Bubliny, kvapky a krivosti

Marián Fecko*
KTF&DF, FMFI UK, Bratislava

Text prednesený na Akadémii Trojstenu dňa 9.12.2011 [1]

Rozhranie medzi kvapalinou a vzduchom sa správa tak, akoby to bola pružná blanka. Toto rozhranie vytvára plochu, ktorej tvar vzniká podľa určitých jednoducho formulovateľných pravidiel. V týchto pravidlách sa objavuje pojem krivosti výslednej plochy. Je to čisto geometrický pojem, ktorý je zaujímavý aj sám osebe. (V skutočnosti je krivostí viac a tu vystupuje jedna z nich.)

V prednáške sa bude hovoriť o oboch aspektoch problému - fyzikálnom aj geometrickom. Bude sa teda hovoriť o fyzikálnych dôvodoch vzniku tých pravidiel aj o matematickom pojme krivosti plochy.

Obsah

*e-mail: `fecko@fmph.uniba.sk`
[1] Pripravený pre Akadémiu Trojstenu, ktorá sa konala 11.12.2009)

1 Úvod - povrchové napätie

Medzimolekulárne sily v kvapaline spôsobujú, že rozhranie medzi kvapalinou a vzduchom sa správa tak, ako by to bola pružná blanka. Nie je to ale celkom bežná blanka (povedzme, stena balóna). Povrchová blanka má zvláštnu vlastnosť, že vytvorenie každej jej ďalšej plochy chce stále rovnakú ďalšiu energiu.

[Keď vyrábame ďalšiu plochu gumového balóna, čiže keď ho rozťahujeme, ide to stále ťažšie a ťažšie, čiže na vznik rovnakej ďalšej plochy treba čoraz viac energie.]

Existuje teda niečo ako *konštantná cena plochy*: za jednotku plochy fixné množstvo jouleov.

[Pripomína to teda trh s pozemkami alebo bytmi, kde existuje cena za jednotku plochy (s rozmerom € $/m^2$). Ak stojí meter štvorcový bytu povedzme 700 € , tak byt o ploche 60 metrov štvorcových vyjde na (60 × 700) € = 42 000 € .]

Cena za jednotku plochy rozhrania kvapaliny a vzduchu sa volá *povrchové napätie* a označuje sa σ. Jeho rozmer je J/m^2. Keďže joule je newton krát meter, rozmer σ je aj N/m.

Keďže sa za plochu rozhrania platí (energiou), zbytočne sa ňou neplytvá. V rámci možností je snaha ju minimalizovať. Ale proti prílišnému zmenšovaniu plochy môžu byť nejaké iné dôvody.

Zoberme si takú bublinu tvaru (povrchu) gule. Tá sa snaží minimalizovať svoju plochu, ale to vedie na stláčanie plynu, ktorý je v nej uzavretý. A to *tiež niečo stojí* (nejaké tie jouly). Tendencie - čo najmenšia plocha pri čo najmenej stlačenom plyne sú zjavne protichodné. Preto musí dôjsť ku *kompromisu*. Tento kompromis (rovnováha) sa potom podpíše na výslednej veľkosti (a tvare) bubliny.

Pozrieme sa, ako sa všeobecne hľadá mechanická rovnováha a použijeme to na malý kúsok našej „blanky"(aj ten musí byť v rovnováhe). Zistíme, že to dá zaujímavú „lokálnu"podmienku na zakrivenie blanky.

2 Mechanická rovnováha a princíp virtuálnych prác

Na hľadanie rovnovážnych stavov existuje v mechanike osvedčený nástroj, ktorý je známy pod názvom *princíp virtuálnych prác*. Ilustrujeme si ho na hľadaní rovnováhy kyvadla.

Predstavím si kyvadlo v nejakej všeobecnej polohe, teda vychýlené pod uhlom φ. Testujem, či je poloha rovnovážna, t.j. či kyvadlo zostane v tejto polohe aj keď ho prestanem v nej držať. Postup vyzerá takto. *Predstavím* si ho posunuté do *blízkej susednej* polohy. Toto sa volá *virtuálne posunutie*. Vyrátam si, aká (by) sa vykonala práca, *keby* sa toto posunutie naozaj udialo. Takáto práca sa volá *virtuálna práca*. Nech je uhol φ napríklad 45 stupňov (odspodu). Potom poloha s trochu väčším uhlom je vyššie, s trochu menším uhlom nižšie. Preto virtuálna práca pri maličkom zväčšení uhla je *kladná* (stúpame v gravitačnom poli) a pri maličkom zmenšení *záporná* (klesá). Kyvadlo preto v tejto polohe nezostane, lebo je preňho výhodné pohnúť sa smerom dolu (keď *na ňom* vykoná prácu gravitačné pole).

V ktorej polohe by bolo ochotné zostať? Len v takej, v ktorej bude *virtuálna práca nulová.*

[Keď je nenulová, pohyb na jednu stranu dá kladnú virtuálnu prácu, na druhú zápornú. Spontánny pohyb potom bude na tú zápornú stranu. Ak nechcem mať tú zápornú stranu - aby mohla byť rovnováha - nemôžem mať *ani tú kladnú* (to sa dá dokázať) a teda zostáva *len nulová* virtuálna práca.]

To je obsah princípu virtuálnych prác. Hovorí, že rovnovážne polohy môžeme hľadať tak, že zistíme, v ktorých bodoch je virtuálna práca nulová:

$$\text{rovnovážna poloha} \;\leftrightarrow\; \text{virtuálna práca je nulová} \tag{1}$$

V prípade kyvadla je práca za zmenu *výšky* (práca *gravitačnej sily*). Preto ak chceme nájsť body, v ktorých konáme nulovú virtuálnu prácu, musíme nájsť body, v ktorých malé pohyby vyzerajú vodorovne (len pri vodorovnom pohybe nemeníme výšku). No to je len *v dvoch* polohách kyvadla. Celkom hore a celkom dolu. To sú rovnovážne polohy kyvadla.

[Tieto dve polohy sa líšia v stabilite. Jedna je *stabilná* (dolná) a druhá *labilná* (horná). To je však už iná otázka. V prom kole sa hľadajú všetky rovnovážne polohy a až potom príde na rad jemnejšie delenie.]

3 Rovnováha plochy rozhrania

Uvažujem malý kúsok plochy rozhrania medzi kvapalinou a vzduchom. Ak je celé rozhranie v rovnováhe (nehýbe sa, je spokojné tak ako je), je v rovnováhe aj tento malý kúsok.

[Keby nebol, dal by to najavo tým, že by sa pohol do polohy, ktorá by sa mu páčila viac. Nehýbe sa, tak zrejme spokojný je.]

Predstavím si teraz, že urobím isté virtuálne posunutie tohoto kúska plochy. Menovite také, že každý jeho bod posuniem v smere kolmom na tú plochu o malý kúsok a. Pri tomto virtuálnom posunutí sa vykoná istá virtuálna práca. Keď ju položím rovnú nule, dostanem (podľa princípu virtuálnych prác) podmienku rovnováhy, t.j. nejakú výpoveď o tom, za akých podmienok je ten kúsok plochy ochotný zostať tam, kde je.

Ako zistím tú virtuálnu prácu? Najprv si musím rozmyslieť, aké sú dôvody, že sa nejaká práca pri tomto posunutí vôbec koná. (Analóg situácie v kyvadle, kde dôvodom bolo stúpanie proti pôsobenie gravitačnej sily.) Tu sú dôvody *dva.*

[Keď mám v hre len jednu silu, ktorá koná virtuálnu prácu, nemusím si dávať pozor na jej znamienko, lebo keď ju aj tak kladiem rovnú nule, tak na ňom nezáleží.

Keď mám ale v hre viac členov, ich *relatívne* znamienko je veľmi dôležité (aby sa veci mohli zrušiť, keď sa majú zrušiť apod.). Preto sa dohodneme, že ak koná prácu nejaká sila, budem to započítavať so znamienkom *mínus*, ak konám prácu ja proti nejakej sile, započítam to so znamienkom *plus*. (Tak sa to robí pri výpočte potenciálnej energie. Napríklad s plusom je práca za cestu *do* kopca, čím vznikne $+mgh$.)]

Prvý súvisí s tým, že na rôznych stranách rozhrania môžu byť *rôzne tlaky*. Ak na strane odkiaľ kúsok plochy posúvame je tlak p_1 a na strane kam sa ten kúsok posúva je tlak p_2, tak celý kúsok plochy *to kamsi tlačí* (v smere nižšieho tlaku, kolmo na tú plôšku). Sila je plocha krát *rozdiel* tlakov a práca tejto sily vznikne ešte vynásobením (maličkou) vzdialenosťou a, pozdĺž ktorej tá sila pôsobila. Pre (maličkú) plôšku S tak dostaneme virtuálnu prácu

$$\delta A_1 = -(p_1 - p_2)Sa \tag{2}$$

[Uvažujeme posunutie v smere $1 \to 2$. V tomto smere to tlačí sila $p_1 S$ a bráni tomu sila $p_2 S$. Preto celková sila v tomto smere je $(p_1 - p_2)S$ a práca vykonaná touto silou $(p_1 - p_2)Sa$. Podľa vyššie spomenutej konvencie dávam znamienko mínus.]

Druhým dôvodom je skutočnosť, že ak pohnem každý bod uvažovanej plôšky kolmo na plochu rozhrania, jej plocha (povedzme v milimetroch štvorcových) sa môže *zmeniť*. Naozaj - rozhranie je všeobecne *zakrivené* a ak jeho body cestujú kolmo na plochu zakriveného rozhrania, môžu sa *rozchádzať* alebo naopak *zbiehať* (podľa toho, ako vyzerá to zakrivenie detailne). Bude teda treba vedieť vyrátať túto zmenu plochy. Keď to zvládneme (je o tom celá nasledujúca kapitola), spomenieme si, že takáto *zmena plochy nie je zadarmo*. Treba na to vykonať istú prácu (ak sa má plocha zväčšiť) danú súčinom prírastku plochy a "jednotkovej ceny"plochy, t.j. povrchového napätia σ. Ak je plocha posunutého kúska $S(a)$, tak virtuálna práca bude

$$\delta A_2 = (S(a) - S)\sigma \tag{3}$$

(so znamienkom plus, lebo ju konám ja). Celková virtuálna práca (za oba dôvody) je pri uvažovanom virtuálnom posunutí potom súčtom tých dvoch:

$$\delta A = \delta A_1 + \delta A_2 = -(p_1 - p_2)Sa + (S(a) - S)\sigma \tag{4}$$

V rovnováhe musí byť tento súčet nulový, takže jednotlivé členy sa musia navzájom zrušiť. Napríklad v bubline je vyšší tlak ako vonku, takže jej malý kúsok je tlačený smerom od stredu von. Ale konkrétne zakrivenie plochy bubliny spôsobuje, že keby sa ten kúsok naozaj pohol v smere, v ktorom ho to tlačí, zväčšil by svoju plochu, čo nie je zadarmo. Preto sa napokon (v rovnováhe) nikam nepohne a bublina nadobudne svoj krásny guľatý rovnovážny tvar.

4 Rôzne krivosti plochy

4.1 Krivosť rovinnej krivky

Predstavme si, že ideme autom po ceste (bez kopcov, po rovine) a radi by sme zaviedli nejakú rozumnú číselnú mieru pre „intenzitu zákruty"(veľké číslo = prudká zákruta, malé mierna). Jeden dobrý nápad vyzerá zobrať *odstredivú silu*, ktorá nás tlačí na bočné dvere auta. (Keď nás tlačí riadne, zákruta bude asi prudká.) Vzorček pre pohyb po *kruhovej* dráhe (iný nevieme) je, ako je známe, takýto:

$$F = \frac{mv^2}{r} \tag{5}$$

Tu sú zatiaľ aj veci, ktoré nesúvisia so zákrutou, ale *s nami*. Napríklad (naša) hmotnosť m dvakrát so zákrutou nesúvisí. Tak ju zmažeme, čím dostaneme odstredivé *zrýchlenie*

$$a = \frac{v^2}{r} \tag{6}$$

Ale ani rýchlosť, ktorou zákrutou prechádzame, nesúvisí so zákrutou, stále je to naša charakteristika. Tak ju vezmeme nejakú dohodnutú. Najlepšie rovno *jednotkovú*. Keď pôjdeme po (kruhovej) ceste celý čas jednotkovou rýchlosťou, veľkosť odstredivého zrýchlenia, ktoré budeme pri tom cítiť, je už len a len vlastnosť zákruty. Veľké zrýchlenie - prudká zákruta, malé zrýchlenie - mierna (a nulové zrýchlenie - rovná cesta).

$$a_{(v=1)} = \frac{1}{r} \tag{7}$$

Túto veličinu budeme volať *krivosť* kružnice (= kruhovej dráhy). Správa sa rozumne - kružnica s malým polomerom je veľmi krivá a naopak. Ďalej, nech bude pre zákrutu doľava (podľa dodatočnej definície) kladná a pre zákrutu doprava záporná:

$$k = \pm\,\frac{1}{r} \qquad \pm \;=\; \text{doľava/doprava} \tag{8}$$

Tým máme v jednom čísle informáciu nielen o tom, nakoľko je zákruta ostrá, ale aj tom, či je doprava alebo doľava.

A čo ak cesta *nemá* tvar kružnice? (Aj také cesty treba. Vedci z Výskumného ústavu pozemných komunikácií zistili, že cesty tvaru kružnice pre prax nestačia.) Potom sa postupuje takto. Zoberie sa *veľmi malý* kúsok cesty a spozoruje sa, že tento malý kúsok je na nerozoznanie od veľmi malého kúska *kruhovej* cesty *vhodného (jednoznačného) polomeru.*

[Keby sme mali problém ten polomer nájsť, tak zmeriame silu, ktorou nás tlačí (pri jednotkovej rýchlosti) na dvere, predelíme to našou hmotnosťou a výsledok zapíšeme ako $1/r$. Rovná cesta je špeciálny prípad, keď je polomer nekonečný.]

Potom sa povie, že *v tomto mieste* je krivosť zákruty taká, aká zodpovedá tej „náhradnej" kruhovej ceste. (Teda prevrátený polomer tej pomocnej kruhovej cesty.) Samozrejme, takto zavedená krivosť rovinnej krivky závisí všeobecne od bodu - už nie je všeobecne konštantná, ako to bolo na kružnici (kružnica je zjavne *jediná* krivka, na ktorej je krivosť konštantná).

[Myšlienka je veľmi podobná, ako keď sa zavádza pojem *okamžitej rýchlosti* pre jednorozmerný pohyb. Tá je konštantná len pre rovnomerný pohyb. Pre všeobecný pohyb sa na malom *časovom* úseku predpokladá, že pohyb je rovnomerný a tak sa určí okamžitá rýchlosť v tomto čase.]

Teraz sa zamyslime nad takýmto problémom. Mám nejakú cestu a pre určitosť nech má tvar zákruty vľavo (takže jej krivosť je kladná). Uvažujem jej pravý okraj. Teraz tú cestu rozšírim po pravej strane o jeden dodatočný pás šírky a. Uvažujem pravý okraj toho nového pásu. Zaujíma ma, o koľko sa predĺžil nejaký konkrétny úsek vďaka tomuto rozšíreniu. Aby som sa nebabral s premenlivou krivosťou, uvažujem taký krátky úsek, na ktorom môžem považovať krivosť k za konštantnú. Nech je dĺžka pôvodného (krátkeho) kúska l a jemu príslušného rozšírenia $l(a)$. Keďže je krivosť konštantná, ten kúsok je na nerozoznanie od kružnice (polomeru $r = 1/k$) a pre kružnicu sa to ľahko zráta:

Keby bola kružnica celá, jej obvod $o(r) = 2\pi r$ by sa zväčšil na

$$o(r+a) = 2\pi(r+a) = 2\pi r\left(1 + \frac{2\pi a}{2\pi r}\right) = o(r)\left(1 + \frac{a}{r}\right) = (1+ka)\,o(r)$$

Dĺžka ľubovoľného kúska kružnice sa však natiahne v rovnakom pomere ako dĺžka (obvod) celej kružnice. Preto

$$\frac{l(a)}{l} = \frac{o(r+a)}{o(r)} = (1+ka)$$

a teda

$$l(a) = (1+ka)l \tag{9}$$

Dostali sme jednoduchý, ale dôležitý vzťah, ktorý odhaľuje jeden z prejavov krivosti čiary: ak vedľa čiary s krivosťou k nakreslím druhú čiaru tak, že kolmá vzdialenosť medzi nimi je a, tak pre krátke kúsky tých čiar platí, že krátky kúsok tej druhej čiary je *dlhší* a pomer ich dĺžok je daný faktorom $(1+ka)$. A keď si to trochu rozmyslím, zistím, že toto tvrdenie platí dokonca aj pre zákrutu *doprava* (t.j. *zápornú* krivosť). Vtedy je tá druhá čiara *kratšia*, čo zodpovedá tomu, že faktor $(1+ka)$ je vtedy menší ako 1.

4.2 Hlavné krivosti plochy

Predstavím si nejakú dvojrozmernú plochu. Fixujem na nej nejaký bod a vztýčim v ňom vektor kolmý na túto plochu (takzvanú normálu). (Napríklad na severnom póle na povrchu Zemegule vektor rovnobežný so Zemskou osou.) Teraz si predstavím dve roviny, ktoré sú na seba kolmé a prechádzajú cez ten kolmý vektor. (Takých dvojíc rovín je nekonečne veľa. Fixujem jednu konkrétnu.) Tieto dve roviny tú plochu režú a vytínajú na nej dve čiary (uvažujem tie čiary len v blízkom okolí toho bodu; na Zemeguli v okolí severného pólu by to boli dva navzájom kolmé poludníky). Každá z tých čiar je rovinná krivka (jedna v jednej rovine, druhá v druhej). A každá rovinná krivka, ako už vieme, má v každom svojom bode istú krivosť. Aj tieto dve ich majú. Nazvem ich k_1 a k_2. Ich prevrátené hodnoty sú isté dva polomery, r_1 a r_2.

[Presnejšie, prevrátené *absolútne* hodnoty tých k_1 a k_2 sú tie polomery; nezabúdajme, že zákruty môžu byť doľava a doprava a znamienko krivosti nesie informáciu o tom, ktorá z týchto možností to je. Čiže tie k_1 a k_2 môžu byť *aj záporné* a vtedy treba najprv opraviť znamienko a až potom to prevrátiť a dostať polomer zákruty. Tuto to so znamienkami funguje takto: keď majú k_1 aj k_2 rovnaké znamienko, znamená to, že príslušná plocha v okolí toho bodu je celá (v smeroch oboch kriviek) ohnutá na *spoločnú* stranu *od dotykovej* roviny v danom bode. (Pre kladné na jednu, pre záporné na druhú.) Keď majú k_1 aj k_2 rôzne znamienka, znamená to, že príslušná plocha v okolí toho bodu má charakter *sedla* - v smere jednej z kriviek je ohnutá na jednu stranu od dotykovej roviny v danom bode, v smere druhej krivky na druhú.]

Ukazuje sa, že existuje istý optimálny výber tých rovín, a teda aj tých čiar. Hovorí sa im *hlavné smery.*

[Existuje rovina, ktorá dá najväčšie k a druhá, ktorá dá najmenšie k. Ak tieto dve k-čka nie sú rovnaké, tie dve roviny sú jednoznačné a vyjdú na seba kolmé. Ak sú rovnaké, zoberieme hociktoré dve navzájom kolmé roviny. Všeobecne si výpočet týchto hlavných smerov vyžaduje vyššiu matematiku. Treba tam diagonalizovať maticu druhých derivácií funkcie výšky v uvažovanom bode. Nepredpokladám, že týmto pojmom rozumiete, preto predpokladám, že uveríte, že tie hlavné smery sa nejako dajú vyrátať.]

V každom bode na ploche teda máme dva navzájom kolmé hlavné smery a im príslušné

$$\textit{hlavné krivosti:} \qquad k_1 = \pm\frac{1}{r_1} \qquad k_2 = \pm\frac{1}{r_2} \tag{10}$$

Príklad 1.: Plocha = *rovina.* Nech je to pre určitosť rovina xy. Potom kolmý vektor v jej ľubovoľnom bode má smer osi z a spomínané dve roviny sú jednak na seba kolmé, jednak obe *zvislé.* Rovinu xy pretínajú zvislé roviny v *priamkach.* Priamky sú kružnice s polomerom ∞, takže krivosť oboch je *nulová.* Hlavné krivosti roviny sú teda

$$\text{rovina :} \qquad k_1 = 0 \quad k_2 = 0 \tag{11}$$

Príklad 2.: Plocha = *sféra* (povrch gule) polomeru R. Nech je bod pre určitosť severný pól. Potom kolmý vektor v tomto bode má smer osi z a spomínané dve roviny vytínajú na sfére dva (na seba kolmé) *poludníky.* To sú (obe) čiary s polomerom R, a teda krivosťou $k = 1/R$. Hlavné krivosti sféry sú teda

$$\text{sféra :} \qquad k_1 = 1/R \quad k_2 = 1/R \tag{12}$$

Ich rovnaké znamienka signalizujú, že v okolí pólu je sféra na jednu stranu od dotykovej roviny (*nie je* tam sedlo).

Príklad 3.: Plocha = *valec* (jeho plášť) polomeru R. Hlavné smery sú (v ľubovoľnom bode) pozdĺž osi valca a okolo osi valca. Pozdĺž osi ide priamka, takže prvý polomer je nekonečný. Okolo osi ide kružnica s polomerom R, a teda krivosťou $k = 1/R$. Hlavné krivosti valca sú teda

$$\text{valec :} \qquad k_1 = 0 \quad k_2 = 1/R \tag{13}$$

4.3 Stredná a Gaussova krivosť plochy

Teraz sa zamyslime nad *dvojrozmerným* analógom problému, ktorý vyústil do výsledku (9). Mám nejakú plochu. Posuniem každý jej bod o vzdialenosť a kolmo na plochu. Dostanem druhú plochu, "rovnobežnú"s tou pôvodnou. (Iba akože rovnobežnú, lebo tá pôvodná môže byť aj krivá. Tá druhá je jednoducho vyfúknutá do vzdialenosti a od pôvodnej.)

Na tej ploche uvažujem nejaký bod a vyrobím malý štvorček, ktorého stred je v tom bode a strany sú rovnobežné s hlavnými smermi v tomto bode. Štvorček teda leží na priesečníku dvoch čiar, ktoré sú (v tej časti plochy, kde je štvorček) na nerozoznanie od dvoch kružníc s polomermi $r_1 = 1/k_1$ a $r_2 = 1/k_2$. (Ten štvorček je smerom k okrajom trošku prehnutý, lebo sa v strede dotýka spomínaných kružníc.) Jeho posunutím o a kolmo na plochu dostanem druhý štvorček. Zaujíma ma jeho plocha. Teda koľkonásobok plochy pôvodného štvorčeka je plocha druhého štvorčeka.

Nech majú stredové čiary pôvodného štvorčeka dĺžku b. Plocha štvorčeka je teda $S = b^2$. Keďže prvá čiara je kúskom kružnice s krivosťou k_1, podľa výsledku (9) sa pri posunutí natiahne na $(1 + k_1 a)b$. Druhá stredová čiara sa podobne natiahne na $(1 + k_2 a)b$. Nový štvorček má ako stredové čiary tieto dve dĺžky, a teda má plochu

$$S(a) = [(1 + k_1 a)b][(1 + k_1 a)b] = S[1 + (k_1 + k_2)a + k_1 k_2 a^2] \tag{14}$$

Ak nazveme aritmetický priemer hlavných krivostí k_1 a k_2 v danom bode plochy

$$\textit{stredná krivosť:} \qquad H := \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \tag{15}$$

v tomto bode a súčin hlavných krivostí k_1 a k_2

$$\textit{Gaussova krivosť:} \qquad K := k_1 k_2 \tag{16}$$

tak môžeme zapísať zväčšenie plochy malého štvorčeka v jednoduchom tvare

$$S(a) = S[1 + 2aH + a^2 K] \tag{17}$$

Pre *veľmi malé* a môžeme člen pri a^2 zanedbať a dostaneme ešte jednoduchší výsledok, v ktorom figuruje už *len stredná* krivosť plochy:

$$S(a) = S[1 + 2aH] \tag{18}$$

Poznámka: Pre rovinné krivky sa spomínalo, že krivosť krivky môže byť aj záporná a že vzorček (9) platí aj v tomto prípade (dĺžka posunutej krivky je vtedy menšia ako dĺžka pôvodnej krivky). Keďže hlavné krivosti sú krivosti istých kriviek, platí to aj pre ne. A platí to aj pre strednú a Gaussovu krivosť, ktoré sú z nich zostavené. A aj pre vzorčeky (17) a (18), v ktorých sa uvedené krivosti vyskytujú. Plocha posunutého štvorčeka môže byť teda *väčšia aj menšia*, ako plocha pôvodného štvorčeka. Ako vidíme z (18), pre *malé* posunutia o tom rozhoduje *znamienko strednej krivosti*. Ak je stredná krivosť kladná, plocha sa zväčší, ak záporná, zmenší. (A ak je nulová, tak sa nezmení :-)

Je to intuitívne zrejmý výsledok. Ak sú napríklad obe hlavné krivosti kladné (ako je to napríklad pre povrch gule), oblosť plochy spôsobuje, že posunutý štvorček sa zjavne rozširuje oproti pôvodnému a teda má väčšiu plochu. Ak sú obe záporné, posunutý štvorček sa naopak zužuje oproti pôvodnému a teda má menšiu plochu. A napokon ak je stredná krivosť nulová, štvorček sa v jednom smere rozširuje a v druhom zužuje, a to tak, že obdĺžnik, ktorý z neho vznikne, má rovnakú plochu ako pôvodný štvorček.

Toto je, ako uvidíme, hlavný dôvod, prečo musí byť rozhranie kvapaliny a vzduchu zakrivené, ak sú na oboch stranách rôzne tlaky (pozri výsledok (21)).

5 Laplaceova rovnica

Keď sme už tak zmúdreli v otázke krivostí plôch, vrátime sa k úvahám o virtuálnej práci malého kúska plochy rozhrania pri (malom) posunutí o a kolmo na plochu. Zatiaľ sme sa v nich dopracovali po výsledok (4), ale na ďalší postup nám chýbal vzťah medzi $S(a)$ a S. Ten už ale teraz vieme - dáva nám ho vzorec (18). Podľa neho je

$$S(a) - S = 2aHS$$

takže (4) prejde na

$$\delta A = \delta A_1 + \delta A_2 = -(p_1 - p_2)Sa + (2aHS)\sigma = aS[(p_2 - p_1) + 2H\sigma] \tag{19}$$

Táto virtuálna práca má byť v rovnováhe nulová. Keďže a ani S nulové nie je, dostávame podmienku

$$p_1 - p_2 = 2H\sigma = (k_1 + k_2)\sigma = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\sigma \tag{20}$$

(Využili sa definície (10) a (15).) Podmienka mechanickej rovnováhy rozhrania sa teda vyjadruje ako

$$\textit{Laplaceova rovnica} \qquad p_1 - p_2 = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\sigma \tag{21}$$

6 Čo nám prezrádza Laplaceova rovnica

Laplaceova rovnica dáva do súvisu rozdiel tlakov na oboch stranách rozhrania so zakrivením plochy tohoto rozhrania. Pozrime sa na tri bežné situácie, ku ktorým má táto rovnica čo povedať - dva druhy bublín (uzavretú a otvorenú) a kvapky.

Bublina má veľmi blízko seba *až dve* rozhrania kvapalina/vzduch (je tam vzduch, potom kvapalina a potom opäť vzduch). Keďže bublina je všade veľmi tenká, dá sa zrejme rozumne predpokladať, že vonkajšia aj vnútorná strana bubliny majú (v danom bode) *rovnaké* polomery krivosti r_1 a r_2. (Myslí sa rovnaké na vonkajšom a vnútornom rozhraní, *nie* že $r_1 = r_2$.) Mám tam teda *dvakrát* použiť Laplaceovu rovnicu (21) s rovnakými polomermi r_1 a r_2 (v tom istom zmysle).

Kvapka má rozhranie len jedno (vnútri je kvapalina, vonku vzduch).

6.1 Uzavretá bublina

Uvažujem bežnú uzavretú bublinu tvaru (povrchu) gule s polomerom R. Potom $r_1 = r_2 = R$. Zvolím si na nej nejaký bod. Vnútri je vzduch (nech má tlak p_1), potom ide kvapalina (tlak p_2) a napokon zase vzduch (tlak p_3). Keďže polomery a povrchové napätie sú pre tieto prípady rovnaké, môžeme zapísať podmienky (21) v tvare

$$p_1 - p_2 = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\sigma = \frac{2\sigma}{R} \qquad p_2 - p_3 = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\sigma = \frac{2\sigma}{R} \tag{22}$$

Odtiaľ sa hneď získa (overte si to), že medzi tlakom p_1 vzduchu vo vnútri bubliny a vonkajším tlakom vzduchu p_3 (atmosferický tlak) je jednoduchý vzťah

$$p_1 - p_3 = \frac{4\sigma}{R} \tag{23}$$

(ako aj to, že tlak kvapaliny p_2 je aritmetickým priemerom tlakov vonku a vnútri). Vidíme, že tento rozdiel tlakov vzduchu vonku a vnútri bubliny je *veľký* pre *malé* bubliny z kvapalín s *veľkým* povrchovým napätím.

Pozrieme sa, *aký* veľký reálne. Uvažujme maličkú bublin(k)u z mydlovej vody. V literatúre (a na internete) nie je problém nájsť povrchové napätie pre vodu a po troche námahy aj pre mydlovú vodu (napr.). Čísla sú takéto: voda $\sigma = 7,3 \times 10^{-2} N/m$, mydlová voda $\sigma = 2,5 \times 10^{-2} N/m$ (oboje pri 20 stupňoch Celzia; pri 100 stupňoch voda $\sigma = 5,9 \times 10^{-2} N/m$, mydlová neviem). No a R nech je x milimetrov. Potom dostávam

$$p_1 - p_3 = \frac{4 \times 2,5 \times 10^{-2} N/m}{x \times 10^{-3} m} = \frac{1}{x} \times 10^2 Pa \tag{24}$$

Keď si uvedomíme, že atmosferický tlak je zhruba 1000 hektopascalov, čiže $10^5 Pa$, vidíme, že ten rozdiel tlakov je pre bublinu polomeru 1 mm rádovo len jedna tisícina samotnej hodnoty tlaku vonku, t.j. je maličký. Dalo sa čakať niečo iné? Ani nie. Atmosferický tlak je predsa obrovský (udrží 10 metrový stĺpec vody!) a rozdiel tlakov spôsobuje slabunké povrchové napätie, ktoré udrží na vode akurát tak vodomerku či ihlu.

[Ak by som chcel, aby bol vnútri mydlovej bubliny *dvojnásobný* tlak ako vonku, muselo by byť $x = 10^{-3}$, čiže museli by sme mať bublinu s polomerom *tisíciny milimetra*. Neviem, či sú také malé bubliny reálne.]

6.2 Bublina na drôtenom rámčeku

Ak vytvoríme bublinu na drôtenom rámčeku, tak máme (podobne ako pri uzavretej bubline) tenučkú vrstvičku (mydlovej) vody, rozdiel oproti uzavretej bubline je ale v tom, že tu je z *oboch strán* vzduch pri *atmosférickom* tlaku. To znamená, že $p_1 = p_3 \equiv p_{\text{atm}}$. Potom z (20) môžem (namiesto (22)) písať

$$p_{\text{atm}} - p_2 = 2H\sigma \qquad p_2 - p_{\text{atm}} = 2H\sigma \tag{25}$$

kde p_2 je tlak v kvapaline (mydlovej vode). Keďže vpravo sú rovnaké výrazy a vľavo navzájom opačné, všetko sú samé nuly, čiže jednak tlak vnútri je *tiež* atmosferický, ale hlavne

$$H = 0 \tag{26}$$

Z definície strednej krivosti (15) dostávame, že vtedy

$$k_1 = -k_2 \tag{27}$$

Hlavné krivosti sú rovnako veľké, ale majú opačné znamienko. To znamená, že plocha má všeobecne tvar sedla, pričom polomery kružníc, na ktoré sa to sedlo naťahuje, sú rovnaké. (Výnimkou je prípad $k_1 = k_2 = 0$, keď je to *rovina*.)

Bublina na drôtenom rámčeku automaticky zaujme tvar, ktorý má *minimálnu plochu* (medzi všetkými plochami, ktoré majú ako hranicu daný rámček). To vyplýva z toho, že za každý milimeter štvorcový plochy rozhrania sa platí (joulami, ktoré treba na ich vytvorenie) a je kríza a joulami treba šetriť (z tohoto hľadiska je *Príroda neustále v kríze*). Nechtiac pri tom vytvorí útvar, ktorý má *v každom bode nulovú strednú krivosť*, čiže je v každom bode sedlom s rovnakými polomermi (jedna kružnice je na jednej strane od dotykovej roviny, druhá na druhej). Keby sme takú plochu chceli len tak namodelovať, dosť by sme sa potrápili. Bublina sa netrápi, ona taká jednoducho je (má na to vrodený talent).

6.3 Kvapka

Kvapka sa líši od uzavretej bubliny len tým, že má *len jedno* rozhranie kvapalina/vzduch. Ak je tlak v kvapke tvaru gule polomeru R (tlak kvapaliny) p_1 a tlak vonku p_2 (atmosferický), dostávam

$$p_1 - p_2 = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\sigma = \frac{2\sigma}{R} \tag{28}$$

Oproti uzavretej bubline je teda rozdiel tlakov len polovičný. Na druhej strane si myslím, že vyrobiť veľmi malé kvapky je asi ľahšie ako veľmi malé bubliny, takže je asi reálnejšie vytvoriť tlak vnútri povedzme dvojnásobný ako vonku. A ešte keď si predstavím maličké kvapky z *ortute* (neviem, či existujú aj bubliny z ortute), ktorá má povrchové napätie asi šesť a pol krát väčšie ako voda a skoro dvadsať krát väčšie ako mydlová voda, začína sa črtať možnosť aj zaujímavejšieho rozdielu tlakov vnútri/vonku.

Poďakovanie

Prednášku na Akadémiu trojstenu 2009 si u mňa objednali Michal a Marcel. Tak som si rozmyslel a spísal toto.

Literatúra

[1] D. Ilkovič: Fyzika, Alfa, Bratislava, 1972 (5.vydanie)
[2] B.O'Neill: Elementary differential geometry, Academic Press, 1967
[3] M.Božek: prednášky z diferenciálnej geometrie na FMFI