O čom sú články H.Grosseho, C.Klimčíka a P.Prešnajdera o nekomutatívnej sfére
Elementárny úvod pre neexpertov

(referát na KTF pri príležitosti 60-tky Petra Prešnajdera)
Marián Fecko
15.novembra 2005

01. Čo sú nekomutatívne priestory

Normálny priestor P = body + štruktúra (lineárny, topologický, grupa, varieta, ...)
Na ňom môžeme uvažovať ($\mathbb{R}$ alebo $\mathbb{C}$-značné) *funkcie*:

$$f : P \to \mathbb{R} \qquad \text{alebo} \qquad f : P \to \mathbb{C}$$

Funkcie sa dajú lineárne kombinovať a (asociatívne) násobiť,

$$f_1 + \lambda f_2 \qquad\qquad f_1 f_2$$

Napríklad na kružnici môžeme uvažovať funkciu (v ktorej je použitá lineárna kombinácia aj súčin jednoduchších funkcií)

$$f : S^1 \to \mathbb{R} \qquad\qquad \varphi \mapsto f(\varphi) = \sin\varphi\cos\varphi + 3\cos\varphi$$

Vďaka tomu funkcie na P tvoria (asociatívnu) *algebru* (s jednotkou)

$$A := \mathcal{F}(P) \ - \ \text{algebra funkcií na } P$$

Dôležité (hoci technicky triviálne) je, že pre *ľubovoľné* P je *táto* algebra *komutatívna*, lebo

$$f_1 f_2 = f_2 f_1$$

(keďže tak to už chodí v $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$). Rovnako dôležité (a technicky netriviálne - Geľfand, Najmark, ..., Connes) je, že z algebry $A \equiv \mathcal{F}(P)$ sa dá úplne zrekonštruovať priestor P - jeho "body aj štruktúra" sú ukryté v konkrétnych detailoch algebry $A \equiv \mathcal{F}(P)$. Toto umožňuje fakticky "zabudnúť" na P a baviť sa ďalej už len s algebrou A.

▼ *Veľmi veľmi triviálny* príklad: ak P = tri body p_1, p_2, p_3, tak ľubovoľná funkcia na P má tvar

$$f = k_a e_a \equiv k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3, \qquad \text{kde} \qquad e_a(p_b) = \delta_{ab} \quad \text{a} \quad k_a = f(p_a).$$

Dostávame trojrozmernú komutatívnu algebru (je až na izomorfizmus jediná). Tri prvky priestoru P sú zakódované v trojrozmernosti algebry A. ▲

Táto bijekcia medzi *komutatívnymi* algebrami a slušnými normálnymi priestormi zasiala do dovtedy pokojného vzájomného spolunažívania algebier semienko napätia a konfliktov. Okrem komutatívnych algebier totiž existujú aj *nekomutatívne algebry* (napríklad $\mathbb{R}(2)$, algebra 2×2 reálnych matíc). Tie vnímali fakt, že pre ne neexistuje žiadne P také, aby $\mathcal{F}(P)$ bola jedna z nich, ako veľkú krivdu a do neba volajúcu nespravodlivosť.[1] Rozhodli sa, že využijú svoj vplyv v masovokomunikačných prostriedkoch. Denno-denne sa na titulných stranách mienkotvorných denníkov zjavovalo slovné spojenie *nekomutatívny priestor* (špeciálne aj *superpriestor*[2]), ako keby takéto nekomutatívne priestory naozaj existovali. Ich stručným úderným (a nepravdivým) heslom sa stalo

$$\text{Nekomutatívne algebry} \ = \ \text{algebry funkcií na nekomutatívnych priestoroch!}$$

[1] Do ulíc vyšli s transparentmi s nápismi "Každá algebra má právo na svoj priestor". Zapálili pri tom stovky áut.

[2] Za superpriestorom je v pozadí vplyvná klika (nekomutatatívnych!) algebier funkcií síce na normálnych priestoroch, ale s hodnotami v *Grassmannových algebrách*.

Po čase, keď už bola verejná mienka spracovaná, to prešlo aj v parlamente a nekomutatívne priestory začali existovať *de iure*.

(Tých pár ľudí, ktorí nestratili historickú pamäť, však vie svoje: nekomutatívne priestory ako také *de facto* neexistujú a to, čo naozaj existuje, sú "len" nekomutatívne *algebry*, aj keď sú médiami prezentované ako algebry "funkcií na týchto nekomutatívnych priestoroch".)

Takže napríklad supersféra ako naozajstný priestor s bodmi je len postavou z ríše rozprávok (propagandy), zatiaľ čo "s ňou spojená algebra funkcií" je normálna slušná nekomutatívna algebra, ktorá sa v prírode naozaj vyskytuje.

To, že nekomutatívne priestory ako také vlastne neexistujú však v skutočnosti vôbec nemusí prekážať tomu, aby boli zaujímavé a užitočné. Dá sa na to totiž pozerať takto: Namiesto práce s normálnymi priestormi môžeme technicky pracovať s komutatívnymi algebrami. Teda môže sa stať, že budeme dva týždne počítať niečo s nejakou algebrou a nakoniec vyhlásiť, že sme vypočítali nejakú vlastnosť istého priestoru P (a môže to byť pravda).

Potom prijmeme *definíciu*, že ak by sme tie dva týždne počítali niečo s nejakou *nekomutatívnou* algebrou, tak že by sme sa nepriamo venovali nejakému "nekomutatívnemu priestoru". Ten síce "naozaj" neexistuje, ale "jeho algebra" áno a to bude odteraz *podľa definície* stačiť.

Veľmi často sa výroba nekomutatívnej algebry robí vhodnou *deformáciou* alebo *rozšírením* nejakej pôvodnej slušnej komutatívnej algebry, ktorá je algebrou funkcií na nejakom slušnom priestore.

▼ Technika deformácie komutatívnej algebry je vo fyzike dobre známa z kontextu *kvantovania*. Na začiatku máme slušný priestor = fázový priestor P so súradnicami q, p. Tieto súradnice sú generátory (komutatívnej) algebry funkcií vo fázovom priestore (pozorovateľné klasickej mechaniky). Táto algebra sa zdeformuje tak, že sa postuluje vzťah

$$\hat{p}\hat{q} - \hat{q}\hat{p} = i\hbar \qquad \text{(pôvodne bolo } pq - qp = 0\text{)}$$

Algebra sa stáva *nekomutatívnou* (realizuje sa operátormi) so závažnými dôsledkami pre príslušný "fázový priestor". Do hry vstupuje vzťah neurčitosti a lokalizácia v novom "fázovom priestore" (nekomutatívnej rovine) je možná iba s istou *minimálnou nepresnosťou* - vzniká predstava o bunkách minimálneho objemu. ▲

02. Čo je nekomutatívna sféra

Hlavnou hrdinkou v článkoch, spomínaných v nadpise, je *nekomutatívna sféra*. Podľa vyššie povedaného tomu máme rozumieť tak, že ide o istú nekomutatívnu algebru, ktorá v niečom podstatnom pripomína algebru funkcií $\mathcal{F}(S^2)$ na obyčajnej sfére S^2.

Aby ju naozaj pripomínala, získa sa jej *deformovaním*. Začne sa teda s (komutatívnou) algebrou $\mathcal{F}(S^2)$ hladkých funkcií na obyčajnej dvojrozmernej sfére. Túto algebru je výhodné realizovať *faktorizáciou* algebry funkcií v obyčajnom trojrozmernom euklidovskom priestore E^3 (sféra S^2 sa chápe ako vložená do tohoto E^3). Tá ma totiž ako generátory obyčajné kartézske súradnic(ové funkci)e x_1, x_2, x_3 a tie sa veľmi jednoducho transformujú pri *rotáciách* - jednoducho sa medzi sebou premiešajú trojrozmernou rotačnou maticou, $x_a \mapsto A_{ab}x_b$. Žiadne *dve* (reálne) súradnic(ové funkci)e na sfére sa takto pekne pri rotáciách nesprávajú. Pre tieto generátory platí (ak ρ je polomer sféry)

$$x_a x_b - x_b x_a = 0 \qquad x_a x_a = \rho^2 \tag{02.1}$$

▼ Technika faktorizácie: za ekvivalentné sa prehlásia tie funkcie v E^3, ktoré majú rovnaké funkčné hodnoty na sfére S^2 vloženej do tohoto E^3. Každá trieda ekvivalencie je potom zjavne daná nejakou funkciou na tej sfére (ľubovoľný reprezentant sa dá chápať ako nejaké konkrétne rozšírenie funkcie zo sféry do celého E^3) a naopak, každá trieda definuje (pomocou ľubovoľného reprezentanta) práve jednu funkciu na sfére. Pre prudkých expertov (ktorí to čítajú omylom, pozri nadpis): faktorizuje sa podľa ideálu generovaného funkciou $x_a x_a - \rho^2$. ▲

Vhodná deformácia tejto algebry sa teraz získa tak, že sa od doteraz komutujúcich generátorov x_a prejde k novým $\hat{x}_a$, od ktorých sa požaduje splnenie vzťahov

$$\hat{x}_a\hat{x}_b - \hat{x}_b\hat{x}_a = \frac{i}{\lambda}\epsilon_{abc}\hat{x}_c \qquad \hat{x}_a\hat{x}_a = j(j+1) = \lambda^2\rho^2,\ j = 0, 1/2, 1, \dots \tag{02.2}$$

Druhá požiadavka sa formálne podobá na druhú požiadavku spred chvíle (pre trochu čudnú hodnotu polomeru, $\sqrt{j(j+1)}$). Prvá však signalizuje, že "hra o fazuľky" sa skončila a vkročili sme do ríše *nekomutatívnych* algebier.

Prvé užitočné pozorovanie je, že túto deformáciu *vieme technicky zrealizovať*: ako $\hat{x}_a$ stačí zobrať generátory j-tej (t.j. $(2j+1)$-rozmernej) ireducibilnej reprezentácie Lieovej algebry $so(3)$ (práve toto bolo dôvodom pre tie nezvyčajné hodnoty polomerov). Druhé užitočné pozorovanie je, že touto deformáciou sa nepokazili dobré vlastnosti voči *rotáciám* (to je pre aplikáciu, ku ktorej to smeruje, *veľmi dôležité*; na generátory pôsobia rotácie štandardným obkladaním $\hat{x}_a \mapsto \hat{A}\hat{x}_a\hat{A}^{-1}$, ako to už pre operátory chodí).

To, čo vzniklo, je (nazve sa) nekonečná séria *nekomutatívnych sfér* (pre každé $j = 0, 1/2, 1, \ldots$ jedna). Pre každé $j = 0, 1/2, 1, \ldots$ máme nekomutatívnu algebru A^j, ktorá sa interpretuje ako algebra funkcií na niečom a to niečo je teda podľa paragrafu 01. nekomutatívny priestor. Vzhľadom na podobnosť (a vlastnosti limity pre $j \to \infty$) je ten priestor prirodzené nazvať sféra.

Bližšia analýza odhalí, že podobne, ako sa kvantový fázový priestor efektívne delí na bunky konečného rozmeru, na nekomutatívnu sféru sa možno pozerať tak, že sa obyčajná sféra akoby delila na konečný počet "buniek" (segmentov na nej). Tomuto efektu sa tu hovorí, že tam akoby vznikla *mriežka* (lattice v nadpise článku). Robiť teóriu poľa na nekomutatívnej sfére je teda niečo ako robiť ju na mriežke (polia majú konečný počet stupňov voľnosti). Táto mriežková teória má však pozoruhodnú vlastnosť, že si *ponechala rotačnú invariantnosť* (!) napriek prechodu ku konečnému počtu stupňov voľnosti. Je to preto, lebo mriežka nevzniká tak, ako je to zvykom, totiž že sa najprv urobí mriežka na úrovni bodov a následne sa zjednodušia funkcie (keďže sú už len na podmnožine bodov). Tu sa robia operácie rovno *na úrovni algebry* funkcií a ukazuje sa, že *takto* sa rotačná invariantnosť zachrániť *dá*.

Na algebre A^j sa reprezentuje rotačná grupa. Vychádza to tak, že ide o priamy súčet ireducibilných reprezentácií so spinmi $0, \ldots, 2j$. Rozbor ukazuje, že komutatívna limita ($j \to \infty$) sa prejavuje tak, že prvky algebry so spinmi oveľa menšími ako je najvyšší možný $2j$ skoro komutujú (tým viac, čím je rozdiel väčší). Keďže sféra modeluje časopriestor, rotácie (jej izometrie) simulujú translácie v časopriestore a veľkosť spinu simuluje kvadrát hybnosti. Spomínaný efekt so spinmi je tak modelom pre UV-konečnosť teórie.

03. Čo je nekomutatívna supersféra

Toto bude ešte stručnejšie, ako to doteraz, lebo je to ešte technickejšie.

Keď sa zavádzala algebra funkcií na obyčajnej sfére, vyštartovalo sa z funkcií v E^3, ktoré sú generované kartézskymi súradnicami x_a a táto algebra sa vhodne faktorizovala. Prvky tejto algebry, funkcie na obyčajnej sfére, hrajú vo fyzikálnom modeli úlohu *skalárneho poľa* (jasné). Snahou je dotiahnúť na tú sféru aj *spinorové* pole a supersymetriu (symetriu medzi bozónmi, zastúpenými tým skalárnym poľom a fermiónmi, zastúpenými tým vytúženým spinorovým poľom). Ukazuje sa, že to sa dá úsporne a elegantne urobiť pomocou *skalárneho superpoľa* na *supersfére*. Situácia je tu opäť taká, že to, čo naozaj existuje je istá nekomutatívna algebra a jej prvky sa interpretujú ako "funkcie na niečom". To niečo síce neexistuje, ale volá sa to superpriestor; ako už vieme, jeho neexistencia nás o spánok nepripravuje, lebo v skutočnosti nenarábame s ním (jeho bodmi), ale iba s "funkciami na ňom", ktorými sú podľa definície prvky tej (nekomutatívnej) algebry.[3]

Náznak techniky: Tu sa najprv *rozšíri* algebra funkcií v E^3 o dva nové generátory, θ_1, θ_2, takže spolu ich je už 5:

$$x_1, x_2, x_3; \theta_1, \theta_2 \tag{03.1}$$

Tie x_a sú ako doteraz, pridané théty sa transformujú voči rotáciám ako spinor, sú tzv. nepárne a vzájomne *graduovane komutujú*:

$$x_a x_b - x_b x_a = x_a \theta_i - \theta_i x_a = \theta_i \theta_j + \theta_j \theta_i = 0 \tag{03.2}$$

Takže niekedy je nulový komutátor, niekedy antikomutátor (je na to pravidlo). Prvok algebry vygenerovanej týmito generátormi ("funkcia premenných $x_1, x_2, x_3; \theta_1, \theta_2$") sa nazve skalárne suporpole v tom celom priestore.

[3]Pozor, to však ešte nie je tá nekomutatívnosť, o ktorú ide v nadpise paragrafu! Táto tu sa volá *superkomutatívnosť*, čo je "len trochu" pokazená komutatívnosť (sem-tam je nejaké mínus namiesto plusu). Tá nekomutatívnosť z nadpisu sa dosiahne až deformovaním týchto superkomutujúcich objektov.

Teraz sa opäť urobí faktorizácia, aby sa prešlo na "supersféru". Menovite, faktorizuje sa podľa ideálu generovaného prvkom algebry

$$x_a x_a + C_{ij}\theta_i\theta_j - \rho^2 \tag{03.3}$$

kde C_{ij} je čosi ako skalárny súčin pre spinory. Celé to je akoby rovnica 4-rozmernej sféry v 5=rozmernom priestore, ale keďže to "je super" (časť súradníc je nepárnych), v skutočnosti to nie je naozajstná podvarieta, ale jednoducho len element istej algebry. *Keby* to bolo všetko párne, tou faktorizáciou by sme dostali algebru funkcií na (4-rozmernej) sfére. Párne to ale nie je. Ale "je to super" a podobá sa to na algebru funkcií na sfére, tak sa to nazve algebra funkcií na *supersfére*. Jej prvky sú skalárne *superpolia na supersfére*. Ukazuje sa, že v takom superpoli sú skryté dva objekty na obyčajnej sfére - jedno skalárne a jedno spinorové pole. To je dobre, lebo to sa chcelo.

Je to však v skutočnosti ešte lepšie, lebo tu (ako "nepárna komponenta Casimirovho operátora") vstupuje do hry (okrem Laplaceovho operátora) aj *Diracov operátor* na sfére! Je tu teda všetok potrebný stavebný materiál na dostatočne zaujímavý poľný model.

No a napokon sa urobí to naozajstné znekomutatívnenie. Podobne ako sa išlo od (02.1) k (02.2), "pokazia sa" sem-tam tie nuly v (03.2) (ktoré spôsobovali hoci len graduovanú, ale predsa len komutatívnosť). Vznikne poctivo nekomutatívna algebra. Jej generátory sa dajú interpretovať ako *operátory*, menovite ako generátory reprezentácie istej Lieovej *super*algebry s istou hodnotou *super*spinu.

04. Matematická fyzika - ako sa využili v CMP 185 (1997), 155-175 (hep-th/9507074) apod.

Najprv sa napíše účinok pre poľnú teóriu na sfére, ktorá obsahuje skalárne a spinorové pole (cez superpolia, dá sa ale prepísať do bežného jazyka). Účinok obsahuje samozrejme integrál a parciálne derivácie vstupujúcich polí. Po znekomutatívnení treba použiť ich analógy. Analógom integrálu je *stopa* príslušného prvka algebry (operátora), parciálne derivácie sa dajú vybaviť cez pôsobenie generátorov symetrie (tie existujú aj po znekomutatívnení, lebo symetria sa zachovala). Detailne sa to všetko urobí (vrátane rozboru komutatívnej limity). Napokon sa skonštatuje, že tento regularizovaný účinok (má konečný počet stupňov voľnosti!) "sa dá použiť ako základ pre kvantovanie cez dráhové integrály ..." pričom to zjavne zachováva supersymetriu.

Literatúra

[1] H.Grosse, C.Klimčík, P.Prešnajder: Field Theory on a Supersymmetric Lattice, CMP 185 (1997), 155-175 (hep-th/9507074) a iné články tejto trojice autorov