Ako sa počítajú priestorové a časové intervaly z metrického tenzora $g_{\mu\nu}(x)$.
Synchronizácia hodín v priestoročase.

Marián Fecko

Robí sa to napríklad v Landauovi-Lifšicovi [1] § 84, a to pomocou svetelných lúčov, nie "geometricky". Tu explicitne geometricky. (Svetelné lúče nás priviedli k geometrii, ďalej sa už môže aj bez nich.)

Vzťažná sústava je daná (podľa [1], koniec § 82)

nekonečným počtom telies, ktoré vypĺňajú celý priestor (vytvárajú niečo ako "prostredie"); s každým telesom sú spojené ľubovoľne idúce hodiny.

Súradnice sa zavádzajú tak, aby sa každé z tých telies pohybovalo po svetočiare s konštantnými hodnotami x^1, x^2, x^3 a súradnica $x^0 = t$ zodpovedá "času", ktorý ukazujú tie "ľubovoľne idúce hodiny" tohoto pozorovateľa.[1] Tieto súradnice, zavedené voči nejakej konkrétnej vzťažnej sústave, však nevypovedajú *priamo* nič o tom, ako ďaleko sú od seba nejaké dva body (napríklad konce tyče, ktorej dĺžku meriame) alebo koľko času ubehlo na nejakých reálnych hodinách. Sú iba pomocným nástrojom, ktorý dá to čo treba až v spojení s *metrickým tenzorom.*

Predpokladá sa teda, že

1. používame (takto zavedené) súradnice $x^0 = t, x^i$
2. metricky tenzor v nich má tvar

$$\begin{aligned} g &= g_{\mu\nu}(x) dx^\mu \otimes dx^\nu \\ &= g_{00}(x) dt \otimes dt + g_{0i}(x)(dt \otimes dx^i + dx^i \otimes dt) + g_{ij}(x) dx^i \otimes dx^j \end{aligned}$$

3. *smer* času je daný vektorom $\partial_t \equiv \partial_0$
4. avšak samotná súradnica t nedáva nevyhnutne naozajstný čas pozorovateľa na tejto svetočiare (je "ľubovoľná")
5. naozajstný (trojrozmerný) priestor je *kolmý* (v zmysle g) na smer času (dôsledok princípu ekvivalencie: *takto to je* v ŠTR, musí to preto tak byť lokálne aj vo VTR a kolmosť je lokálna vlastnosť)

1. Čas na hodinkách stojaceho pozorovateľa.

Stojaci pozorovateľ má svetočiaru s konštantnými hodnotami x^i a rastúcou súradnicou t. Ale to t nie je naozajstný čas, ktorý ukazujú hodinky v jeho ruke (jeho *vlastný čas*), lebo vektor $\partial_t \equiv \partial_0$ všeobecne nie je normovaný na jednotku.

(V ŠTR plynul správny čas v smere vektora $e_0 = \partial_t$, dotykového k svetočiare, ktorý tam *bol* normovaný na jednotku. Princíp ekvivalencie chce, aby sa "objektívna" požiadavka normovanosti na jednotku vyžadovala aj vo VTR, čo už ale spôsobí, že ∂_t *nie je* dobrý, takže t *nie je "dobrý" čas.*)

Nájdeme normovaný vektor e_0 v smere ∂_t:

$$e_0 = k\partial_t \quad \Rightarrow \quad 1 = g(e_0, e_0) = g(k\partial_0, k\partial_0) = k^2 g_{00} \quad \Rightarrow \quad k = 1/\sqrt{g_{00}}$$

takže jednotkový vektor v časovom smere je

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\, \partial_t \tag{1}$$

[1] Ono to s tou ľubovoľnosťou ale nemožno preháňať, lebo t musí byť *hladká* funkcia v priestoročase, blízke (sveto)body musia mať aj blízke hodnoty t. Súradnicová funkcia t teda opisuje jedným šmahom chod tých ľubovoľne idúcich hodín pre všetkých pozorovateľov.

Tento jednotkový vektor má tú dobrú vlastnosť, že ak idem po jeho integrálnej krivke o parameter ε, moje "správne" hodiny ukážu, že mi to trvalo čas ε.

(Analogické známe tvrdenie: keď idem v euklidovskej rovine o ε v smere *normovaného* "polárneho" vektora $e_\varphi \equiv (1/r)\partial_\varphi$ (a nie nenormovaného ∂_φ!), tak prejdem vzdialenosť ε.)

Z výsledku (1) vidím, že parameter t (ktorý merajú moje "ľubovoľne idúce" hodiny) vtedy narástol o $\varepsilon/\sqrt{g_{00}}$. Odtiaľ vidím, že vzťah medzi nárastom "súradnicového" (nefyzikálneho) času Δt a nárastom vlastného (fyzikálneho) času Δs je

$$\Delta s = \sqrt{g_{00}}\Delta t \tag{2}$$

("Uhlový" analóg z vyššie spomínanej euklidovskej roviny: $\Delta l = r\Delta\varphi$.) Toto sa dá vidieť aj z prvého člena metrického tenzora, ak ho zapíšeme v tvare

$$g_{00}(x)dt \otimes dt = \sqrt{g_{00}(x)}dt \otimes \sqrt{g_{00}(x)}dt \tag{3}$$

("Uhlový" analóg: vidno to z prvého člena metrického tenzora: $r^2 d\varphi \otimes d\varphi = rd\varphi \otimes rd\varphi$.)

2. Meranie priestorových vzdialeností.

Nediagonálne členy $g_{0i}(x)$ v metrickom tenzore signalizujú (ak sú nenulové), že vektory ∂_t a ∂_i nie sú na seba kolmé, t.j. že vektory ∂_i netrčia v čisto priestorových smeroch, ale v smere istej lineárnej kombinácie časového a priestorového smeru. Preto ak by som počítal priestorové vzdialenosti pomocou g (ako vzdialenosť v zmysle g medzi dvoma blízkymi bodmi, ktoré sa nepatrne líšia len v hodnotách priestorových súradníc x^i), meral by som vlastne vzdialenosť dvoch svetobodov *v rôznych časoch* (keďže vektor ∂_i trčí čiastočne aj do časového smeru, "spája" susedné body s *rôznymi* hodnotami času). Ak chcem dostať naozajstnú priestorovú vzdialenosť, mal by som mať dva body v *rovnakom* čase. To sa efektívne dosiahne aj tým, že urobím *projekciu* uvažovaných vektorov ("spojníc blízkych bodov") do smeru naozajstného priestoru, čo je (trojrozmerná) "rovina" *kolmá* (v zmysle g) *na smer času.* Hľadaný metrický tenzor, pomocou ktorého sa budú počítať naozajstné priestorové vzdialenosti blízkych bodov sa teda získa tak, že pred urobením skalárneho súčinu dvoch vektorov z nich najprv urobím ortogonálnu projekciu do "roviny" kolmej na časový smer. Ak budem časový smer volať vertikálny a priestorové horizontálne,[2] vyrobím tak *horizontálnu časť* metrického tenzora

$$\operatorname{hor} g := g(\operatorname{hor}\ (\ .\ ), \operatorname{hor}(\ .\ )) \tag{3}$$

Projekčný operátor hor je vlastne tenzorové pole typu $(1,1)$, dané podmienkami

$$\operatorname{hor}\partial_t = 0 \qquad \operatorname{hor}\partial_i = \partial_i + \lambda_i\partial_t \qquad g(\partial_t, \operatorname{hor}\partial_i) = 0 \tag{4}$$

Koeficienty λ_i vyjdú $-g_{0i}/g_{00}$ a samotný operátor hor potom vyzerá

$$\operatorname{hor} = dx^i \otimes \left(\partial_i - \frac{g_{0i}}{g_{00}}\ \partial_t\right) \tag{5}$$

Ak sa toto explicitné hor dosadí do súradnicového vyjadrenia pre hor g z (3), dostávame[3]

$$\operatorname{hor} g = g_{\mu\nu}(x)(dx^\mu \circ \operatorname{hor}) \otimes (dx^\nu \circ \operatorname{hor}) = g_{\mu\nu}(x)(\operatorname{hor} dx^\mu) \otimes (\operatorname{hor} dx^\nu) \tag{6}$$

Keďže (5) dáva

$$\operatorname{hor} dt = -\frac{g_{0i}}{g_{00}}dx^i \tag{7}$$

$$\operatorname{hor} dx^i = dx^i \tag{8}$$

výraz (6) sa ľahko dopočíta a vyjde

$$\operatorname{hor} g = \left(g_{ij} - \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}}\right) dx^i \otimes dx^j \tag{9}$$

---

[2] Táto terminológia pochádza z teórie fibrovaných variet a konexie v nich. Pri troche snahy sa tu dá tá fibrovaná varieta explicitne urobiť.

[3] Tenzor A typu $\binom{1}{1}$ sa dá, ako vieme, použiť ako lineárny operátor na vektoroch aj na kovektoroch; tieto jeho dve funkcie sú zviazané vzťahom $\langle\alpha, A(v)\rangle \equiv \langle\alpha \circ A, v\rangle = \langle A(\alpha), v\rangle$, teda $\alpha \circ A = A(\alpha)$.

Vzhľadom na používanú signatúru (+ - - -) je napokon správny "trojrozmerný" metrický tenzor, pomocou ktorého treba počítať priestorové vzdialenosti

$$h = -\mathrm{hor}\, g = \left(-g_{ij} + \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}}\right) dx^i \otimes dx^j \tag{10}$$

No a počítajú sa pomocou neho tak ako to cez metrický tenzor chodí, t.j. ako "odmocninový" integrál

$$\int \sqrt{h(\gamma', \gamma')} d\lambda \qquad \gamma \leftrightarrow x^\mu(\lambda), \quad \gamma' \leftrightarrow dx^\mu/d\lambda$$

(v ľubovoľnej parametrizácii λ).

3. Synchronizácia hodín.

Blízke (sveto)body na blízkych svetočiarach majú určite blízke hodnoty súradnicového času t (lebo súradnicová funkcia t je hladká). Ak ich však majú rovnaké, to ešte nezaručuje, že ide o body v priestore v "objektívne" rovnakom čase. A naopak, ak majú rôzne hodnoty t, ešte to nevylučuje, že sú voči sebe "v skutočnosti" v rovnakom čase. Vyplýva to z predpokladu o "ľubovoľne idúcich" hodinách v každej svetočiare telies tvoriacich vzťažnú sústavu.

(Tá ľubovoľnosť rýchlosti plynutia času na susedných svetočiarach je krotená, ako sa už spomínalo, (len) hladkosťou súradnicovej funkcie t, ktorá opisuje všetky detaily plynutia "času" na hodinách všetkých svetočiar.)

Hodiny na blízkych svetočiarach sa dajú *synchronizovať*, t.j. dá sa trochu pokrútiť kolieckami na nich (alebo trochu postláčať vhodné čudlíky, ak sú digitálne) tak, aby "objektívne" rovnaké časy aj ukazovali naozaj ako rovnaké.[4]

Synchronizácia (infinitezimálne blízkych) hodín sa má robiť tak, aby po nej ukazovali rovnaký čas hodiny, ktoré sú voči sebe navzájom v *horizontálnom* (čisto priestorovom) smere. Toto je totiž *lokálna* verzia postupu, ktorý funguje v *špeciálnej* relativite (kde sa zvykne formulovať pomocou šírenia svetelných signálov). Teda chce to princíp ekvivalencie.

Predstavím si dva body v priestoročase, ktoré majú súradnice (t, x^i) a $(t, x^i + \varepsilon w^i)$, kde $w^i \in \mathbb{R}$ a ε je infinitezimálne.[5] Na prvý pohľad ide o súradnice dvoch priestorovo blízkych bodov v rovnakom čase. Ale v skutočnosti *to tak nie je.* Blízke body v rovnakom čase musia byť "spojené" vektorom, ktorý je čisto *horizontálny* ("priestorový"). Tie naše sú však "spojené" vektorom $\varepsilon w^i \partial_i$ a ten čisto horizontálny nie je - horizontálna je až jeho *projekcia*

$$\mathrm{hor}\,(\varepsilon w^i \partial_i) \equiv \varepsilon w^i \ \mathrm{hor}\, \partial_i = \varepsilon w^i \left(\partial_i - \frac{g_{0i}}{g_{00}}\ \partial_t\right) \tag{11}$$

Rovnaký čas tak „správne" (po synchronizácii) nemajú ukazovať hodiny v bodoch

$$(t, x^i) \qquad \text{a} \qquad (t, x^i + \varepsilon w^i) \tag{12}$$

(napriek tomu, že majú rovnakú hodnotu súradnice t), ale v bodoch

$$(t, x^i) \qquad \text{a} \qquad (t - \varepsilon w^i \frac{g_{0i}}{g_{00}}, x^i + \varepsilon w^i) \tag{13}$$

(napriek tomu, že majú *nerovnakú* hodnotu súradnice t). To ale znamená, že synchronizácia hodín kvantitatívne spočíva v tom, že na "vedľajšej" svetočiare (so súradnicami $x^i + \Delta x^i$) mám posunúť hodiny *späť* o $\Delta t = (g_{0i}/g_{00})\Delta x^i$. To sa dá povedať aj opačne: tie hodiny na "vedľajšej" svetočiare ukazujú (tesne pred ich synchronizáciou) *viac* o hodnotu

$$\Delta t = (g_{0i}/g_{00})\Delta x^i \equiv -\ \mathrm{hor}\,(\varepsilon w^i \partial_i)t \tag{14}$$

ako by mali ukazovať, keby boli synchronizované s tými pôvodnými.

[4] Ak si však myslím, že to *všeobecne* urobím (pre dané dve blízke svetočiary) raz a mám už doživotne pokoj, tak si predstavujem svet príliš jednoducho. Pri troche smoly (ako uvidím, vtedy, ak funkcia g_{0i}/g_{00} závisí od t) sa môže stať, že budem musieť robiť synchronizáciu neustále. Synchronizujem, o chvíľku sú hodiny (tých istých blízkych pozorovateľov) zase (trochu) rozhasené, opäť synchronizujem, o chvíľu sú opäť zlé, atď.

[5] To εw^i sa zvykne označovať dx^i, ale nechcem, aby sa mi to plietlo s *formami* dx^i.

Pozriem sa na tú istú vec formálne trochu ináč. Predstavím si, že máme (hladkú) *krivku* v množine *stojacich pozorovateľov* (pripomeňme si, že práve oni spolu fixujú vzťažnú sústavu), t.j. máme $x^i(\tau)$, kde τ je ľubovoľný parameter. Keďže súradnicová funkcia t opisuje na svetočiare každého stojaceho pozorovateľa chod (”ľubovoľne idúcich”) hodín, dá sa to vnímať aj tak, že máme hodiny *spojito* rozložené na uvažovanej krivke v množine stojacich pozorovateľov.

Z krivky v množine stojacich pozorovateľov urobíme krivku $\gamma(\tau)$ v *časopriestore* tak, že tam doplníme *konštantnú* závislosť t na τ $(t, x^i(\tau)) \leftrightarrow \gamma(\tau)$ (celá krivka teda leží v hyperploche $t =$ konšt.) Sústredím sa na dvojicu hodín v ”susedných” bodoch $\gamma(\tau)$ a $\gamma(\tau+\varepsilon)$. Ak sa τ zväčší o ε, pohnem sa o vektor $\varepsilon\dot{\gamma} \equiv \varepsilon(dx^i/d\tau)\partial_i$. Tento (štvor)vektor ”spája” body na susedných svetočiarach (teda spája susedných stojacich pozorovateľov), pričom spája také dva (blízke) body

$$(t, x^i) \quad \text{a} \quad (t, x^i + \Delta x^i) \qquad \Delta x^i = \varepsilon(dx^i/d\tau)$$

na týchto svetočiarach, ktoré majú rovnakú hodnotu ”súradnicového” času t. ”Objektívne” však majú rôzne časy, lebo $\varepsilon\dot{\gamma}$ nie je horizontálny. Jeho horizontálna projekcia $\varepsilon \operatorname{hor}\dot{\gamma}$ už ”spája” dva body na (stále tých istých) susedných svetočiarach, ktoré majú rovnaké ”naozajstné” časy (t.j. *synchronizované* hodiny *by* ukazovali rovnakú hodnotu). Tie pôvodné ”ľubovoľné” (nesynchronizované) hodiny však ukazujú rôzne hodnoty. O koľko rôzne? O koľko sa líši hodnota toho ”ľubovoľného” (súradnicového) času v *týchto* dvoch bodoch? To sa zráta ľahko - stačí vyrátať smerovú deriváciu súradnicovej funkcie t v smere toho horizontálneho vektora $\varepsilon \operatorname{hor}\dot{\gamma}$. Pre toto číslo postupne dostávame

$$\Delta t = -\varepsilon(\operatorname{hor}\dot{\gamma})t = -\varepsilon\langle dt, \operatorname{hor}\dot{\gamma}\rangle = -\varepsilon\langle \operatorname{hor} dt, \dot{\gamma}\rangle = -\int_\gamma \operatorname{hor} dt \tag{15}$$

kde sa pod integrálom cez γ myslí integrál len cez *malý kúsok* tej krivky, medzi $\gamma(\tau)$ a $\gamma(\tau+\varepsilon)$.

▼ Pripomienka: keď integrujeme 1-formu α po krivke $\gamma : I \to M$, tak

$$\int_\gamma \alpha = \int_{\gamma(I)} \alpha = \int_I \gamma^*\alpha = \int_I \alpha_i(x(\tau))\frac{dx^i}{d\tau}d\tau = \int_I \langle\alpha, \dot{\gamma}\rangle d\tau$$

Ak integrujeme len na kúsku medzi $\gamma(\tau)$ a $\gamma(\tau+\varepsilon)$, ostane z toho iba $\varepsilon\langle\alpha, \dot{\gamma}\rangle$. ▲

Keď sa pozrieme na explicitné vyjadrenie (7) tejto ”synchronizačnej” 1-formy $\operatorname{hor} dt$, vidíme, že dostávame práve výraz (14). Zápis v tvare (15) ale ukazuje, že takto môžeme zistiť aj celkový *konečný* časový rozdiel, ktorý sa nazbiera pri postupnom synchronizovaní stále ďalších a ďalších ”susedných” dvojíc - stačí urobiť ten integrál pozdĺž *celej* krivky.

Špeciálne môžem uvažovať aj *uzavretú* krivku (*slučku*). Tam sa to zbiera rovnako, takže podľa (15)

$$\Delta t = -\oint_\gamma \operatorname{hor} dt \tag{16}$$

To ale znamená, že po návrate do pôvodného bodu môže dôjsť k spoločensky skutočne trápnej situácii: pôvodné hodiny nemusia byť synchronizované *samé so sebou*! Celý čas som úzkostlivo synchronizoval ”susedné” hodiny a keď som konečne (ustatý, ale šťastný z dobre vykonanej práce) prišiel k hodinám, od ktorých som dobrú zvesť o ”správnom” čase šíril po svete (krivke), znechutene som zistil, že tie pôvodné hodiny si dobrú zvesť nevedia vážiť a drzo tvrdia inú dobrú zvesť.

Na lokálnej úrovni sa toto nestane, ak je forma $\operatorname{hor} dt$ uzavretá

$$d(\operatorname{hor} dt) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta t = -\oint_\gamma \operatorname{hor} dt = -\int_\Sigma d(\operatorname{hor} dt) = 0 \qquad \partial\Sigma = \gamma \tag{17}$$

4. Príklad - rovnomerne sa otáčajúca sústava v ŠTR.

Pozrime sa napríklad na problém zo špeciálnej relativity, kde sa tieto veci prejavia - máme teda obyčajný Minkowského priestor, ale veci sledujeme z rovnomerne rotujúcej sústavy. Keby nerotovala, mali by sme cylindrické súradnice (t', r', φ', z'). Ak (t, r, φ, z) sú cylindrické voči rotujúcej, tak vzťahy medzi nimi sú

$$t' = t \qquad r' = r \qquad \varphi' = \varphi + \omega t \qquad z' = z \tag{18}$$

Potom Minkowského metrika v starých (voči inerciálnej sústave) a nových (voči rotujúcej sústave) súradniciach vyzerá

$$\begin{aligned} g &= dt' \otimes dt' - dr' \otimes dr' - r'^2 d\varphi' \otimes d\varphi' - dz' \otimes dz' \\ &= (1-\omega^2 r^2) dt \otimes dt - dr \otimes dr - r^2 d\varphi \otimes d\varphi - dz \otimes dz - r^2 \omega (dt \otimes d\varphi + d\varphi \otimes dt) \end{aligned} \tag{19}$$

čiže v rotujúcej sústave máme nenulové komponenty

$$g_{00} = (1-\omega^2 r^2) \qquad g_{rr} = g_{zz} = -1 \qquad g_{\varphi\varphi} = -r^2 \qquad g_{0\varphi} = g_{\varphi 0} = -r^2\omega \tag{20}$$

Odtiaľ vidno, že jediný z vektorov $(\partial_r, \partial_\varphi, \partial_z,)$ súradnicovej bázy ∂_i, ktorý potrebuje opravu na "priestorovosť" je vektor ∂_φ: $\mathrm{hor}\, \partial_\varphi = \partial_\varphi + [r^2\omega/(1-\omega^2 r^2)]\partial_t$.

Vzťah (2) dáva pre súvis súradnicového a vlastného času

$$\Delta s = \sqrt{g_{00}}\ \Delta t = \sqrt{1-\omega^2 r^2}\Delta t \equiv \sqrt{1-v^2}\Delta t \tag{21}$$

čo je rozumný výsledok, lebo $v \equiv v/c$ je akurát rýchlosť pri pohybe po kružnici. Podľa vzorca (3) zasa dostávame priestorový metrický tenzor

$$\begin{aligned} h = -\mathrm{hor}\, g &= \left(-g_{ij} + \frac{g_{0i} g_{0j}}{g_{00}}\right) dx^i \otimes dx^j = -g_{ij} dx^i \otimes dx^j + \frac{g_{0i} dx^i \otimes g_{0j} dx^j}{g_{00}} \\ &= dr \otimes dr + r^2 d\varphi \otimes d\varphi + dz \otimes dz + \frac{g_{0\varphi} d\varphi \otimes g_{0\varphi} d\varphi}{g_{00}} \\ &= dr \otimes dr + r^2 \left(1 + \frac{r^2\omega^2}{1-\omega^2 r^2}\right) d\varphi \otimes d\varphi + dz \otimes dz \\ &= dr \otimes dr + \frac{r^2}{1-\omega^2 r^2} d\varphi \otimes d\varphi + dz \otimes dz \end{aligned} \tag{22}$$

Toto je tiež rozumný výsledok - hovorí, že dĺžky v smere φ sa (oproti netočiacej sa sústave) menia ako

$$dl \equiv r d\varphi \mapsto \frac{r d\varphi}{\sqrt{1-\omega^2 r^2}} \equiv \frac{r d\varphi}{\sqrt{1-v^2}} \equiv \frac{dl}{\sqrt{1-v^2}} \tag{23}$$

čo súvisí s kontrakciou dĺžok zodpovedajúcou rýchlosti v.

A napokon ako vyzerá "synchronizačná 1-forma" $\mathrm{hor}\, dt$? Podľa (7) je tu

$$\mathrm{hor}\, dt = -\frac{g_{0i}}{g_{00}}\ dx^i = -\frac{g_{0\varphi} d\varphi}{g_{00}} = \frac{\omega r}{1-(\omega r)^2}\ r d\varphi \tag{24}$$

Táto 1-forma nie je uzavretá, takže na slučkách môže dôjsť k nesynchrónnosti začiatku a konca à la (16). Špeciálne napríklad na kružnici polomeru R okolo počiatku dostávame

$$\Delta t = -\oint_\gamma \mathrm{hor}\, dt = -\frac{\omega R}{1-(\omega R)^2}\ 2\pi R \tag{25}$$

Literatúra

[1] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц: Теория поля, Наука, Москва, 1973
[2] M.Fecko: Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov, Iris, 2004

Ďakujem Vladovi Balekovi za povzbudzujúci záujem o tento text a za upozornenie na dve chybné znamienka v ňom (už sú opravené). Za prípadné ďalšie zlé znamienka, prípadne aj vážnejšie chyby, je samozrejme zodpovedný autor. Odporúčam si prečítať aj Vladov text o tejto téme (http://sophia.dtp.fmph.uniba.sk/~balek).