Diferenciálna geometria ako kľúčový nástroj teoretickej fyziky

Marián Fecko

Katedra teoretickej fyziky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského
Bratislava
fecko@fmph.uniba.sk

Seminár „Aká si mi krásna”,
UMB Banská Bystrica, 9. apríla 2019

Povieme si:

- Čím sa zaoberá diferenciálna geometria?

Povieme si:

- Čím sa zaoberá diferenciálna geometria?
- Aká je hlavná myšlienka za pojmom hladká varieta?

Povieme si:

- Čím sa zaoberá diferenciálna geometria?
- Aká je hlavná myšlienka za pojmom hladká varieta?
- Máme hladké variety aj vo fyzike?

Povieme si:

- Čím sa zaoberá diferenciálna geometria?
- Aká je hlavná myšlienka za pojmom hladká varieta?
- Máme hladké variety aj vo fyzike?
- Aké sú najbežnejšie objekty na „prázdnej" variete?

Povieme si:

- Čím sa zaoberá diferenciálna geometria?
- Aká je hlavná myšlienka za pojmom hladká varieta?
- Máme hladké variety aj vo fyzike?
- Aké sú najbežnejšie objekty na „prázdnej” variete?
- Aké sú bežné štruktúry, ktoré sa na varietu dodávajú navyše?

Povieme si:

- Čím sa zaoberá diferenciálna geometria?
- Aká je hlavná myšlienka za pojmom hladká varieta?
- Máme hladké variety aj vo fyzike?
- Aké sú najbežnejšie objekty na „prázdnej” variete?
- Aké sú bežné štruktúry, ktoré sa na varietu dodávajú navyše?
- Aké štruktúry potrebujeme do mechaniky?

Povieme si:

- Čím sa zaoberá diferenciálna geometria?
- Aká je hlavná myšlienka za pojmom hladká varieta?
- Máme hladké variety aj vo fyzike?
- Aké sú najbežnejšie objekty na „prázdnej" variete?
- Aké sú bežné štruktúry, ktoré sa na varietu dodávajú navyše?
- Aké štruktúry potrebujeme do mechaniky?
- Aké štruktúry potrebujeme do teórie relativity?

Povieme si:

- Čím sa zaoberá diferenciálna geometria?
- Aká je hlavná myšlienka za pojmom hladká varieta?
- Máme hladké variety aj vo fyzike?
- Aké sú najbežnejšie objekty na „prázdnej" variete?
- Aké sú bežné štruktúry, ktoré sa na varietu dodávajú navyše?
- Aké štruktúry potrebujeme do mechaniky?
- Aké štruktúry potrebujeme do teórie relativity?
- Zídu sa niekde vo fyzike aj ďalšie geometrické štruktúry?

Obsah

Ihrisko diferenciálnej geometrie: hladká varieta.

Úvodný diferenciálny a integrálny počet sa deje v (oblastiach v) $\mathbb{R}^n$.

Hladká varieta je prirodzené zovšeobecnenie $\mathbb{R}^n$.
Lokálne je rovnaká ako $\mathbb{R}^n$, ale globálne byť nemusí.
Vďaka tomu, že lokálne je, dá sa aj na nej zmysluplne rozvíjať diferenciálny a integrálny počet.

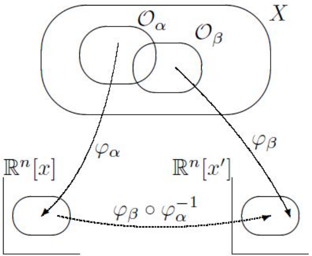
Čo je fajn, lebo pomocou neho sa dá študovať aj na nej diferenciálna geometria
(= geometria pomocou diferenciálneho počtu).

Hladká varieta - mapy (lokálne súradnice)

n-rozmerná varieta sa dá chápať ako zlepená z niekoľkých kúskov $\mathbb{R}^n$.

Formalizmus: pojmy mapa (= lokálne súradnice), atlas, zámena súradníc. Urobiť z niečoho varietu znamená zaviesť tam atlas.

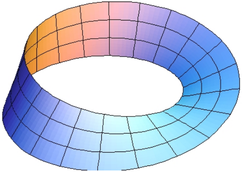
Samotné $\mathbb{R}^n$ je tiež varieta :-)
(stačí na nej 1 mapa daná identickým zobrazením).



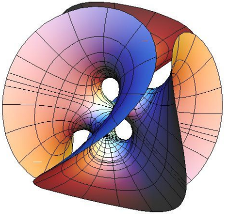
Mapy a atlas.

Príklady 2d-variet

Sféra.



Möbiov list.



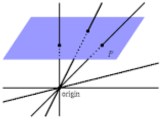
Niečo zložité.

Príklad n-rozmernej variety (1)

Projektívny priestor $\mathbb{R}P^n$
(n-rozmerný, reálny)
má ako body priamky,
ktoré prechádzajú cez stred v $\mathbb{R}^{n+1}$.

Na obrázku je zavedenie jednej z máp.

Ak sa takýchto máp urobí $(n+1)$
(za každú z osí v $\mathbb{R}^{n+1}$ jedna),
získa sa atlas a z $\mathbb{R}P^n$ sa stane
hladká n-rozmerná varieta.



Projektívny priestor $\mathbb{R}P^n$.

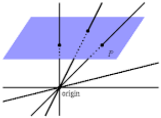
Príklad n-rozmernej variety (2)

Projektívny priestor $\mathbb{C}P^n$
(n-rozmerný, komplexný)
má ako body komplexné priamky,
ktoré prechádzajú cez stred v $\mathbb{C}^{n+1}$.

Mapy - podobne ako v reálnom prípade.

Je to $2n$-rozmerná (reálna) varieta.

Vo fyzike: stavy $(n+1)$-hladinovej sústavy v kvantovej mechanike $\leftrightarrow$ body $\mathbb{C}P^n$



Projektívny priestor $\mathbb{C}P^n$.

Konštrukcia variety pomocou (holonómnych) väzieb

Jedna z konštrukcií variet vyzerá takto:
máme niekoľko ($= k$; vhodných) funkcií v $\mathbb{R}^n$.
Uvažujeme (len) tie body z $\mathbb{R}^n$, ktoré vynulujú tie funkcie:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x^1, \dots x^n) &= 0 \\ \Phi_2(x^1, \dots x^n) &= 0 \\ &\dots \\ \Phi_k(x^1, \dots x^n) &= 0 \end{aligned}$$

Ukazuje sa, že tak dostaneme $(n-k)$-rozmernú varietu.

Príklad - rovinné kyvadlo

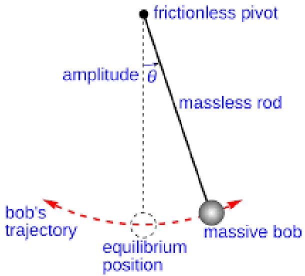
Ak má kyvadlo dĺžku l a kýva v rovine xz, tak možné polohy jeho závažia sú obmedzené väzbami

$$\begin{aligned} \Phi_1(x,y,z) &= 0 \\ \Phi_2(x,y,z) &= 0 \end{aligned}$$

pre

$$\begin{aligned} \Phi_1(x,y,z) &:= y \\ \Phi_2(x,y,z) &:= x^2+z^2-l^2 \end{aligned}$$

Takže konfiguračný priestor kyvadla je hladká $1d$-varieta. Je to kružnica S^1.



Rovinné kyvadlo.

Príklad - termodynamika plynu

Stavová rovnica ideálneho plynu je

$$pV = RT$$

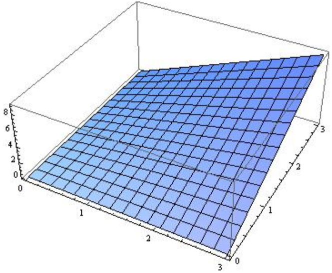
To je

$$\Phi(p, V, T) = 0$$

pre

$$\Phi(p, V, T) = pV - RT$$

Takže priestor jeho stavov je hladká $2d$-varieta.



$2d$-plocha stavov plynu ($pV = RT$)

Hladká varieta - jej základná výbava

Hladký atlas je základnou výbavou,
s ktorou sa variety v obchodoch predávajú.
Bez neho to (podľa definície) hladká varieta nie je.

Náročnejší zákazníci si k nej zvyknú dokúpiť dodatočnú štruktúru.
Možností je viacero, napr.

- metrický tenzor,
- poissonovská či symplektická štruktúra,
- lineárna konexia,
- hladká distribúcia,
- pôsobenie grupy, atď.

Výber závisí od toho, čo presne chceme na tej variete robiť.

Čo sa dá robiť už so základnou výbavou

Už základná výbava umožňuje robiť spústu zaujímavých a dôležitých vecí:

- pracovať s krivkami a funkciami
- počítať smerové derivácie funkcií
- zaviesť tenzorové polia ľubovoľného typu
- počítať ich Lieovu deriváciu
- špeciálne zaviesť diferenciálne formy
- a počítať ich vonkajšiu deriváciu
- integrovať (integrály „druhého druhu”)
- využívať pri tom všeobecnú Stokesovu vetu (rovnosť integrálov susedných rozmerov)
- atď.

Kúpiť už aj varietu v základnej výbave sa (pre začiatok) oplatí.

Čo sa ale už nedá robiť len so základnou výbavou

Len základná výbava neumožňuje robiť:
- počítať dĺžky kriviek (treba metrický tenzor)
- počítať uhly medzi vektormi (metrický tenzor)
- prenášať (paralelne) tenzory po krivkách (konexia)
- počítať kovariantné derivácie tenzorových polí (konexia)
- počítať zrýchlenie pohybu po krivke (konexia)
- zaviesť pojmy rovná čiara a rovnomerný priamočiary pohyb
- počítať integrály prvého druhu (forma objemu)
- efektívne opisovať symetrie (pôsobenie grupy)
- študovať hamiltonovské sústavy (poissonovská štruktúra)
- atď.

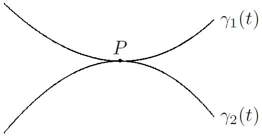
Pre ne musíme zainvestovať aj do dodatočnej štruktúry.

Vektor v bode P na variete M

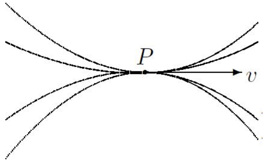
Nech M je n-rozmerná varieta.

V každom jej bode P
je kanonicky definovaný
n-rozmerný vektorový priestor, $T_P M$.

Jeho prvky, vektory v bode P,
sú triedy ekvivalencie kriviek,
pričom ekvivalenciou je
„dotýkať sa v bode P”.



krivky γ_1 a γ_2 sa dotýkajú



trieda ekvivalencie $[\gamma] \equiv v$

Vektorové a tenzorové polia na variete

Zaviesť pojem vektor v bode $P \in M$ bolo náročnejšie, ako by sme asi čakali. Výrazný posun ďalej už ale potom ide ľahko:

Keď máme vektory, štandardná (multi)lineárna algebra dáva kovektory (prvky duálneho priestoru) a tenzory typu $\binom{p}{q}$ v bode P (multilineárne zobrazenia q vektorov a p kovektorov do $\mathbb{R}$).

Ak potom máme takýto objekt v každom bode variety M, hovoríme tomu pole takýchto objektov (napríklad kovektorové pole na M).

Ak ide o tenzorové pole g typu $\binom{0}{2}$ (bilineárna forma) a je navyše symetrické a nedegenerované, volá sa metrický tenzor na variete M. Výraz $g(U, V)$ sa interpretuje ako skalárny súčin U a V.

Diferenciálne formy - špeciálne tenzorové polia (1)

p-forma α na M je tenzorové pole

- typu $\binom{0}{p}$ (argumenty: p vektorov; $\alpha(v_1, \dots, v_p)$)
- úplne antisymetrické

$$\alpha(\dots u, \dots, v, \dots) = -\alpha(\dots v, \dots, u, \dots)$$

Dajú sa prirodzene integrovať na M

$$\int_c \alpha \qquad\qquad \alpha \in \Omega^p(M), \quad c \in C_p(M)$$

V istom zmysle je každý (bežný, „p-násobný") integrál integrálom nejakej diferenciálnej p-formy
(t.j. diferenciálna forma je „to, čo je za znakom integrálu").

Diferenciálne formy - špeciálne tenzorové polia (2)

Dajú sa aj prirodzene derivovať spôsobom špecifickým pre formy:

$$d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M) \qquad \text{vonkajšia derivácia}$$

čiže

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(M)$$

Súvis tejto derivácie a integrálu vyjadruje všeobecná

$$\int_{\partial c} \alpha = \int_c d\alpha \qquad \text{Stokesova veta}$$

kde ∂c je hranica (reťazca) c.

Niektoré klasické príklady Stokesovej vety (1)

Tie, kde netreba g (vystupujú integrály druhého druhu):

$$\begin{aligned}
\int_a^b f'(x)dx &= f(b) - f(a) && \text{Newton - Leibniz} \\
\int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx &= [fg]_a^b && \text{per partes} \\
0 &= \oint_{\partial S} f(z)dz && \text{Cauchyho veta} \\
\int_S (\partial_x g - \partial_y f)dxdy &= \oint_{\partial S} fdx + gdy && \text{Greenova veta}
\end{aligned}$$

Niektoré klasické príklady Stokesovej vety (2)

Tie, kde treba g (vystupujú integrály prvého druhu):

$$
\begin{array}{rcll}
\int_D (\mathrm{div}\, V)\, \sqrt{|g|} d^n x & = & \oint_{\partial D} V^i dS_i & \text{Gaussova veta} \\
\int_D (\nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v)\, \sqrt{|g|} d^n x & = & \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n} dS & \text{Greenova identita} \\
\int_S (\mathrm{rot}\, \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} & = & \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} & \text{Stokesova veta}
\end{array}
$$

Vektorová analýza - pohľad cez formy v E^3

Ak $(M, g) = E^3$, existujú (len) p-formy pre p=0,1,2,3.
Dajú sa parametrizovať (= existujú kanonické izomorfizmy)
cez buď skalárne alebo vektorové polia (netreba nič viac).
Preto d indukuje tri diferenciálne operácie.
Poznáme ich ako grad, rot a div.

$$
\begin{tikzcd}
\Omega^0(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \Omega^1(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\sharp"] & \Omega^2(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\sharp *"] & \Omega^3(M) \arrow[d, "*"] \\
\mathcal{F}(M) \arrow[r, "\mathrm{grad}"'] & \mathfrak{X}(M) \arrow[r, "\mathrm{rot}"'] & \mathfrak{X}(M) \arrow[r, "\mathrm{div}"'] & \mathcal{F}(M)
\end{tikzcd}
$$

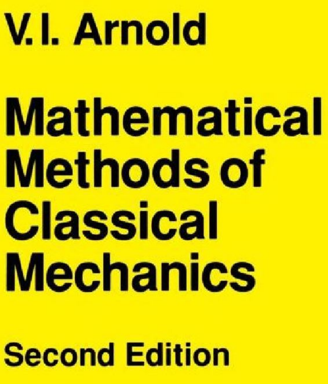
Klasická mechanika - aréna a zdroj mnohých štruktúr

Klasická mechanika zohrala historicky dôležitú úlohu v rozvoji mnohých matematických disciplín.

Diferenciálnej geometrie obzvlášť.

Je to tak doteraz.

Stačí sa pozrieť do Arnoľdovej knihy.



Vyše 500 strán.
Celkom husté :-)

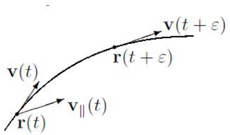
Newtonova mechanika a rovnomerný priamočiary pohyb

Prvý Newtonov zákon:
Bez sily rovnomerne priamočiaro.

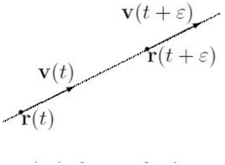
Rovnomerne priamočiaro
= s nulovým zrýchlením
= po geodetike:

$$a \equiv \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$$

Prvý Newtonov zákon potrebuje
lineárnu konexiu, (M, ∇).



zrýchlenie



rovnomerne priamočiaro

Geodetiky na zemeguli

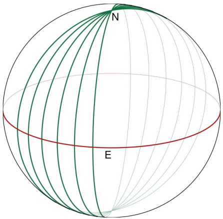
Ak pláva loď po oceáne tak, že

- motor beží rovnomerne
- kormidlo je nastavené rovno

kapitán vníma, že loď ide rovnomerne priamočiaro (dopredu).

Zdá sa mu, že v 3D priestore.

Kamera vo vesmíre odhalí, že po geodetike na sfére.



geodetiky na zemeguli

Kineticka energia a metricky tenzor

Kinetická energia sústavy N hmotných bodov (stredná škola) je

$$T = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^2 + \cdots + \frac{1}{2} m_N \mathbf{v}_N^2$$

To sa dá zapísať abstraktne (vysoká škola) ako

$$T = \frac{1}{2} h(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$$

pre krivku $\gamma(t) = (\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t))$ na variete $\mathbb{R}^{3N}$.
Poučenie:
Pojem kinetickej energie si vyžaduje metrický tenzor (to h).
Sme nevyhnutne na pôde Riemannovej geometrie, $(\mathbb{R}^{3N}, h)$.

Lagrangeove rovnice a indukovaný metrický tenzor

Lagrangeove rovnice $$\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} = 0$$

lagranžián $$L = T - U \equiv \frac{1}{2} g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) - U$$

Sú definované na konfiguračnom priestore $(M, g) \subset (\mathbb{R}^{3N}, h)$.
Metrický tenzor g na M je indukovaný z $(\mathbb{R}^{3N}, h)$.
Sme opäť na pôde Riemannovej geometrie, (M, g).

Hamiltonove rovnice a poissonovská štruktúra

Hamiltonove rovnice $$\dot{q}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a} \qquad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q^a}$$

hamiltonián $$H = T + U$$

Sú definované na fázovom priestore,
čo je všeobecne poissonovská varieta $(M, \mathcal{P})$.
Geometrický zápis: krivka $\gamma(t) \leftrightarrow (q^a(t), p_a(t))$ spĺňa

$$\dot{\gamma} = \mathcal{P}(dH, \ \cdot \ )$$

($\mathcal{P}$ = Poissonov tenzor je bivektor, t.j. $\mathcal{P}^{ij} = -\mathcal{P}^{ji}$.)
Študuje to Poissonova geomeria.

Hamiltonove rovnice a symplektická štruktúra

Ak je Poissonov tenzor nedegenerovaný (t.j. $\det \mathcal{P}^{ij} \neq 0$), dá sa „invertovať", t.j. definovať tenzor ω, tzv. symplektická forma

$$\omega \circ \mathcal{P} = -\hat{1} \qquad \text{t.j.} \qquad \omega_{ik}\mathcal{P}^{kj} = -\delta_i^j$$

Je to uzavretá ($d\omega = 0$) nedegenerovaná ($\det \omega_{ij} \neq 0$) 2-forma. Pomocou nej sa Hamiltonove rovnice zapíšu (geometricky) v tvare

$$i_{\dot{\gamma}}\omega = -dH$$

Fázový priestor je vtedy symplektická varieta.
Študuje to symplektická geomeria.

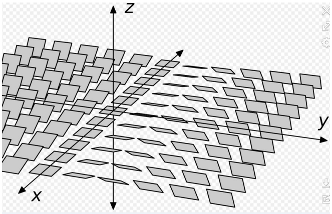
Neholonómna mechanika

Neholonómne väzby (Frobenius 1877).
(Typicky: gúľanie telesa A po B.)

Tie konfiguračný priestor nezmenšujú
(ako to robia holonómne),
ale komplikujú v ňom pohyb.

Dnes aj v teórii riadenia a robotike.

Dodatočná matematická štruktúra:
neintegrovateľná distribúcia $(M, \mathcal{D})$.
(v každom $x \in M$ je podpriestor $\mathcal{D}_x$).
Smie sa ísť len do toho podpriestoru.



Príklad: väzba $\dot{z} = y\dot{x}$.
Distribúcia v $\mathbb{R}^3$
daná 1-formou $dz - ydx$:
$\mathcal{D} = \mathrm{Span}\,\{e_1, e_2\}$, kde
$e_1 = e_x + ye_z$, $e_2 = e_y$

Hydrodynamika ideálnej tekutiny

Riadi sa Eulerovou rovnicou

$$\rho(\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v}) = -\boldsymbol{\nabla} p - \rho \boldsymbol{\nabla} \Phi$$

Ukazuje sa, že tečenie nestlačiteľnej kvapaliny
sa dá chápať (V.I.Arnold 1966) ako pohyb po geodetike
na (nekonečno-rozmernej) grupe difeomorfizmov Diff (M)
priestoru (variety M), v ktorom to tečie.

(O technických nuansoch tohto prístupu
som kedysi dávno počul hovoriť *Petra Maličkého*
na seminári Pala Brunovského v Bratislave :-)

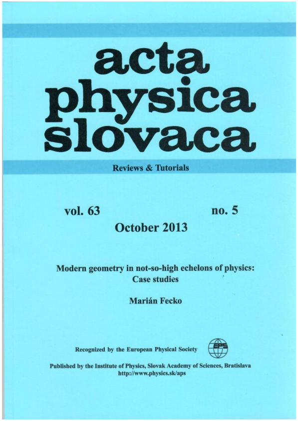
Hydrodynamika barotrópnej ideálnej tekutiny

Jej stacionárny barotrópny prípad $(\partial_t(\dots) = 0,\ p = p(\rho))$ sa dá prepísať do jazyka diferenciálnych foriem takto:

$$i_v d\tilde{v} = -d\mathcal{B} \qquad \mathcal{B} = \text{Bernoulliho funkcia}$$

Odtiaľ *veľmi ľahko* vidno klasické dôsledky:

- 3 varianty Bernoulliho rovnice,
- Kelvinovu vetu o cirkulácii a
- Helmholtzove vety o víroch.



Termodynamika a Pfaffove formy

Študujeme termodynamické procesy $\leftrightarrow$ krivky v priestore so súradnicami $(x^1, \dots, x^n, T)$. Napr. plyn $(x^1 = V, T)$.
Práca a teplo: dané krivkovými integrálmi (2.druhu)

$$Q = \int_\gamma đQ \qquad A = \int_\gamma đA \qquad đA = X_i dx^i$$

Historický jazyk: Pfaffove formy (1810), (ne)úplné diferenciály.
Súčasný jazyk: 1-formy, všeobecné a exaktné 1-formy ($\alpha = df$)

Adiabatický proces

Adiabatický proces $\leftrightarrow$ taká krivka $\gamma(t)$, na ktorej je

$$\langle đQ, \dot{\gamma} \rangle = 0 \qquad \text{nulová krivka 1-formy } đQ$$

Sústava je pri takom procese tepelne izolovaná:

$$Q = \int_\gamma đQ \equiv \int_{t_1}^{t_2} \langle đQ, \dot{\gamma} \rangle dt = 0$$

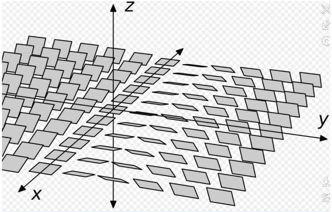
Adiabatická distribúcia

Podmienka $\langle đQ, v\rangle = 0$ vydeľuje na variete stavov distribúciu

$$\mathcal{D}_x = \mathrm{Ker}\, đQ|_x$$

(pojem bol v neholonómnej mechanike).

Adiabatický proces:
ideme vždy v smere toho podpriestoru.



Opakovanie:
Distribúcia v $\mathbb{R}^3$
daná 1-formou $dz - y dx$:
$e_1 = \partial_x + y\partial_z, \; e_2 = \partial_y$
$\mathcal{D} = \mathrm{Span}\,\{e_1, e_2\}$

Carathéodoryho formulácia 2.vety termodynamickej

Carathéodory (1909): V ľubovoľne malom okolí každého bodu existujú body, do ktorých sa nedá dostať adiabatickým procesom.

Ekvivalentné tvrdenie: Tá distribúcia je integrovateľná (existujú integrálne plochy; nedá sa adiabaticky opustiť daná plocha).

Ekvivalentné tvrdenie: $đQ = TdS$ pre nejaké funkcie T, S (tie integrálne plochy: $S =$ konšt. (entropia = konšt.)).

Adiabatický proces = izoentropický proces (entropia sa nemení).

Špeciálna teória relativity

Albert Einstein 1905: radikálna revízia pojmov čas a priestor.

Neexistuje (newtonovský) absolútny čas, relativita súčasnosti, platí iné skladanie rýchlostí, atď. atď.

Hermann Minkowski 1909: 4-rozmerný časo-priestor

“Von Stund’ an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren.“ Raum und Zeit, (publ. 1909)

Voľne: .. samotný priestor a samotný čas sú odsúdené na zánik a skutočnou realitou je len isté spojenie týchto dvoch pojmov.

Minkowského priestor (1)

V dnešnom jazyku: Pseudo-riemannovská (plochá) varieta.

Teda ako varieta to je „obyčajné" $\mathbb{R}^4$ (súradnice (t, x, y, z)), ale metrický tenzor na nej nie je euklidovský, t.j. „súčet kvadrátov" ale pseudo-euklidovský, t.j. „rozdiel kvadrátov"

$$dl^2 = (dt)^2 - ((dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2)$$

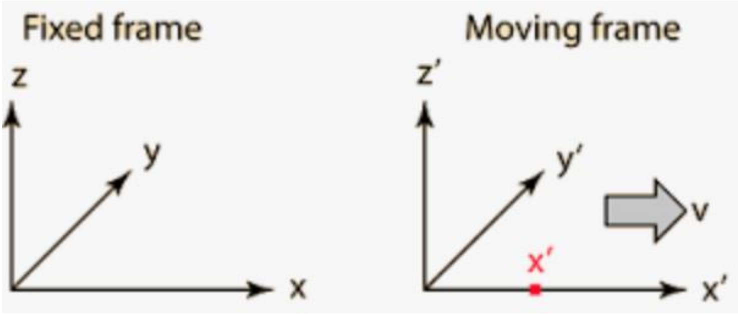
Alebo: Skalárny súčin dvoch štvor-vektorov je daný indefinitnou symetrickou bilineárnou formou

$$\eta(u, v) = u^0 v^0 - (u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3)$$

Matematická myšlienka (aj na vtedajšie časy) úplne jednoduchá, výhody tohto prístupu ohromné.

Pohybujúci sa pozorovateľ

Študujeme prechod od pôvodného inerciálneho pozorovateľa k pozorovateľovi, ktorý sa pohybuje rovnomerne (tu rýchlosťou v v smere osi x).



Galileiho a Lorentzove transformácie

Pred teóriou relativity: samozrejmé, že Galileiho transformácie:

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

Einstein zdôvodnil, že správne treba Lorentzove transformácie:

$$\begin{aligned} t' &= \frac{(t - vx)}{\sqrt{1-v^2}} \\ x' &= \frac{(x - vt)}{\sqrt{1-v^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

Kľúčové transformácie špeciálnej teórie relativity.

Minkowského priestor veci zjednodušuje

Označme súradnice v Minkowského priestore takto:

$$(t, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv x^\mu \ , \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

Potom sa ľahko overí, že Lorentzove transformácie sú také lineárne transformácie súradníc

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

ktorých matica Λ je „ortogonálna” v zmysle Minkowského metriky

$$\eta(\Lambda u, \Lambda v) = \eta(u, v)$$

To je zázrak Minkowského nápadu:

Niečo, čo je v „rozdelenom” $1 + 3$ svete pomerne zložité
je v 4-rozmernom celku zrazu veľmi jednoduché.

Tento jav je v špeciálnej teórii relativity pravidlo, nie výnimka.

Všeobecná teória relativity

Albert Einstein 1915:
ešte radikálnejšia revízia pojmov čas a priestor.
Princíp: hmota zakrivuje časo-priestor
a zakrivenie časo-priestoru vnímame ako gravitačnú silu.

4-rozmerný časo-priestor stále tu, ale zložitejší.
Nie je „zhora daný” (ako bol Minkowského), ale je to všeobecná pseudo-riemannovská varieta (M, g), ktorej geometria (topológia aj metrický tenzor g) sa počíta z Einsteinových rovníc poľa

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = const.\, T_{\mu\nu}$$

Výraz vľavo opisuje „geometriu”, výraz vpravo opisuje „hmotu”.

Geometria pre teóriu relativity

V čase budovania všeobecnej teórie relativity bola už známa:

Krivosť dvojrozmerných plôch - Carl Friedrich Gauss (1827)

Krivosť viacrozmerných variet - Berndhard Riemann (1854)

Ďalšie rozpracovanie (pred 1900) - talianska škola:

Gregorio Ricci-Curbastro („Ricci calculus" = tenzorová analýza),
Tullio Levi-Civita

Všetky detaily „krivosti" sú v

Riemannovom tenzore (krivosti) $\quad R^i{}_{jkl}$

Postupne menej v

Ricciho tenzore $\quad R_{ij} = R^k{}_{ikj}$

skalárnej krivosti $\quad R = R^i{}_i = R^{ki}{}_{ki}$

Elektromagnetizmus: Maxwellove rovnice (1861)

Jazyk vektorovej analýzy:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} &= \mathbf{0} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \rho \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} &= \mathbf{j} \end{aligned}$$

Jazyk diferenciálnych foriem v Minkowského priestore:

$$dF = 0 \qquad d * F = -J$$

kde 2-forma poľa F a 3-forma prúdu J sú definované takto:

$$F := dt \wedge \mathbf{E}.d\mathbf{r} - \mathbf{B}.d\mathbf{S} \qquad J := dt \wedge (-\mathbf{j}.d\mathbf{S}) + \rho dV$$

Elektromagnetizmus v zakrivenom časopriestore

Potrebujeme prechod od Minkowského metriky η k všeobecnej metrike g.

Jazyk diferenciálnych foriem opäť veľmi šikovný.

Rovnice v Minkowského priestore boli

$$dF = 0 \qquad\qquad d *_\eta F = -J$$

Jediné miesto v rovniciach, kde je ukrytá informácia o Minkowského priestore, je Hodgeov operátor $*$.

Stačí v ňom nahradiť $\eta \mapsto g$ a dostaneme

$$dF = 0 \qquad\qquad d *_g F = -J$$

Kalibračné polia - zovšeobenenie elektromagnetizmu

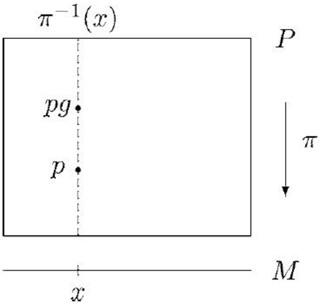
Elektromagnetizmus = kalibračná teória s grupou $U(1)$.

Yang-Mills 1954 - kalibračná teória s grupou $SU(2)$.
(Netriviálny rozdiel. Akoby tri druhy fotónov, ktoré sú navyše nabité.)

Veľký záujem aj zo strany matematikov.

Poznali to pod názvom teória konexií.

Základné ihrisko teórie G-konexií je hlavný fibrovaný priestor s grupou G.



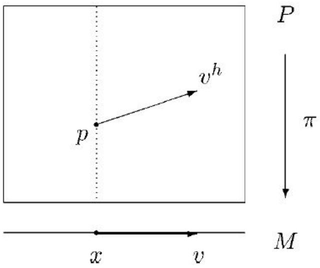
Hlavný fibrovaný priestor. V totálnom priestore pôsobí vertikálne grupa G

Konexia v G-fibrácii

Konexia: ekvivalentná fyzikálnemu pojmu kalibračné potenciály.
Jej (konceptuálne jednoduchý) opis je cez horizontálne podpriestory v každom bode totálneho priestoru P.

Mierou neintegrovateľnosti vzniknutej distribúcie, je krivosť konexie.
Krivosť zodpovedá fyzikálnemu pojmu intenzita kalibračného poľa.

Elektromagnetizmus: krivosť $\leftrightarrow$ elektrické a magnetické pole.



Horizontálny podpriestor: doplnkový k vertikálnemu.

Kaluza 1919 (1)

Kaluzov nápad z r.1919:

Podľa Einsteina (1915) žijeme v 4-rozmernom časopriestore.
Gravitáciu tam opisuje metrika $\hat{g}_{\mu\nu}$,
elektromagnetizmus 4-potenciál A_μ.

Uvažujme teraz 5-rozmerný časopriestor. A v ňom len gravitáciu.
Ju opíšeme einsteinovsky, čiže 5-rozmernou metrikou.
Poskladajme ju z $\hat{g}_{\mu\nu}$ a A_μ takto:

$$g_{ab} \leftrightarrow \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & g_{\mu 5} \\ g_{5\mu} & g_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{g}_{\mu\nu} + A_\mu A_\nu & A_\mu \\ A_\mu & 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Kaluza 1919 (2)

Keď to urobíme, napíšeme 5-rozmerné

Einsteinove rovnice vo vákuu $$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 0$$

a napokon ich „sprojektujeme" do pôvodného 4-rozmerného časopriestoru, dostaneme (Kaluzov zázrak, podobný ako bol Minkowského)

- správne (Einsteinove) rovnice pre gravitáciu
- ich zdrojom je elektromagnetické pole
- plus správne rovnice pre elektromagnetizmus (bez zdrojov)
- v priestore zakrivenom gravitáciou

Klein 1926

Otázkou bolo, čo je ten piaty rozmer.

- Štyri chápeme, čas a priestor vnímame.
- Ale piaty? Kde je?

Klein navrhol (inšpirácia z kvantovej teórie - práve vznikla):

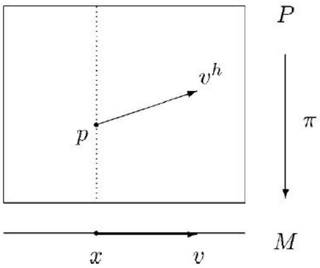
- Piaty je kompaktný (kružnica, nie $\mathbb{R}$), veľmi veľmi malý.
- Ako taký je „z diaľky neviditeľný".
- (Diaľka = veľkosti uvažované v normálnej fyzike.)
- Analóg: hadica (2d) sa z diaľky javí ako čiara (1d)

Kaluza-Klein moderne

5-rozmerný priestor z pôvodnej verzie sa nahradí totálnym priestorom P ľubovoľného hlavného fibrovaného priestoru s grupou G s konexiou.

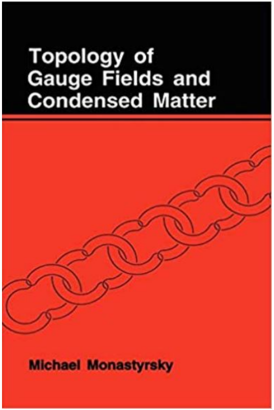
Metrika na P sa poskladá z
- pôvodnej metriky na M,
- formy konexie a
- skalárneho poľa.

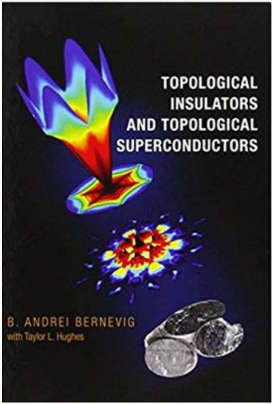
Kaluzov zázrak sa deje aj tak!
Kompaktifikácia nadbytočných rozmerov je osobitná veda.

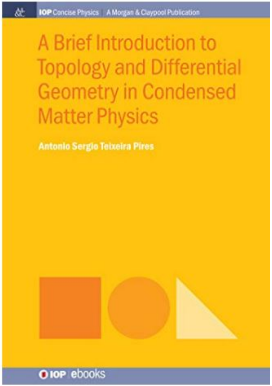


Metrika sa vyrába na P

Prienik do teórie kondenzovaných látok







Záver: Snažil som sa ilustrovať, že

diferenciálna geometria je
jeden z kľúčových nástrojov teoretickej fyziky.

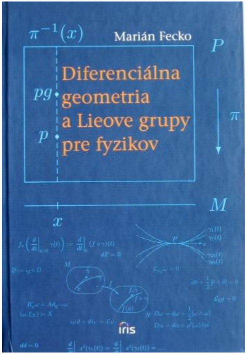
Už dlho to funguje tak, že

1. Diferenciálna geometria čerpá inšpiráciu (aj) z problémov vzniknutých v teoretickej fyzike.

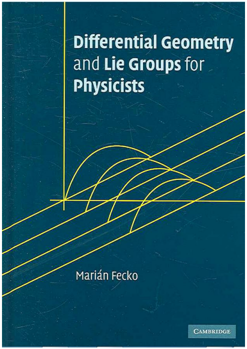
2. Teoretická fyzika nachádza v diferenciálnej geometrii
- jazyk na formuláciu svojich zákonov aj
- metódy potrebné na riešenie svojich úloh.

Do čoho sa rýchlo pustiť (ešte dnes!)

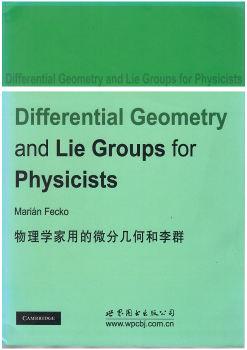
Napríklad:



2004, 2008, 2018



2006, 2011



2009

Ďakujem

za pozornosť!