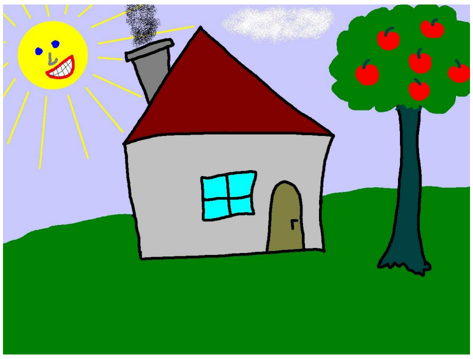
Gaussova-Bonnetova veta - zimná škola '09

Marián Fecko*
KTF&DF, FMFI UK, Bratislava

Prednáška odznela dňa 4.2.2009 na FMFI v Bratislave v rámci Zimnej školy



Obr. 1: Rodný dom Gaussa a Bonneta (dnes múzeum)

Obsah

*e-mail: `fecko@fmph.uniba.sk`

1 Úvod

Gaussova-Bonnetova veta hovorí, že súčet integrálu Gaussovej krivosti K po dvojrozmernej ploche S a integrálu geodetickej krivosti k po hranici ∂S tejto plochy je 2π-násobkom istého celého čísla, Eulerovej charakteristiky $\chi(S)$ plochy:

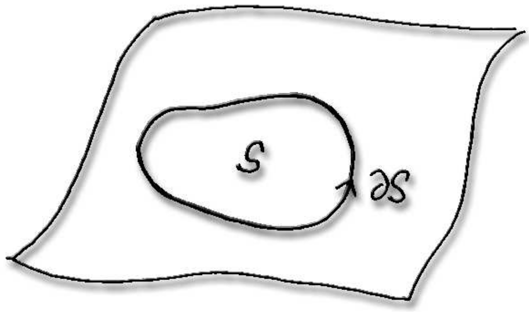
$$\boxed{\int_S K dA + \oint_{\partial S} k ds = 2\pi\chi(S)} \tag{1}$$

(Dvom členom vľavo sa hovorí aj *totálna Gaussova* a *totálna geodetická* krivosť.) V jednoduchšom prípade uzavretej plochy ($\partial S = 0$) tam krivkový integrál nefiguruje a ostane

$$\int_S K dA = 2\pi\chi(S) \qquad \text{ak } \partial S = 0 \tag{2}$$

Tvrdenie (1), známe už vyše poldruha storočia, je naozaj pozoruhodné.

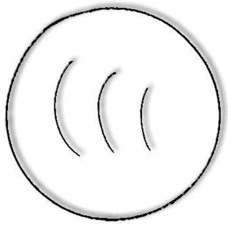
Tak napríklad Gaussova krivosť je istá funkcia na ploche a geodetická krivosť je istá funkcia na jej hranici. (Obe závisia od metriky g na ploche: $K \equiv K_g$ a $k \equiv k_g$.) Je iste veľmi zvláštnym obmedzením na tieto dve funkcie, že uvedený súčet integrálov je (po predelení 2π) *vždy celé* číslo.



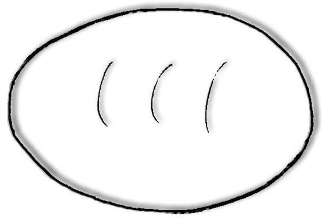
Obr. 2: Plocha S a jej hranica ∂S

Ďalej, Eulerova charakteristika $\chi(S)$ je topologický invariant. Preto zmena metriky g na ploche (vyvolaná prakticky napríklad iným vložením plochy do E^3) nijako neovplyvňuje pravú stranu rovnice. Potom ale nemôže ovplyvňovať ani ľavú stranu. Tam sa ale formálne metrika g vyskytuje. A to je prekvapujúce.

Predstavme si napríklad sféru a povrch vajca. Vajce je len zdeformovaná sféra, takže obe plochy sú topologicky rovnaké. Majú preto rovnakú Eulerovu charakteristiku (má, ako uvidíme, hodnotu 2). Obe plochy majú z E^3 indukované aj metriky, a to zjavne rôzne. Majú teda aj rôzne Gaussove krivosti. Napriek tomu integrál zmenenej krivosti po zmenenej ploche dá to isté číslo, ako integrál pôvodnej krivosti po pôvodnej ploche. Ak by sme neuvažovali celú sféru, ale napríklad len jej časť (a zodpovedajúcu časť vajca), vstúpili by do hry aj ich hranice a geodetické



Obr. 3: Sféra



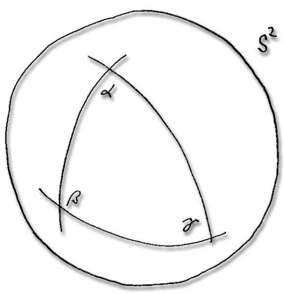
Obr. 4: Vajce

krivosti týchto hraníc a aj keď aj ony by sa deformáciou menili, nový krivkový integrál v súčte s novým plošným integrálom by sa presne rovnali pôvodnému súčtu.

Gaussova-Bonnetova veta úzko súvisí s rôznymi, napohľad úplne inými tvrdeniami. Ako uvidíme, jedným z nich je aj oveľa skôr známa *Girardova veta.* Tá hlása, že súčet vnútorných uhlov *sférického geodetického* trojuholníka (teda trojuholníka na sfére, ktorého strany sú tvorené časťami veľkých kružníc) je daný vzorcom

$$\alpha + \beta + \gamma \; = \pi + A/R^2 \tag{3}$$

kde A je plocha tohoto trojuholníka a R je polomer sféry.



Obr. 5: Súčet uhlov (geodetického) trojuholníka na sfére je viac ako π

[Trocha historickej osvety: Albert Girard, 1595-1632, pôvodom Francúz, žil v Leidene (Holandsko). Dôvodom emigrácie bolo jeho náboženstvo - byť kalvínskeho vierovyznania nebolo vtedy vo Francúzsku optimálne. Spomínaná veta je v jeho diele o trigonometrii, ktoré vyšlo v roku 1626. Ako to už chodí, Girard, po ktorom sa dnes veta volá, nie je celkom jej objaviteľom. Sformuloval a napísal ju aj s dôkazom (ale asi nepublikoval) v roku 1603 Angličan Thomas Harriot (1560-1621). Tento čudný človek objavil o.i. Snellov zákon 20 rokov pred Snellom, pozoroval ďalekohľadom Mesiac a zakreslil čo videl niekoľko mesiacov pred Galileom. Jednoducho, taký anglický Jára Cimrman.

Nemec Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Francúz Pierre Ossian Bonnet (1819-1892). Gauss vraj "poznal istú verziu tejto vety ale nikdy ju nepublikoval", zatiaľ čo Bonnet "publikoval jej špeciálny prípad v roku 1848". Bonnet okrem toho vraj aj zaviedol samotný pojem geodetickej krivosti, ktorý figuruje v tej všeobecnejšej verzii. Gaussovu krivosť zaviedol (prekvapujúco) Gauss.]

Gaussova-Bonnetova veta je historickým prototypom mnohých moderných tvrdení (z 20-teho storočia), ktoré ju rôznym spôsobom zovšeobecňujú (napríklad jej 2n-rozmernej verzie; na ňu treba zaviesť o.i. Eulerovu charakteristiku pre viacrozmerné variety, čo sa dá). V pôvodnej G-B vete je pod plošným integrálom (v modernom cartanovskom zápise) 2-forma $\Omega^{ab}\epsilon_{ab}$ a formy podobnej (všeobecnejšej) štruktúry sú v centre záujmu teórie tzv. charakteristických tried.

Kľúčové slová Gauss-Bonnet dnes nájdeme aj v mnohých súčasných článkoch o strunách a gravitácii. Totiž ešte iné zovšeobecnenie podintegrálnej formy $\Omega^{ab}\epsilon_{ab}$ vedie na možnosť študovať alternatívne lagranžiány pre gravitačné pole, ktoré sú zaujímavé hlavne pre viac(ako štvor)rozmerné teórie. (Pripomeňme, že podintegrálny výraz v *štandardnom* - už skoro storočnom - *Hilbertovom* účinku pre gravitačné pole je 4-forma $\epsilon_{abcd}\Omega^{ab} \wedge e^c \wedge e^d$.)

V tomto texte sa však zameriame len na klasickú verziu vety. Budeme používať Cartanov prístup k opisu konexie. Jeho výklad môže čitateľ nájsť napríklad v knihe [5], v kapitole "Paralelný prenos a lineárna konexia na M". Tým sa tento text dá chápať aj ako jedno (trochu rozsiahlejšie :-) cvičenie k tejto kapitole.

2 Celkový uhol otočenia dotykového vektora pre slučku γ

V tejto kapitole sa najprv študuje nasledujúci problém. Sme na dvojrozmernej ploche (variete) s riemannovskou metrikou a orientáciou (vznikla napríklad vložením do E^3, ale nie je to nevyhnutné). Máme na nej hladkú slučku, ktorá je hranicou istej oblasti. V *celej* tej oblasti (vrátane hranice) je dané aj ortonormované repérne pole. Najjednoduchšie je predpokladať, že tá slučka je celá (aj s tým, čo ohraničuje) v nejakej *súradnicovej* oblasti. Pohybujeme sa po slučke dookola a všímame si, ako sa točí jej dotykový vektor voči repérnemu poľu. Odvodí sa, čo sa stane (o koľko sa otočí) na malom kúsku a celkový uhol otočenia je sumou (integrálom) týchto príspevkov za malé kúsky. Zmyslom ale nie je zistiť tento uhol, lebo ten je zrejmý - je to 2π (práve jedna otočka). Naozajstným zmyslom je získanie rovnice, podľa ktorej sa akési integrály (získané zbieraním toho uhla otočenia) rovnajú tomu 2π, čo by sme ináč ani netušili. Dostaneme špeciálny prípad Gaussovej-Bonnetovej vety.

Potom sa pozrieme čo treba k doterajšiemu pridať, ak hranica *nie je* hladká (napríklad pre trojuholník).

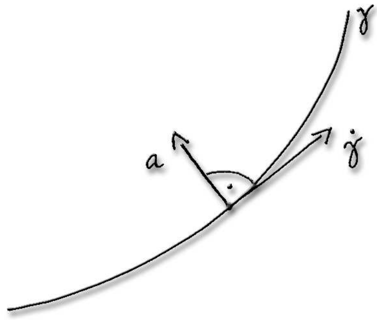
Napokon sa pozrieme na plochy, ktoré vieme *rozložiť* na trojuholníky, čím sa to globalizuje, do hry sa dostane Eulerova charakteristika a objaví sa všeobecné tvrdenie Gaussovej-Bonnetovej vety.

2.1 Vyjadrenie uhla otočenia cez integrál geodetickej a Gaussovej krivosti

Najprv si povdzme, čo je to tá geodetická krivosť k, ktorá figuruje v Gaussovej-Bonnetovej vete (1).

Máme hocijakú hladkú krivku γ na (dvojrozmernej) ploche. Parametrizujeme ju "prirodzene", t.j. uvažujeme ju už od začiatku parametrizovanú ako $\gamma(s)$ tak, že $||\dot{\gamma}|| = 1$. Potom, ako je známe, vektor *zrýchlenia* $a = \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$ je *kolmý* na vektor rýchlosti $\dot{\gamma}$

$$g(a, \dot{\gamma}) = 0$$



Obr. 6: Pri pohybe jednotkovou rýchlosťou je zrýchlenie kolmé na rýchlosť

▼

Lebo $0 = \nabla_{\dot{\gamma}} 1 = \nabla_{\dot{\gamma}} g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 2g(a, \dot{\gamma})$. ▲

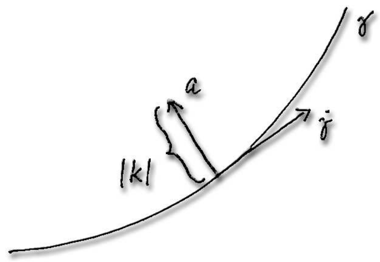
Keďže sme na *dvoj*rozmernej ploche (variete), sú (už len) dve diskrétne možnosti na smer vektora a. Kolmý "vľavo" alebo "vpravo". Nazveme w *jednotkový* ($||w|| = 1$) vektor kolmý na $\dot{\gamma}$, smerom doľava. (Ak je na ploche orientácia, tak sa to povie tak, že (ortonormovaný) repér $(\dot{\gamma}, w)$ má byť *pravotočivý*.)

Definícia je teraz taká, že geodetická krivosť k je plus/mínus *veľkosť* vektora a, plus vtedy, keď a trčí vľavo a mínus ak a trčí vpravo od $\dot{\gamma}$: stručne

$$a =: kw \tag{4}$$

(Na plochách v E^3 sa to vyjadruje pomocou vonkajšej normály $\mathbf{n}$: urobí sa vektorový súčin $\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{r}}$ (čo je *jednotkový* vektor smerujúci *doľava* voči $\dot{\mathbf{r}}$) a urobí sa skalárny súčin zrýchlenia $\mathbf{a}$ s týmto vektorom, čím sa získa práve plus/mínus veľkosť vektora $\mathbf{a}$.)

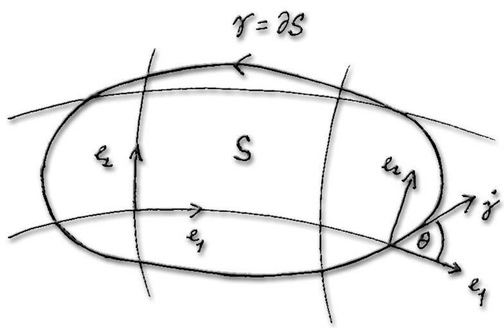
Aký je geometrický význam geodetickej krivosti k? Najprv si spomenieme, že v teórii kriviek v obyčajnej euklidovskej rovine je na rovnakej myšlienke založený pojem *krivosti* (rovinnej) *krivky* (krivosti bez prívlastku). A príde sa jednoducho na to, že mať v danom mieste krivosť k znamená, že v tomto mieste ideme do zákruty polomeru $r = 1/k$. Tu (na všeobecnej dvojrozmernej ploche) je to to isté, len pojem zákruta je jemnejší, lebo jemnejší je aj pojem "ísť rovno" (keď zákruta nie je). Rovno sa ide po *geodetike*, a preto zákruta sa myslí *oproti geodetike* (s rovnakou rýchlosťou v danom bode). A preto sa aj tá krivosť volá geodetická.



Obr. 7: Geodetická krivosť k je plus/mínus veľkosť vektora a

Teraz sa už vráťme k situácii, ktorá nás zaujíma. Nech je teraz krivkou *slučka* γ, ktorá je navyše *hranicou* nejakej dvojrozmernej oblasti $S \subset (M, g)$, $\gamma = \partial S$. A nech je *v celej* oblasti S (vrátane jej hranice $\gamma = \partial S$), definované hladké ortonormované repérne pole e_a. Potom sú voči tomuto poľu na celom S dobre definované formy (metrickej a symetrickej) konexie ω^a_b, pričom, ako obyčajne, je celá informácia o nich v jedinej 1-forme α danej parametrizáciou $\omega_{ab} = \epsilon_{ab}\alpha$ (pozri 15.6.10 v knihe [5]). Podobne všetko o 2-formách krivosti Ω^a_b je v jedinej forme $d\alpha$, lebo $\Omega_{ab} = \epsilon_{ab} d\alpha$.

Trochu popočítame. Zavedieme uhol θ medzi e_1 a $\dot{\gamma}$.



Obr. 8: Definícia uhla θ

Potom

$$
\begin{aligned}
\dot{\gamma} &= \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2 \\
w &= -\sin\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2
\end{aligned}
$$

a jednoduchý výpočet dáva

$$a = (\dot{\theta} - \langle \alpha, \dot{\gamma} \rangle)\ w$$

▼ Lebo

$$\begin{aligned} a &\equiv \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} \\ &= \nabla_{\dot{\gamma}}(\cos\theta\ e_1 + \sin\theta\ e_2) \\ &= -\dot{\theta}\sin\theta\ e_1 + \cos\theta\langle \omega_1^2, \dot{\gamma}\rangle e_2 + \dot{\theta}\cos\theta e_2 + \sin\theta\langle \omega_2^1, \dot{\gamma}\rangle e_1 \\ &= -\dot{\theta}\sin\theta\ e_1 - \cos\theta\langle \alpha, \dot{\gamma}\rangle e_2 + \dot{\theta}\cos\theta e_2 + \sin\theta\langle \alpha, \dot{\gamma}\rangle e_1 \\ &= (\dot{\theta} - \langle \alpha, \dot{\gamma}\rangle)\ (-\sin\theta\ e_1 + \cos\theta\ e_2) \\ &= (\dot{\theta} - \langle \alpha, \dot{\gamma}\rangle)\ w \end{aligned}$$

▲

Porovnanie s definíciou (4) poskytuje vyjadrenie

$$k = \dot{\theta} - \langle \alpha, \dot{\gamma} \rangle$$

odkiaľ

$$\begin{aligned} d\theta &= kds + \langle \alpha, \dot{\gamma}\rangle ds \\ &= kds + \gamma^*\alpha \end{aligned}$$

Toto $d\theta$ sa dá chápať aj ako prírastok uhla θ pri posune pozdĺž krivky (hranice) o kúsok dĺžky ds. O toľko sa teda otočí vektor rýchlosti krivky. Po obídení celej slučky sa otočí o toľko, koľko sa nazbiera za všetky takéto kúsky

$$[\theta]_{\circlearrowleft} = \oint_{\partial S} d\theta = \oint_{\partial S}(kds + \gamma^*\alpha) = \oint_{\partial S} kds + \int_S d\alpha = \oint_{\partial S} kds + \int_S K e^1 \wedge e^2$$

kde sa využila definícia (v cartanovskom jazyku) *Gaussovej krivosti* K

$$d\alpha =: K e^1 \wedge e^2 \tag{5}$$

(pozri 15.6.10 a 15.6.13 v knihe [5]; je to funkcia na ploche, ktorá je faktorom medzi 2-formou krivosti $d\alpha$ a kanonickou metrickou plošnou 2-formou $e^1 \wedge e^2$). Celkový uhol otočenia vektora rýchlosti tak je

$$[\theta]_{\circlearrowleft} = \oint_{\partial S} kds + \int_S K dA \tag{6}$$

Zároveň je však *zrejmé, o koľko* sa tento vektor otočí: na konci vyzerá tak ako na začiatku (je to hladké vektorové pole na krivke) a keďže uvažujeme takú jednoduchú oblasť, ako uvažujeme, je zrejmé, že sa otočí *práve raz* proti smeru hodinových ručičiek, teda o 2π. Preto platí

$$\oint_{\partial S} kds + \int_S K dA = 2\pi \tag{7}$$

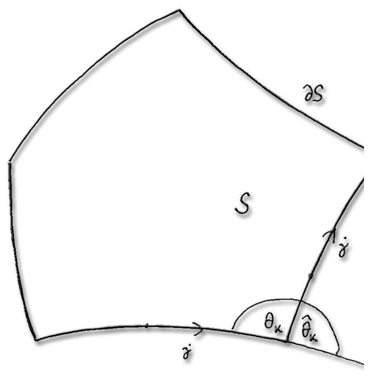
No ale to už je tvrdenie (1) pre $\chi(S) = 1$ (čo je, ako nahliadneme neskôr, práve hodnota $\chi(S)$ pre také oblasti S, aké sa tu uvažovali).

2.2 Mnohouholník - zarátanie skokov v rohoch

Výsledok (6) platí pre *hladkú* hranicu. Čo by sa zmenilo, ak by sme to chceli rátať pre mnohouholník (napríklad pre trojuholník na sfére)? Bolo by treba zobrať do úvahy, že jeho hranica nie je hladká krivka, len *po častiach* hladká.

Uvažujme chvíľu v pohľade "hladkej aproximácie". Namiesto naozajstných vrcholov mnohouholníka by sa príslušné rohy trošku "zaoblili" a získala sa hladká hranica. V okolí tých bývalých rohov by bola veľmi prudká zákruta, t.j. veľmi veľké k. Priebeh funkcie $k(s)$ na takejto zaoblenej hranici ∂S by bol taký, že na tých slušných úsekoch by to malo nejaké rozumné hodnoty a v tesnom okolí tých bývalých rohov by to zrazu prudko stúplo (a za zákrutou opäť kleslo). V limite by sa to dalo vyjadriť nejakými delta-funkciami v tých rohoch a krivkový integrál v (6) by mal tú svoju slušnú časť *plus* nejaké čísla za tie delty v rohoch. Presne to sa tu urobí o chvíľu rukou - rovno sa napíše dodatočný člen za správne skoky vo vrcholoch. Je však dobré si uvedomiť, že to započítanie skokov v rohoch by sa dalo uhrať aj rovno vzorcom (6), len by sa musela buď rohatá hranica zaobľovať alebo prejsť ku $k(s)$ s delta-funkciami. Ani jedno ani druhé nie je nijako lákavé, najmä ak vidíme o čo tam ide a vieme to urobiť jednoduchšie.

Nech skok v k-tom vrchole je $\hat{\theta}_k$ a uvažujme n-uholník. Potom treba k pravej strane (6) pridať dodatočný uhol $\hat{\theta}_1 + \cdots + \hat{\theta}_n$. Teraz si uvedomíme, že uhol $\hat{\theta}_k$ je *vonkajší* uhol v k-tom vrchole, pričom definícia vonkajšieho je taká, že spolu s vnútorným θ_k dávajú *priamy*, t.j. $\hat{\theta}_k + \theta_k = \pi$.



Obr. 9: k-ty vrchol: vonkajší uhol $\hat{\theta}_k$ a vnútorný uhol θ_k

Preto

$$\hat{\theta}_1 + \cdots + \hat{\theta}_n = (\pi - \theta_1) + \cdots + (\pi - \theta_n) = n\pi - \sum(\text{vnútorné uhly})$$

Výsledok (6) sa teda pre n-uholník opravuje na

$$[\theta]_{\circlearrowleft} = \oint_{\partial S} k ds + \int_S K dA + n\pi - \sum(\text{vnútorné uhly})$$

pričom pod ∂S tu treba chápať len hladké časti hranice (hrany mnohouholníka). Lenže ani tu sa nič nemení na fakte, že celkový uhol $[\theta]_{\circlearrowleft}$ je vopred známy a je to 2π, lebo smer jazdy vykoná počas jedného obehu po hranici mnohouholníka práve jednu celú otočku proti smeru hodinových ručičiek (vrátane tých skokov vo vrcholoch). Preto platí konečný všeobecný výsledok pre súčet uhlov n-uholníka S na (hoci aj krivej) ploche

$$\sum(\text{vnútorné uhly}) = \oint_{\partial S} kds + \int_S KdA + (n-2)\pi \tag{8}$$

Dôležitým špeciálnym prípadom je *geodetický* n-uholník, t.j. taký, ktorého hrany sú geodetiky. Na geodetike je nulové zrýchlenie, čiže $k = 0$, a preto tam príspevok za krivkový integrál chýba. Ostane

$$\sum(\text{vnútorné uhly}) = \int_S KdA + (n-2)\pi$$

Napríklad pre súčet uhlov v geodetickom trojuholníku (takže $n = 3$) na sfére polomeru ρ (takže $K = 1/\rho^2$) dostávame

$$\text{súčet vnútorných uhlov geodetického trojuholníka na sfére} = \pi + A/\rho^2$$

kde A je jeho plocha. Čo je ale presne Girardova veta (3).

2.3 Triangulácia plochy a ako sa objaví Eulerova charakteristika

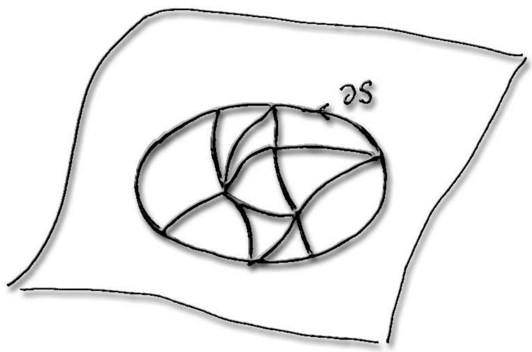
Výsledok (8) dáva pre jeden trojuholník (ktorý celý leží v nejakej súradnicovej oblasti na ploche)

$$\sum(\text{vnútorné uhly } \triangle) = \oint_{\partial\triangle} kds + \int_\triangle KdA + \pi \tag{9}$$

Teraz si predstavíme plochu S. Nemusí byť uzavretá, môže mať aj *hladkú* hranicu ∂S. Rozparcelujeme ju na trojuholníky (triangulujeme), pričom si dávame pozor, aby každý trojuholník bol celý v nejakej súradnicovej oblasti na uvažovanej ploche.

Na každý sa teda dá aplikovať výsledok (8). Tak aplikujeme. Napíšeme si všetky získané rovnice pekne pod seba (za každý trojuholník je jedna rovnica) a sčítame ich. Stane sa pritom toto:

- sčítanie všetkých členov $\int_\triangle KdA$ dá jednoducho integrál cez celú plochu, $\int_S KdA$
- sčítanie všetkých členov $\oint_{\partial\triangle} kds$ dá jednoducho integrál cez celú hranicu, $\oint_{\partial S} kds$ (po každej vnútornej hrane sa prejde dvakrát, a to proti sebe, čo dá nulu; vonkajšie hrany dajú hranicu)



Obr. 10: Plochu S rozparcelujeme na trojuholníky (triangulujeme)

Ostane teda

$$\sum(\text{vnútorné uhly všetkých } \triangle) = \int_S K dA + \oint_{\partial S} k ds + f\pi \tag{10}$$

kde f je počet trojuholníkov, ktorými sa plocha triangulovala.

Teraz sa dajú urobiť tri jednoduché výpovede.

Po prvé, súčet tých uhlov trojuholníkov, ktoré sa zbiehajú [1] v jednom (každom) *vnútornom* vrchole (takom, ktorý neleží na hranici) je 2π a súčet tých uhlov, ktoré sa zbiehajú v jednom (každom) *vonkajšom* vrchole (takom, ktorý leží na hranici) je π (keďže hranica je hladká).

To znamená, že ľavá strana rovnice (10) sa dá napísať ako

$$2\pi v_i + \pi v_b$$

kde v_i je počet vnútorných vrcholov daného rozparcelovania a v_b je počet vrcholov na hranici.

Po druhé, každý trojuholník má tri hrany. Sú opäť buď vnútorné alebo na hranici. Pre vnútorné je každá hrana spoločná pre práve dva trojuholníky, hrany na hranici sa započítavajú len raz. Preto medzi počtom stien a týchto dvojakých hrán je jednoduchý vzťah

$$3f = 2e_i + e_b$$

No a po tretie na hranici je počet vrcholov rovnaký, ako počet hrán (lebo ona už nemá hranicu, takže každý vrchol sa dá chápať ako začiatok istej hrany a keď to obídeme, tak koniec poslednej hrany je začiatkom prvej)

$$e_b = v_b$$

[1] Pozor, uvažujú sa trojuholníky nakreslené na hladkej ploche S, nie diskretizovaná verzia plochy, pozostávajúca z "rovných"trojuholníkov. Okolie každého vrcholu je teda malá rovinka a uhly sa tam naozaj sčítajú na 2π resp. π.

Napíšeme si to spolu:

$$\begin{aligned} 2\pi v_i + \pi v_b &= \textstyle\int_S K dA + \oint_{\partial S} k ds + \pi f \\ 2e_i + e_b &= 3f \\ e_b &= v_b \end{aligned}$$

Odtiaľ okamžite vyplýva (drobné cvičenie), že

$$\int_S K dA + \oint_{\partial S} k ds = 2\pi(f - e + v)$$

kde $e \equiv e_i + e_b$ je celkový počet hrán a $v \equiv v_i + v_b$ je celkový počet vrcholov.

Číslo (zjavne *celé*) priradené ploche S predpisom

$$\boxed{\chi(S) := f - e + v} \tag{11}$$

je slávna *Eulerova charakteristika* plochy S. Ukazuje sa (inde, nie tu :-), že nezávisí od konkrétnej triangulácie a že to je jej *topologický invariant* - nemení sa pri spojitých deformáciách tejto plochy. Dostávame tak vytúžený výsledok

$$\int_S K dA + \oint_{\partial S} k ds = 2\pi\chi(S) \qquad \textit{Gaussova-Bonnetova veta}$$

avizovaný v (1).

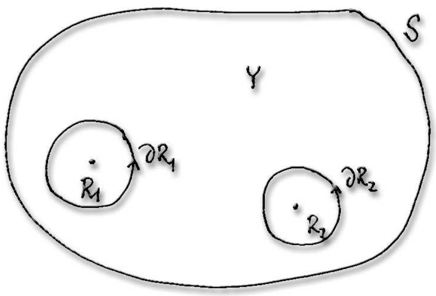
3 Eulerova charakteristika a kritické body hladkých funkcií

Predpokladajme, že na uzavretej ploche S máme ľubovoľnú hladkú funkciu takú, že má len nedegenerované kritické body. Potom sa ukazuje, že samotná znalosť počtu a typu týchto kritických bodov (minimá, maximá, sedlové body) už stačí na výpočet Eulerovej charakteristiky tejto plochy. Vidno to (aj) z úvah a výpočtov, ktoré úzko súvisia s Gaussovou-Bonnetovou vetou a jej dôkazom.

3.1 Ako sa počíta $\chi(S)$ pomocou kritických bodov

Predpokladáme, že na uzavretej ploche S máme funkciu $f : S \to \mathbb{R}$ a že táto funkcia má len nedegenerované kritické body (Morseova funkcia). Tú nedegenerovanosť si všimneme bližšie až v ďalšom paragrafe (keď ju bude naozaj treba). Zatiaľ využijeme len to, že máme *kritické* body. V nich je (podľa definície) $df = 0$, takže *mimo nich* máme k dispozícii *gradientné* (vektorové) pole $\nabla f = \sharp_g df$. Toto pole normujeme na jednotku a nazveme ho e_1.

Vďaka nedegenerovanosti sú kritické body izolované (bude neskôr). Preto ich môžeme obkolesiť malými krúžkami. Označíme tieto malé krúžky okolo kritických



Obr. 11: Y je plocha S mínus všetky krúžky okolo kritických bodov

bodov R_i (okolo i-teho) a nech sú $\gamma_i = \partial R_i$ ich hranice, čo sú malé uzavreté krivky (slučky) okolo kritických bodov (γ_i okolo i-teho).

Nech je teraz Y doplnok k tým všetkým krúžkom (plocha S mínus všetky tie krúžky).

Uvedomíme si, že na celom tomto Y máme dobre definované jednotkové vektorové pole e_1 a (ak predpokladáme na S aj orientáciu) tiež druhé jednotkové vektorové pole e_2, ktoré je naň kolmé a (e_1, e_2) tvoria *pravé ortonormované repérne pole*. A voči *tomuto* repérnemu poľu máme na Y aj formu konexie α a krivosti $d\alpha$.

Teraz nastúpi štandardný výpočet, ktorý sa osvedčil v kontexte Gaussovej-Bonnetovej vety. Na i-tej slučke $\gamma_i = \partial R_i$ zavedieme uhol θ_i ako uhol medzi dotykovým vektorom $\dot\gamma_i$ k tejto slučke (v prirodzenej parametrizácii) a repérnym vektorom e_1, t.j. položíme

$$\begin{aligned} \dot\gamma_i &= \cos\theta_i \; e_1 + \sin\theta_i \; e_2 \\ w_i &= -\sin\theta_i \; e_1 + \cos\theta_i \; e_2 \end{aligned}$$

(w_i je taký, že $(\dot\gamma_i, w_i)$ tvoria pravé ortonormované repérne pole na slučke γ_i). Potom

$$a_i = (\dot\theta_i - \langle \alpha, \dot\gamma_i \rangle) \; w_i$$

odkiaľ

$$d\theta_i = (k)_i ds + \gamma_i^* \alpha$$

a napokon pre celkový uhol otočenia vektora i-tej rýchlosti

$$[\theta_i]_{\circlearrowleft} = \oint_{\gamma_i} (k)_i ds + \oint_{\gamma_i} \alpha \tag{12}$$

(výpočty prebiehajú rovnako ako pri odvodení (6)). Teraz si uvedomíme, že všetky γ_i dokopy tvoria akurát *hranicu* oblasti Y, presnejšie že platí [2]

$$-\partial Y = \sum_i \gamma_i$$

[2] Ide o znamienko - oblasť Y je na "opačnej strane" od γ_i, ako sú R_i.

To znamená, že ak *sčítam* všetky rovnice (12), dostaneme

$$\int_Y d\alpha = \sum_i \oint_{\gamma_i} (k)_i ds - \sum_i [\theta_i]_{\circlearrowleft}$$

t.j.

$$\int_Y KdA = \sum_i \oint_{\gamma_i} (k)_i ds - \sum_i [\theta_i]_{\circlearrowleft} \tag{13}$$

Fajn. Teraz sa zameriame na krúžky R_i. Zoberieme i-ty z nich. Jeho hranicou je $\gamma_i = \partial R_i$. V tomto krúžku fixujeme ľubovoľné ortonormované pravotočivé repérne pole $(\hat{e}_1, \hat{e}_2)$. Zavedieme uhol ϕ_i ako odklon i-tej rýchlosti $\dot{\gamma}_i$ od vektora $\hat{e}_1$, t.j. zapíšeme

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_i &= \cos\phi_i \ \hat{e}_1 + \sin\phi_i \ \hat{e}_2 \\ w_i &= -\sin\phi_i \ \hat{e}_1 + \cos\phi_i \ \hat{e}_2 \end{aligned}$$

Ak forma konexie voči tomuto poľu je $\hat{\alpha}$, tak analógom (12) bude

$$[\phi_i]_{\circlearrowleft} = \oint_{\gamma_i} (k)_i ds + \oint_{\gamma_i} \hat{\alpha}$$

a keďže $\gamma_i = \partial R_i$, posledný člen možno prepísať pomocou Stokesovej vety, pričom sa pod integrálom objaví 2-forma

$$d\hat{\alpha} = d\alpha = KdA$$

t.j. *tá istá* 2-forma KdA, ktorá je aj v integráli (13).

▼ Forma KdA žije na celej ploche. V časti Y, v krúžkoch, ba aj priamo v kritických bodoch funkcie f (o jej existencii nič nevie a môže jej byť, povedzme si otvorene, ukradnutá). Vyjadrujeme ju však v týchto oblastiach voči rôznym repérnym poliam. Všeobecne sa pri zámene $e \mapsto eB$ repérneho poľa udejú zámeny $\omega \mapsto B^{-1}\omega B + B^{-1}dB$ a $\Omega \mapsto B^{-1}\Omega B$. Tu máme pravé ortonormované repéry a sme na 2-rozmernej variete, takže $B \in SO(2)$. To sa dá parametrizovať cez jediný uhol, nejaké χ, pričom tento uhol je hladkou funkciou v krúžku R_i (mínus samotné kritické body). Ak sa ešte využije $\omega_{ab} = \epsilon_{ab}\alpha$ a $\Omega_{ab} = \epsilon_{ab}\beta$, dáva to $\alpha \mapsto \alpha + d\chi$ a $\beta = d\alpha \mapsto d(\alpha + d\chi) = \beta$. Preto

$$d\hat{\alpha} = \hat{\beta} = \hat{K}\hat{e}^1 \wedge \hat{e}^2 = \beta = Ke^1 \wedge e^2 \qquad \hat{K} = K$$

Čiže aj keď forma konexie závisí od repérneho poľa, forma krivosti (v tomto špeciálnom prípade) od repérneho poľa nezávisí. Keďže od neho nezávisí ani plošný element $e^1 \wedge e^2 \equiv dA$, nezávisí od neho ani Gaussova krivosť K. ▲

Platí teda

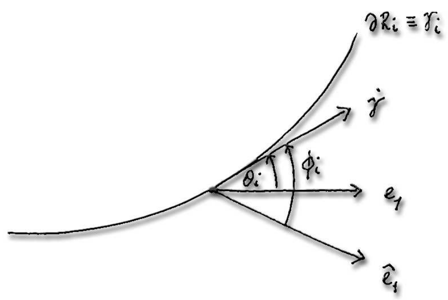
$$\int_{R_i} KdA = [\phi_i]_{\circlearrowleft} - \oint_{\gamma_i} (k)_i ds$$

Ak teraz toto sčítame cez všetky krúžky R_i a pripočítame k tomu ešte aj (13), dostaneme vyjadrenie pre integrál Gaussovej krivosti cez *celú plochu* $S = Y + \sum_i R_i$ v tvare

$$\int_S K dA = \sum_i [\phi_i]_{\circlearrowleft} - \sum_i [\theta_i]_{\circlearrowleft} \equiv \sum_i [\phi_i - \theta_i]_{\circlearrowleft} \tag{14}$$

(lebo krivkové integrály $\oint_{\gamma_i} (k)_i ds$ vstupujú do súčtu s opačnými znamienkami a zrušia sa).

Aký má význam uhol $\phi_i - \theta_i$, ktorý sa tam objavil? Keďže ϕ_i je uhol od $\hat{e}_1$ po $\dot{\gamma}_i$ a θ_i je uhol od $e \equiv e_1$ po (to isté) $\dot{\gamma}_i$, ich rozdiel $\phi_i - \theta_i$ je uhol od $\hat{e}_1$ po $e_1 \equiv e$, t.j. od ľubovoľne zvoleného repérneho poľa v i-tom krúžku R_i po dané gradientné pole generované funkciou f.



Obr. 12: Uhol $\phi_i - \theta_i$ je uhol od $\hat{e}_1$ po e_1

Potom $[\phi_i - \theta_i]_{\circlearrowleft}$ je práve $2\pi-$násobok *navíjacieho čísla* gradientného poľa voči (ľubovoľne zvolenému) repérnemu poľu v i-tom krúžku R_i (hovorí, koľkokrát sa otočí gradientné pole voči repérnemu poľu pri obídení hranice krúžka). Už toto samotné je zaujímavé, lebo to opäť potvrdzuje, že $(1/2\pi)$-násobok celkovej Gaussovej krivosti (integrálu Gaussovej krivosti cez celú plochu) je nevyhnutne *celé* číslo

$$\frac{1}{2\pi} \int_S K dA = \text{ súčet nejakých navíjacích čísel } = \textit{ celé } \text{číslo}$$

Ak by sa navyše toto číslo dalo nejako rozumne zistiť, vedeli by sme, ako ukazuje (14), vypočítať integrál Gaussovej krivosti cez celú plochu a ten by nám zase, podľa (2), dal Eulerovu charakteristiku plochy S. A to sme chceli. Takže hor sa do úvah o tých navíjacích číslach.

3.2 Príspevky za nedegenerované kritické body

Nedegenerované kritické body funkcie $f : S \to \mathbb{R}$ sú také, že sú jednak kritické (čiže je v nich nulové df) ale navyše sa v nich žiada *nenulovosť hessiánu.*

▼ Je to invariantná definícia (nezávisí od výberu súradníc)? Samotná kritičnosť bodu zjavne *je* (*df* existuje aj bez súradníc). Ako sa tranformuje Hessova matica? Takto:

$$\begin{aligned} H_{ij} &= \partial_i\partial_j f = J_i^k \partial'_k (J_j^r \partial'_r f) = J_i^k J_j^r (\partial'_k \partial'_r f) + (\partial_i J_j^r)(\partial'_r f) \\ &= J_i^k H'_{kr} J_j^r + (\partial_i J_j^r)(\partial'_r f) \end{aligned}$$

V kritickom bode však druhý člen vypadne a zostane

$$H_{ij} = (J^T H' J)_{ij}$$

takže pre *determinant* Hessovej matice (*hessián* H) platí

$$H = (\det J)^2 H'$$

Nenulovosť hessiánu *v kritickom bode* teda *je* invariantný pojem. ▲

Pozrime sa, aký vplyv na Taylorov rozvoj v okolí kritického bodu má požiadavka nenulovosti hessiánu. Nech P je kritický bod funkcie f a nech máme už súradnice x^i posunuté tak, že tento kritický bod má súradnice $x^i = 0$. Potom v bodoch blízkych k P máme

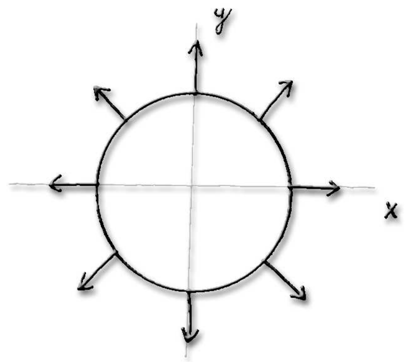
$$f(x) = f(P) + (\partial_i f)(P)x^i + \frac{1}{2}(\partial_i\partial_j f)(P)x^i x^j + \dots = f(P) + \frac{1}{2}H_{ij}x^i x^j + \dots$$

Spozorujeme, že tam máme (okrem konštantného člena, ktorý nemá vplyv na príslušné gradientné pole) symetrickú nedegenerovanú formu v x-och. Taká sa dá vhodnou (stačí už lineárnou) zámenou súradníc priviesť na kanonický tvar so samými kvadrátmi v plnom počte. Kritické body sú teda vždy *izolované.*

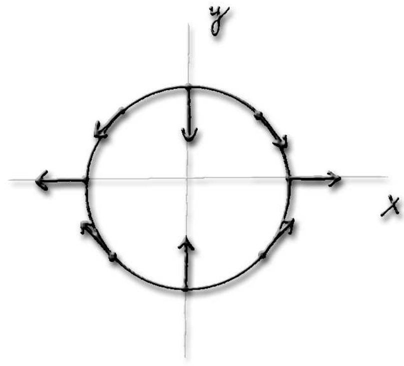
Obmedzíme sa teraz na dvojrozmernú plochu. Kritický bod je minimum (oba kvadráty s plusmi), maximum (oba s mínusmi) alebo sedlový bod (namiešané oboje). Kritické body sú teda len týchto *troch typov.* Na výrobu gradientného poľa potrebujeme metrický tenzor $g_{ij}(x)$ (na dvihnutie indexu). Keďže študujeme malé krúžky R_i, geometria na nich nebudé príliš vzdialená od euklidovskej (čím menšie krúžky, tým bude bližšia). A keďže ideme počítať navíjacie číslo, čo je *celé* číslo, ak by sme to počítali pre prípad *blízky* k euklidovskému a *presne* euklidovský, musíme dostať to isté. Takže sa to počíta pre *presne* euklidovský, kde $g_{ij}(x) = \delta_{ij} = g^{ij}(x)$. Keďže sa tá symetická matica H_{ij} dá priviesť na diagonálny tvar *ortogonálnou* transformáciou (t.j. nepokaziac pri tom $g_{ij} = \delta_{ij}$), máme v týchto na mieru ušitých súradniciach x, y

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}H_{ij}x^i x^j &= \tfrac{1}{2}(ax^2 + by^2) \\ df &= axdx + bydy \\ \nabla f &= ax\partial_x + by\partial_y \qquad\qquad 0 \neq a, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Takže teraz je úloha takáto: v malom krúžku R so stredom v počiatku roviny xy máme vektorové pole $ax\partial_x + by\partial_y$ a máme zrátať jeho navíjacie číslo voči nejakému fixnému (ortonormovanému pravotočivému) repérnemu poľu definovanému v celom



Obr. 13: Pole $x\partial_x + y\partial_y$ v niektorých bodoch kružnice



Obr. 14: Pole $x\partial_x - y\partial_y$ v niektorých bodoch kružnice

krúžku R. Takým je napríklad kartézske pole, ale dôležité je, že ľubovoľné iné definované v celom krúžku sa dá získať spojitou deformáciou kartézskeho, takže vzhľadom na celočíselnosť výsledku to dá vždy to isté ako pre kartézske.

Ďalšie zneužitie celočíselnosti výsledku (možnosti spojitých deformácií) spočíva v možnosti deformácie vektorového poľa ∇f (alebo samotnej funkcie f). Vidíme, že máme vlastne dvojparametrickú triedu týchto objektov, takže môžeme spojito deformovať parametre a, b a stále musíme dostať ten istý výsledok. Platí však podmienka, že oba parametre musia byť nenulové. To znamená, že dvojica (bod) (a, b) musí ležať mimo osí v rovine ab, t.j. vnútri jedného zo štyroch kvadrantov a deformovať sa smie len tak, aby sme neodišli z daného kvadrantu. To umožňuje vybrať z každého kvadrantu kanonických reprezentantov (dvakrát plus-mínus jednotky). Dá to tieto 4 možnosti

(a, b)	$2f$	typ kritického bodu	vektorové pole
$(1, 1)$	$x^2 + y^2$	minimum	$x\partial_x + y\partial_y$
$(-1, -1)$	$-x^2 - y^2$	maximum	$-x\partial_x - y\partial_y$
$(1, -1)$	$x^2 - y^2$	sedlový bod	$x\partial_x - y\partial_y$
$(-1, 1)$	$-x^2 + y^2$	sedlový bod	$-x\partial_x + y\partial_y$

Teraz si všimneme, že prvé dve vektorové polia sa líšia len celkovým znamienkom a to isté platí pre tretie a štvrté pole. Lenže ak sa dve polia líšia len znamienkom (čiže trčia proti sebe), pri putovaní po slučke sa točia vždy o rovnaký uhol a rovnakým smerom. Budú mať teda rovnaké navíjacie číslo. Stačí teda vyšetriť prvé a tretie pole. Keď si ich človek nakreslí v niektorých bodoch na kružnici (napríklad na osiach x, y a ešte pre istotu na osiach kvadrantov, spolu 8 šípiek pre jedno pole, pozri obrázky), je zrejmé, že prvé pole sa otočí po ceste raz proti smeru hodinových ručičiek a tretie pole sa otočí tiež raz, ale v smere hodinových ručičiek. Majú teda navíjacie čísla $+1$ a -1.

typ kritického bodu	navíjacie číslo
minimum, maximum	$+1$
sedlový bod	-1

To ale znamená, že súčet navíjacích čísel gradientného poľa vo všetkých kritických bodoch, ktorý figuruje na pravej strane (14), sa dá napísať ako počet miním plus počet maxím mínus počet sedlových bodov. No a keďže to má dať Eulerovu charaktristiku, máme jej vyjadrenie v tvare

$$\boxed{\chi(S) = \text{ počet maxím} - \text{počet sediel} + \text{počet miním}} \tag{15}$$

A toto platí pre *ľubovoľnú* funkciu f na S, ktorá má len nedegenerované kritické body.

Ukazuje sa, že pre mnohé uzavreté plochy sa oplatí zobrať ako f *funkciu výšky*. Jednoducho si tú plochu predstavíme niekde položenú v našom obyčajnom priestore a ako f zoberieme *z-ovú súradnicu* jednotlivých bodov na ploche. Kritické body *tejto* funkcie sa totiž ľahko hľadajú metódou „pozriem a vidím" a tá istá metóda vzápätí odhaľuje *aj ich typ*.

Príklad: Ak ako S zoberieme sféru S^2 a ako f na nej funkciu výšky (hodnota súradnice z, (Obr.15)), má to jedno maximum (celkom hore) a jedno minimum (dolu), takže to dáva $\chi(S^2) = 2$. Ak to chceme skontrolovať, predstavíme si na tej sfére nakreslený štvorsten (čím *je* triangulovaná). Ten má $f = 4, e = 6, v = 4$, takže $f - e + v = 2$. A ešte prípadne cez celkovú Gaussovu krivosť: $K = 1/\rho^2$, takže $\int_{S^2} K dA = (1/\rho^2)A = 4\pi\rho^2/\rho^2 = 4\pi$, čo sedí s (2) akk $\chi(S^2) = 2$.

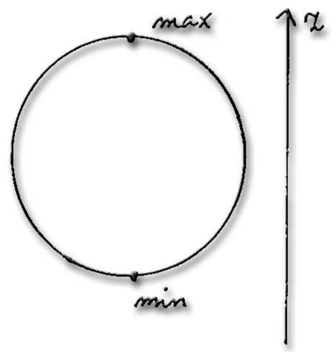
Príklad: Uvažujme ako S plochu S_g, ktorá má *genus* g. T.j. buď sféru S^2 s g rúčkami alebo gombík s g dierkami (ukazuje sa, že to je topologicky to isté). Špeciálne $g = 0$ dáva sféru a $g = 1$ dáva torus T^2. Potom dostaneme Eulerovu charakteristiku

$$\chi(S_g) = 2(1 - g)$$

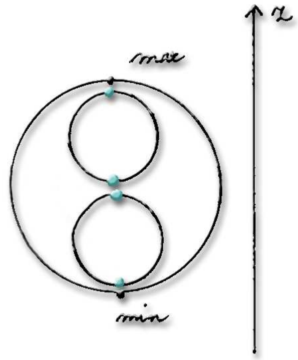
Naozaj, realizujeme to ako gombík, ktorý postavíme tak, aby boli všetky dierky pekne v rade pod sebou (pozri (Obr.16)). Ako f zvolíme opäť funkciu výšky (hodnota súradnice z). Má to jedno maximum (celkom hore), jedno minimum (dolu) a $2g$ sedlových bodov (v každej dierke jedno sedlo hore a jedno dolu). Takže to dáva $\chi(S_g) = 1 - 2g + 1$. Ak to chceme skontrolovať, vyrobíme si pracne topologicky ekvivalentnú paličkovú kostru, spočítame steny, hrany a vrcholy a zrátame $\chi(S_g) = f - e + v$. Ale to je len pre dosť veľkých nadšencov.

4 Zopár tvrdení, ktoré úzko súvisia s G-B vetou

Uvedieme tu zopár príkladov na tvrdenia, ktoré úzko súvisia s Gaussovou-Bonnetovou vetou (alebo sú jej dôsledkami), pričom niektoré z nich by mohli byť bez nej aj dosť náročné.



Obr. 15: Funkcia výšky na sfére: jedno maximum a jedno minimum



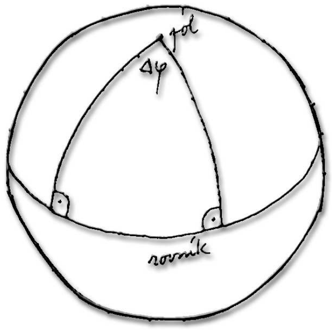
Obr. 16: Funkcia výšky na gombíku s dvoma dierkami: jedno maximum, jedno minimum a 4 sedlové body

Tvrdenie 1: Súčet uhlov trojuholníka v (euklidovskej) rovine je π.
Naozaj: Vzorec (9) dáva v rovine ($K = 0$) pre bežný trojuholník $n = 3, k = 0$ akurát π (prekvapujúce)
Tvrdenie 2: Súčet uhlov geodetického trojuholníka na sfére polomeru ρ je $\pi + A/\rho^2$
To je Girardova veta. Vzorec (9) dáva na sfére ($K = 1/\rho^2$) pre geodetický trojuholník ($k = 0$) akurát $\pi + A/\rho^2$
Tvrdenie 3: Predchádzajúci vzorec sa s obľubou overuje na trojuholníku, ktorý má ako vrcholy severný pól a dva body na rovníku, oddelené uhlom $\Delta\varphi$ (môže byť aj veľký; strany sú časti dvoch poludníkov a rovníka, Obr.17). Jeho súčet uhlov je $\Delta\varphi + \pi$ (dôkaz: pozriem a vidím), plocha $A = \rho^2\Delta\varphi$ (detto), takže $\Delta\varphi + \pi = \pi + A/\rho^2$ naozaj platí. Ak by sme však smerom dolu nešli až po rovník, ale len po rovnobežku danú uhlom ϑ_0 (Obr.18), už by to nefungovalo. Prečo? A ako to napraviť?
Riešenie: rovnobežka nie je geodetika, takže to nie je geodetický trojuholník. Na nápravu treba dodať člen s geodetickou krivosťou. Jej výpočet: na rovnobežke v prirodzenom parametri je $\dot\gamma = e_\varphi$, takže zrýchlenie je $a = \nabla_{e_\varphi} e_\varphi = \omega^\vartheta_\varphi(e_\varphi)e_\vartheta = \langle\alpha, e_\varphi\rangle e_\vartheta$. Keďže e_ϑ smeruje doprava od e_φ, geodetická krivosť je $k = -\langle\alpha, e_\varphi\rangle = \cos\vartheta_0/\rho\sin\vartheta_0$. Jej integrál po danom kúsku rovnobežky vyjde $\Delta\varphi\cos\vartheta_0$. Plocha trojuholníka je $A = \rho^2\Delta\varphi(1 - \cos\vartheta_0)$, takže $A/\rho^2 = \Delta\varphi(1 - \cos\vartheta_0)$. Súčet uhlov trojuholníka je stále $\Delta\varphi + \pi$ (aj rovnobežka je kolmá na poludník). Keby sme zabudli na člen s geodetickou krivosťou, tvrdili by sme, že

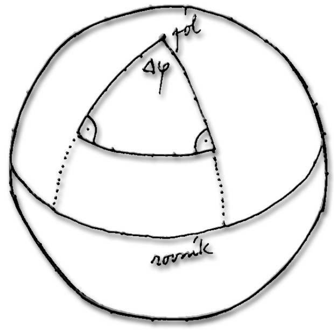
$$\Delta\varphi + \pi = \pi + A/\rho^2 = \pi + \Delta\varphi(1 - \cos\vartheta_0)$$

čo *neplatí*, zatiaľ čo zoberúc do úvahy aj tento člen tvrdíme, že

$$\Delta\varphi + \pi = \pi + A/\rho^2 + \int k ds = \pi + \Delta\varphi(1 - \cos\vartheta_0) + \Delta\varphi\cos\vartheta_0$$



Obr. 17: Tu vzorec funguje



Obr. 18: Ale tu nefunguje

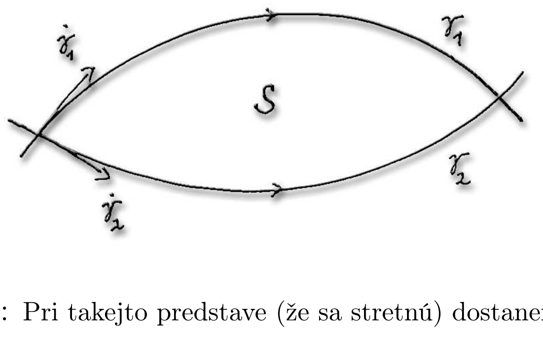
čo už (pre zmenu) *platí*.

Tvrdenie 4: Ak má nejaká varieta topológiu T^2 (dvojrozmerný torus) a ak na ňu akokoľvek zavedieme metriku a zrátame pre ňu Gaussovu krivosť K, tak funkcia K musí byť niekde na T^2 nulová.

Riešenie: Najprv sa overí, že T^2 má $\chi(T^2) = 0$. (Napríklad si ho nejako triangulujeme a zrátame. Alebo si spomenieme na trik s funkciou výšky pre plochu s genusom g a výsledok $\chi(S_g) = 2(1 - g)$.) Keďže torus nemá hranicu, Gaussova-Bonnettova veta (2) hovorí, že $\int_{T^2} K dA = 0$, takže funkcii K nezostáva nič iné, ako byť niekde aj nulovou.

Tvrdenie 5: Ak na jednoducho súvislej ploche so *zápornou* Gaussovou krivosťou vybehnú z jedného bodu dve geodetiky, tak sa už nikdy nestretnú. (Čo je smutné.)

Riešenie: Sporom. Keby sa stretli, vytvorili by oblasť S (medzi nimi; jednoduchá súvislosť zaručuje možnosť predeformovať jednu geodetiku do druhej a vykresliť tak tú plochu). Na ňu sa aplikuje (1). Hranicou sú geodetiky, čiže $k = 0$. Tá oblasť S má topológiu prakticky jedného trojuholníka, kde je $\chi(S) = 1$. Ľavá strana je záporná a pravá kladná. To sa rovniciam nezvykne tolerovať.



Obr. 19: Pri takejto predstave (že sa stretnú) dostaneme spor

Poďakovanie

Obrázok 1. nakreslil môj syn Stan(k)o. Za to, ako aj za výdatnú technickú pomoc so spracovaním ostatných obrázkov, mu srdečne ďakujem.

Literatúra

[1] S. Kobayashi, K. Nomizu: Foundations of Differential Geometry, II, Wiley Interscience, New-York 1969
[2] B.A. Dubrovin, S.P. Novikov, A.T. Fomenko: Modern geometry - methods and applications, New York, Springer-Verlag, 1984, 1985
[3] S.Sternberg: Semi-Riemannian Geometry and General Relativity, 2003
[4] N.Hitchin: Geometry of surfaces, b3 course 2004, www2.maths.ox.ac.uk/~hitchin/hitchinnotes/Geometry_of_surfaces
[5] M.Fecko: Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov, Iris, 2004,2008 (Cambridge 2006)