Geometria a jej aplikácie, SvF STU, Radlinského 11, Bratislava, 1. február 2007
Abstrakt prednášky ***Fecko, M.: Diferenciálna geometria a (teoretická) fyzika***

Diferenciálna geometria a (teoretická) fyzika

Doc. RNDr. Marián Fecko, PhD.

Katedra teoretickej fyziky a didaktiky fyziky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského Bratislava

1. Prečo sa v teoretickej fyzike používa diferenciálna geometria

Fyzika aj geometria sa vždy dejú v nejakom **priestore**. Spravidla je tento priestor „spojitý" (*hladká varieta*), takže sa tam (od čias Newtona a Leibniza) dá derivovať a integrovať. V oboch disciplínach sa teda intenzívne používa ako nástroj *diferenciálny a integrálny počet*.

Za aplikáciami diferenciálneho a integrálneho počtu je vždy nejaká *názorná* (lokálna) *predstava*. Ukazuje sa, že tieto názorné predstavy sú v oboch disciplínach často veľmi podobné a myšlienky z jednej disciplíny nachádzajú skoro vždy svoj odraz v druhej. Diferenciálna geometria umožňuje tieto názorné predstavy kvantitatívne uchopiť a netriviálne s nimi narábať, a preto je pre fyziku, ktorá samozrejme tiež potrebuje mať tieto predstavy kvantitatívne uchopené, taká nepostrádateľná. Uchopenie obyčajných dvoj- a trojrozmerných euklidovských priestorov však bol len začiatok. Potrebné priestory totiž môžu byť (v geometrii aj vo fyzike) veľmi rôznorodé.

2. Jej typický výskyt v elementárnej fyzike

Už v kinematike hmotných bodov v bežnom dvoj- a trojrozmernom euklidovskom priestore sa dá kadečo robiť pomocou diferenciálnej geometrie (krivky a plochy, Frenetove vzorce, ...). V dvoch dôležitých pojmoch z elementárnej mechaniky je ale navyše nenápadne skrytý zárodok kľúčových pojmov modernej diferenciálnej geometrie na varietách. Konkrétne pojem (okamžitej) *rýchlosti* je vzorom pre zavedenie pojmu *vektor na variete* (čo, ako sa ukazuje, nie je celkom triviálne). Pojem (okamžitého) *zrýchlenia* si zasa vyžaduje porovnávanie (odčítanie od seba) vektorov rýchlosti v blízkych bodoch a to má zase vo všeobecnom prípade na starosti lineárna (alebo afinná) *konexia (*zavádza pojmy ako *paralelný prenos*, *krivosť*, *kovariantná derivácia* a pod.; vyústením je tiež teória *kalibračných polí).*

3. Jej typické použitie vo „vyššej" (teoretickej) fyzike

Moderná „vyššia" teoretická fyzika je už potom pre použitie diferenciálnej geometrie hotovým eldorádom. Uvádzam len zopár typických oblastí:

- priestor, v ktorom „naozaj žijeme"; od Einsteina ním je štvorrozmerný *zakrivený časopriestor* (pseudoriemannovská varieta); dnes sa úplne vážne uvažujú aj viacrozmerné (desať, jedenásť, ...) priestory,
- *konfiguračný priestor* v teoretickej mechanike je n-rozmerným riemannovským priestorom (metrický tenzor mu dodáva kinetická energia sústavy),
- *fázový priestor* v teoretickej mechanike je 2n-rozmernou *symplektickou* varietou (bod v ňom nesie okrem polohy informáciu aj o rýchlosti; symplektická štruktúra v ňom zavádza *anti*symetický „skalárny súčin" a je v pozadí za *Poissonovou zátvorkou*),
- priestor stavov v kvantovej mechanike je tvorený *lúčmi* v Hilbertovom priestore; vzniká tak *projektívny Hilbertov priestor* so svojou špecifickou geometriou,
- v uvažovaných priestoroch často pôsobia *Lieove grupy;* ak zachovávajú relevantnú štruktúru, ide o *symetrie* (napríklad pre riemannovskú štruktúru to sú *izometrie*); odklon od symetrie meria *Lieova derivácia,*
- *princíp extremálneho účinku* - pohybové rovnice sa odvodia ako podmienka extrému vhodného funkcionálu (*účinku*); pri jeho výbere hrajú veľmi často rozhodujúcu úlohu práve geometrické argumenty.