Rozprava o Otázke číslo 4

Marián Fecko*

KTF&DF, FMFI UK, Bratislava

Štátnicová otázka č.4 z predmetu Matematická fyzika znie takto: Regulárna reprezentácia: (a) Pojem regulárnej reprezentácie v priestore hladkých funkcií na grupe, fundamentálne invariantné vektorové polia v regulárnej reprezentácii, aplikácia na grupu SU(2). (b) Grupová algebra: konvolutívny súčin funkcií na grupe, rozšírenie reprezentácie grupy na grupovú algebru.

Tento textík je krátkym rýchlokurzom (či skôr zhrnutím a pripomenutím), o čo tam ide. Aj s nejakým epsilonovým okolím, pre zaradenie do trochu širšieho kontextu. (Obávam sa, že bez toho širšieho kontextu sa tam dá trochu domotať :-)

Obsah

*e-mail: fecko@fmph.uniba.sk

1 Pôsobenie Lieovej grupy G na variete

1.1 Pôsobenie hocijakej grupy G na hocijakej množine

Grupa G *pôsobí na množine* M sprava (zľava), ak pre každý prvok $g \in G$ máme transformáciu R_g (L_g) množiny M (t.j. bijekciu $M \to M$), pričom platí

$$R_{gh} = R_h \circ R_g \qquad L_{gh} = L_g \circ L_h \tag{1}$$

Povie sa tiež, že R_g je pravá *akcia* G na M (detto ľavá). Vznikajú pojmy orbita, stabilizátor, ... Príslušné M sa môže hrdiť názvom *G-priestor*.

1.2 Pôsobenie Lieovej grupy G na variete M

Prvá novinka je v tom, že môžeme zaviesť pojem *hladké* pôsobenie. Oficiálne tak, že to doterajšie $g \mapsto R_g$, $R_g : M \to M$ vyjadríme v tvare

$$R : M \times G \to M \qquad (m, g) \mapsto R_g m =: mg \tag{2}$$

(to posledné je len krátky a užitočný zápis toho predposledného) a hladkosť pôsobenia zavedieme ako hladkosť tohto zobrazenia.

S hladkosťou a varietnosťou vstúpi do hry (bohatá a obsažná) *diferenciálna geometria*. (Čím aj úplne nové postupy skúmania, ktoré pre diskrétne grupy nie sú vôbec možné.)

1.3 Fundamentálne polia, generátory pôsobenia

Keď je grupa G *Lieova*, má aj svoju *Lieovu algebru* $\mathcal{G}$ (jej prvky sú $X, Y, \dots$) a máme v nej aj pojem *jednoparametrickej podgrupy*

$$g(t) = e^{tX} \qquad g(t+s) = g(t)g(s) \tag{3}$$

Uvažujme varietu (M, R_g), t.j. s pravou akciou Lieovej grupy G. Pre ľubovoľný bod $m \in M$ uvažujeme krivku

$$m(t) := mg(t) \equiv me^{tX} \equiv R_{\exp tX} m \tag{4}$$

Jej dotykový vektor v nule označíme

$$\dot{m}(0) =: \xi_X(m) \tag{5}$$

Toto sa dá (v müsli) urobiť (stále pre to isté X) v *každom* bode $m \in M$. Dostaneme tak vektorové *pole* ξ_X na M; je jednoznačne dané tým prvkom X z Lieovej algebry a volá sa *fundamentálne pole* (zodpovedajúce pôsobeniu R_g). Tieto polia majú dôležité vlastnosti ((13.4.3) v [1])

$$\xi_{X+\lambda Y} = \xi_X + \lambda \xi_Y \qquad [\xi_X, \xi_Y] = \xi_{[X,Y]} \qquad R_g^* \xi_X = \xi_{\mathrm{Ad}_g X} \tag{6}$$

Linearita v X (prvá vlastnosť) spôsobuje, že keď viem fundamentálne polia pre *bázové* prvky E_i Lieovej algebry, viem ich už prakticky pre všetky ξ_X:

$$\xi_X = X^i \xi_{E_i} \qquad\qquad X = X^i E_i \tag{7}$$

Polia ξ_{E_i} sú *generátory pôsobenia* R_g. Je ich len konečný počet (= rozmer Lieovej algebry = rozmer Lieovej grupy) a keď si ich viem v nejakom bode všetky predstaviť (nakresliť), vidím vlastne to, ktorým smerom sa dá z daného bodu hýbať pomocou akcie grupy (a tak vlastne aj to, ako vyzerá kúsok *orbity* $\mathcal{O}_m$ pôsobenia danej týmto bodom). V jazyku generátorov pôsobenia sa potom zvyšné dve vlastnosti z (6) zapíšu takto:

$$[\xi_{E_i}, \xi_{E_j}] = c^k_{ij}\xi_{E_k} \qquad R^*_g \xi_{E_i} = (\mathrm{Ad}\,_g)^j_i \xi_{E_j} \tag{8}$$

kde

$$[E_i, E_j] =: c^k_{ij} E_k \qquad \mathrm{Ad}\,_g E_i =: (\mathrm{Ad}\,_g)^j_i E_j \tag{9}$$

Vlastnosti fundamentálnych polí (6) sa dajú prečítať aj tak, že tieto polia tvoria *Lieovu algebru* (podalgebru Lieovej algebry všetkých vektorových polí na M) a že zobrazenie

$$\xi : \mathcal{G} \to \mathfrak{X}(M) \qquad X \mapsto \xi_X \tag{10}$$

je *homomorfizmus* (konečnorozmenej) Lieovej algebry $\mathcal{G}$ do (nekonečnorozmernej) Lieovej algebry $\mathfrak{X}(M)$ (všetkých) vektorových polí na M. Jeho obraz je akurát (konečnorozmerná) podalgebra fundamentálnych polí v celej (nekonečnorozmernej) Lieovej algebre $\mathfrak{X}(M)$. *Bázu* v tejto podalgebre tvoria *generátory* ξ_{E_i} a vidíme tiež, že táto podalgebra tvorí (konečnorozmerný) *invariantný podpriestor* pre ∞-rozmernú reprezentáciu G v priestore $\mathfrak{X}(M)$ vektorových polí na M (funguje predpisom $W \mapsto \rho(g)W := R^*_g W$, $W \in \mathfrak{X}(M)$). Generátory pôsobenia ξ_{E_i} tak tvoria *tajný spolok* (s konečným počtom členov), nenápadne infiltrovaný do komunity („mora") všetkých vektorových polí (s nekonečne početnou - „spojitou" - členskou základňou). Panujú v ňom veľmi prísne pravidlá členstva: striktne sa vyžaduje *uzavretosť* voči vnútorným pôžitkom (lineárne kombinovanie a komutovanie členov medzi sebou) aj voči vonkajšiemu ohrozeniu (pri pôsobení grupy na člena tajného spolku ostatní okamžite pribehnú na pomoc a tvrdosť úderu na jednotlivca sa tak rozloží na lineárnu kombináciu všetkých členov tajného spolku).

[Mimochodom, keby sme analogicky priradili fundamentálne polia *ľavému* pôsobeniu, vo vzorcoch (6) by sa zmenilo *znamienko* v komutátore (pozri úlohu (13.4.4) v [1]). Predpis $X \mapsto \xi_X$ by sa zmenil z homomorfizmu na *anti*homomorfizmus Lieových algebier.]

2 Reprezentácia G a $\mathcal{G}$ na funkciách na (M, R_g)

2.1 Hocijaká grupa G, hocijaká množina M

Na hocijakej množine M môžem zaviesť vektorový priestor *funkcií* na tejto množine, s hodnotami v nejakom vektorovom priestore (najjednoduchšie v $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$).

$$\psi : M \to \mathbb{R} \quad (\mathbb{C}, \dots) \tag{11}$$

Tie funkcie naozaj tvoria vektorový priestor, lineárna štruktúra v priestore funkcií je daná takto (štandardne, „pobodovo")

$$(\psi_1 + \lambda\psi_2)(m) := \psi_1(m) + \lambda\psi_2(m) \tag{12}$$

(stojí a padá na lineárnej štruktúre v tom cieľovom priestore).

No a ak na tom M pôsobí grupa G (sprava, cez R_g), indukuje sa pôsobenie G aj na *funkciách* na tom M (zľava, nazve sa $\rho(g)$). Takto (= cez pôsobenie na ich *argumentoch*):

$$(\rho(g)\psi)(m) := \psi(mg) \quad (\equiv \psi(R_g m)) \tag{13}$$

Iný (tiež užitočný) zápis:

$$\rho(g)\psi := \psi \circ R_g \quad (\equiv R_g^* \psi) \tag{14}$$

Overí sa, že toto pôsobenie je ľavé a lineárne, t.j. že

$$\rho(gh) = \rho(g)\rho(h) \qquad \rho(g)(\psi_1 + \lambda\psi_2) = \rho(g)\psi_1 + \lambda\rho(g)\psi_2 \tag{15}$$

To (podľa definície) znamená, že máme *reprezentáciu* G (vo vektorovom priestore funkcií na G-priestore M.

2.2 Lieova grupa G, varieta M

Tie funkcie sa požadujú hladké, ich (vektorový) priestor označujme $\mathcal{F}(M)$. Keďže je grupa Lieova, má aj svoju Lieovu algebru. Keďže *každá* reprezentácia ρ Lieovej grupy dáva zadarmo *odvodenú* reprezentáciu ρ' (svojej) Lieovej algebry, ani tá reprezentácia na $\mathcal{F}(M)$ by nemala byť výnimkou. A ani nie je.

Pripomeňme, že všeobecné (praktické) pravidlo pre výpočet odvodenej reprezentácie znie

$$\rho(e^{\epsilon X}) =: \hat{1} + \epsilon\rho'(X) \tag{16}$$

(abstraktné, tiež použiteľné, pravidlo obsahuje nejaké dé lomeno dé té v nule). Ak to použijeme na výpočet odvodenej reprezentácie v *našom* prípade (pre reprezentáciu na funkciách na G-priestore), vyjde výsledok

$$\rho'(X)\psi = \xi_X \psi \tag{17}$$

kde ξ_X je presne *fundamentálne pole*, rozoberané v odseku 1.3 (potrebný výpočtík je v Dodatku A; pripomeňme, že vektorové polia *sú* lineárne operátory vo vektorovom priestore $\mathcal{F}(M)$ a že vlastnosti fundamentálnych polí (6) sú presne to, čo potrebujeme na to, aby predpis $X \mapsto \xi_X$ mohol byť reprezentáciou $\mathcal{G}$ v $\mathcal{F}(M)$).

To dáva ďalší užitočný pohľad na pojem fundamentálneho poľa.

Pripomeňme si, že všeobecne (pre akúkoľvek reprezentáciu ρ Lieovej grupy G a jej odvodenú reprezentáciu ρ' jej Lieovej algebry $\mathcal{G}$) sa operátory

$$\mathcal{E}_i := \rho'(E_i) \tag{18}$$

(t.j. operátory, ktoré reprezentujú *bázu* Lieovej algebry) volajú *generátory reprezentácie*. (Ak ich vieme, vieme - vzhľadom na linearitu - celú reprezentáciu ρ' a dokonca - cez exponentu - veľa aj o reprezentácii ρ.)

Teraz vidíme, že vektorové polia ξ_{E_i}, „bázové" fundamentálne polia, máme plné právo vznešene titulovať ako *dvojaké* generátory:

- ako *generátory pôsobenia* (R_g na variete M)
- ako *generátory reprezentácie* ($\rho(g)$ na funkciách na variete M).

3 Ľavoinvariantné polia na (Lieovej) grupe G

3.1 Čo to je

Lieova grupa je varietou. A kypí a buble na nej diferenciálna geometria. Napríklad na nej máme *ľavoinvariantné tenzorové polia*. Myšlienka: *Ľavá translácia* (aj pravá, pre ňu to je veľmi podobné) $k \mapsto gk$ je *difeomorfizmus* $L_g : G \to G$, takže sa dá ňou robiť pull-back tenzorových polí akéhokoľvek typu. A napodiv tam (na grupe) je taká (duchovná, ľavá) šľachta, práve tie *ľavoinvariantné* polia (ďalej niekedy *ľ.i. polia*), ktoré pri pull-backu L_g^* (s ľubovoľným $g \in G$) ani brvou nepohnú:

$$\boxed{L_g^* T = T} \qquad\qquad \textit{ľavoinvariantné pole} \tag{19}$$

A ešte tam žije aj taká (duchovná, pravá) šľachta, *pravoinvariantné* polia, ktoré zasa podobne machrujú pri pull-backu R_g^*:

$$\boxed{R_g^* T = T} \qquad\qquad \textit{pravoinvariantné pole} \tag{20}$$

No a napokon tou najmodrejšou krvou, ktorá sa už s vami ani baviť nebude, sú *obojstranne invariantné* polia; tie machrujú pri pull-backu R_g^* *aj* L_g^*:

$$R_g^* T = T \qquad L_g^* T = T \qquad\qquad \textit{obojstranne invariantné pole} \tag{21}$$

Venuje sa tomu 11.kapitola v knihe [1]. Tie obojstanne invariantné sú zriedkavé, neexistujú pre ľubovoľný typ (p, q) na ľubovoľnej Lieovej grupe. Takže o tých sa teraz nebavme.

Tie jednostranne invariantné, naopak, existujú pre ľubovoľný typ (p, q) na ľubovoľnej Lieovej grupe. Postupne sa o nich (okrem iného) zistí toto:

- takéto polia T sú plne dané svojou hodnotou v *jednotke* grupy
- priestor *vektorov v jednotke* je *Lieova algebra* grupy
- pole T je tak plne dané tenzorom *v Lieovej algebre* grupy
- ľ.i. polia (daného typu (p, q)) tvoria *konečnorozmerný* priestor
- ten je *izomorfný* tenzorom typu (p, q) *v Lieovej algebre*

Všetky tieto fakty výrazne uľahčujú explicitné nájdenie takýchto polí. Menovite, stačí nájsť *bázu* ľavoinvariantných vektorových *alebo* kovektorových polí a všetko je vyriešené (a detto pre pravoinvariantné, čo je *osobitný* výpočet). Prax ukazuje, že je ľahšie hľadať bázu *kovektorových* ľ.i. polí. (Tie vektorové sa potom nájdu ako *duálna* báza vektorových polí.) *K*ovektorových - zhruba povedané - preto, lebo kovektorové polia sú 1-formy, 1-formy sú (ako vedci zistili pod mikroskopom) *formy* a čo už môže byť lepšie, ale prerozprávať úlohu do jazyka foriem (a potom ju v ňom vyriešiť).

3.2 Ako sa to hľadá

V paragrafe 11.1 v knihe [1] sa vysvetľuje jednoduchý algoritmus hľadanie bázových ľ.i. 1-foriem pre *maticové* Lieove grupy. Spočíva v tomto:

- matica A z tej grupy sa parametrizuje (vyjadrí cez *lokálne súradnice* na G)
- urobí sa výraz $A^{-1}dA$ (matica, ktorej prvky sú 1-formy)
- jej nulové prvky a také, čo už boli, si nevšímam
- ostatným vzdám úctu a starostlivo si ich odložím
- *to sú ony*, báza ľavoinvariantných 1-foriem
- bázu pravoinvariantných získam tak isto z matice $(dA)A^{-1}$

3.3 Ako to konkrétne dopadne

Takto sa dá napríklad (veľmi veľmi ľahko) nájsť, že pre grupu $SO(2)$ vyjde (jednoprvková) báza $e^1 = d\varphi$ (úloha 11.1.12 v knihe [1]). Výpočet (veľmi ľahký) pre $GA(1, \mathbb{R})$ dá isté (e^1, e^2) zase v 11.1.13.

A takto sa dá (už trochu pracnejšie) nájsť, ako vyzerá báza ľ.i. 1-foriem *pre grupu* $SU(2)$ (úloha 11.7.23 v knihe [1]). Tam sú explicitné výsledky pre bázové *ľavoinvariantné* aj *pravoinvariantné vektorové polia* aj *1-formy na* $SU(2)$.

(Vzhľadom na výsledky (33) a (34) pre fundamentálne polia *regulárnej* reprezentácie sa môžu získať *obidva* typy polí.)

V úlohe 12.3.15 je výsledok pre (Killingov-Cartanov) *metrický tenzor* na $SU(2)$ a v 12.3.16 je 3-*forma objemu* na $SU(2)$. (Ten metrický tenzor aj forma objemu sú dokonca *obojstranne* - pravo aj ľavo - invariantné. Súvisí to s tým, že $SU(2)$ je *kompaktná* grupa.)

Ešte štandardné *označenie*: ľ.i. vektorové polia sú plne dané svojou hodnotou v jednotke. Tá hodnota v jednotke je vektor v jednotke. Vektor v jednotke je prvok

Lieovej algebry $\mathcal{G}$. Jej prvky označujeme $X, Y, \ldots$. Takže každé ľ.i. pole je plne dané prvkom $X \in \mathcal{G}$ (detto p.i. pole). Preto neprekvapí, že sa označuje

$$L_X = \text{ľavoinvariantné vektorové pole na } G \text{ dané prvkom } X \in \mathcal{G} \qquad (22)$$

$$R_X = \text{pravoinvariantné vektorové pole na } G \text{ dané prvkom } X \in \mathcal{G} \qquad (23)$$

(Najmä ak vieme, že *left* je po anglicky ľavý, *right* pravý, left sa *začína na* L a right sa *začína na* R.) Platí teda

$$\boxed{L_g^* L_X = L_X} \qquad \boxed{R_g^* R_X = R_X} \qquad \boxed{R_X(e) = X = L_X(e)} \qquad (24)$$

3.4 O poli prefíkanom, čo si naraz ľavo-či-pravoinvariantným i fundamentálnym stať sa zaumienilo

Ľavoinvariantné pole L_X žije na G a istým spôsobom sa správa voči ľavej translácii na G (a to tak, že ju ignoruje - nereaguje). *Fundamentálne pole* ξ_X zase súvisí s nejakou (pravou) akciou R_g na nejakej variete M (a žije na tej variete M).

Teoreticky vzaté nie je vylúčené, že na grupe G (v úlohe M) pôsobí (sprava) grupa G (v úlohe G) tak, že zázračným riadením osudu *fundamentálne* polia ξ_X tohto osudom zázračne riadeného pravého pôsobenia sú *totožné s ľavoinvariantnými* poľami L_X, t.j. že platí

$$L_X = \xi_X \qquad (25)$$

Adeste fideles! Žijeme v tom šťastnom Vesmíre, kde táto udalosť naozaj nastáva!

Keď to už vieme, nie je ťažké uhádnuť to pôsobenie. Veď sú *len dve* zaujímavé pravé pôsobenia G na G, *pravá translácia* R_g a *ľavá translácia inverzným* prvkom $L_{g^{-1}}$, t.j. [1]

$$R_g : k \mapsto kg \qquad \text{alebo} \qquad L_{g^{-1}} : k \mapsto g^{-1}k \qquad (26)$$

(Áno, áno, viem, ešte je tu aj *konjugácia* inverzným prvkom, ale konjugácia je len zloženinou pravej a ľavej translácie, $I_g := L_g R_{g^{-1}}$.) Takže ak už to L_X naozaj generuje nejaké pravé pôsobenie na G, bude to veľmi pravdepodobne jedno z týchto dvoch.

Výpočet (dosť jemný) ukazuje, že naozaj *je*, a to tá *pravá translácia* (úloha 11.4.6 v knihe [1]).

[Mimochodom, tú druhú pravú akciu generujú *pravo*invariantné polia, presnejšie pole $-R_X$ (to mínus je tam za to g^{-1}). A konjugáciu inverzným prvkom generuje ich *rozdiel*, pole $L_X - R_X$.]

A je tu v hre ešte jedna jemnosť.

[1] To kg v $k \mapsto kg$ je tu *grupový súčin*, pritom ale *zároveň* to vyjadruje aj *pravé pôsobenie* v duchu zápisu (2).

Vzorce (6), (8) nám prezradili, ako sa správajú *všetky* fundamentálne polia ξ_X voči *tej* akcii, *ktorú generujú* (t.j. voči R_g na variete M). My sme sa teraz dozvedeli (hovorí to vzorec (25)), že ľavoinvariantné pole L_X je zároveň fundamentálne, a to voči akcii R_g = pravá translácia. Preto sa aj ono musí správať tak, ako mu všeobecný zákon káže, a to voči tej *pravej* translácii. Lenže ono je ľavoinvariantné, čo mu zase káže správať sa nejako voči *ľavej* translácii. Takže *celý* Zákon od neho chce toto

$$L_g^* L_X = L_X \qquad R_g^* L_X = L_{\mathrm{Ad}_g X} \tag{27}$$

V jazyku *generátorov* (pravej translácie) $e_i := L_{E_i}$ to je

$$L_g^* e_i = e_i \qquad R_g^* e_i = (\mathrm{Ad}_g)_i^j e_j \tag{28}$$

Uvedomím si, že toto *nemá* analóg na *všeobecnej* variete, je to špecifikum Lieovej grupy.

[Na všeobecnej variete nemám luxus dvoch *nezávislých* pôsobení grupy, tam všeobecne nemám *vôbec nič* a skáčem od radosti, keď mám *aspoň jedno* R_g. Vtedy hneď študujem, čo robia kadejaké veci voči nemu. *Tu*, na Lieovej grupe, môžem študovať, čo robia veci aj voči L_g aj voči R_g. A tie naozaj zaujímavé objekty robia spravidla *čosi slušné voči obom*. Napríklad, ako vidíme z (28), ľavoinvariantné polia sa pri oboch akciách *miešajú* istými *reprezentáciami* - čo sa *považuje* za slušné správanie, a to triviálnou voči L_g (čiže sa reálne nemiešajú) a pridruženou voči R_g.]

4 Regulárna reprezentácia G - na funkciách na samotnej grupe

4.1 Hocijaká grupa G

Ako sme pochopili v odseku 2.2, ak mám akýkoľvek G-priestor M akejkoľvek grupy G, môžem mu *kanonicky* [2] priradiť reprezentáciu tej grupy G na *funkciách* na M. Keď sa už dlho svetom potĺkame a poriadneho G-priestoru nikde, môžeme ako G-priestor použiť *samotnú grupu* G. Uvažovať teda *funkcie na grupe*.

[Všeobecne sa každý G-priestor rozpadá na *orbity* a každá orbita je *homogénny* priestor. Každý homogénny priestor je izomorfný *kanonickému* homogénnemu priestoru G/H pre nejakú podgrupu $H \subset G$ (pozri (13.2.7) v [1], [2]). Čím je podrupa väčšia, tým je výsledný homogénny priestor menší (lebo vzniká faktorizáciou). Preto *najväčší* = najbohatší homogénny priestor dostaneme pre *najmenšiu* podgrupu H. Vedci doteraz pod mikroskopom neobjavili menšiu podgrupu, ako jednoprvkovú podgrupu (obsahuje len jednotkový prvok grupy). To by mohlo vysvetľovať, prečo

[2] T.j. už bez vlastnej tvorivosti; tvorili za nás pred nami tí, čo toto dobre strážené tajomstvo Prírode vyrvali.

iní vedci doteraz neobjavili väčší homogénny priestor, ako celé G. Takže zobrať ako G-priestor samotnú grupu znamená zobrať *jej najväčší homogénny* priestor.]

Potrebujeme tam pravú akciu. Nie je problém, veď máme tie dve (rôzne) z (26) - *pravú transláciu* R_g a *ľavú transláciu inverzným* prvkom $L_{g^{-1}}$. Podľa algoritmu (13) dostávame preto *hneď dva* predpisy na reprezentáciu G na funkciách na G:

$$(\rho_1(g)\psi)(k) \quad := \quad \psi(kg) \tag{29}$$
$$(\rho_2(g)\psi)(k) \quad := \quad \psi(g^{-1}k) \tag{30}$$

Iný zápis toho istého:

$$\rho_1(g)\psi \quad := \quad \psi \circ R_g \equiv R_g^*\psi \tag{31}$$
$$\rho_2(g)\psi \quad := \quad \psi \circ L_{g^{-1}} \equiv L_{g^{-1}}^*\psi \tag{32}$$

Oba predpisy samozrejme dávajú korektné reprezentácie. V kostiach sa ale cíti, že tieto reprezentácie sú *ekvivalentné*. Je to naozaj tak, špik neklame, pozri overenie v Dodatku B. Ide teda, abstraktne vnímané, *len o jednu* reprezentáciu. Je dôležitá a volá sa *regulárna reprezentácia*. Pre jej bližšie skúmanie sa stačí obmedziť na (hociktoré) *jedno* z tých dvoch vyjadrení.

Čo je na regulárnej reprezentácii zaujímavé, je *napríklad* toto. Predstavím si, že mám nejakú konečnorozmernú reprezentáciu ρ (hocijakej) grupy G. Nech sa deje v (konečnorozmernom) priestore V. Keď v tom V vyberiem bázu, nejaké E_a, operátorom, a teda v konečnom dôsledku aj grupovým prvkom, viem priradiť matice (štandardne, $\rho(g)E_a =: A_a^b E_b$, t.j. $g \mapsto A(g)$). Teraz si uvedomím, že maticové prvky sú *čísla*, ktoré *závisia od* $g \in G$. Každý maticový prvok teda definuje *funkciu na grupe*. Keď mám funkcie na grupe, okamžite spustím, aby som bol *in*, mód rozmýšľania a konania zvaný *regulárna reprezentácia*.

Tá regulárna reprezentácia sa koná, podľa definície, na *všetkých* funkciách na grupe. My ich tu máme len istý konečný počet (d^2 ak matice sú $d \times d$). Nie je žiaden dôvod, aby sme takto dostali všetky funkcie na grupe; určite to nebudú všetky funkcie napríklad pre Lieove grupy, na ktorých evidentne žije nekonečne veľa funkcií, ale ani pre konečné grupy nemusia *takto* vzniknúť všetky funkcie na nich - napríklad pre triviálnu reprezentáciu - všetko šup do čísla 1, vznikne takto *len jedna* funkcia, a to jednotková).

Nie je ale vylúčené, že na tých našich sa deje nejaká *podreprezentácia regulárnej* reprezentácie. Čiže to, že na ne sa naťahuje nejaký (konečnorozmerný) *invariantný* podpriestor a keď sa obmedzíme len naň, dostávame nejakú konečnorozmernú reprezentáciu. A presne toto naozaj nastáva! Dokonca nastáva niečo *ešte zaujímavejšie*! Ukazuje sa, že dokonca

- inv. podpriestor je generovaný *jediným* (každým :-) *riadkom* tej matice
- a podreprezentácia, ktorá *na ňom* vzniká, je *ekvivalentná tej danej* ρ

(Jednoduchý výpočet, ktorý to overuje, je náplňou úlohy 13.4.2 v knihe [1].) Ten riadok je d funkcií, pôvodná reprezentácia, z ktorej sme ten riadok dostali, bola d-rozmerná, tak prečo nie :-) A uvedomím si, že tých riadkov je v tej matici d, takže ono to je tak, že v regulárnej reprezentácii sú jednak skryté *všetky* konečno-rozmerné reprezentácie tej grupy a navyše, každá d-rozmerná je tam dokonca v d kópiách. Zjavne je v tej regulárnej reprezentácii *miesta dosť*.

4.2 Lieova grupa G

Všetko o regulárnej reprezentácii z odseku 4.1 stále platí (lebo vedci zistili, že Lieova grupa neprestáva byť hocijakou). Pristupuje tu ale pojem Lieovej algebry a jej *odvodenej* regulárnej reprezentácie.

Keď zoberiem do úvahy fakt (17) a pridám k tomu to, čo sa spomínalo úplne na konci odseku 3.4, dostávam, že *odvodená* reprezentácia pre tie dve vyjadrenia *regulárnej reprezentácie* je

$$\boxed{(\rho_1(g)\psi)(k) := \psi(kg)} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\rho_1'(X) = L_X} \tag{33}$$

$$\boxed{(\rho_2(g)\psi)(k) := \psi(g^{-1}k)} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\rho_2'(X) = -R_X} \tag{34}$$

Toto vrhá jasné monochromatické svetlo aj na ináč strach naháňajúce slovné spojenie *fundamentálne invariantné vektorové polia v regulárnej reprezentácii* v znení otázky č.4. Na súde môžeme ako svedkovia s čistým svedomím vypovedať:

- *Áno, naozaj existuje* pole (konkrétne L_X), ktoré je fundamentálne (konkrétne generuje pravú transláciu), je invariantné (konkrétne ľavoinvariantné), je vektorové (konkrétne - hm, no čo už k tomu, jednoducho je vektorové), ba dokonca súvisí aj s regulárnou reprezentáciou (konkrétne je ním daná *odvodená* reprezentácia (Lieovej algebry) k regulárnej reprezentácii (grupy)).

A tiež

- *áno, naozaj existuje* pole (konkrétne $-R_X$), ktoré je fundamentálne (konkrétne generuje ľavú transláciu o inverzný prvok), je invariantné (konkrétne pravo-invariantné), je vektorové (konkrétne - hm, no čo už k tomu, jednoducho je vektorové), ba dokonca súvisí aj s regulárnou reprezentáciou (konkrétne je ním daná *odvodená* reprezentácia (Lieovej algebry) k regulárnej reprezentácii (grupy; v tej jej druhej variante)).

Keď sa budeme pozerať na regulárnu reprezentáciu optikou grupovej algebry (odstavec 4.3), dostaneme zhodu s jej tunajšou verziou označovanou ako ρ_2, pozri (46). S trochou úsilia (či jemného *ná*silia) sa ale dá vidieť cez grupovú algebru, ako ukazuje Dodatok D, aj to ρ_1.

[A pristupuje tu ešte *Peter/ Weyl*, t.j. veta, že na kompaktnej grupe G sa „ľubovoľná (spojitá komplexnoznačná) funkcia dá rozvinúť do („Fourierovho") radu podľa funkcií, ktoré sú maticovými prvkami *všetkých ireducibilných* reprezentácií". (Platí to aj pre $L^2(G)$. „Dá rozvinúť" je nespôsobné vyjadrenie toho, že tie maticové veci *sú husté* v tých všetkých spojitých *v norme* takej a takej.) Podľa (ďalšieho priebehu znenia) tej vety sa regulárna reprezentácia na $L^2(G)$ rozkladá na *priamy súčet všetkých ireducibilných* reprezentácií a tie maticové elementy tvoria *ortonormovanú* bázu $L^2(G)$. V konečných grupách sú to jednoduchšie tvrdenia o úplnosti a ortogonalite maticových prvkov ireducibilných reprezentácií (Frobenius, Schur), na kompaktných Lieových pristupuje k tomu netriviálna analýza.]

4.3 Pohľad cez grupovú algebru

Uvažujme *konečnú* grupu (jej prvky sú $g_1, \dots, g_n$) a v nej *formálne lineárne kombinácie* grupových prvkov

$$\alpha := c_1 g_1 + \dots + c_n g_n \tag{35}$$

Myslí sa to tak, že vytvoríme (tu n-rozmerný) vektorový priestor, v ktorom grupové prvky prehlásime za jeho *bázu* a potom už *všeobecnému* prvku nezostáva nič iné, ako mať tvar (35).

Takáto myšlienka by nám nemala byť neznáma, stretli sme sa s ňou napríklad v časoch, keď sme študovali *reťazce* na variete (pre potreby integrovania foriem; formy sa integrujú po reťazcoch a len po reťazcoch), pozri paragraf 7.2. v knihe [1]. Tam sa uvádzal aj zámerne didakticky vyhrotený príklad vektorového priestoru, kde prvky mali tvar $k_1 J + k_2 H$, kde J a H boli jablko a hruška. Podobne sa dá postupovať s ľubovoľnou n-ticou vašich obľúbených predmetov (preukaz poistenca, ľavá značková turistická topánka, 64 GB usb-kľúč, nanočastica, ...).

Čo je ale v tomto našom terajšom prípade nové je to, že bázové prvky tohto vektorového priestoru sa dajú asociatívne *násobiť* a sú voči tomuto násobeniu ako množina *uzavreté* (vedci v laboratóriách po celom svete čulo experimentujú aby zistili, čo dostaneme, keď vynásobíme jablko s hruškou, či jablko, alebo hrušku). Keď máme násobenie na báze, ľahko ho dorobíme (lineárne rozšírime) na všeobecné prvky tvaru (35). Metóda sa volá roznásobenie (alebo *každý s každým*; tiež, pozri paragraf 2.4 v knihe [1], pravidlo maximálnej promiskuity).

Napríklad v *dvoj*prvkovej grupe máme bázu $(g_1, g_2) \equiv (e, a)$ a teda jej násobenie $g_1 g_1 = g_1$, $g_1 g_2 = g_2$, $g_2 g_1 = g_2$, $g_2 g_2 = g_1$. Preto

$$\begin{aligned} \alpha\beta &\equiv (c_1 g_1 + c_2 g_2)(k_1 g_1 + k_2 g_2) \\ &= c_1 k_1 g_1 g_1 + c_1 k_2 g_1 g_2 + c_2 k_1 g_2 g_1 + c_2 k_2 g_2 g_2 \\ &= (c_1 k_1) g_1 + (c_1 k_2) g_2 + (c_2 k_1) g_2 + (c_2 k_2) g_1 \\ &= (c_1 k_1 + c_2 k_2) g_1 + (c_1 k_2 + c_2 k_1) g_2 \\ &=: p_1 g_1 + p_2 g_2 \end{aligned}$$

čiže platí

$$(c_1 g_1 + c_2 g_2)(k_1 g_1 + k_2 g_2) = (p_1 g_1 + p_2 g_2) \tag{36}$$

pre

$$p_1 = c_1 k_1 + c_2 k_2 \qquad p_2 = c_1 k_2 + c_2 k_1 \tag{37}$$

Toto celé znamená, že sa nám podarilo (kanonicky) priradiť grupe istú *asociatívnu algebru*. Volá sa *grupová algebra* grupy G. Označuje sa rôzne. Napríklad v texte [5] sa označuje $\mathbb{C}[G]$ (ak sú koeficienty vo výraze (35) *komplexné* čísla), v knihe [3] zasa $\mathbb{C}G$, v knihe [4] sa používa označenie $\mathcal{A}(G)$ (a napokon v knihe [1] sa o nej nehovorí nič, čo má tú výhodu, že sa nemusí označovať nijako).

Vzorec pre výpočet koeficientov rozkladu výsledku z koeficientov rozkladu vstupujúcich objektov nadobudne zaujímavejší tvar, keď na tie koeficienty c_i vo všeobecnej lineárnej kombinácii (35) pozrieme po novom.

Všimnime si, že tých koeficientov je rovnako veľa, ako grupových prvkov a že sú to čísla (povedzme komplexné). To umožňuje zaviesť *funkciu na grupe* (s hodnotami v komplexných číslach), ktorá nadobúda (podľa definície) v bode g_i funkčnú hodnotu c_i. Je zrejmé, že tá funkcia je daná takto jednoznačne a tiež že naopak každá funkcia na grupe vygeneruje (ako svoje funkčné hodnoty) n-ticu čísel, z ktorých potom vieme poskladať výraz typu (35). A čo je ešte pozoruhodné: keď budem robiť (podľa *bežného* „pobodového" receptu!) *lineárne kombinácie* funkcií, bude to presne zodpovedať lineárnym kombináciám tých výrazov (35). Prepis vzorca (35) do tohto nového jazyka bude

$$\alpha := f(g_1)g_1 + \cdots + f(g_n)g_n \qquad \text{ak} \qquad \alpha \leftrightarrow f \tag{38}$$

Toto všetko neznamená nič viac a nič menej ako to, že grupová algebra $\mathcal{A}(G)$ je *ako lineárny priestor* izomorfná starej známej algebre funkcií na grupe $\mathcal{F}(G)$.

Keď sú však dve algebry izomorfné ako lineárne priestory, to ešte neznamená, že sú izomorfné aj ako algebry. Môžu sa odlišovať vo svojom druhom prvku, v *súčine*.

Pripomeňme, že ak všeobecne pod $\mathcal{F}(M)$ myslíme *algebru* funkcií na M, konvenčne sa tam vníma automaticky *pobodový* súčin $(fh)(m) := f(m)h(m)$. Takže aj pod $\mathcal{F}(G)$ máme myslieť algebru funkcií na grupe s týmto *pobodovým* súčinom. Je dobré si všimnúť, že tento súčin v $\mathcal{F}(G)$ nijako *nevyužíva* štruktúru grupy, takže *z neho* sa o grupe zrejme veľa nedozvieme.

[S podobnou situáciou sme sa stretli v prípade *symplektických* variet (pozri 14.1.10 v knihe [1]). Tam sme uvažovali najprv bežnú algebru funkcií, pridali sme tam ale aj *druhý* súčin, a to *Poissonovu zátvorku* (ten tú symplektickú štruktúru samozrejme cíti). Voči nej sa stal pôvodný vektorový priestor *Lieovou* algebrou. Ak sa ponechajú v hre oba súčiny, dostávame kombinovanú algebru, súčasne asociatívnu (voči prvému súčinu) aj Lieovu (voči druhému súčinu), pričom tieto dva súčiny o sebe vedia (cez vzorec, kde je v Poissonovej zátvorke na jednej strane obyčajný súčin funkcií). Má aj názov, *algebra pozorovateľných* klasickej mechaniky.]

Na druhej strane súčin v grupovej algebre $\mathcal{A}(G)$ zjavne *závisí* od štruktúry grupy (od toho, ako dopadne súčin i-teho a j-teho prvku), takže ak použijeme lineárny izomorfizmus $\mathcal{F}(G) \leftrightarrow \mathcal{A}(G)$ na ukradnutie (indukovanie) súčinu z formálnych lineárnych kombinácií a jeho vyjadrenie v jazyku funkcií na grupe, musíme v jazyku funkcií dostať *iný* súčin, ako pobodový. Ako vyzerá? Stačí si ho vyrátať.

Samozrejme najdôležitejšou časťou (každého) výpočtu je nejako si označiť jeho výsledok. Keďže pobodový súčin už využíva ten najjednoduchší možný zápis fh (tzv. juxtaposition), treba niečo iné. To iné sa označuje hviezdičkou, teda $f*g$. A výpočet dáva toto (pozri Dodatok C):

$$\boxed{(f*h)(g) = \sum_{k\in G} f(gk^{-1})h(k)} \tag{39}$$

Takému súčinu sa hovorí *konvolutívny súčin*, alebo skrátene *konvolúcia*. Prípadne je dobré vedieť, že úplne rovnocenné sú tieto *dve* vyjadrenia konvolúcie

$$(f*h)(g) = \sum_{k\in G} f(gk^{-1})h(k) \tag{40}$$

$$= \sum_{k\in G} f(k)h(k^{-1}g) \tag{41}$$

Grupová algebra $\mathcal{A}(G)$ grupy G sa teda dá opísať *aj* ako lineárny priestor $\mathcal{F}(G)$, v ktorom sa zavedie ako súčin *konvolúcia* $f*h$ à la (39). (Keďže konvolúcia je výsledkom kvalifikovanej krádeže asociatívneho súčinu, je tiež *asociatívna*, o čom sa dá presvedčiť aj priamo.)

[Na *Lieovej* grupe $G = (\mathbb{R}, +)$, kde $xy = x + y$ a teda $x^{-1} = -x$ a kde sa *suma nahradí* (správnym, pozri Dodatok E) *integrálom*, dávajú vzorce (40) a (41) toto

$$(f*h)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)h(y)dy \tag{42}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)h(x-y)dy \tag{43}$$

čo už je konvolúcia *tak, ako ju asi poznáme viac*. (Napríklad z Fourierových integrálov či z pravdepodobnostných rozdelení.)

Ešte sa dá vyskúšať, že konvolúcia (41) nám naozaj zreprodukuje vzorčeky (36), (37) pre *dvoj*prvkovú grupu. Korešpondencia je

$$f(e) = c_1 \qquad f(a) = c_2 \qquad\qquad h(e) = k_1 \qquad h(a) = k_2$$

Dostávame

$$\begin{aligned}(f*h)(e) = \textstyle\sum_{k\in G} f(k)h(k^{-1}e) &= f(e)h(e^{-1}e) + f(a)h(a^{-1}e)\\ &= f(e)h(e) + f(a)h(a)\\ &= c_1k_1 + c_2k_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f*h)(a) = \textstyle\sum_{k\in G} f(k)h(k^{-1}a) &= f(e)h(e^{-1}a) + f(a)h(a^{-1}a)\\ &= f(e)h(a) + f(a)h(e)\\ &= c_1k_2 + c_2k_1\end{aligned}$$

Takže to tuším sedí.]

4.4 Reprezentácie grupy G a grupovej algebry $\mathcal{A}(G)$

V asociatívnej algebre A máme lineárnu šruktúru a asociatívny (a bilineárny) súčin.

Reprezentovať takúto algebru (v lineárnom priestore W) znamená každému $a \in A$ priradiť lineárny operátor $\rho(a)$ tak, aby toto priradenie bolo homomorfizmom (do asociatívnej algebry (!) lineárych operátorov vo W).

Ak chcem reprezentovať *grupovú* algebru, mám vedieť priradiť operátor $\rho(\alpha)$ prvku $\alpha = f(g_1)g_1 + \cdots + f(g_n)g_n$. Linearita chce, aby to bolo $f(g_1)\rho(g_1) + \cdots + f(g_n)\rho(g_n)$. Na dokončenie už potrebujem len vedieť, ako urobiť to $\rho(g_k)$. A to by som určite vedel, keby som mal reprezentáciu *grupy*. Teda ak mám reprezentáciu G, viem jej priradiť reprezentáciu $\mathcal{A}(G)$ (a ak to bolo dobré na G, tak je to dobré aj na $\mathcal{A}(G)$). To je *rozšírenie reprezentácie grupy na grupovú algebru*. Ľahko sa nahliadne, že to funguje aj naopak, z reprezentácie $\mathcal{A}(G)$ viem triviálne vyrobiť reprezentáciu G.

Každá (asociatívna) algebra A sa dá reprezentovať *sama na sebe* (A je o.i. lineárny priestor, takže v princípe môže slúžiť ako nosný priestor reprezentácie; je to podobné, ako malé ad je reprezentácia *Lieovej* algebry sama na sebe). Predpis je jednoduchý, využíva (bilineárny) *súčin* v algebre:

$$\rho(a)b := ab \qquad\qquad a, b \in A \tag{44}$$

(Overiť linearitu operátora $\rho(a)$ a homomorfizmus zobrazenia ρ, t.j. fakty $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$ a $\rho(a + \lambda b) = \rho(a) + \lambda\rho(b)$ je triviálne.)

Keď sa to dá urobiť s každou algebrou, dá sa aj s grupovou. Tam bude predpis ten istý, len sa špecifikujú písmenká:

$$\boxed{\rho(\alpha)\beta := \alpha\beta} \qquad\qquad \alpha, \beta \in \mathcal{A}(G) \tag{45}$$

Teraz si uvedomím dve veci.

1. Tento predpis dáva aj reprezentáciu *grupy* G v *grupovej algebre* $\mathcal{A}(G)$
2. Grupová algebra sa dá realizovať aj ako priestor *funkcií na grupe.*

[Na 1. stačí položiť ako α grupový prvok g (ten je formálne tiež z grupovej algebry). O 2. sa hovorilo podrobne v odseku 4.3, pozri okolie (38).]

To ale znamená, že „kanonická" reprezentácia (45) grupovej algebry zodpovedá istej reprezentácii *grupy* G v priestore *funkcií* na grupe G. Hm, začína nám to čosi pripomínať. Akoby sme už o takom niečom niekedy počuli.

Tak si pre istotu zrátame, ako tá reprezentácia v jazyku funkcií na grupe explicitne vyzerá. Naše podozrenie sa potvrdí, vyzerá takto (pozri Dodatok D):

$$(\rho(g)f)(h) = f(g^{-1}h) \tag{46}$$

Je to teda naša stará známa *regulárna reprezentácia* z (30).
(A kde je v tom varianta (29)? Pozri ten Dodatok D.)

Poďakovanie

Ďakujem.

A Výpočet potrebný na vzorec (17)

Ak pustíme obe strany (16) na ψ a zoberieme do úvahy (13), dostaneme

$$\begin{array}{rrcl} \text{ľavá strana:} & (\rho(e^{\epsilon X})\psi)(m) & = & \psi(me^{\epsilon X}) \\ & & = & \psi(m(\epsilon)) \\ & & = & \psi(m) + \epsilon\dot{m}(0)\psi \\ & & = & \psi(m) + \epsilon\xi_X(m)\psi \\ \text{pravá strana:} & ((\hat{1} + \epsilon\rho'(X))\psi)(m) & = & \psi(m) + \epsilon(\rho'(X)\psi)(m) \end{array}$$

Pre každé m teda platí (17), takže to platí aj v zápise bez m.

B Ekvivalencia ρ_1 a ρ_2 z (29) a (30)

Najprv si uvedomíme, že existuje pozoruhodná *bijekcia* na grupe G

$$I : G \to G \qquad k \mapsto k^{-1} \tag{47}$$

Jej pozoruhodnosť spočíva v tom, že „preplieta" tie *dve pravé* pôsobenia na G, t.j. spĺňa

$$R_g \circ I = I \circ L_{g^{-1}} \tag{48}$$

(tvrdí sa len to, že $k^{-1}g = (g^{-1}k)^{-1}$).

Teraz je tu hlavné tvrdenie, že ρ_1 a ρ_2 *sú ekvivalentné*. Keďže obe majú ako reprezentačný priestor $\mathcal{F}(G)$, treba nájsť, podľa definície ekvivalencie reprezentácií, *splietajúci operátor* medzi nimi, t.j. *lineárny izomorfizmus*

$$F : \mathcal{F}(G) \to \mathcal{F}(G) \qquad \text{taký, že} \qquad F \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ F \tag{49}$$

Ukazuje sa, že s touto podmienkou sa so cťou vyrovnáva jednoduchý operátor

$$F(\psi) = \psi \circ I \qquad \text{t.j. explicitne} \qquad (F(\psi))(k) = \psi(k^{-1}) \tag{50}$$

Operátor pôsobí tak, že *zinvertuje argument* funkcie. Nič viac nerobí. Ľahko sa preverí, že je lineárny a obrátiteľný. Rovnako ľahko sa preverí, že sme „nebrali jeho meno nadarmo":

$$\begin{array}{rcl} (F \circ \rho_1(g))(\psi) & = & (\rho_1(g)\psi) \circ I \\ & = & \psi \circ R_g \circ I \\ & = & \psi \circ I \circ L_{g^{-1}} \\ & = & F(\psi) \circ L_{g^{-1}} \\ & = & (\rho_2(g) \circ F)(\psi) \end{array}$$

takže naozaj platí (49).

Alebo, *ešte jednoduchšie*: podľa (31) a (32) sú reprezentácie ρ_1 a ρ_2 z (29) a (30) vlastne dané ako *pull-backy* práve tých R_g a $L_{g^{-1}}$, ktoré vstupujú do (48). No a keď si uvedomím, že operátor F z (50) zasa nie je nič iné, ako *pull-back* voči I,

$$F(\psi) = \psi \circ I \equiv I^*\psi \tag{51}$$

tak výpočet (štartujúc z elementárneho faktu (48)) je naozaj skoro dopopuku:

$$\begin{aligned} R_g \circ I &= I \circ L_{g^{-1}} \\ (R_g \circ I)^* &= (I \circ L_{g^{-1}})^* \\ I^* \circ R_g^* &= L_{g^{-1}}^* \circ I^* \\ F \circ \rho_1(g) &= \rho_2(g) \circ F \end{aligned}$$

Hotovo :-)
Pozn.: Keď to zapíšem cez pull-backy, je to nielen jednoduchšie, ale aj oveľa všeobecnejšie. Namiesto funkcií (= 0-foriem) na G môžem zobrať *ľubovoľné p-formy* (alebo ešte všeobecnejšie *tenzorové polia* typu $\binom{r}{s}$) na G.

C Výpočet súčinu $f * h$

Nech $f = \sum_i f(g_i)g_i$, $h = \sum_j h(g_j)g_j$. (V týchto vyjadreniach sa už funkcii priradila zodpovedajúca formálna lineárna kombinácia.) Potom

$$\begin{aligned} f * h &\equiv (\textstyle\sum_i f(g_i)g_i)(\sum_j h(g_j)g_j) \\ &= \textstyle\sum_j(\sum_i f(g_i)h(g_j))g_ig_j \\ &= \textstyle\sum_k(\sum_i f(g_i)h(g_i^{-1}g_k))g_k \\ &\equiv \textstyle\sum_k (f*h)(g_k)g_k \end{aligned}$$

V treťom riadku sa prešlo od sumovania cez g_j k sumovaniu cez $g_k := g_ig_j$ (vyčerpať všetky g_j je to isté ako vyčerpať všetky g_ig_j pre *fixované* g_i, lebo ľavá traslácia o g_i je *bijekcia* $G \to G$; tento trik sme mali na grupách pri konštrukcii ρ-invariantného skalárneho súčinu stredovaním nejakého provizórneho cez grupu, pozri 12.1.11 v knihe [1]). Odtiaľ potom $g_j = g_i^{-1}g_k$.

Výsledok teda je

$$(f * h)(g_k) = \sum_i f(g_i)h(g_i^{-1}g_k) \tag{52}$$

čo je presne (41).

Keby som v treťom riadku nevyjadril zo vztahu $g_k := g_ig_j$ to g_j, ale $g_i = g_kg_j^{-1}$, výpočet by vyzeral takto

$$\begin{aligned} f * h &\equiv (\textstyle\sum_i f(g_i)g_i)(\sum_j h(g_j)g_j) \\ &= \textstyle\sum_j(\sum_i f(g_i)h(g_j))g_ig_j \\ &= \textstyle\sum_k(\sum_j f(g_kg_j^{-1})h(g_j))g_k \\ &\equiv \textstyle\sum_k (f*h)(g_k)g_k \end{aligned}$$

Výsledok by teda teraz bol

$$(f * h)(g_k) = \sum_j f(g_k g_j^{-1}) h(g_j) \tag{53}$$

čo je pre zmenu presne (40).

D Regulárna reprezentácia grupy pomocou grupovej algebry

Nech $f = \sum_i f(g_i) g_i$. Potom

$$\begin{array}{rcl} \rho(g) f & \equiv & g f \\ & = & \sum_i f(g_i) g g_i \\ & = & \sum_k f(g^{-1} g_k) g_k \\ & \equiv & \sum_k (\rho(g) f)(g_k) g_k \end{array}$$

V treťom riadku sa opäť prešlo od sumovania cez g_i k sumovaniu cez $g_k := g g_i$. Odtiaľ potom $g_i = g^{-1} g_i$.

Výsledok teda je

$$(\rho(g) f)(g_k) = f(g^{-1} g_k) \tag{54}$$

čo je akurát varianta ρ_2 z (30).

Poznámka: Pohľad na vzorček (45) inšpiruje k alternatívnemu nápadu urobiť to trochu ináč, a to takto

$$\rho(\alpha)\beta := \beta\alpha^{-1} \qquad\qquad \alpha, \beta \in \mathcal{A}(G) \tag{55}$$

To by bol určite skvelý nápad, keby niečo ako α^{-1} v grupovej algebre (vždy) existovalo. Ale *niekedy* to určite *existuje* - pre „čisté grupové” prvky, teda keď $\mathcal{A}(G) \ni a = g \in G$ (všetky koeficienty formálnej lineárnej kombinácie nulové, okrem jedného, ktorý má hodnotu 1; v jazyku funkcií na grupe taká funkcia, ktorá je všade nulová okrem jedného grupového prvku, kde je jednotková). Nejakú reprezentáciu *grupy* G (aj keď už nie algebry $\mathcal{A}(G)$) teda dostanem z predpisu

$$\rho(g)\beta := \beta g^{-1} \qquad\qquad g \in G, \beta \in \mathcal{A}(G) \tag{56}$$

Idem rátať, ako vyzerá v jazyku funkcií na grupe. Pre $f = \sum_i f(g_i) g_i$ dostávam

$$\begin{array}{rcll} \rho(g) f & \equiv & f g^{-1} & \\ & = & \sum_i f(g_i) g_i g^{-1} & \\ & = & \sum_k f(g_k g) g_k & \qquad \text{lebo } g_i = g_k g \\ & \equiv & \sum_k (\rho(g) f)(g_k) g_k & \end{array}$$

Výsledok teda je

$$(\rho(g) f)(g_k) = f(g_k g) \tag{57}$$

čo je akurát varianta ρ_1 z (29).

E Aká miera má byť v súčine $f * h$ na Lieovej grupe

Skúsme prepísať výsledky (40) a (41) pre spojitý prípad (na *Lieovej* grupe). Sumy treba zjavne nahradiť (nejakým) integrálom „$\int_G (\dots) dg$". Konkrétnejšie

$$\begin{aligned} (f * h)(k) &= \int_G f(kg^{-1})h(g)dg & (58) \\ &= \int_G f(g)h(g^{-1}k)dg & (59) \end{aligned}$$

Otázka je, čo je to presnejšie to „dg"(s akou *formou objemu*, či *mierou*, to máme integrovať).

Trochu tie výrazy prepíšme. Pomocou zobrazenia (47) a ľavej a pravej translácie L_g a R_g môžeme písať

$$\begin{aligned} f(kg^{-1}) &= ((L_k \circ I)^* f)(g) \\ h(g^{-1}k) &= ((R_k \circ I)^* h)(g) \end{aligned}$$

a tak dve ekvivalentné vyjadrenia konvolúcie sú

$$\begin{aligned} (f * h)(k) &= \int_G ((L_k \circ I)^* f) h\omega & (60) \\ &= \int_G f((R_k \circ I)^* h)\omega & (61) \end{aligned}$$

V týchto vzorcoch je ω hľadaná forma objemu na G. Ukazuje sa, že sa dá určiť z podmienky *konzistentnosti* vyjadrení (60) a (61), t.j. z požiadavky, aby obe vyjadrenia dávali to isté.

Zobrazenie I je difeomorfizmus G, ktorý ale na *nepárno*rozmerných grupách *mení orientáciu.* Symbolicky

$$I(G, o) = (G, (-1)^n o) \tag{62}$$

a teda integrál po G môžeme kedykoľvek nahradiť $(-1)^n$-násobkom integrálu po $I(G)$

$$\int_G (\dots) = (-1)^n \int_{I(G)} (\dots) \tag{63}$$

[$I(1+\epsilon X) = (1-\epsilon X)$, čiže $I'(X) \equiv I_* X = -X$. Preto na báze $I_* E_i = -E_i$, následne $I^*(E^1 \wedge \dots E^n) = (-1)^n (E^1 \wedge \dots \wedge E^n)$ a napokon $I^*\omega = (-1)^n \omega$. Pripomeňme, že forma objemu fixuje orientáciu.]

Pre L_g a R_g (tiež difeomorfizmy G) to je ešte jednoduchšie,

$$\int_G (\dots) = \int_{L_k(G)} (\dots) = \int_{R_k(G)} (\dots) \tag{64}$$

[Prinajmenšom pre grupové prvky k v Exp-obraze Lieovej algebry. Tie totiž ležia na jednoparametrických podgrupách, takže L_k vznikne *spojitou* deformáciou L_e =id a id zjavne nemení orientáciu. Takže ju nemení ani L_k. A úplne rovnako ani R_k.]

Kombináciou (63) a (64) mám

$$\int_G (\dots) = (-1)^n \int_{(L_k \circ I)(G)} (\dots) = (-1)^n \int_{(R_k \circ I)(G)} (\dots) \tag{65}$$

Ak si napokon uvedomíme, že z vlastností (48) a faktu $I^2 =$ id vyplýva

$$(L_k \circ I)^*(R_k \circ I)^* = (R_k \circ I)^*(L_k \circ I)^* = \hat{1} \tag{66}$$

tak môžeme rátať takto: ak začnem z vyjadrenia (60), tak

$$\begin{aligned}
(f * h)(k) &= \textstyle\int_G ((L_k \circ I)^* f) h\omega \\
&= (-1)^n \textstyle\int_{(R_k \circ I)(G)} ((L_k \circ I)^* f) h\omega \\
&= (-1)^n \textstyle\int_G (R_k \circ I)^*((L_k \circ I)^* f)(R_k \circ I)^* h (R_k \circ I)^* \omega \\
&= (-1)^n \textstyle\int_G f((R_k \circ I)^* h)(R_k \circ I)^* \omega \\
&= (-1)^n \textstyle\int_G f((R_k \circ I)^* h)(I \circ L_{k^{-1}} I)^* \omega \\
&= (-1)^n \textstyle\int_G f((R_k \circ I)^* h) L^*_{k^{-1}}(I^* \omega) \\
&= \textstyle\int_G f((R_k \circ I)^* h)(L^*_{k^{-1}} \omega)
\end{aligned}$$

Porovnanie s vyjadrením (61) ukazuje, že forma objemu ω musí byť *ľavo*invariantná

$$L_k^* \omega = \omega \tag{67}$$

Ak ale začnem naopak z vyjadrenia (61), tak

$$\begin{aligned}
(f * h)(k) &= \textstyle\int_G f((R_k \circ I)^* h)\omega \\
&= (-1)^n \textstyle\int_{(L_k \circ I)(G)} f((R_k \circ I)^* h)\omega \\
&= (-1)^n \textstyle\int_G ((L_k \circ I)^* f)((L_k \circ I)^*(R_k \circ I)^* h)(L_k \circ I)^* \omega \\
&= (-1)^n \textstyle\int_G ((L_k \circ I)^* f) h (L_k \circ I)^* \omega \\
&= (-1)^n \textstyle\int_G ((L_k \circ I)^* f) h (I \circ R_{k^{-1}} I)^* \omega \\
&= (-1)^n \textstyle\int_G ((L_k \circ I)^* f) h R^*_{k^{-1}}(I^* \omega) \\
&= \textstyle\int_G ((L_k \circ I)^* f) h (R^*_{k^{-1}} \omega)
\end{aligned}$$

Porovnanie s vyjadrením (60) teraz ukazuje, že forma objemu ω musí byť pre zmenu *pravo*invariantná

$$R_k^* \omega = \omega \tag{68}$$

Ak teda trvám na tom, že konvolúcia $f * h$ sa musí dať vyjadriť dvojako, vzťahom (60) *aj* (61), tak forma objemu v zmysle ktorej sa integruje musí byť *obojstranne* invariantná

$$R_k^* \omega = L_k^* \omega = \omega \qquad\qquad k \in G \tag{69}$$

S takouto formou objemu nemám nikdy problém na

- *kompaktnej* grupe (úloha 12.3.17)
- *komutatívnej* grupe (tam $L_k = R_k$; toto sme videli v (42) a (43)).

Literatúra

[1] M.Fecko: Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov,
Bratislava, Iris 2009 (2.vydanie)

[2] M.Fecko: Additional material to Differential Geometry ...,
na mojej stránke anglického vydania

[3] W.Fulton, J.Harris: Representation Theory, A First Course
Springer Verlag 1991

[4] B.Simon: Representations of Finite and Compact Groups,
American Mathematical Society 1996

[5] P.Ševera: Texty z jeho stránky,
(adresa: ako moja hlavná, za vlnovkou prepísť *fecko* na *severa*;
potom ešte prehodiť .ps do .pdf a je to :-)