Pripisovanie úrokov

Marián Fecko*
KTF&DF, FMFI UK, Bratislava

Časté pripisovanie úrokov je výhodnejšie. O koľko?

Obsah

1 Pripomenutie pojmov

1.1 Pripisovanie úroku raz ročne

Mám v banke peniaze. Sumu x, na ročnom vklade na P percent p.a. (*per annum*), pričom mi pripíšu úrok *na konci* toho ročného obdobia. Koľko budem mať po roku?

Spomeniem si na význam slova percento [1]: "Názov pochádza z *per cento*, znamenajúceho (pripadajúci) *na sto*".

K pôvodnej sume x teda mám prirátať P stotín tejto sumy.

$$x \mapsto x + P\frac{x}{100} \equiv \left(1 + \frac{P}{100}\right) x \tag{1}$$

Vidím, že výsledok vznikne *vynásobením* pôvodnej sumy *ziskovým faktorom*

$$\left(1 + \frac{P}{100}\right) \tag{2}$$

*e-mail: `fecko@fmph.uniba.sk`

Príklad 1: Mám 1000€ (t.j. $x = 1000$) a 3,3% úrok p.a. (t.j. $P = 3,3$). Na konci roka budem mať

$$\left(1 + \frac{3,3}{100}\right) \times 1000 = 1033 \text{ €} \tag{3}$$

1.2 Pripisovanie úroku n-krát ročne

Teraz dám svoje peniaze do opatery banky, ktorá mi ponúka tiež ročný vklad, tiež P percent p.a., ale píše, že mi bude úrok pripisovať *n-krát* ročne. Napríklad pre $n = 2$ to bude raz za polrok, pre $n = 12$ to bude raz mesačne a pre $n = 365$ to bude každý (boží) deň. Koľko budem mať *teraz* po roku?

P percent ročne je zrejme $P/12$ percent mesačne. Všeobecne, P percent p.a. je P/n percent za n-tinu roka. Po *prvej* n-tine roka sa s mojím vkladom x teda stane toto

$$x \mapsto \left(1 + \frac{P/n}{100}\right) x \tag{4}$$

Jednoducho sa *vynásobí* faktorom

$$\left(1 + \frac{P/n}{100}\right) \tag{5}$$

Po *druhej* n-tine roka sa vynásobí tým istým faktorom suma *z konca prvej* n-tiny, t.j. suma z rovnice (4). Spolu po prvých dvoch n-tinách budem tak mať sumu

$$\left(1 + \frac{P/n}{100}\right) \left[\left(1 + \frac{P/n}{100}\right) x\right] \equiv \left(1 + \frac{P/n}{100}\right)^2 x \tag{6}$$

Jednoducho sa *pôvodná* suma *vynásobí* faktorom

$$\left(1 + \frac{P/n}{100}\right)^2 \tag{7}$$

No a je jasné, že po *roku*, čiže po n-tej n-tine :-) roka, mám na získanie konečnej sumy vynásobiť pôvodnú sumu x faktorom

$$\left(1 + \frac{(P/n)}{100}\right)^n \tag{8}$$

Príklad 2: Mám 1000€ (t.j. $x = 1000$) a 3,3% úrok p.a. (t.j. $P = 3,3$), pripisujú mi ho raz mesačne (t.j. $n = 12$). Na konci roka budem mať

$$\left(1 + \frac{(3,3)/12}{100}\right)^{12} \times 1000 = 1,03350 \times 1000 \equiv 1033,50 \text{ €} \tag{9}$$

Vidím, že oproti príkladu z odseku 1.1, som vkladom do tejto banky zarobil. „Až” 33,5 € oproti „len” 33 € v prvej banke. Celých 50 centov pribudlo k 33 eurám!

Príklad 3 (exotika): Mám 1000€ (t.j. $x = 1000$), vklad na *dva* roky a 3,3% úrok p.a. (t.j. $P = 3,3$), pripisujú mi ho až na *konci celého* dvojročného obdobia. Položím v odvodenom vzorci $n = 1/2$ a takto získaným faktorom násobím pôvodnú sumu *dvakrát* (raz za prvý rok a raz za druhý). Na konci dvojročného obdobia budem mať

$$\left(1 + \frac{(3,3)/(1/2)}{100}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{(3,3)/(1/2)}{100}\right)^{\frac{1}{2}} \times 1000 = \left(1 + \frac{6,6}{100}\right) \times 1000 \equiv 1066 \text{ €} \tag{10}$$

Čo dá rozum *aj bez* tohoto komplikovaného postupu (dva roky po sebe 3,3% je spolu 6,6%). Cieľom bolo len oťuknúť fungovanie tohto postupu aj pre $n < 1$.

2 Najlepšia banka vo vesmíre

2.1 Pripisovanie úroku každú nanosekundu

Porovnanie výsledkov (3) a (9) ukazuje, že pre klienta je *výhodné*, keď sa úroky pripisujú *často*. (Zároveň ale možno začalo hlodať podozrenie, že až taká sláva to zase nebude.) Výsledok (8) hovorí, že keď sa pripisujú úroky n-krát ročne, na konci roka bude mať klient zo sumy x sumu x *vynásobenú faktorom*

$$\left(1 + \frac{(P/n)}{100}\right)^n \tag{11}$$

ktorý môžeme zapísať aj ako

$$\left(1 + \frac{(P/100)}{n}\right)^n \tag{12}$$

Pri danom precente P per annum ten faktor závisí už len od n a so zvyšujúcim sa n je čoraz vyšší (pre klienta *čoraz výhodnejší*; dá to rozum - uročí sa aj úrok, ten sa opäť a opäť úročí, ...). Napríklad pripisovanie každú sekundu (voľba $n = 365 \times 24 \times 3600$) je výhodnejšie ako „len" každý deň (voľba $n = 365$).

V jednej banke sa rozhodli tromfnúť konkurenciu raz a navždy a ponúkli na trh produkt s $n = \infty$. Dostali teda faktor

$$\left(1 + \frac{(P/100)}{\infty}\right)^\infty \tag{13}$$

Keďže si ale zo školy pamätali, že sa to má urobiť kultivovane, napísali ho oficiálne ako

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{(P/100)}{n}\right)^n \tag{14}$$

Limitu počítať nemuseli, lebo jeden šprták v tej banke si zo školy pamätal (veď hovorím, že šprták), že práve touto limitou je definovaná *exponenciálna* funkcia:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \tag{15}$$

takže dostali *presný* a *konečný* (= rôzny od nekonečna :-) výsledok: *ziskový faktor* má v najlepšej banke vo vesmíre hodnotu

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(P/100)}{n}\right)^n = e^{\frac{P}{100}} \tag{16}$$

Viac ani otcovi! Všetky banky (aj tá z nadpisu, ktorá úročí každú nanosekundu, dúfajúc, že predložka nano jej vynesie nejaký európsky grant) sa k tejto limitnej hodnote *len blížia*.

Príklad 4: Mám 1000€ (t.j. $x = 1000$) na 3,3% úrok p.a. (t.j. $P = 3,3$) v najlepšej banke vo vesmíre (t.j. $n \to \infty$, t.j. mám použiť výsledok (16)). Na konci roka budem mať

$$e^{\frac{3,3}{100}} \times 1000 = 1.03355 \times 1000 = 1033,55 \text{ €} \tag{17}$$

Hm, ďalších (a už posledných) 5 centov oproti Príkladu 2.

2.2 Porovnanie najlepšej banky vo vesmíre s „bežnou" bankou

„Bežná banka (podľa definície taká, ktorá sa s tým *ne*... a pripisuje úroky len raz ročne) má ziskový faktor (pozri (2))

$$\left(1+\frac{P}{100}\right) \tag{18}$$

Najlepšia vo vesmíre (ktorá sa s tým ... a na iné jej čas nezostáva, lebo len úročí a úročí) má ziskový faktor (pozri (16))

$$e^{\frac{P}{100}} \tag{19}$$

Toto číslo môžeme zapísať cez *efektívne* percento per annum, P', definované požiadavkou

$$\left(1+\frac{P'}{100}\right) = e^{\frac{P}{100}} \tag{20}$$

[P' je teda per annum percento *obyčajnej* banky (úročiacej len raz ročne), pri ktorom dosiahne *rovnaký* ziskový faktor, ako *najlepšia* banka vo vesmíre pri percente P.]

Z rovnice (20) dostávame explicitné vyjadrenie

$$P' = 100 \times (e^{\frac{P}{100}} - 1) \tag{21}$$

Príklad 5: Pozrime sa na konkrétne hodnoty: Pre

$$P = 1 \qquad P = 2 \qquad P = 3 \qquad P = 4 \qquad P = 5 \tag{22}$$

(vyššie P už nemá význam počítať, v tejto galaxii ho asi ani nenájdeme) dostávame toto:

$$P' = 1,005 \qquad P' = 2,02 \qquad P' = 3,045 \qquad P' = 4,081 \qquad P' = 5,127 \tag{23}$$

To sú celkom poučné čísla. Hovoria, že časté úročenie je oveľa zaujímavejšie pre banku (= má prakticky *výlučne marketingový efekt*) ako pre klienta. Povedané jasnejšie: Ak sa rozhodujem medzi bankou, ktorá dáva $3,1\%$ p.a. s úročením raz ročne a bankou, ktorá dáva 3% p.a. s úročením každú nanosekundu, volím *prvú* z nich.

2.3 Pohľad cez rady

Tento paragraf je len pre zvrhlíkov, ktorí to chcú vidieť ešte z iného uhla.

Ako je (tým zvrhlíkom) známe, exponenciálna funkcia má (Taylorov) rozvoj

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \tag{24}$$

Najlepšia banka vo vesmíre má teda ziskový faktor (pozri (16), (19))

$$e^{\frac{P}{100}} = 1 + \frac{P}{100} + \frac{(\frac{P}{100})^2}{2!} + \frac{(\frac{P}{100})^3}{3!} + \frac{(\frac{P}{100})^4}{4!} + \dots \tag{25}$$

Všimnem si (pozri (18)), že *prvé dva* členy sú presne ziskový faktor „obyčajnej" banky (úročiacej len *raz ročne*). Rozdiel medzi obyčajnou a najlepšou sa teda dá opísať aj tak, že najlepšia berie vážne všetky členy (nekonečného) radu, zatiaľ čo obyčajná len prvé dva. Zanedbať nekonečne veľa členov sa všeobecne nezdá najlepší nápad, ale *v tomto* prípade to *je* výborný nápad. Ten rad totiž veľmi rýchlo konverguje - každý ďalší člen je *pre bežné* hodnoty P (1,2,3) len *rádovo stotina* predchádzajúceho. ($P/100$ je zhruba stotina jednotky, $(P/100)^2$ je zhruba stotina z $P/100$ atď.) *Dominantná časť* presného výsledku je teda v *prvých dvoch* členoch, čo je ale presne faktor, ktorý používa obyčajná banka.

3 Záver

Časté úročenie

- pridá robotu banke (najmä ak chce prerobiť softvér z obyčajného na nový)
- pridá klientovi pocit, že banka mu dáva viac, ako tie obyčajné

ale v skutočnosti je z toho prospech pre klienta *úplne zanedbateľný*.

Literatúra

[1] Percento, sk.wikipedia.org