

## VODA V POHYBE

### Potrebujete milión dolárov?

Aby som nezabudol, vybavím túto vec radšej hneď na začiatku: mám pre vás tip, ako zarobiť rovný *milión dolárov*. Úplne legálne, bez najmenšieho rizika, stačí pohnúť rozumom. Dávajte dobrý pozor a radšej nikomu ani muk. (Chvíľu budem pre istotu písať stíšeným hlasom.)

Tak najprv zjídete na stránku Clayovho matematického ústavu (Clay Mathematics Institute). Tam si prečítate zadania tzv. *miléniových* úloh. Miléniové znamená, ako ste si správne domysleli, že sú to úlohy pre nové tisícročie (v tom minulom tisícročí sa akosi nestihli). Ale tie úlohy sú zároveň aj *miliónové*. Ak vyriešite ktorúkoľvek z nich, spomínaný milión je váš. Dovedna je úloh sedem, za každú milión. Ale nemajme hneď veľké oči. Nejde o detské zábavky. Ba pri niektorých z nich je neprofesionálovi veľmi ťažké čo i len vysvetliť, o čo tam vôbec ide. Ak ste čítali článok Martina Mojžiša z .týždňa ???, spomeniete si na rozruch, ktorý vyvolal ruský matematik G.Perelman, keď zverejnil svoje riešenie *jednej* z nich (a donútil ľudí rozmýšľať o kadečom, keď o ten milión vôbec nejavil záujem).

Prečo vás teda nahovárať na takú ťažkú vec? Lebo jedna zo šiestich úloh, ktoré ešte zostali, možno napokon nebude až taká ťažká, ako si to jej zadávatelia mysleli. Na tú sa sústreďte. Tam je ten milión možno aj na dosah. Že ktorá z nich to je? Volá sa *Navierove-Stokesove rovnice*. A prečo si myslím, že by mala byť ľahšia? Pozrite si dobre v oficiálnom zadaní úlohy, čo vlastne tieto rovnice opisujú. Už je to jasné, však? – opisujú obyčajné *prúdenie vody*. No a to predsa nemôže byť až také ťažké! Ved' všetci sme už videli tiecť vodu, niektorí z nás dokonca aj viackrát. Čo už môže byť zložité na tečení vody? Dajte akýkoľvek problém o prúdení vody, chvíľu porozmýšľam, predstavím si to a vzápätí vyklopím jeho riešenie!

Alebo ... žeby nie? Hm. Ak niekto ponúka milión dolárov za čosi okolo rovníc, ktoré opisujú tečenie obyčajnej vody, tak sú len dve možnosti. Buď nám ten dobrák chce jednoducho ten milión veľmi dať a našiel si na to takúto priehľadnú zámienku (zima, zima). Alebo (teplo, teplo) to tečenie obyčajnej vody nemusí byť také jednoduché, ako sme si to doteraz predstavovali. A ukazuje sa, že je to naozaj tak. S prúdením vody môže byť spojená zložitá a dodnes zďaleka nie celkom pochopená fyzika. A z pohľadu matematiky sú zasa s rovnicami opisujúcimi tečenie vody tiež spojené nečakané ťažkosti (miliónovou úlohou je napodiv veľmi zhruba povedané dôkaz *existencie* riešenia).

### Navierove-Stokesove rovnice

Navierove-Stokesove rovnice sú na scéne už vyše poldruha storočia. Čo vlastne hovoria? Ak si pamätáme zo strednej školy zmysel *Newtonových* pohybových rovníc, podľa ktorých sila spôsobuje zrýchlenie, nie je to ťažké pochopiť. Hovoria to isté, ale osobitne pre *každú kvapku* vody. Voda sa teda chápe ako súbor obrovského počtu maličkých kvapiek. (Aj more je len súbor kvapiek.) Sú naukladané bez medzier tesne vedľa seba (hm, teda takých hranatých kvapiek). Na každú kvapku teraz pôsobia dve sily. Jedna sa volá objemová (väčšinou ide o gravitačnú silu). Tá je jednoduchá. Zložitejšia je ale druhá sila, ktorá sa volá plošná. Ako napovedá jej názov, pôsobí na kvapku cez jej okraj (plochu). Jej pôvodcom sú (cez priamy dotyk) *susedné* kvapky. A plošná sila sa ešte skladá z dvoch častí. Jednoduchšej, ktorá úzko súvisí s tlakom a zložitejšej, ktorej pôvod sa dá zhruba pripísať šmýkaniu sa kvapiek svojimi povrchmi o seba. Tá nastupuje vtedy, keď sa berie vážne aj *viskozita* (vnútorné trenie) vody.

Ak počítame, ako letí vyhodený kameň, máme jeden objekt (kameň) a naň pôsobí jedna sila (gravitačná). Vec je jednoduchá. Ak chceme ale počítať pohyb (prúdenie) vody, musíme vlastne akoby počítať, ako „letí“ každá jej kvapka pod vplyvom jednak gravitačnej sily (čo by bolo ľahké), ale navyše aj pod vplyvom síl od všetkých susedných kvapiek, ktoré tlačia a trú sa o tú našu. Lenže na ne zase tlačia a trú sa o ne jej susedné kvapky (vrátane tej našej), na ktoré zase tlačia ... A keď si teraz predstavíme, koľko tých kvapiek, pre ktoré to máme zrátať, vlastne je (pozorný čitateľ si pamätá, že ich je presne obrovský počet), tak zistíme, že sa tu na nás valí niečo hádam ešte zložitejšie, ako správne vyplnenie tlačív na daňové priznanie a zdravotné odvody dovedna. A preto sme napokon celkom radi, že *toto všetko* za nás deň a noc strážia Navierove-Stokesove rovnice. V každom ich riešení je celá táto zložitá bilancia urobená bezchybne. Sú efektívou demonštráciou sily „nelineárnych parciálnych diferenciálnych rovníc“. Hádam už uznáme, že na tej ich miléniovosti niečo bude. A asi nás už ani neprekvapí, keď sa z nich niekedy vydoluje aj niečo, čo by sme vopred vôbec nečakali.

### Suchá a mokrá voda

Táto zábavná metafora, delenie vody na „suchú“ a „mokrú“, pochádza od Johna von Neumanna. Zaoberaním sa suchou vodou nazval štúdium prúdenia, pri ktorom sa zanedbáva viskozita, zatiaľ čo poctivou – mokrou – vodou sa vraj zaoberajú až tí, ktorí riešia úplne Navierove-Stokesove rovnice. Toto delenie sa dá nájsť aj vo „feynmanovskom“ kurze všeobecnej fyziky. Je to veľmi zaujímavé čítanie, nájdete ho na konci 4. dielu slovenského vydania. Rovnice *bez* viskózneho člena sa volajú *Eulerove* rovnice. Zanedbanie viskozity situáciu zjednodušuje a pritom veľa zaujímavej fyziky ponecháva (nehaňte Eulera). Napríklad už v polovici 19. storočia z Eulerových rovníc majstrovsky „vytiahol“ viaceré zákonitosti platné pre zložitú *vírové* prúdenie Hermann von Helmholtz. [Aj u nás sa, mimochodom, v tejto oblasti čulo bádalo. V laboratóriách tam niekde okolo Levoče získal náš ľud sériou dômyselných experimentov a bystrých pozorovaní cenné poznatky o vírovom tečení vody a svoje výsledky publikoval vo forme ľudovej piesne. Neskôr na to nadviazal prof. Eugen Suchoň monografiou Krútnava.]

### Turbulencia

Víry nie sú jednoduché, ale *oveľa* ťažším orieškom je *turbulencia*. Ukazuje sa, že „kvalita“ prúdenia sa dá charakterizovať jedným bezrozmerným číslom, tzv. *Reynoldsovým* číslom  $R$ . Experimenty ukazujú, že keď je toto číslo pomerne malé, prúdenie je „slušné“ – *laminárne*. Akoby sa po sebe šúchali jednotlivé susedné „blanky“, čiže laminy. Keď však  $R$  zvyšujeme, čo sa dosiahne napríklad rýchlejšim tečením, slušné prúdenie prestane byť „stabilné“ a postupne prechádza do zložitého „chaotického“ režimu, pri ktorom sa jeho charakteristiky (napríklad rýchlosť) menia na čoraz kratších škálach (vzniknú najprv väčšie „víry“, z nich postupne menšie, ešte menšie, ...). To je v praxi často nežiadúce (zvyšuje sa odpor pri obtekaní či plávaní, lebo časť energie sa spotrebuje na tvorbu „zbytočných“ štruktúr). Ale môže to byť aj užitočné (vo výmenníkoch tepla, v chemických reaktoroch). Turbulencia je tu a treba ju čo najlepšie pochopiť. Atakuje sa naozaj zložitou matematikou a komplikovanými experimentmi, ale aj počítačovými simuláciami (existuje vedná oblasť známa ako CDF, Computational Fluid Dynamics).

A čo si myslel o turbulencii jeden z pionierov jej matematického opisu, A.N.Kolmogorov? V známej učebnici hydrodynamiky (Landau-Lifšic 6) nájdeme pod číslom 34.21 takúto (Kolmogorovovu) rovnicu: na ľavej strane je  $Brrr$  a na pravej (okrem iného)  $Brr$ . Úprimné, stručné. A že vraj v rovnicach nie sú emócie ...

## Aj ty, vzduch?

Navierove-Stokesove rovnice opisujú aj pohyb *plynov*, kde sa veci ešte viac komplikujú, lebo plyny sú navyše aj *stlačiteľné*. Sú to preto základné rovnice napríklad pre meteorológov, ale aj návrhárov áut či lietadiel. Prečo o tom nebudeme hovoriť? Sú na to dva dôvody. Po prvé, beží cyklus *o vode*. A po druhé (hlavný dôvod), na ten milión sa *stačí* (pozrite si zadanie) zaoberať nestlačiteľnými tekutinami. Treba mať mieru, milión stačí.