Symetrie a zákony zachovania v Nambuovej mechanike

Marián Fecko

Oddelenie teoretickej fyziky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského
Bratislava
fecko@fmph.uniba.sk

Konferencia slovenských fyzikov,
Prešov, 3.-6. septembra 2012

Povieme si:

- Čo je to Nambuova mechanika

Povieme si:

- Čo je to Nambuova mechanika
- V čom sa líši geometricky Nambuova mechanika od Hamiltonovej

Povieme si:

- Čo je to Nambuova mechanika
- V čom sa líši geometricky Nambuova mechanika od Hamiltonovej
- Aký to má dopad na štruktúru účinkového integrálu

Povieme si:

- Čo je to Nambuova mechanika
- V čom sa líši geometricky Nambuova mechanika od Hamiltonovej
- Aký to má dopad na štruktúru účinkového integrálu
- Ako sa hľadajú symetrie v Hamiltonovej mechanike

Povieme si:

- Čo je to Nambuova mechanika
- V čom sa líši geometricky Nambuova mechanika od Hamiltonovej
- Aký to má dopad na štruktúru účinkového integrálu
- Ako sa hľadajú symetrie v Hamiltonovej mechanike
- Ako sa (tam) počítajú príslušné zachovávajúce sa veličiny

Povieme si:

- Čo je to Nambuova mechanika
- V čom sa líši geometricky Nambuova mechanika od Hamiltonovej
- Aký to má dopad na štruktúru účinkového integrálu
- Ako sa hľadajú symetrie v Hamiltonovej mechanike
- Ako sa (tam) počítajú príslušné zachovávajúce sa veličiny
- Ako dopadne ten istý postup v Nambuovej mechanike

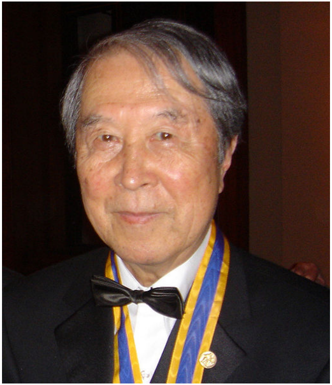
Povieme si:

- Čo je to Nambuova mechanika
- V čom sa líši geometricky Nambuova mechanika od Hamiltonovej
- Aký to má dopad na štruktúru účinkového integrálu
- Ako sa hľadajú symetrie v Hamiltonovej mechanike
- Ako sa (tam) počítajú príslušné zachovávajúce sa veličiny
- Ako dopadne ten istý postup v Nambuovej mechanike
- Čo sú to (Poincarého-Cartanove) integrálne invarianty

Obsah

Yoichiro Nambu ako taký

1921: Narodený v Tokiu (Japonsko).
1950: Profesor na Osaka City University
. (mal vtedy 29 rokov).
1958: Profesor na University of Chicago.
1970: Občan USA.
2008: Nobelova cena za fyziku.
2012: Stále žije, má 91 rokov.



Yoichiro Nambu - jeho článok o Nambuovej mechanike

PHYSICAL REVIEW D VOLUME 7, NUMBER 8 15 APRIL 1973

Generalized Hamiltonian Dynamics*

Yoichiro Nambu
The Enrico Fermi Institute and the Department of Physics, The University of Chicago, Chicago, Illinois 60637
(Received 26 December 1972)

Taking the Liouville theorem as a guiding principle, we propose a possible generalization of classical Hamiltonian dynamics to a three-dimensional phase space. The equation of motion involves two Hamiltonians and three canonical variables. The fact that the Euler equations for a rotator can be cast into this form suggests the potential usefulness of the formalism. In this article we study its general properties and the problem of quantization.

I. INTRODUCTION

A notable feature of the Hamiltonian description of classical dynamics is the Liouville theorem, which states that the volume of phase space occupied by an ensemble of systems is conserved. The theorem plays, among other things, a fundamental role in statistical mechanics. On the other hand, Hamiltonian dynamics is not the only formalism that makes a statistical mechanics possible. Any

$[F, H, G]$. Obviously a PB is antisymmetric under interchange of any pair of its components. As a result we have $\dot{H} = \dot{F} = 0$, i.e., both H and G are constants of motion. The orbit of a system in phase space is thus determined as the intersection of two surfaces, $H = \text{const.}$ and $G = \text{const.}$

Equation (1) or (1′) also shows that the velocity field $d\vec{r}/dt$ is divergenceless,

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} H \times \vec{\nabla} G) \equiv 0, \qquad (3)$$

V čom sa zovšeobecnila Hamiltonova mechanika (1)

Hamiltonove rovnice pre jeden kanonický pár (q, p) vyzerajú

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

Ak označíme $(q, p) = (x_1, x_2)$, dostaneme

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial x_2} \qquad \dot{x}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_1}$$

To môžeme zapísať stručne ako

$$\dot{x}_i = \epsilon_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j}$$

V čom sa zovšeobecnila Hamiltonova mechanika (2)

L.Smoljak,Z.Svěrák:
Jára Cimrman ležící spící (1984):

Cimrman:	Na čem pracujete,doktore Čechove?
Čechov:	Píši Dvě sestry.
Cimrman:	A - není to málo, Antone Pavloviči?
Čechov:	(dlhé zamyslenie)

V čom sa zovšeobecnila Hamiltonova mechanika (3)

Aj Y.Nambu mal pocit, že dva je málo.
Zaviedol kanonickú trojicu (x_1, x_2, x_3) a postuloval rovnice

$$\dot{x}_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial H_1}{\partial x_j} \frac{\partial H_2}{\partial x_k}$$

Zápis týchto rovníc vo vektorovom tvare je

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\nabla} H_1 \times \boldsymbol{\nabla} H_2$$

V čom sa zovšeobecnila Hamiltonova mechanika (4)

A keď už bol rozbehnutý, hneď to aj rôznymi spôsobmi zovšeobecnil, o.i. na kanonickú n-ticu $(x_1, \dots, x_n)$ a rovnice

$$\dot{x}_i = \epsilon_{ij\dots k} \frac{\partial H_1}{\partial x_j} \dots \frac{\partial H_{n-1}}{\partial x_k}$$

kde $\epsilon_{ij\dots k}$ je (n-rozmerný) Levi-Civitov symbol.

V čom sa zovšeobecnila Hamiltonova mechanika (5)

Takáto dynamika sa dá zapísať aj cez Nambuovu zátvorku ako

$$\dot{f} = \{H_1, \dots, H_{n-1}, f\}$$

Pre $n = 2$ dostávame starú známu Poissonovu zátvorku

$$\dot{f} = \{H, f\} \qquad \{f, g\} \equiv \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p}$$

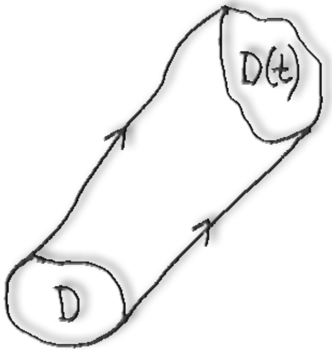
Platí Liouvillova veta

Ľahko sa ukáže, že aj pre Nambuovu mechaniku naozaj platí Liouvillova veta: ak zavedieme fázový objem

$$\text{objem } D \equiv \int_D dx_1 \dots dx_n$$

tak zistíme, že sa pri časovom vývoji zachováva

$$\text{objem } D = \text{objem } D(t)$$



Pripomeňme si ...

Generalized Hamiltonian Dynamics*

Yoichiro Nambu
The Enrico Fermi Institute and the Department of Physics, The University of Chi
(Received 26 December 1972)

Taking the Liouville theorem as a guiding principle, we propose a possible g

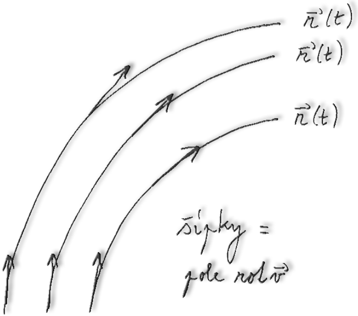
Rovnice pre vírové čiary v hydrodynamike

V hydrodynamike:

$\mathbf{v}$	rýchlostné pole
$\mathrm{rot}\,\mathbf{v}$	vektor víru

Čiary $\mathbf{r}(t)$, ktoré v každom bode idú v smere vektora víru, čiže pre ktoré platí $(\mathrm{rot}\,\mathbf{v}) \parallel \dot{\mathbf{r}}$, sú vírové čiary. Spĺňajú teda diferenciálne rovnice

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$$



To isté v jazyku diferenciálnych foriem (1)

Rýchostné pole sa dá zakódovať aj do 1-formy

$$\theta = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

Jej vonkajšia derivácia je 2-forma

$$d\theta = (\mathrm{rot}\,\mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S}$$

Vnútorný súčin s vektorom $\dot{\mathbf{r}}$ dáva 1-formu

$$i_{\dot{\mathbf{r}}} d\theta = (\mathrm{rot}\,\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot d\mathbf{r}$$

To isté v jazyku diferenciálnych foriem (2)

To znamená, že diferenciálne rovnice pre hľadanie vírových čiar $\mathbf{r}(t)$

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

sa dajú ekvivalentne zapísať aj v tvare

$$i_{\dot{\mathbf{r}}} d\theta = 0$$

Komponentne to je rovnica

$$\dot{x}_j(\partial_j v_i - \partial_i v_j) = 0$$

Hamiltonove rovnice a "vírové čiary" (1)

V rozšírenom fázovom priestore (súradnice q^a, p_a, t) zaveďme 1-formu

$$\sigma = p_a dq^a - H dt$$

Jej vonkajšia derivácia je 2-forma

$$d\sigma = dp_a \wedge dq^a - dH \wedge dt$$

Ak $\gamma(t)$ je krivka a $\dot{\gamma}$ jej dotykový vektor

$$\dot{\gamma} = \dot{q}^a \frac{\partial}{\partial q^a} + \dot{p}_a \frac{\partial}{\partial p_a} + \frac{\partial}{\partial t}$$

Hamiltonove rovnice a "vírové čiary" (2)

tak jeho vnútorný súčin s $d\sigma$ dáva 1-formu

$$\begin{aligned} i_{\dot\gamma} d\sigma &= \left(\dot p_a + \frac{\partial H}{\partial q^a}\right) dq^a + \left(-\dot q^a + \frac{\partial H}{\partial p_a}\right) dp_a \\ &- \left(\dot q^a \frac{\partial H}{\partial q^a} + \dot p_a \frac{\partial H}{\partial p_a}\right) dt \end{aligned}$$

Ak vynulujeme prvé dve zátvorky, automaticky sa vynuluje aj tretia. Ale vynulovať prvé dve zátvorky je to isté ako napísať Hamiltonove rovnice!

Hamiltonove rovnice a "vírové čiary" (3)

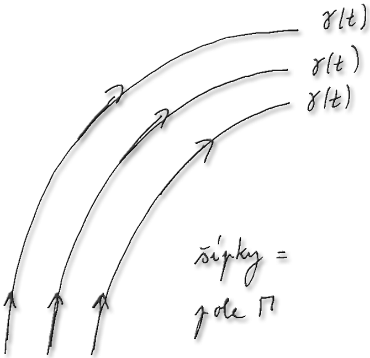
Znamená to, že Hamiltonove rovnice

$$\dot{q}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a} \qquad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q^a}$$

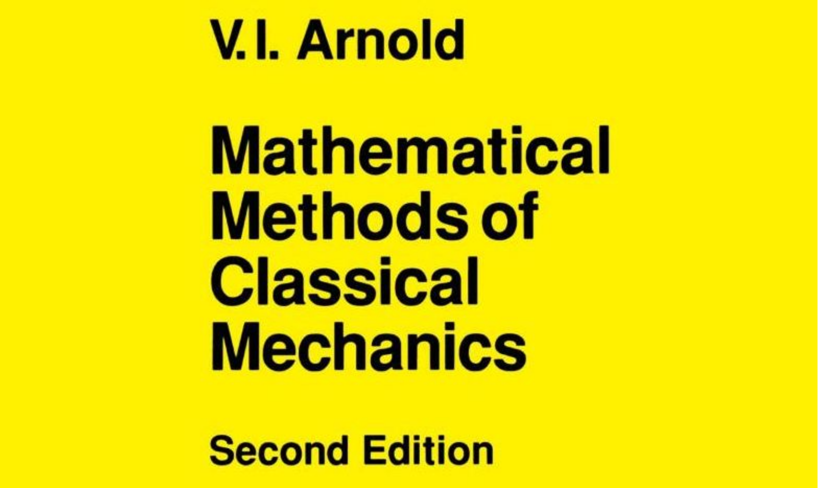
sa dajú ekvivalentne zapísať aj v tvare

$$i_{\dot{\gamma}} d\sigma = 0$$

t.j. formálne rovnako, ako rovnice pre vírové čiary.
Riešenia Hamiltonových rovníc sú teda vírové čiary.
(Vo vhodnom priestore.)



Dá sa o tom dočítať napríklad tu



Malý kúsok z vnútra

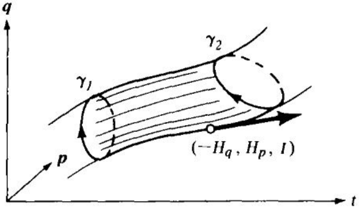


Figure 182 Hamiltonian field and vortex lines of the form $\mathbf{p}\, d\mathbf{q} - H\, dt$.

Theorem. *The vortex lines of the form* $\omega^1 = \mathbf{p}\, d\mathbf{q} - H dt$ *on the* $2n+1$-*dimensional extended phase space* $\mathbf{p}, \mathbf{q}, t$ *have a one-to-one projection onto the* t *axis, i.e., they are given by functions* $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t), \mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$. *These functions satisfy the system of canonical differential equations with hamiltonian function* H:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \qquad \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}. \tag{1}$$

Malý kúsok z vnútra originálu - pre pamätníkov

Т е о р е м а. *Линии ротора формы* $\omega^1 = p\,dq - H\,dt$ *в* $2n + 1$*-мерном расширенном фазовом пространстве* p, q, t *однозначно проектируются на ось* t, *т. е. задаются функциями* $p = p(t)$, $q = q(t)$. *Эти функции удовлетворяют системе канонических дифференциальных уравнений с функцией Гамильтона* H:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}. \qquad (1)$$

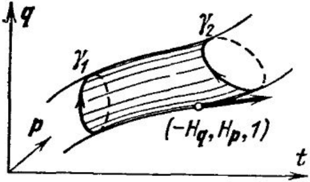


Рис. 182. Гамильтоново поле и линии ротора формы $p\,dq - H\,dt$

Иными словами, *линии ротора формы* $p\,dq - H\,dt$ *суть траектории фазового потока в расширенном фазовом пространстве, т. е. интегральные кривые канонических уравнений* (1).

Nambuove rovnice a "vírové čiary" (1)

Namiesto "hamiltonovskej" 1-formy $\sigma = pdq - Hdt$, t.j.

$$x_2 dx_1 - Hdt$$

zaveďme 2-formu

$$\sigma = x_3 dx_1 \wedge dx_2 - H_1 dH_2 \wedge dt$$

Jej vonkajšia derivácia je 3-forma

$$d\sigma = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - dH_1 \wedge dH_2 \wedge dt$$

Ak $\gamma(t)$ je krivka a $\dot{\gamma}$ jej dotykový vektor

$$\dot{\gamma} = \dot{x}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dot{x}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dot{x}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial t}$$

Nambuove rovnice a "vírové čiary" (2)

tak jeho vnútorný súčin s $d\sigma$ dáva 2-formu

$$\begin{aligned} i_{\dot\gamma} d\sigma &= (\dot{\mathbf{r}} - \nabla H_1 \times \nabla H_2) \cdot d\mathbf{S} \\ &- ((\nabla H_1 \times \nabla H_2) \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot d\mathbf{r} \wedge dt \end{aligned}$$

Ak vynulujeme prvú zátvorku, automaticky sa vynuluje aj druhý člen vpravo.
Ale vynulovať prvú zátvorku je to isté ako napísať Nambuove rovnice!

Nambuove rovnice a "vírové čiary" (3)

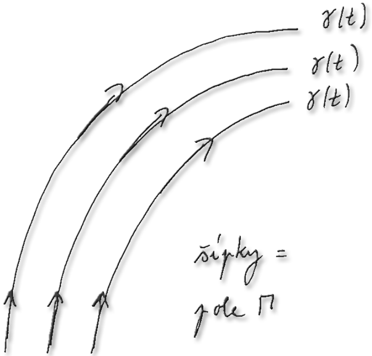
Znamená to, že aj Nambuove rovnice

$$\dot{\mathbf{r}} = \nabla H_1 \times \nabla H_2$$

sa dajú zapísať v tvare

$$i_{\dot\gamma} d\sigma = 0$$

t.j. opäť formálne rovnako, ako rovnice pre vírové čiary.
Aj riešenia Nambuových rovníc sú teda "vírové čiary".
(Akurát že forma σ je teraz 2-forma!)



Dá sa o tom dočítať tu

On a variational principle for the Nambu dynamics

Marián Fecko
Katedra teoretickej fyziky, Matematicko-fyzikálna fakulta UK, Mlynská dolina F2, 84215 Bratislava, Czechoslovakia

(Received 17 May 1991; accepted for publication 4 October 1991)

A variational principle for the Nambu dynamics is analyzed. Since the equations of motion single out a distinguished two-form rather then a one-form, the usual construction of the action $S[\gamma]$ as an integral of a one-form along the curve γ on the extended phase space has to be modified.

I. INTRODUCTION

In our previous paper[1] we discussed a geometrical

integral and the solutions of the dynamical equations is absent in the standard (nonsingular) Lagrangian dynamics as well as in the Hamiltonian one.

...

930 J. Math. Phys. 33 (3), March 1992 0022-2488/92/030930-04$03.00

a tiež tu

Commun. Math Phys 160, 295–315 (1994)

Communications in Mathematical Physics

On Foundation of the Generalized Nambu Mechanics

Leon Takhtajan
Department of Mathematics, State University of New York at Stony Brook, Stony Brook, NY 11794-3651, USA

Received: 1 April 1993

Abstract: We outline basic principles of a canonical formalism for the Nambu mechanics – a generalization of Hamiltonian mechanics proposed by Yoichiro Nambu in 1973. It is based on the notion of a Nambu bracket, which generalizes the Poisson bracket – a "binary" operation on classical observables on the phase

Účinkový integrál pre Hamiltonove rovnice (1)

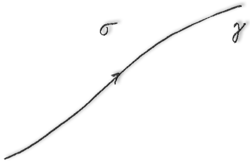
V Hamiltonových rovniciach vystupuje 1-forma

$$\sigma \equiv p_a dq^a - Hdt$$

Jej integrál po krivke γ

$$S[\gamma] = \int_\gamma \sigma \equiv \int_{t_1}^{t_2} (p_a \dot{q}^a - H)dt$$

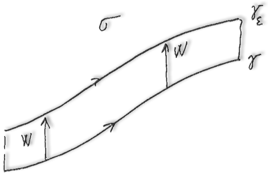
funguje ako účinok pre Hamiltonove rovnice. T.j. získavajú sa jeho variáciou $S \mapsto S + \delta S$ a podmienkou $\delta S = 0$.



Účinkový integrál pre Hamiltonove rovnice (2)

Ak sa variácia robí tokom (ľubovoľného) vektorového poľa W, vychádza

$$\begin{aligned}\delta S &= \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \langle -\, i_{\dot\gamma} d\sigma, W\rangle dt + \epsilon \langle \sigma, W\rangle_{\gamma(t_1)}^{\gamma(t_2)} \\ &= \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \langle -\, i_{\dot\gamma} d\sigma, W\rangle dt + \epsilon [p_a \delta q^a]_{\gamma(t_1)}^{\gamma(t_2)}\end{aligned}$$



Ak na koncoch požadujeme nulovosť variácií súradníc, dostávame ako extremály naozaj riešenia Hamiltonových rovníc

$$i_{\dot\gamma} d\sigma = 0$$

Účinkový integrál pre Nambuove rovnice (1)

Napísať účinok pre Nambuove rovnice je delikátna vec.
Zaoberajú sa tým už spomínané dva články:

On a variational principle for the Nambu dynamics

Marián Fecko
Katedra teoretickej fyziky, Matematicko-fyzikálna fakulta UK, Mlynská dolina F2, 84215 Bratislava, Czechoslovakia

On Foundation of the Generalized Nambu Mechanics

Leon Takhtajan
Department of Mathematics, State University of New York at Stony Brook, Stony Brook, NY 11794-3651, USA

Účinkový integrál pre Nambuove rovnice (2)

V čom je problém?
Nambuove rovnice vyzerajú síce rovnako ako Hamiltonove,

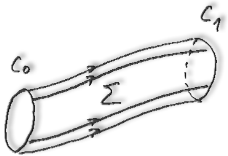
$$i_{\dot{\gamma}} d\sigma = 0$$

ale σ v nich je tentokrát 2-forma.
Tá sa ale nedá preintegrovať po krivke, len po ploche!
Nevieme teda urobiť to, čo má robiť účinok: priradiť číslo krivke.
Aj keď hľadáme výnimočné krivky,
sme nútení vtiahnuť do teórie plochy.
To sa deje v oboch článkoch.

Účinkový integrál pre Nambuove rovnice (3)

Zaujímavejšie to má urobené Takhtajan (1994). Jeho myšlienka:

1. V čase t_1 vytvorím ľubovoľnú slučku c_0.
2. Nechám ju (každý jej bod) nambuovsky vyvíjať v čase (po t_2).
3. Dostanem tak plochu Σ.
4. Cez túto plochu preintegrujem 2-formu σ.
5. Nazvem výsledné číslo účinok. Ide o účinok celého súboru čiar (= plochy Σ), nie jednej.



Účinkový integrál pre Nambuove rovnice (4)

Výpočet ukazuje, že to naozaj funguje!
T.j. účinok je stacionárny práve pre plochy,
ktoré sú vytvorené z riešení Nambuových rovníc.

(Urobí sa variácia účinku ľubovoľným vektorovým poľom W podobná,
ako sa to ukazovalo v hamiltonovskom prípade.)

Čo je infinitenizimálna symetria hamiltonovskej sústavy

Je to malá zmena

$$\gamma \mapsto \gamma_\epsilon$$

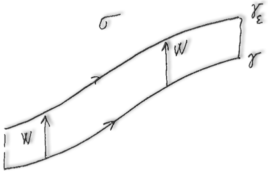
(generovaná tokom vektorového poľa W), ktorá nemení hodnotu účinku

$$S[\gamma_\epsilon] = S[\gamma]$$

t.j. pre ktorú

$$\delta S = 0$$

Ak také (veľmi špeciálne) pole W nájdeme, odmenou je istý zákon zachovania.



Zákon zachovania za infinitenizimálnu symetriu W (1)

Už sa spomínalo, že pre všeobecné pole W a všeobecnú krivku γ vychádza výraz

$$\delta S = \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \langle - \, i_{\dot\gamma} d\sigma, W \rangle dt + \epsilon \langle \sigma, W \rangle_{\gamma(t_1)}^{\gamma(t_2)}$$

Naše pole W ale nie je všeobecné, lebo musí dávať

$$\delta S = 0$$

Aj krivky budeme uvažovať špeciálne, a to riešenia Hamiltonových rovníc

$$i_{\dot\gamma} d\sigma = 0$$

Zákon zachovania za infinitenizimálnu symetriu W (2)

Čo zostane z toho všeobecného výrazu za týchto podmienok? Toto:

$$\langle \sigma, W \rangle_{\gamma(t_1)}^{\gamma(t_2)} = 0$$

Výraz

$$f := \langle \sigma, W \rangle \equiv i_W \sigma$$

je 0-forma, teda funkcia. Dostávame tvrdenie, že táto funkcia má v čase t_2 rovnakú hodnotu, ako mala v čase t_1

$$f(t_2) = f(t_1)$$

To je sľubovaný zákon zachovania.

Príklad: Zákon zachovania energie

Ak ak W zoberieme pole ∂_t (t.j. skúmame translácіu v čase),
zistíme, že to je symetria práve vtedy,
keď H nezávisí explicitne od času.
Vtedy sa zachováva výraz

$$f := \langle \sigma, W \rangle \equiv \langle p_a dq^a - H dt, \partial_t \rangle = -H$$

Zachováva sa teda funkcia H, t.j. energia.

Čo je infinitenizimálna symetria nambuovskej sústavy

Je to malá zmena

$$\Sigma \mapsto \Sigma_\epsilon$$

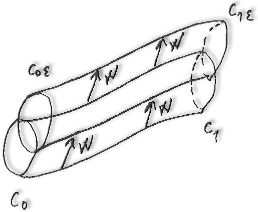
(generovaná tokom vektorového poľa W), ktorá nemení hodnotu účinku

$$S[\Sigma_\epsilon] = S[\Sigma]$$

t.j. pre ktorú

$$\delta S = 0$$

Ak také (veľmi špeciálne) pole W nájdeme, odmenou je tiež istý zákon zachovania.



Zákon zachovania za infinitenizimálnu symetriu W (1)

V nambuovskom prípade pre všeobecné pole W a všeobecnú plochu Σ vychádza výraz

$$\delta S = \epsilon \int_\Sigma i_W d\sigma + \epsilon \left(\oint_{c_1} - \oint_{c_0} \right) i_W \sigma$$

Naše pole W ale nie je všeobecné, lebo musí dávať

$$\delta S = 0$$

Vďaka tomu, že plocha Σ je poskladaná z riešení Nambuových rovníc

$$i_{\dot\gamma} d\sigma = 0$$

ľahko sa ukáže, že prvý integrál je nulový.

Zákon zachovania za infinitenizimálnu symetriu W (2)

Čo zostane z toho všeobecného výrazu za týchto podmienok? Toto:

$$\oint_{c_1} i_W \sigma = \oint_{c_0} i_W \sigma$$

Výraz (funkcia)

$$f(t) := \oint_{c_t} i_W \sigma$$

je sľubovaný zákon zachovania:

$$f(t_1) = f(t_2)$$

V čom je zásadný rozdiel?

V hamiltonovskom prípade sa zachovávala funkcia (0-forma)

$$f := i_W \sigma$$

V nambuovskom prípade sa zachováva až integrál výrazu $i_W \sigma$

$$\oint_c i_W \sigma$$

po (ľubovoľnej) slučke c.
(Výraz $i_W \sigma$ je teraz 1-forma, číslo sa z nej dostane až integrovaním.)

Výsledok múdrymi slovami

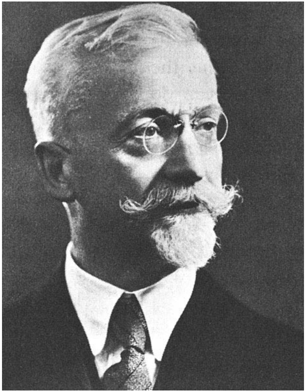
V hamiltonovskom prípade je odmenou za symetriu zachovávajúca sa funkcia (0-forma).
(Energia, komponenta hybnosti, komponenta momentu hybnosti apod.)

V nambuovskom prípade je odmenou za symetriu integrálny invariant,
t.j. zachováva sa až integrál nejakej 1-formy po ľubovoľnej slučke.

Isté integrálne invarianty existujú aj v hamiltonovskej mechanike,
ale nesúvisia tam so symetriami (platia pre ľubovoľný hamiltonián).

Henri Poincaré a Élie Cartan

Henri Poincaré (1854 – 1912)



Élie Cartan (1869 – 1951)

Poincarého-Cartanove integrálne invarianty

Invariantné sú isté integrály.

Najprv zistil Poincaré, že invariantný je integrál

$$\oint_c p_a dq^a$$

(c je slučka v rovine fixného času) a potom neskôr to Cartan zovšeobecnil aj na slučky, ktoré nemusia ležať rovine fixného času, ale vtedy sa musí integrovať všeobecnejšia 1-forma, a to

$$\oint_c (p_a dq^a - H dt)$$

Poincarého integrálny invariant

V.I.Arnoľd to vie nakresliť krajšie ako ja :-(

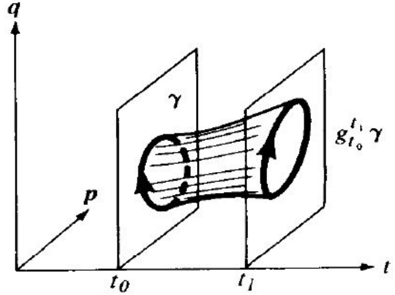


Figure 183 Poincaré's integral invariant

Poincarého-Cartanov integrálny invariant (1)

Aj to vie V.I.Arnoľd nakresliť krajšie ako ja :-(

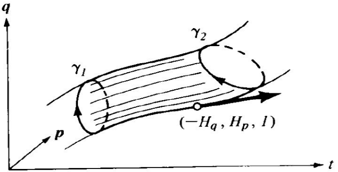


Figure 182 Hamiltonian field and vortex lines of the form $\mathbf{p}\, d\mathbf{q} - H\, dt$.

Poincarého-Cartanov integrálny invariant (2)

Cartan má o tom slávnu knihu (z r.1922 :-)

Keďže som sa dostal na koniec, tak

Ďakujem za pozornosť!