanics.
  New York: Springer-Verlag., 1978
- Ch.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler.
  Gravitation.
  San Francisco: Freeman.Springer, Berlin Heidelberg, 1973
- M. Fecko.
  Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov.
  Bratislava, Iris, 2004,2008; Cambridge University Press 2006