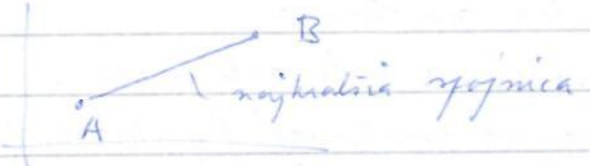
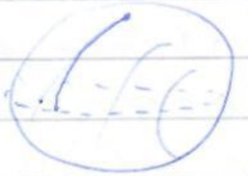
# Obyčajné (riemannovské) geodetiky

Sú to čiary, ktoré sú zároveň

- najkratšie
- rovné

Dá rozum (aj matematika)




To „rovné" chce doplnenie. Napr. na sfére  je
najkratšia spojnica sev. pólu
a bodu na rovníku časť poludníka
a poludník je nie celkom rovný. Riešenie – je rovný na sfére podľa definície. (Rozumný – loď, plávajúca po ňom tvrdí, že ide rovno.)

Praktický návod (bez vysvetlenia): úzky papierový pásik pritláčať na plochu, kde hľadáme geodetiky.

Výpočtový návod: teleso, na ktoré nepôsobí sila, ide rovno. V lagrangeovskom formalizme: sila je $\nabla U$, takže ak bez sily, tak $U=0$. Preto $L = T - U = T$ (iba). Pohyb po „rovnej čiare" je pohyb po riešeniach Lagr. rovníc pre lagranžián

$$L = \frac{1}{2} T_{ab}(q)\,\dot{q}^a \dot{q}^b$$

Napr. na sfére $L = \frac{1}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta)$

=> rovnice

$$\ddot{\vartheta} - \dot{\varphi}^2 \sin\vartheta \cos\vartheta = 0$$
$$(\dot{\varphi}\sin^2\vartheta)^{\cdot} = 0$$

Rovník ($\vartheta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = t$) aj poludníky ($\vartheta = t$, $\varphi =$ konšt) sú geodetiky.
Rovnobežky ($\vartheta =$ konšt, $\varphi = t$) nie sú (okrem rovníka)

②

Všeobecne má Lagr. rovnica pre $L = T - U \equiv T$ štruktúru

$$\boxed{\ddot{q}^a + \Gamma^a_{bc}(q)\dot{q}^b\dot{q}^c = 0}$$

úloha 3a.16 :-)

Toto sa volá rovnica geodetiky

Použitie mnohoraké.
Napr. rôzne optimalizácie.
Alebo vo vznešenej fyzike (všeobecnej teórii relativity) sa práve po geodetikách pohybujú telesá voľne padajúce v gravitačnom poli.
Čiže napr. Zem okolo Slnka, alebo teleso padajúce do čiernej diery.

# Neholonómne väzby

Holonómne väzby (poznáme z TM :-) – obmedzenia v konfig. priestore, výsledok ich naloženia je zmenšenie konfiguračného priestoru; sleduje sa potom pohyb už iba v tom zmenšenom.

Pr.: sférické kyvadlo: najprv bod v $\mathbb{R}^3$, ale väzba $\phi(\vec{r}) \equiv \vec{r}^2 - l^2 = 0$, => už iba body na sfére $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Ak pohyb $\vec{r}(t)$ je v súlade s väzbou, tak

$$\phi(\vec{r}(t)) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\phi(\vec{r}(t)) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} = 0 \qquad \text{t.j.} \quad \vec{A}(\vec{r})\cdot\vec{v} = 0, \quad \vec{A} = \vec{\nabla}\phi$$

To je tiež väzba

$$\chi(\vec{r},\vec{v}) \equiv \vec{A}(\vec{r})\cdot\vec{v} = 0$$

ale už vo fázovom priestore (premenné $\vec{r}$ aj $\vec{v}$).
Táto väzba je dôsledkom väzby v konfiguračnom priestore $\phi = 0$.
Takže ju netreba zadať, je automatická.

Existujú situácie, keď vznikne väzba

$$\chi(\vec{r},\vec{v}) = 0 \qquad \text{typu} \quad \vec{A}(\vec{r})\cdot\vec{v} \equiv \chi(\vec{r},\vec{v})$$

kde ale

$$\vec{A} \neq \vec{\nabla}\phi$$

Takáto väzba sa nedá nahradiť jednoduchšou väzbou $\phi(\vec{r}) = 0$.
Ako spoznáme, že sa nedá? Takto

$\partial_i A_j = \partial_j A_i$ — dá sa

$\partial_i A_j \neq \partial_j A_i$ — nedá sa

4

Čo znamená podmienka $\vec{A}(\vec{r})\cdot\vec{v} = 0$ ? Že v danom mieste $\vec{r}$ musí byť rýchlosť $\vec{v}$ <u>kolmá</u> na $\vec{A}$ => nedá sa ísť z $\vec{r}$ hocikam, len v mere istej <u>2-rozmernej</u> roviny (v okolí $\vec{r}$). Orientácia tej roviny ale závisí od $\vec{r}$. Predstava: v každom bode $\vec{r}$ je vlepená malá minca (1 cent) a smiem ísť všade len v mere tej mince.

Tieto lokálne 2-rozm. plôšky sa nespájajú všeobecne do nejakej spoločnej väčšej plochy $S \subset \mathbb{R}^3$. Spájajú sa práve vtedy, keď

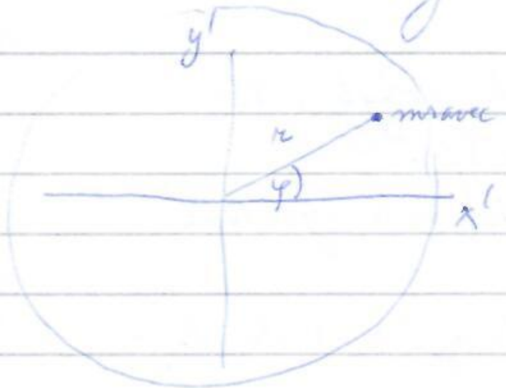
$$\vec{A} = \vec{\nabla}\phi$$

(vtedy sa spájajú do plochy $\phi(\vec{r}) =$ konšt. Spresnenie - stačí $\vec{A} = \phi_1 \vec{\nabla}\phi_2$ ).

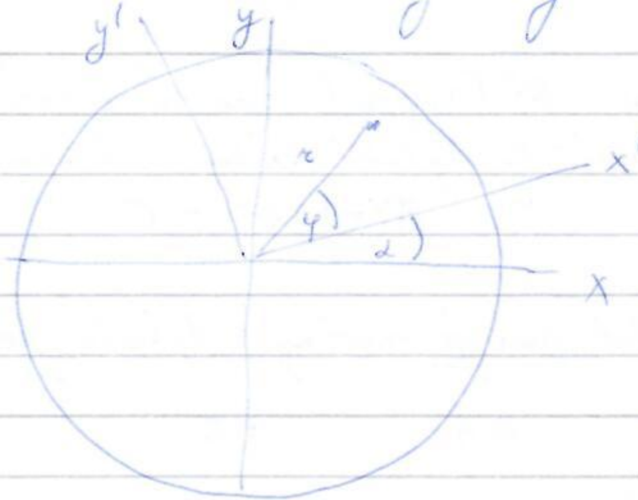
<u>Ne</u>holonómne väzby $\vec{A}(\vec{r})\cdot\vec{v} = 0$ teda neobmedzujú body v konfig. priestore, obmedzujú len smer pohybu. <u>Nezmenšujú</u> konfig. priestor, ale spôsobujú, že v tom <u>pôvodnom</u> konfigur. priestore sa <u>komplikovane pohybujeme</u>.

Príklad na neholonómnu väzbu: Mravec na gramofónovom tanieri.

Pohľad zo sústavy mravca




Pohľad zo sústavy izby




Konfigurácia sústavy mravec + tanier: $(r, \varphi, \alpha) \in \mathbb{R}^3$

Moment hybnosti okolo osi z:

$$\underbrace{m(x\dot{y} - y\dot{x})}_{\text{za mravca}} + \underbrace{I\dot{\alpha}}_{\text{za tanier}} = L_z$$

Keďže $x\dot{y} - y\dot{x} = r^2(\dot{\varphi} + \dot{\alpha})$ (lebo $x = r\cos(\alpha+\varphi)$, $y = r\sin(\alpha+\varphi)$ )

Tak

$$L_z = mr^2(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}) + I\dot{\alpha}$$

Ak sústava v čase $0 = t$ stojí, tak $L_z = 0$. Keďže je izolovaná, bude $L_z = 0$ vždy. Čiže

$$(I + mr^2)\dot{\alpha} + mr^2\dot{\varphi} = 0$$

To je

$$\underbrace{A_r(r,\varphi,\alpha)}_{0}\dot{r} + \underbrace{A_\varphi(r,\varphi,\alpha)}_{mr^2}\dot{\varphi} + \underbrace{A_\alpha(r,\varphi,\alpha)}_{I+mr^2}\dot{\alpha} = 0$$

kde neplatí

$$\partial_i A_j = \partial_j A_i \qquad (\text{napr. pre } i = r, j = \varphi)$$

⑥

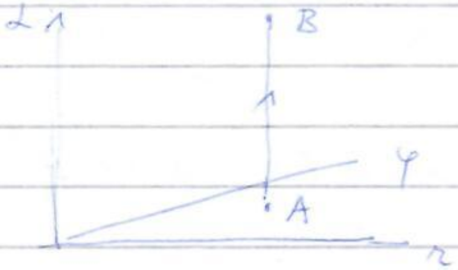
Čiže platnosť zákona zachovania $L_z = 0$ sa matematicky realizuje ako <u>neholonómna väzba</u>

$$A_r \dot{r} + A_\varphi \dot{\varphi} + A_\alpha \dot{\alpha} = \vec{A}(\vec{x}) \cdot \dot{\vec{x}} = 0$$

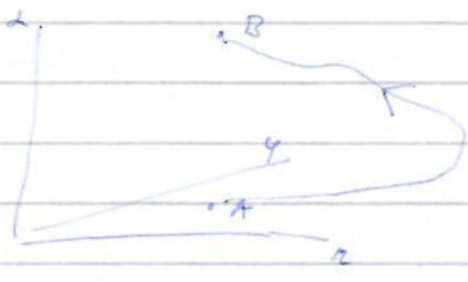
V priestore $\mathbb{R}^3 [r, \varphi, \alpha]$ nie sú možné akékoľvek pohyby. Iba také (inak by neplatil zákon zachovania!), pre ktoré

$\vec{A}(\vec{x}) \cdot \vec{v} = 0$ $\quad$ $\vec{A}$ = to naše vyrátané

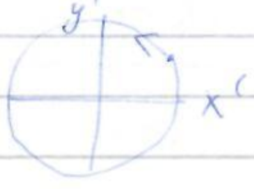
Napríklad <u>nie je</u> možný takýto pohyb mravca z A do B:




Znamenalo by to, že mravec stojí (voči tanieru) a tanier sa točí. Keď mravec stojí, tanier sa nemá prečo točiť (mali by sme $L_z \neq 0$, 0 za mravca a $\neq 0$ za tanier).
Ak chceme spojiť tie isté body A a B, čiara musí byť <u>zložitejšia</u>. Čiara zodpovedá tomu, že mravec musí voliť nejakú vhodnú cestičku a vrátiť sa domov a <u>výsledkom jeho cestičky</u> bude <u>otočenie</u> taniera z $\alpha(A)$ na $\alpha(B)$




Napríklad (z pohľadu mravca)




Obíde tanier dookola.

Tanier sa sám bude krútiť opačne a výsledok bude $\alpha(A) \mapsto \alpha(B)$.

## Subriemannovské geodetiky

Sú riešením úlohy nájsť

- najkratšie čiary
- ale pri dodržaní obmedzení daných neholonómnymi väzbami

V probléme mravca na tanieri: Chceme nájsť cestičku mravca z jeho domčeka späť do jeho domčeka (slučka na gramofónovom tanieri), ktorá

- je najkratšia
- a pritom spôsobí dané (predpísané) otočenie taniera.

Ako sa to hľadá? Napodiv je návod veľmi jednoduchý (aj keď jeho zdôvodnenie úplne jednoduché nie je):
Treba riešiť isté Hamiltonove rovnice!

Poznámka: Na obyčajné (riemannovské) geodetiky boli Lagrangeove rovnice s $L = \frac{1}{2} T_{ab}(q)\dot{q}_a \dot{q}_b$.
Z TM vieme, že to isté hovoria aj Hamiltonove rovnice s hamiltoniánom $H = \frac{1}{2}(T^{-1})_{ab}(q)p_a p_b$. Takže riemannovské geodetiky sa dajú rovnako dobre hľadať aj z Hamiltonových rovníc.

Hamiltonove rovnice pre subriemannovský prípad však majú hamiltonián $H = \frac{1}{2}H_{ab}(q)p_a p_b$, v ktorom je matica $H_{ab}(q)$ singulárna (nemá inverznú). Nedá sa to teda prerobiť na Lagrangeove rovnice, existuje len hamiltonovská verzia týchto rovníc. (S takou situáciou sme sa v TM nestretli.)

Keď sa tie správne Hamiltonove rovnice napíšu pre problém mravca na gramofónovom tanieri, vyjdú dosť zložité :-(
Skúšal som ich analyticky vyriešiť a nepodarilo sa mi to.

⑧

Tak som na to vypísal diplomovku a riešil to Lukáš Tomek.
Obhájená v r. 2011 (mám na stránke, Cena rektora :-)

Analyticky sa to nepodarilo vyriešiť, ale sú tam numerické riešenia, takže obrázky tých optimálnych ciest poznáme.
Sú niekedy prekvapujúco zložité!

Iné použitie subriemannovských geodetík (a subriem. geometrie vôbec) - o.i. v robotike (moderná perspektívna oblasť).
Je o tom monografia (napr.) Montgomeryho. Já na stránke - Stará Lesná 2009.

Celkovo odporúčam (ak to pokladáte za zaujímavé)
zapísať si v 3/Z prednášku Matematická fyzika
(výberovka 4/2 pre fyzikov). Je to úvod do zaujímavej a užitočnej diferenciálnej geometrie pre fyzikov.
(Čím si prihrievam svoju polievočku.)

**Prednášky v rámci seminára „Smery fyzikálneho výskumu"**
**Rok 2017/2018**

19. 2. Prof. Povinec, Centrum nukleárnych a urýchľovačových technológií – nová experimentálna báza na fakulte (prednáška + prehliadka laboratória)

26.2. Dr. Širaň, Od častíc k strunám

5. 3. Prof. Tokár, Štruktúra sveta z pohľadu súčasnej časticovej fyziky
Doc. Kristek, Numerické modelovanie anomálnych efektov zemetrasení a podzemných jadrových explózií

12. 3. Prof. Šimkovic, Neutríno je záhada vesmíru
Doc. Blažek, Kľúčové problémy časticovej fyziky po objave Higgsovho bozónu

19. 3. Doc. Holý, Prírodné zdroje ionizujúceho žiarenia.
Doc. Ševčík, Fyzikálne javy vo vysokej atmosfére

26. 3. Prof. Urban, Aplikácie metód chemickej fyziky v biofyzike – štruktúra a interakcie molekúl biologických systémov.
Doc. Janda, Diagnostika a modelovanie plazmy.

2. 4. Oblievačka/šibačka

9. 4. Doc. Zahoranová, Plazma, výboje a ich aplikácie
Prof. Martoňak, Čo sa stane, keď stlačíme kryštál, a ako nám pri tom pomôže počítač

16. 4. doc. Antalic, Štruktúra ťažkých a superťažkých atómových jadier.
doc. Kornoš, Malé telesá Slnečnej sústavy

23. 4. Dr. Tekel, O vzdialenostiach veľkých a (hlavne) o vzdialenostiach malých
Doc. Machala a Doc. Hensel, Elektrické výboje v plynoch, ich fyzikálne vlastnosti a biomedicínske a environmentálne aplikácie.

30. 4. Dr. Z. Garaiová, Nanočastice ako transportné systémy liečiv – biofyzikálna charakterizácia a štúdium interakcie s biomembránami
Dr. Maták, Tmavá hmota a elementárne častice

7. 5. doc. Klačka Gravitácia vo vesmíre
doc. Gera, Modelovanie v meteorológii a klimatológii

14. 5. Doc. Fecko, Sub-riemannovské geodetiky a na čo sú dobré.
Prof. Plecenik: Laboratórium pokročilých technologii

**Miesto:** F1/108 **Čas:** 12.20 – 14.00
Na každú prednášku je 50 minút.