Diferenciálne formy 1

`Motto: Symplektická geometria bez foriem je ako rastlina bez listov.`

- Lineárna algebra foriem (tenzory, objemy $\mapsto$ formy, operácie na nich)
- Formy na variete (súradnicové vyjadrenie, algebraické operácie)
- Pull-back, vonkajšia derivácia, Lieova derivácia foriem, Cartanov vzorec $\mathcal{L}_V = i_V d + d i_V$ a podobne

Táto Zimná škola sľubovala, že je pre tých, „ktorí by sa chceli *oboznámiť so základmi* symplektickej geometrie." Centrálnym objektom symplektickej geometrie je istá špeciálna *diferenciálna forma*. Preto si v úplne prvej prednáške povieme (pripomenieme) niekoľko elementárnych faktov o diferenciálnych formách všeobecne. Nie veľa, vrcholom bude Cartanov vzorec $\mathcal{L}_V = i_V d + d i_V$. Kto ho pozná a rozumie mu, nič nové ani zaujímavé sa tu nedozvie.

Je viacero spôsobov ako motivovať zavedenie vonkajších foriem (špeciálne diferenciálnych). Jeden z nich vychádza zo snahy počítať objemy rovnobežnostenov a vyústi do integrovania foriem na varietách. Integrovanie priblíži vo svojej prednáške Paľo Ševera. V mojej budú základy lineárnej algebry foriem, algebry foriem na variete a diferenciálneho počtu foriem.
Začnime tou lineárnou algebrou.
Duálny priestor. Majme n-rozmerný vektorový priestor L. Pripomeňme si najprv pojem *duálneho* priestoru: je to priestor lineárnych zobrazení

$$\alpha : L \to \mathbb{R} \qquad v \mapsto \alpha(v) \equiv \langle \alpha, v \rangle \in \mathbb{R}$$

Prvky L voláme vektory a prvky L^* *kovektory.* V L^* existuje prirodzená lineárna štruktúra

$$\langle \alpha + \lambda\beta, v \rangle := \langle \alpha, v \rangle + \lambda \langle \beta, v \rangle \qquad \alpha, \beta \in L^*, \lambda \in \mathbb{R}$$

takže výraz $\langle\ .\ ,\ .\ \rangle$ je lineárny *v oboch* okienkach. Ak zafixujeme v L ľubovoľnú bázu e_a, v L^* sa dá zaviesť n kusov kovektorov e^a vzťahmi

$$\langle e^a, v \rangle \equiv \langle e^a, v^b e_b \rangle := v^a \qquad \text{a špeciálne} \qquad \langle e^a, e_b \rangle := \delta^a_b$$

Ľahko sa overí, že tieto kovektory tvoria bázu priestoru L^*, takže ľubovoľný kovektor má (jednoznačný) rozklad

$$\alpha = \alpha_a e^a \qquad \alpha_a := \langle \alpha, e_a \rangle$$

Tenzory typu $(0,p)$. Zobrazenie t, ktoré priradí p kusom vektorov (jedno) reálne číslo

$$t : L \times \cdots \times L \to \mathbb{R} \qquad v, \dots, w \mapsto t(v, \dots, w) \in \mathbb{R}$$

pričom výsledné číslo zavisí lineárne od každého argumentu zvlášť (povie sa, že zobrazenie je *polylineárne* alebo *multilineárne*), sa volá *tenzor* typu $(0,p)$. Špeciálne prípady sú kovektory ($p = 1$) a bilineárne formy ($p = 2$). Pre $p = 0$ sa definuje, že tenzory typu $(0,0)$ sú jednoducho čísla (nemám ani jeden vektor a mám tomu aj tak priradiť číslo $\Rightarrow$ musím to číslo mať už na začiatku.) Tenzory typu $(0,p)$ tvoria prirodzene (podobne ako to bolo v špeciálnom prípade L^*) lineárny priestor $T^0_p(L)$, ak sa položí

$$(t + \lambda s)(v, \dots, w) := t(v, \dots, w) + \lambda s(v, \dots, w)$$

Aký je jeho rozmer? Ak pre všemožné $a, \dots, b = 1, \dots, n$ zavedieme tenzory $e^a \otimes \cdots \otimes e^b$ vzťahom

$$(e^a \otimes \cdots \otimes e^b)(v, \dots, w) := v^a \dots w^b \tag{1}$$

a špeciálne

$$(e^a \otimes \cdots \otimes e^b)(e_c, \dots, e_d) = \delta^a_c \dots \delta^b_d \tag{2}$$

tak sa ľahko overí, že tvoria bázu priestoru $T^0_p(L)$, takže ľubovoľný tenzor má (jednoznačný) rozklad

$$t = t_{a \dots b} e^a \otimes \cdots \otimes e^b \qquad t_{a \dots b} := t(e_a, \dots, e_b) \tag{3}$$

Rozmer priestoru $T^0_p(L)$ je teda n^p (čísla $t_{a\dots b}$ sú *komponenty* tenzora t voči báze (2)).

▼ Pripomeňme, ako je definovaný *tenzorový súčin* (operácia žiarovka): ak t a s sú typu $(0,p)$ a $(0,q)$, tak $t \otimes s$ je typu $(0, p+q)$ a funguje takto:

$$(t \otimes s)(u, \dots, v, w, \dots, z) := t(u, \dots, v) s(w, \dots, z)$$
$$\text{a teda} \qquad (t \otimes s)_{a \dots b c \dots d} = t_{a \dots b} s_{c \dots d}$$

Overí sa, že je asociatívny (plus bilineárny a nekomutatívny) a že (2) je špeciálny prípad. ▲

Formy v L. Uvažujme n kusov vektorov $v, \dots, w$ a natiahnime na ne *rovnobežnosten*. Predstavme si, že by sme chceli vyrátať jeho *objem*. Tento objem je iste nejaké reálne číslo, takže vedieť vyrátať spomínaný objem znamená poznať isté *zobrazenie*

$$\alpha : L \times \dots \times L \to \mathbb{R} \qquad v, \dots, w \mapsto \alpha(v, \dots, w) \in \mathbb{R}$$

Z obrázkov v dvoj- a trojrozmernom priestore nahliadneme, že toto zobrazenie je lineárne v každom argumente.

(S tou linearitou to nie je celkom triviálne, ak v lineárnych kombináciách uvažujeme aj *záporné* koeficienty (čo, samozrejme, požiadavka linearity *obsahuje*). Napríklad chceme, aby $\alpha(-v, \dots, w) = -\alpha(v, \dots, w)$, čo ale znamená, že pripúšťame aj *záporné objemy*. Keď sme už boli pristihnutí, čestne priznávame, že naozaj pripúšťame. To, čo počítame (a čo je dané uvažovaným lineárnym zobrazením), sa presnejšie volá *orientovaný objem*.)

Vzorec pre objem je teda daný nejakým tenzorom typu $(0, n)$. Tento tenzor je však dosť špeciálny, lebo musí zabezpečiť prirodzenú požiadavku, aby „splasnutým" (oficiálne *degenerovaným*) rovnobežnostenom priradil *nulový objem*. Degenerovaný rovnobežnosten spoznám tak, že sa naťahuje na vektory, ktoré nie sú lineárne nezávislé (to, čo sa na ne naťahuje, teda má menší rozmer, ako keby boli lineárne nezávislé). Ak má mať každý degenerovaný rovnobežnosten nulový objem, zobrazenie α musí byť *úplne antisymetrické*.

▼ Chceme, aby *pre každý* vektor w platilo $\alpha(\dots, w, \dots, w, \dots) = 0$ (lebo dva vektory sú rovnaké, takže rovnobežnosten je splasnutý). Potom ale

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(\dots, v+u, \dots, v+u, \dots) \\ &= \alpha(\dots, v, \dots, v, \dots) + \alpha(\dots, u, \dots, u, \dots) \\ &\quad + \alpha(\dots, v, \dots, u, \dots) + \alpha(\dots, u, \dots, v, \dots) \\ &= 0 + 0 + \alpha(\dots, v, \dots, u, \dots) + \alpha(\dots, u, \dots, v, \dots) \end{aligned}$$

takže

$$\alpha(\dots, v, \dots, u, \dots) = -\alpha(\dots, u, \dots, v, \dots) \tag{4}$$

▲

Máme tak celkom dobrú motiváciu študovať úplne antisymetrické tenzory typu $(0, n)$. A aby sme mohli počítať aj objemy menejrozmerných rovnobežnostenov, ako je rozmer celého priestoru (napríklad plochu štvorca v *troj*rozmernom priestore), potrebujeme všeobecne aj úplne antisymetrické tenzory typu $(0, p)$ v n-rozmernom priestore $(0 \leq p \leq n)$. Takéto tenzory sa volajú *p-formy* v (n-rozmernom) lineárnom priestore L. Dajú sa (ako všetky tenzory) lineárne kombinovať a teda tvoria lineárny priestor. Je to podpriestor priestoru $T_p^0(L)$ a budeme ho označovať $\Lambda^p L^*$. Prípady $p = 0, 1$ sú výnimočné, lebo tam antisymetria nemá zmysel a tie sa iba prirodzene dodefinujú:

$$\Lambda^0 L^* := T_0^0(L) \equiv \mathbb{R} \qquad \Lambda^1 L^* := T_1^0(L) \equiv L^*$$

Definícia komponent (3) a vlastnosť (4) ukazujú, že (aj) komponenty foriem sú úplne antisymetrické

$$\alpha_{\dots a \dots b \dots} = -\alpha_{\dots b \dots a \dots} \qquad \text{takže} \qquad \alpha_{a \dots b} = \alpha_{[a \dots b]}$$

Všimnime si, že tenzorový súčin „nerešpektuje formy": ak tenzorovo vynásobím dve formy, výsledok už všeobecne nie je forma (výsledný tenzor nemá *úplnú* antisymetriu). To by bolo dosť mrzuté, keby sa to nedalo opraviť. Ale dá sa. Zaregistrujeme totiž možnosť dôležitej *projekcie* tenzorov na *podpriestor* foriem (vydelenie (úplne) *antisymetrickej časti* tenzora):

$$\text{Alt} : T^0_p(L) \to \Lambda^p L^* \qquad t_{a \dots b} \mapsto t_{[a \dots b]} \qquad \text{Alt} \circ \text{Alt} = \text{Alt}$$

Pomocou nej ľahko dodatočne opravíme, čo tenzorový súčin trochu nezvládol - po tenzorovom súčine foriem aplikujeme na výsledok ešte projekciu na (úplne) antisymetrickú časť a výsledok *už bude* formou. Tento súčin sa volá *vonkajší súčin* foriem

$$\alpha \wedge \beta := \frac{(p+q)!}{p!q!} \text{Alt}\,(\alpha \otimes \beta) \qquad \text{takže} \qquad (\alpha \wedge \beta)_{a \dots b c \dots d} = \frac{(p+q)!}{p!q!} \alpha_{[a \dots b} \beta_{c \dots d]} \tag{5}$$

Tento súčin má nasledujúce užitočné vlastnosti:

$$\begin{aligned}
&\text{bilinearita} & \alpha \wedge (\beta + \lambda\tau) &= \alpha \wedge \beta + \lambda \alpha \wedge \tau & \\
& & (\beta + \lambda\tau) \wedge \alpha &= \beta \wedge \alpha + \lambda \tau \wedge \alpha & (6)\\
&\text{asociatívnosť} & (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma &= \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) & (7)\\
&\mathbb{Z}\text{-graduovaná komutatívnosť} & \alpha \wedge \beta &= (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha & (8)\\
&\text{a špeciálne pre bázu 1-foriem} & e^a \wedge e^b &= -\, e^b \wedge e^a & (9)
\end{aligned}$$

(V prvých dvoch riadkoch je $\lambda \in \mathbb{R}$, v predposlednom je α p-forma a β je q-forma.)

▼ Asociatívnosť: pre p, q, r formy sa tvrdí, že

$$\frac{(p+q+r)!}{(p+q)!r!} \frac{(p+q)!}{p!q!} \alpha_{[[a \dots b} \beta_{c \dots d]} \gamma_{e \dots f]} = \frac{(p+(q+r))!}{p!(q+r)!} \frac{(q+r)!}{q!r!} \alpha_{[a \dots b} \beta_{[c \dots d} \gamma_{e \dots f]]}$$

čo *je* pravda (antisymetrizácia vnútri širšej antisymetrizácie je zbytočná). Graduovaná komutatívnosť:

$$\begin{aligned}
(\alpha \wedge \beta)_{a \dots b c \dots d} &= \frac{(p+q)!}{p!q!} \alpha_{[a \dots b} \beta_{c \dots d]} = \frac{(p+q)!}{p!q!} \beta_{[c \dots d} \alpha_{a \dots b]} \\
&= \frac{(p+q)!}{p!q!} (\beta \wedge \alpha)_{c \dots d a \dots b}
\end{aligned}$$

Teraz treba vymeniť skupinu $(c \dots d)$ so skupinou $(a \dots b)$ (aby sme dostali $(a \dots bc \dots d)$-komponentu výsledku), odtiaľ sa objaví faktor $(-1)^{pq}$ (každá výmena dvojice indexov dáva faktor (-1)). ▲

Rozklad formy podľa bázy sa dá zapísať nielen cez tenzorové súčiny (to sa určite dá, veď je to len špeciálny tenzor), ale aj tak, že bude obsahovať výlučne vonkajšie súčiny:

$$\alpha = \frac{1}{p!}\ \alpha_{a\dots b}\ e^a \wedge \dots \wedge e^b \tag{10}$$

▼

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_{a\dots b}\ e^a \otimes \dots \otimes e^b = \alpha_{[a\dots b]}\ e^a \otimes \dots \otimes e^b = \alpha_{[a\dots b]}\ e^{[a} \otimes \dots \otimes e^{b]} \\ &= \alpha_{a\dots b}\ e^{[a} \otimes \dots \otimes e^{b]} = (1/p!)\ \alpha_{a\dots b}\ e^a \wedge \dots \wedge e^b\end{aligned}$$

Posledná rovnosť vyplýva z výpočtov

$$\begin{aligned}(e^a \otimes \dots \otimes e^b)_{c\dots d} &= \delta^a_c \dots \delta^b_d \\ (\mathrm{Alt}\,(e^a \otimes \dots \otimes e^b))_{c\dots d} &= \delta^a_{[c} \dots \delta^b_{d]} = \delta^{[a}_{[c} \dots \delta^{b]}_{d]} = \delta^{[a}_c \dots \delta^{b]}_d \\ \mathrm{Alt}\,(e^a \otimes \dots \otimes e^b) &= (\mathrm{Alt}\,(e^a \otimes \dots \otimes e^b))_{c\dots d} e^c \otimes \dots \otimes e^d = e^{[a} \otimes \dots \otimes e^{b]}\end{aligned}$$

a teda pomocou (5) postupne dostávame

$$\begin{aligned}e^a \wedge e^b &= (2!/1!1!)\mathrm{Alt}\,(e^a \otimes e^b) \\ &= 2! e^{[a} \otimes e^{b]} \\ e^a \wedge e^b \wedge e^c &= e^a \wedge (e^b \wedge e^c) = (3!/2!1!)\mathrm{Alt}\,(e^a \otimes (e^b \wedge e^c)) = 3\mathrm{Alt}\,(e^a \otimes 2(e^{[b} \otimes e^{c]})) \\ &= 3! e^{[a} \otimes e^b \otimes e^{c]} \\ e^a \wedge \dots \wedge e^b &= e^a \wedge (\ \dots \wedge e^b) = \ \dots\ \text{(indukciou)} \\ &= p! e^{[a} \otimes \dots \otimes e^{b]}\end{aligned}$$

▲

Príklad: keď sa vzorec (10) rozpíše na drobné, tak v trojrozmernom lineárnom priestore L s bázou e_1, e_2, e_3 (a duálnou e^1, e^2, e^3 v L^*) dostávame nasledujúce vyjadrenia najvšeobecnejších p-foriem:

$$\begin{array}{ll} p=0 & \alpha = k_1 \\ p=1 & \alpha = k_1 e^1 + k_2 e^2 + k_3 e^3 \\ p=2 & \alpha = k_1 e^1 \wedge e^2 + k_2 e^2 \wedge e^3 + k_3 e^1 \wedge e^3 \\ p=3 & \alpha = k_1 e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \end{array}$$

kde k_i sú ľubovoľné konštanty.
Zápis (10) je mimoriadne vhodný pre praktické manipulácie s formami. Napríklad z vlastností $\wedge$ (pozri (6) - (9)) vyplýva, že celá práca pri výpočte vonkajšieho súčinu $\alpha \wedge \beta$ takto rozložených foriem spočíva v týchto krokoch:

- zápise rozložených foriem za sebou

- roznásobení členov (každý s každým)

- presunutí všetkých konštánt dopredu

- *vyškrtnutí* členov, ktoré obsahujú niektorý bázový kovektor e^a *viac ako raz* (taký člen je *nulový* vďaka *anti*komutácii bázových kovektorov (9): $e^a \wedge e^b = -e^b \wedge e^a \ \Rightarrow e^1 \wedge e^1 = e^2 \wedge e^2 = \cdots = 0$).

Nech napríklad opäť dim $L = 3$, báza L^* je e^1, e^2, e^3 a nech

$$\alpha = 2e^1 + e^3 \qquad \beta = -3e^1 \wedge e^3 + 4e^2 \wedge e^3$$

Potom

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge \beta &= (2e^1 + e^3) \wedge (-3e^1 \wedge e^3 + 4e^2 \wedge e^3) \\
&= -6\underbrace{e^1 \wedge e^1}_{0} \wedge e^3 + 8e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 - 3\underbrace{e^3 \wedge e^1}_{-e^1 \wedge e^3} \wedge e^3 + 4\underbrace{e^3 \wedge e^2}_{-e^2 \wedge e^3} \wedge e^3 = \\
&= 8e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 + 3e^1 \wedge \underbrace{e^3 \wedge e^3}_{0} - 4e^2 \wedge \underbrace{e^3 \wedge e^3}_{0} = \\
&= 8e^1 \wedge e^2 \wedge e^3
\end{aligned}$$

Všimneme si, že komponenty p-foriem majú p indexov. Špeciálne komponenty 1-foriem sú jednoindexové objekty a komponenty 2-foriem sú *dvojindexové* objekty, pričom oba indexy prebiehajú rovnaký počet hodnôt (v n-rozmernom priestore 1 až n). To znamená, že komponenty dva-foriem môžeme graficky zobrazovať ako štvorcové *antisymetrické matice*. Príklad: ak uvažujem *štvorrozmerný* priestor L, tak jedna konkrétna identifikácia 2-formy a matice jej komponent je

$$\alpha = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 \qquad \leftrightarrow \qquad \alpha_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Veľmi dôležitou (a zároveň jednoduchou) algebraickou operáciou na formách je *vnútorný súčin* formy s vektorom. Pre daný vektor $v \in L$ to je zobrazenie $\alpha \mapsto i_v\alpha \equiv v \lrcorner\, \alpha$, ktoré spočíva v tom, že vektor v dosadíme ako prvý argument do p-formy α, t.j.

$$\begin{aligned}
(i_v\alpha)(u, \dots, w) &:= \alpha(v, u, \dots, w) \qquad && \alpha \in \Lambda^p L^*,\ p \geq 1 \\
i_v\alpha &:= 0 && p = 0 \qquad (11)
\end{aligned}$$

Vzhľadom na mimoriadnu jednoduchosť svojho zavedenia má až prekvapujúco veľa zaujímavých (a pre praktické manipulácie užitočných) vlastností. Spomeňme tieto:

$$
\begin{aligned}
(i_v\alpha)_{a\dots b} &= v^c\alpha_{ca\dots b} && \text{komponentný vzorček}\\
i_v i_w &= -i_w i_v && \text{antikomutatívnosť}\\
i_{v+\lambda w} &= i_v + \lambda i_w && \text{linearita}\\
i_v(\alpha+\lambda\beta) &= i_v\alpha + \lambda\, i_v\beta && \text{linearita (iná)}\\
i_v(\alpha\wedge\beta) &= (i_v\alpha)\wedge\beta + (\hat\eta\alpha)\wedge(i_v\beta) && \text{grad. Leibnizovo pravidlo}
\end{aligned}
$$

▼ Náznak dôkazu graduovaného Leibnizovho pravidla: vzhľadom na všemožnú linearitu by stačilo dokázať

$$
\begin{aligned}
i_1\{(\underbrace{e^a\wedge\dots\wedge e^b}_{p\ \text{členov}})\wedge(e^c\wedge\dots\wedge e^d)\} = \{i_1(e^a\wedge\dots\wedge e^b)\}\wedge(e^c\wedge\dots\wedge e^d)\\
+(-1)^p(e^a\wedge\dots\wedge e^b)\wedge\{i_1(e^c\wedge\dots\wedge e^d)\}
\end{aligned}
$$

(kde $i_1 \equiv i_{e_1}$). Teraz treba osobitne rozobrať štyri možné prípady, keď e^1 je/nie je v prvom/druhom faktore. ▲

Ešte jedna známa operácia na formách je *Hodgeov operátor* $*$ (operátor dualizácie). Na jeho zavedenie treba mať v L ešte aj *metrický tenzor* a *orientáciu.* Za týchto podmienok sa najprv vyrobí v L *metrická forma objemu* $\omega \equiv \omega_{g,o}$ (kompatibilná aj s orientáciou). Potom sa $*$ definuje ako lineárny operátor, ktorý v komponentách funguje takto:

$$
(*\alpha)_{a\dots b} := \frac{1}{p!}\ \alpha^{c\dots d}\ \omega_{c\dots da\dots b} \qquad\qquad \alpha^{c\dots d} \equiv g^{cr}\dots g^{ds}\ \alpha_{r\dots s}
$$

Ukazuje sa, že na pravotočivej ortonormovanej báze to dáva

$$
*(\underbrace{e^a\wedge\dots\wedge e^b}_{p\ \text{členov}}) = \frac{1}{(n-p)!}\ \eta^{ac}\dots\eta^{bd}\varepsilon_{c\dots dr\dots s}\ e^r\wedge\dots\wedge e^s
$$

a špeciálne pre $p = 0, n$

$$
*_g 1 = \omega_g \qquad\qquad *\,\omega_g = \operatorname{sgn}\, g
$$

[Myšlienka za zavedením tohoto operátora je celkom jednoduchá: keď fixujeme v L nejaký *podpriestor* $V \subset L$, môžeme k nemu vyrobiť jednoznačný *ortogonálny doplnok* $V^\perp$. S každým podpriestorom $V \subset L$ rozmeru p je jednoznačne (až na znamienko) daná p-forma „objemu" vo V (vo V sa zvolí ortonormovaná báza a vytvorí sa súčin všetkých jej prvkov). Obrazom *tejto* formy voči operátoru $*$ je (podľa definície) analogická forma v ortogonálnom doplnku $V^\perp$ (treba pritom zafixovať vôľu v znamienku). Linearita to rozšíri na všeobecnú p-formu α. Fakt, že opätovný ortogonálny doplnok k $V^\perp$ nás vráti späť k pôvodnému V dáva *dualitu* Hodgeovho operátora, t.j. vlastnosť $** = \pm 1$.]

Formy na variete. Pripomeňme, že varietu robí varietou to, že na nej v okolí každého bodu fungujú *lokálne súradnice* $(x^1, \dots, x^n)$. Ukazuje sa, že v každom bode P variety M existuje kanonický n-rozmerný lineárny priestor, *dotykový priestor* v P. Jeho prvky sa volajú *vektory v bode* P a samotný priestor sa označuje $T_P M$. Ako bázu tohoto priestoru môžeme zobrať *súradnicovú bázu* $\partial_1|_P, \dots, \partial_n|_P$. *Duálnu* bázu k nej tvoria kovektory $dx^1|_P, \dots, dx^n|_P$ (je to báza *kodotykového* priestoru $T_P^* M$). Ak na týchto symboloch vynecháme referenčný bod P, dostaneme „bázové" vektorové a kovektorové *polia*; sú bázové v tom zmysle, že ich hodnoty v každom bode P poskytujú bázu dotykového resp. kodotykového priestoru v P (teda netvoria bázu nad $\mathbb{R}$ pre všetky vektorové polia!).

Formy sa na varietu dostanú jednoducho tak, že sa ako priestor L vezme *dotykový* priestor $T_P M$. Potom je z (10) zrejmé, že všeobecná p-forma na variete sa dá zapísať (už ako pole v súradnicovej oblasti) v tvare

$$\alpha = \frac{1}{p!}\, \alpha_{i \dots j}(x)\; dx^i \wedge \dots \wedge dx^j \tag{12}$$

Priestor p-foriem na variete M sa označuje $\Omega^p(M)$.

Príklad: Vzorec (12) pre dvojrozmernú sféru S^2 so súradnicami ϑ, φ hovorí, že tam máme nasledujúce lokálne vyjadrenia najvšeobecnejších p-foriem:

$$\begin{array}{ll} p = 0 \qquad\qquad & \alpha = f_1(\vartheta, \varphi) \\ p = 1 & \alpha = f_1(\vartheta, \varphi)\; d\vartheta + f_2(\vartheta, \varphi)\; d\varphi \\ p = 2 & \alpha = f_1(\vartheta, \varphi)\; d\vartheta \wedge d\varphi \end{array}$$

kde $f_i(\vartheta, \varphi)$ sú ľubovoľné (hladké) funkcie na sfére.

S formami na variete môžeme „pobodovo" robiť všetky operácie, ktoré poznáme z algebry foriem v lineárnom priestore L. Napríklad na sfére S^2 môžeme robiť výpočty typu

$$\begin{aligned} [\sin\varphi\; d\vartheta] \wedge [\cos\vartheta\; d\varphi] &= \cos\vartheta \sin\varphi\; d\vartheta \wedge d\varphi \\ i_{3\partial_\varphi}[\cos\varphi\; d\vartheta \wedge d\varphi] &= -3\cos\varphi\; d\vartheta \end{aligned}$$

Na variete však pristupujú aj nové možnosti, lebo sa tu dá *derivovať* (a tiež integrovať, pozri prednášku Paľa Ševeru).

Diferenciálny počet foriem. Spomenieme tri operácie - pull-back, Lieovu deriváciu a vonkajšiu deriváciu.

Majme dve variety a zobrazenie medzi nimi, $f : M \to N$. Navyše ešte majme formu α na variete N. *Pull-back* f^* je operácia, ktorou sa forma α „ťahá späť" (= proti smeru f) a jeho výsledkom je už forma $f^*\alpha$ na M. Abstraktne to pobodovo funguje takto

$$(f^*\alpha)(v, \dots, w) := \alpha(f_* v, \dots, f_* w)$$

kde $f_* v$ je štandardné označenie pre *push-forward* vektora v („tlačíme ho dopredu", z bodu P na M do bodu $f(P)$ na N).

[Pull-back *nie je* špecifikum foriem. Dá sa rovnako dobre robiť s hocijakými tenzormi s dolnými indexmi (nemusia byť teda úplne antisymetrické; príklad - indukovaný metrický tenzor), ba niekedy (keď existuje hladké inverzné zobrazenie f^{-1}) dokonca s *ľubovoľnými* tenzormi (môžu mať aj horné indexy).]

Odtiaľ hneď vychádzajú jeho kľúčové vlastnosti

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta) \qquad f^*(d\Phi) = d(f^*\Phi) = d(\Phi \circ f)$$

a z nich ihneď dostávame vzorec na výpočet pull-backu formy zadanej v súradniciach:

$$\begin{aligned} f^*\alpha &\equiv f^* \left(\frac{1}{p!} \; \alpha_{a \dots b}(y) \; \overbrace{dy^a \wedge \dots \wedge dy^b}^{p \text{ členov}} \right) \\ &= \frac{1}{p!} \; \alpha_{a \dots b}(y(x)) \; J^a_i(x) \dots J^b_j(x) \underbrace{dx^i \wedge \dots \wedge dx^j}_{p \text{ členov}} \end{aligned}$$

Vidno, že pull-back nie je „diferenciálnou" operáciou na formách - nederivujú sa komponenty pull-backovanej formy, ale (len) funkcie $y^a(x)$, ktoré opisujú zobrazenie f. Naozajstnými diferenciálnymi operáciami na formách sú ale *Lieova a vonkajšia derivácia*, ktoré sa označujú $\mathcal{L}_V$ a d.

Uvažujme na M vektorové pole V. Ak každý bod posunieme o t po integrálnej krivke poľa V, vznikne zobrazenie $\Phi_t : M \to M$. Jeho pull-back Φ_t^* potom posúva tenzorové polia o t proti smeru integrálnych kriviek poľa. Rozdiel tenzora, ktorý sme späť do bodu x pritiahli a tenzora, ktorý v bode x bol (v limite priťahovania z čoraz bližšieho bodu) meria to, ako sa dané tenzorové pole A mení v smere poľa V. Presnou mierou tejto zmeny je *Lieova derivácia* $\mathcal{L}_V A := (d/dt)|_0 \Phi_t^* A$.

Lieova derivácia, podobne ako pull-back, *nie je* špecifikum foriem. Dá sa počítať z hocijakého tenzorového poľa.

Naopak *vonkajšia derivácia* funguje len na formách. Je „jadrom" základných diferenciálnych operácií vektorovej analýzy v E^3 (gradient, divergencia, rotácia a Laplaceov operátor), ale aj ich rôznych ďalekosiahlych zovšeobecnení. Najprirodzenejšou motiváciou pre jej zavedenie je integrálny počet - dá sa v ňom zaviesť „tak, aby platila Stokesova veta" (kľúčový výsledok integrálneho počtu foriem). Je to zobrazenie na formách, ktoré má nasledujúce vlastnosti:

1.	$d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$	zobrazenie stupňa $+1$
2.	$d(\alpha + \lambda\beta) = d\alpha + \lambda d\beta$	$\mathbb{R}$ – linearita ($\lambda \in \mathbb{R}$)
3.	$df = df$	vpravo je *gradient* funkcie f
4.	$dd = 0$	nilpotentnosť
5.	$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (\hat{\eta}\alpha) \wedge d\beta$	grad. Leibnizovo pravidlo

t.j. d je *derivácia Cartanovej algebry stupňa* $+1$ (body 1.,2.,5.)), ktorá je navyše nilpotentná (bod 4.) a na stupni 0 sa zhoduje s gradientom funkcie (bod 3.). Ukazuje sa, že vlastnosti 1.-5. úplne charakterizujú operátor d a vyplýva z nich komponentný vzorec

$$(d\alpha)_{i\ldots jk} := (-1)^p \ (p+1) \ \alpha_{[i\ldots j,k]} \qquad \alpha \in \Omega^p(M)$$

Často sa však vypočíta vonkajšia derivácia konkrétnej formy rýchlejšie použitím jej vlastností 1.-5. ako z uvedeného komponentného vzorca. Napríklad

$$d(xdy - ydz) = dx \wedge dy + x \wedge ddy - dy \wedge dz - y \wedge ddz = dx \wedge dy - dy \wedge dz$$

Na záver spomeňme niekoľko užitočných identít, ktoré platia medzi zavedenými operáciami na formách. Dávajú do súvisu Lieovu deriváciu, vonkajšiu deriváciu, vnútorný súčin a pull-back foriem a často sa využívajú aj v symplektickej geometrii. Ich dôkazy si môže skúsiť čitateľ rozmyslieť sám, prípadne sa inšpirovať literatúrou (sú napríklad aj v knihe [Fecko])

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_V &= i_V \ d + d \ i_V \\
[\mathcal{L}_V, i_W] &\equiv \mathcal{L}_V \ i_W - i_W \ \mathcal{L}_V = i_{[V,W]} \\
[d, \mathcal{L}_V] &\equiv d \ \mathcal{L}_V - \mathcal{L}_V \ d = 0 \\
[d, f^*] &\equiv d \ f^* - f^* d = 0 \\
d\alpha(U,V) &= U(\alpha(V)) - V(\alpha(U)) - \alpha([U,V]) \\
d\beta(U,V,W) &= U(\beta(V,W)) - V(\beta(U,W)) + W(\beta(U,V)) \\
&\quad - \beta([U,V],W) + \beta([U,W],V) - \beta([V,W],U) \\
&= \{U(\beta(V,W)) - \beta([U,V],W)\} + \text{cykl.}
\end{aligned}$$

Hamiltonovská mechanika 1

- Cesta od Hamiltonových rovníc k Poissonovmu tenzoru a od neho k symplektickej forme
- Bezsúradnicový zápis Hamiltonových rovníc pomocou symplektickej formy
- Hamiltonovske polia a ich vlastnosti
- Hamiltonovský tok Φ_t^f generovaný funkciou f, invariantnosť formy ω voči nemu

V celej tejto prednáške sa obmedzíme na prípad, keď hamiltonián nezávisí explicitne od času (sústava rovníc je autonómna). Čo treba urobiť, keď to tak nie je, spomenieme neskôr.

Uvažujme *Hamiltonove kanonické rovnice*

$$\dot{q}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a} \qquad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q^a} \qquad a = 1, \dots n \tag{13}$$

známe z kurzu teoretickej mechaniky. Keďže to je sústava obyčajných diferenciálnych rovníc prvého rádu, môžeme ich interpretovať ako rovnice pre integrálne krivky istého vektorového poľa na $\mathbb{R}^{2n}[q^a, p_a]$; konkrétne vidno, že ide o pole

$$\zeta_H = \frac{\partial H}{\partial p_a}\frac{\partial}{\partial q^a} - \frac{\partial H}{\partial q^a}\frac{\partial}{\partial p_a} \tag{14}$$

Cieľom je zbadať za týmito rovnicami nejakú „objektívnu" štruktúru, t.j. zapísať ich v bezsúradnicovom tvare. Premenujme najprv v $2n$-rozmernom fázovom priestore $\mathbb{R}^{2n}[q, p]$ súradnice nasledovne:

$$z^i \equiv (z^1, \dots, z^n, z^{n+1}, \dots, z^{2n}) :=(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n) \equiv (q^a, p_a)$$
$$i = 1, \dots, 2n; \; a = 1, \dots, n \tag{15}$$

(t.j. zabudnime na „neprirodzené" delenie všetkých súradníc na dve polovičky označené rôznymi písmenami a označme ich namiesto toho tak, ako sa to bežne robí na varietách - jedným písmenom z s indexami od 1 po rozmer variety). V týchto súradniciach dostávame pre vektorové pole (14) postupne vyjadrenie

$$\begin{aligned}\zeta_H &= \frac{\partial H}{\partial z^{n+1}}\frac{\partial}{\partial z^1}+\frac{\partial H}{\partial z^{n+2}}\frac{\partial}{\partial z^2}+\dots+\frac{\partial H}{\partial z^{2n}}\frac{\partial}{\partial z^n}\\ &\quad -\frac{\partial H}{\partial z^1}\frac{\partial}{\partial z^{n+1}}-\frac{\partial H}{\partial z^2}\frac{\partial}{\partial z^{n+2}}-\ldots-\frac{\partial H}{\partial z^n}\frac{\partial}{\partial z^{2n}}\\ &\equiv (dH)_{n+1}\partial_1+(dH)_{n+2}\partial_2+\dots+(dH)_{2n}\partial_n\\ &\quad -(dH)_1\partial_{n+1}-(dH)_2\partial_{n+2}-\ldots-(dH)_n\partial_{2n}\\ &\equiv (dH)_j\mathcal{P}^{ji}\partial_i \end{aligned} \tag{16}$$

takže rovnice (13) budú mať tvar

$$\dot{z}^i=\zeta_H^i(z)=:(\partial_j H)\mathcal{P}^{ji}\equiv(dH)_j\mathcal{P}^{ji} \qquad i=1,\dots,2n \tag{17}$$

Štvorcová $2n\times 2n$ konštantná matica $\mathcal{P}^{ji}$, ktorá sa objavuje v týchto zápisoch, obsahuje väčšinou nuly a len tu i tam jednotku alebo mínus jednotku; jej explicitný tvar je

$$\mathcal{P}^{ij}(z)=\begin{pmatrix}0_n & -\mathbb{I}_n\\ \mathbb{I}_n & 0_n\end{pmatrix}=-\mathcal{P}^{ji}(z) \tag{18}$$

Vidíme, že je *antisymetrická* a (po drobnom výpočte aj že je) *nesingulárna*.
▼ Pripočítaním (rovno po celých blokoch) dolných riadkov k horným, potom ľavých stĺpcov k pravým a napokon odčítaním pravých od ľavých dostávame pre jej determinant

$$\det\begin{pmatrix}0_n & -\mathbb{I}_n\\ \mathbb{I}_n & 0_n\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\mathbb{I}_n & -\mathbb{I}_n\\ \mathbb{I}_n & 0_n\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\mathbb{I}_n & 0_n\\ \mathbb{I}_n & \mathbb{I}_n\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\mathbb{I}_n & 0_n\\ 0_n & \mathbb{I}_n\end{pmatrix}=1$$

Fakt, že matica $\mathcal{P}^{ji}$ je nesingulárna tiež znamená, že procedúru $(dH)_j\mapsto(dH)_j\mathcal{P}^{ji}$ môžeme chápať aj ako (tenzorovú operáciu) „dvihnutie indexu"(s možnosťou vrátiť sa späť, spustiť ho) - nie však pomocou metrického tenzora, ako sa to bežne robí, ale pomocou $\mathcal{P}^{ji}$ (o chvíľu „Poissonovho tenzora"). ▲

Ak sa pozrieme na výsledok (17) „tenzorovo", zbadáme, že vektorové pole ζ_H, ktoré je za Hamiltonovými rovnicami, má dosť špeciálnu štruktúru - je poskladané z dvoch rôznych geometrických objektov (tenzorových polí), a to z kovektorového poľa dH (gradientu hamiltoniánu) a z tenzorového poľa $\mathcal{P}$ typu $(2,0)$

$$\dot{\gamma}=\zeta_H \qquad\qquad \zeta_H=\mathcal{P}(dH,\ .\ )$$

$$\mathcal{P}=\mathcal{P}^{ij}(z)\partial_i\otimes\partial_j=\frac{1}{2}\mathcal{P}^{ij}(z)\partial_i\wedge\partial_j=\frac{\partial}{\partial p_a}\wedge\frac{\partial}{\partial q^a}$$

Keďže matica $\mathcal{P}^{ji}$ komponent poľa $\mathcal{P}$ je antisymetrická, ide o *bivektorové pole* (= antisymetrické tenzorové pole typu $(2,0)$). Toto bivektorové pole sa vyskytuje ešte aj v inom známom výraze. Ak totiž počítame deriváciu ľubovoľnej funkcie f v smere vektorového poľa ζ_H (čiže ak skúmame, ako sa mení hodnota funkcie f v smere riešení $q^a(t), p_a(t)$ Hamiltonových rovníc (13)), dostávame z (14) a (16)

$$\begin{aligned} \dot{f} \equiv (d/dt)\ f(q^a(t), p_a(t)) = \zeta_H f &\overset{1.}{=} \frac{\partial H}{\partial p_a}\frac{\partial f}{\partial q^a} - \frac{\partial H}{\partial q^a}\frac{\partial f}{\partial p_a} \equiv \{H, f\} \\ &\overset{2.}{=} (dH)_j \mathcal{P}^{ji}\partial_i f \equiv \mathcal{P}(dH, dg) \end{aligned} \tag{19}$$

Vidíme, že bivektorové pole $\mathcal{P}$ umožňuje veľmi kompaktný zápis *Poissonovej zátvorky* ľubovoľných dvoch funkcií na fázovom priestore

$$\{f, g\} \equiv \frac{\partial f}{\partial p_a}\frac{\partial g}{\partial q^a} - \frac{\partial f}{\partial q^a}\frac{\partial g}{\partial p_a} = \mathcal{P}^{ij}(df)_i(dg)_j \equiv \mathcal{P}(df, dg) \tag{20}$$

Bivektorové pole $\mathcal{P}$, ku ktorému sme sa dopracovali, spĺňa ešte naviac istú diferenciálnu identitu, ktorá zabezpečuje platnosť *Jacobiho identity* pre Poissonove zátvorky

$$\{\{f, g\}, h\} + \text{ cykl. } \equiv \mathcal{P}(d(\mathcal{P}(df, dg)), dh) + \text{ cykl. } = 0 \tag{21}$$

Jej explicitný súradnicový tvar vychádza (nebudeme ho potrebovať)

$$\mathcal{P}^{r[i}\mathcal{P}^{jk]}{}_{,r} = 0 \tag{22}$$

Toto pole sme zatiaľ dostali len na konkrétnej variete $\mathbb{R}^{2n}$ a v konkrétnych súradniciach na nej, ale ukazuje sa výhodným zaviesť ho vo všeobecnom prípade ako novú užitočnú geometrickú štruktúru. Ľubovoľné bivektorové pole $\mathcal{P}$ na variete M, ktoré spĺňa spomínanú identitu sa volá *Poissonov tenzor* a varieta $(M, \mathcal{P})$ s takýmto tenzorom *poissonovská varieta*. Ako vidno z (20), v ľubovoľných súradniciach platia vyjadrenia

$$\mathcal{P}^{ij} = \{x^i, x^j\} \qquad\qquad \{f, g\} = (\partial_i f)\{x^i, x^j\}(\partial_j g) \tag{23}$$

Vektorové pole, ktoré má tvar

$$\zeta_f := \mathcal{P}(df,\ .\ ) \tag{24}$$

sa potom volá *hamiltonovské pole* generované funkciou f. Zatiaľ teda môžeme zhrnúť našu snahu o bezsúradnicovosť zápisu Hamiltonových rovníc takto: študovať dynamiku danú (lokálne) Hamiltonovými rovnicami (13) je to isté, ako študovať dynamiku zadanú globálne a bezsúradnicovo v tvare

$$\dot{\gamma} = \zeta_H \equiv \mathcal{P}(dH,\ .\ ) \tag{25}$$

kde $\mathcal{P}$ je Poissonov tenzor na variete M a H je preferovaná funkcia na tejto variete, *hamiltonián.*

Náš Poissonov tenzor je *nedegenerovaný* (pozri výpočet za (18)). Toto sa od všeobecného Poissonovho tenzora nepožaduje, my sa však ďalej budeme venovať len prípadom, keď to tak je. Vtedy sa totiž dá príbeh preložiť do reči diferenciálnych *foriem*, čím sa veci technicky výrazne zjednodušia (lebo na formách máme zázračne jednoduché a silné d apod.; navyše práve nedegenerovaný prípad je „paradigmatický"). [1]

Pozrime sa teraz na vyššie spomenutý prechod k "zrkadlovému obrazu" (nedegenerovanej) poissonovskej dynamiky, ktorým je *symplektická* dynamika. Definujme na fázovom priestore $\mathbb{R}^{2n}[q^a, p_a] \equiv \mathbb{R}^{2n}[z^i]$ tenzorové pole ω typu $\binom{0}{2}$, ktorého matica bude (až na znamienko) inverzná k matici $\mathcal{P}^{ij}$

$$\mathcal{P} \circ \omega = -\hat{1} \quad \text{t.j.} \quad \mathcal{P}^{ik}\omega_{kj} = -\delta^i_j \tag{26}$$

$$\Rightarrow \qquad \omega_{ij}(z) = \begin{pmatrix} 0_n & -\mathbb{I}_n \\ \mathbb{I}_n & 0_n \end{pmatrix} = -\,\omega_{ji}(z) \tag{27}$$

Je dosť ťažké si nevšimnúť, že matica ω_{ij} je (v týchto súradniciach) vlastne úplne rovnaká, ako matica $\mathcal{P}^{ij}$ z (18). Je teda tiež antisymetrická a nesingulárna, takže zodpovedá *nedegenerovanej* 2-*forme.*

▼ Každá 2-forma α definuje (lineárne) zobrazenie {vektory} $\mapsto$ {kovektory} predpisom $v \mapsto i_v\alpha \equiv \alpha(v, \ . \ )$. Rang tohoto lineárneho zobrazenia sa volá *rang formy* α (analogicky by sa definoval aj rang bivektora). Maximálny možný rang je tu zjavne $2n$. Vtedy je toto zobrazenie lineárnym izomorfizmom (t.j. má nulové jadro) a povie sa, že α je *nedegenerovaná.* Keďže v komponentách to zobrazenie vyzerá $v^i \mapsto \alpha_{ij}v^j$, nedegenerovanosť je ekvivalentná *nesingulárnosti matice* komponent α_{ij} ▲

Ak z komponent zostavíme celú 2-formu, dostaneme pre ňu v súradniciach z^i a (q^a, p_a) vyjadrenie

$$\omega = \frac{1}{2}\omega_{ij}dz^i \wedge dz^j = dp_a \wedge dq^a \tag{28}$$

Z neho vidno ďalšiu dôležitú vec, totiž že forma ω je ešte aj *uzavretá,* [2] teda že spĺňa $d\omega = 0$.

[1] Bezsúradnicový zápis Hamiltonových rovníc v tvare (25) vychádzal z konkrétneho súradnicového vyjadrenia Poissonovho tenzora, zo zápisu $\mathcal{P} = \frac{\partial}{\partial p_a} \wedge \frac{\partial}{\partial q^a}$. V prednáške ??? sa však dozvieme, že definičné vlastnosti tohoto tenzora (nedegenerované bivektorové pole, ktoré spĺňa diferenciálnu identitu z (21), (22) zaručujú vždy možnosť presne takéhoto lokálneho vyjadrenia (je to "kanonický tvar"nedegenerovaného Poissonovho tenzora.

[2] Je dokonca *exaktná,* $\omega = d(p_a dq^a) = d\theta$, ale to nie je veľmi zaujímavé - v $\mathbb{R}^{2n}$ sú exaktné *všetky* uzavreté formy a keby sme to náhodou už mysleli dobudúcna na niečom inom, tak by to aj tak bolo len súradnicové - a teda *lokálne* - vyjadrenie (a lokálne to platí zasa vždy).

Spolu sme teda o forme ω zistili toto: je to uzavretá a nedegenerovaná 2-forma. Všeobecne sa definuje, že

- *symplektická forma* je uzavretá a nedegenerovaná 2-forma,

- *symplektická varieta* je varieta, na ktorej je definovaná symplektická forma a

- *symplektická geometria* je časť geometrie, ktorá študuje symplektické variety. [3]

Hamiltonove rovnice nám teda pomohli odhaliť, že fázový priestor je prirodzenou symplektickou varietou. Ukazuje sa, že symplektická forma sa podieľa na všetkom zaujímavom, čo sa vo fázovom priestore deje. Jej odhalenie je preto zásadným krokom k pochopeniu hamiltonovskej mechaniky.

Naša cesta k symplektickej forme sa začala v *párnorozmernom* (fázovom) priestore. Zo všeobecnej definície symplektickej formy nie je apriori jasné, či si takýto objekt naozaj nevyhnutne vyžaduje párny rozmer priestoru na ktorom žije, alebo či to bola len náhoda. Ľahko sa však nahliadne, sa sa to ináč naozaj nedá, t.j. že každá symplektická varieta je párnorozmerná.

▼ Stojí to na jednoduchom fakte z lineárnej algebry, že antisymetrická nesingulárna matica musí mať párny rozmer. Naozaj, ak $A^T = -A$, tak $\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^{\dim} \det A$, takže rozmer uvažovanej matice musí vyhovovať rovnici $(-1)^{\dim} = +1$. ▲

Keďže (v nedegenerovanom prípade) tenzory $\mathcal{P}$ a ω sú podľa (27) navzájom inverzné, čokoľvek, do čoho vstupuje $\mathcal{P}$ sa dá vyjadriť cez ω. Pozrime sa napríklad, ako sa vyjadruje cez ω všeobecné hamiltonovské pole a Poissonova zátvorka dvoch funkcií. Najjednoduchšia cesta je uvidieť výsledok cez komponenty a potom si uvedomiť, čo to hovorí bezsúradnicovo.

Vynásobme komponentný vzorček (24) maticou ω_{ij}:

$$\zeta^i_f = (df)_j \mathcal{P}^{ji} \qquad \Rightarrow \qquad \zeta^i_f \omega_{ik} = (df)_j \mathcal{P}^{ji} \omega_{ik} = (df)_j (-\delta^j_k) = -(df)_k$$

Získaná rovnica $\zeta^i_f \omega_{ik} = -(df)_k$ sa však dá ľahko zapísať v rýdzo formovom bezsúradnicovom jazyku ako

$$i_{\zeta_f} \omega \equiv \zeta_f \lrcorner\, \omega = -df \tag{29}$$

Táto dôležitá rovnica je úplne ekvivalentná rovnici (24) - jedna aj druhá jednoducho definujú (to isté) hamiltonovské pole ζ_f generované (ľubovoľnou) funkciou f na fázovom priestore

$$\zeta_f := \mathcal{P}(df, \,.\,) \qquad \Leftrightarrow \qquad i_{\zeta_f} \omega \equiv \zeta_f \lrcorner\, \omega = -df \tag{30}$$

[3] Konečne sa teda vyjasnilo, o čom bude táto Zimná škola.

Výhodou „formovej" definície (29) je to, že s formami sa pracuje podstatne pohodlnejšie, ako s bivektorovými poľami. Z rovnice (30) sa napríklad ľahko ukáže (skúste si to!), že platí

$$\mathcal{L}_{\zeta_f}\omega = 0 \qquad \zeta_f + \lambda\zeta_g = \zeta_{f+\lambda g} \qquad [\zeta_f, \zeta_g] = \zeta_{\{f,g\}} \tag{31}$$

Hamiltonovské polia teda zachovávajú symplektickú formu a tvoria (∞-rozmernú) *Lieovu algebru* (sú uzavreté voči lineárnym kombináciám nad $\mathbb{R}$ a komutátoru). Podobne sa jednoducho overí, že Jacobiho identita je v jazyku symplektickej formy ω ekvivalentná jej *uzavretosti*

$$\{f,\{g,h\}\} + \{h,\{f,g\}\} + \{g,\{h,f\}\} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad d\omega = 0$$

▼ Ak rozpíšeme výraz $d\omega(\zeta_f, \zeta_g, \zeta_h)$ pomocou Cartanovho vzorca $d\beta(U,V,W) = \dots$ uvedeného na konci úvodnej prednášky o formách, dostaneme

$$d\omega(\zeta_f, \zeta_g, \zeta_h) = \ \cdots = \ 2(\{f,\{g,h\}\} + \{h,\{f,g\}\} + \{g,\{h,f\}\})$$

Treba ešte zdôvodniť, že nulovosť formy na ľubovoľných *hamiltonovských* poliach znamená už jej nulovosť na ľubovoľných argumentoch (čiže nulovosť $d\omega$ ako formy). ▲

Hamiltonovská mechanika 2

- Algebra pozorovateľných (dva kompatibilné súčiny)
- Poincarého-Cartanove integrálne invarianty a Liouvillova veta
- Hamiltonián závislý od času
- Forma $pdq - Hdt$, variačný princíp pre Hamiltonove rovnice

Algebra pozorovateľných. Prítomnosť Poissonovej zátvorky obohacuje (*asociatívnu*) algebru funkcií $\mathcal{F}(M)$ na symplektickej variete o dodatočnú štruktúru *Lieovej* algebry, takže vzniká kombinovaná *algebra pozorovateľných* klasickej mechaniky $\mathcal{A}(M)$ (varieta M hrá v klasickej mechanike úlohu *fázového priestoru*). Jej prvky, *pozorovateľné*, sú funkcie $f \in \mathcal{F}(M)$ na fázovom priestore; dajú sa robiť ich lineárne kombinácie a pobodové súčiny ($\Rightarrow$ zatiaľ asociatívna algebra), ale aj ich Poissonove zátvorky ($\Rightarrow$ Lieova algebra).

Názov "pozorovateľná" pre funkcie na fázovom priestore zodpovedá predstave, že to sú (v klasickej mechanike) práve objekty teórie, ktorým zodpovedajú merateľné veličiny a ktoré sa dajú porovnávať s výsledkom merania.

Merania sa konajú na "stavoch", ktorým v teórii zodpovedajú *body* fázového priestoru M. Výsledkom merania pozorovateľnej f v stave $p \in M$ je *hodnota* f v bode p, teda *číslo* $f(p)$.

▼ Ak napríklad ako fyzikálnu sústavu vezmeme jeden hmotný bod v $\mathbb{R}^3$, priradíme jej fázový priestor $M = \mathbb{R}^6[\mathbf{r}, \mathbf{p}]$. Stavom je napríklad bod $(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ (zodpovedá státiu v počiatku). Ak chceme merať v tomto stave povedzme z-ovú zložku momentu hybnosti, máme pre ňu najprv zaviesť pozorovateľnú $f = L_z = xp_y - yp_x$ (čo je funkcia vo fázovom priestore) a vyčísliť jej hodnotu v bode $(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$. To tu dá $L_z(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$. Podľa teórie teda máme namerať číslo 0.

Poznamenajme, že v (klasickej) *štatistickej* mechanike je výhodné uvažovať všeobecnejšie stavy, opisované "pravdepodobnostnými mierami" na M. ▲

Dva "súčiny" $\mathcal{A}(M) \times \mathcal{A}(M) \to \mathcal{A}(M)$ sú navzájom prepojené identitou

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$$

ktorá jednoducho odráža fakt, že za Poissonovou zátvorke je vektorové pole, $\{f, \ . \ \} = \zeta_f(\ . \ )$, t.j. *derivácia* (asociatívnej) algebry $\mathcal{F}(M)$.

Keďže prvky algebry $\mathcal{A}(M)$ (pozorovateľné) sú *funkcie* na fázovom priestore M, prirodzene na nej pôsobia difeomorfizmy ($f \mapsto \Phi^* f$). Štruktúru tejto algebry zachovávajú práve *symplektomorfizmy* (M, ω), t.j. také difeomorfizmy M na seba, ktoré zachovávajú symplektickú formu ω

$$\Phi^* \omega = \omega$$

Hamiltonovské polia generujú *toky* takýchto transformácií. Pôsobenie tokov hamiltonovských polí na algebre $\mathcal{A}(M)$

$$U_t^f : \mathcal{A}(M) \to \mathcal{A}(M) \qquad U_t^f := (\Phi_t^f)^* \quad \Phi_t^f \leftrightarrow \zeta_f, \ f \in \mathcal{A}(M)$$

sa dá vyjadriť aj v tvare radu

$$U_t^f g = g + t\{f, g\} + \frac{t^2}{2!}\{f, \{f, g\}\} + \frac{t^3}{3!}\{f, \{f, \{f, g\}\}\} + \dots$$

Pritom *Jacobiho identita* pre Poissonovu zátvorku je vlastne infinitezimálnou verziou podmienky *zachovania* Poissonovej zátvorky (ľubovoľných dvoch funkcií) voči toku ľubovoľného hamiltonovského poľa, t.j. podmienky

$$U_t^f \{g, h\} = \{U_t^f g, U_t^f h\} \qquad f, g, h \in \mathcal{A}(M)$$

Zobrazenie

$$U_t^f : \mathcal{A}(M) \to \mathcal{A}(M)$$

je pre každé t *automorfizmom* algebry pozorovateľných $\mathcal{A}(M)$ (zachováva jej lineárnu štruktúru aj *oba súčiny*) a predpis $t \mapsto U_t^f$ je jednoparametrickou grupou takýchto automorfizmov.

Poincarého-Cartanove invarianty, Liouvillova veta. Geometrická formulácia Hamiltonových rovníc

$$\dot{\gamma} = \zeta_H \qquad i_{\zeta_H}\omega = -dH \tag{32}$$

sa umožňuje elegantne vysporiadať s niektorými otázkami, ktoré sú bez nej technicky podstatne komplikovanejšie. Napríklad s Poincarého-Cartanovými integrálnymi invariantami. Tvrdenie spočíva v tom, že integrál k-násobného súčinu symplektickej formy (čo je $2k$-forma) po ľubovoľnej $2k$-rozmernej oblasti sa nemení, keď túto oblasť posúvame po variete hamiltonovským tokom generovaným ľubovoľnou funkciou.

$$\int\limits_{\Phi_t(\mathcal{D})} \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{k \text{ kusov}} = \int\limits_{\mathcal{D}} \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{k \text{ kusov}} \qquad\qquad \Phi_t \ \leftrightarrow \ \zeta_f$$

(Špeciálne ak za túto funkciu vyberieme hamiltonián, dostávame invariantnosť voči *časovému* vývoju.)

▼ Dôkaz je pomocou foriem (na rozdiel od súradnicového jazyka) až smiešne jednoduchý:

$$\int\limits_{\Phi_t(\mathcal{D})} \omega \wedge \dots \wedge \omega = \int\limits_{\mathcal{D}} \Phi_t^*(\omega \wedge \dots \wedge \omega) = \int\limits_{\mathcal{D}} \Phi_t^*\omega \wedge \dots \wedge \Phi_t^*\omega = \int\limits_{\mathcal{D}} \omega \wedge \dots \wedge \omega$$

▲

Najdôležitejší a najznámejší je posledný z týchto integrálnych invariantov, t.j. prípad $k = n$. Príslušné tvrdenie je známe ako *Liouvillova veta*. Hovorí, že pri fázovom toku sa zachováva (kanonický) *fázový objem*. Výpočet ukazuje, že integrál z n-násobného súčinu symplektickej formy sa v kanonických súradniciach vyjadruje výrazom bežným v štatistickej fyzike, t.j. (až na normovací faktor) ako $\int_{\mathcal{D}} dpdq$.

Hamiltonián závislý od času. Zatiaľ sme predpokladali, že hamiltonián (generátor dynamického poľa) nezávisí od času. Bola to funkcia na *symplektickej* variete, takže v kanonických súradniciach funkcia premenných (q, p) (a nijakého ďalšieho t). Z mechaniky však vieme, že v Hamiltonových (alebo Lagrangeových) rovniciach sa apriori *nepredpokladá*, že hamiltonián (lagranžián) nezávisí od času; všeobecne sa Hamiltonove rovnice (13) chápu tak, že $H = H(q, p, t)$ a podobne aj v Lagrangeových rovniciach sa pripúšťa $L(q, \dot{q}, t)$. Ako zahrnúť do našich geometrických úvah túto možnosť?

Potrebujeme v prvom rade povedať, na *akej variete* bude vlastne definovaný hamiltonián, ak jeho súradnicové vyjadrenie má byť $H(q,p,t)$. Jedno prirodzené riešenie je pridať k pôvodnej symplektickej variete dodatočnú časovú os (prejsť k *rozšírenému* fázovému priestoru), čiže prejsť od symplektickej variety M k variete $M \times \mathbb{R}$.

Teraz sa dá postupovať takto. Prepíšeme Hamiltonove rovnice (13) do tvaru

$$dq^a - \frac{\partial H}{\partial p_a}\, dt = 0 \qquad dp_a + \frac{\partial H}{\partial q^a}\, dt = 0 \qquad\qquad a = 1, \dots n \tag{33}$$

Názorne pochopiteľná (a na prednáške z analýzy zakazovaná) interpretácia týchto rovníc je taká, že vyjadrujú vzťah medzi *infinitezimálnymi prírastkami* súradníc dq^a, dp_a a času dt *na riešeniach* pohybových rovníc (13). No dá sa na ne pozerať aj ináč - cez diferenciálne formy a distribúcie (tento pohľad je už nezakázateľný). Konkrétne, na variete, kde sa používajú súradnice q^a, p_a a t, t.j. akurát na našom rozšírenom fázovom priestore $M \times \mathbb{R}$, uvažujeme $2n$ diferenciálnych 1-foriem

$$\alpha^a := dq^a - \frac{\partial H}{\partial p_a}\, dt \qquad \beta_a := dp_a + \frac{\partial H}{\partial q^a}\, dt$$

Podmienku (33) potom treba chápať tak, že dotykový vektor $\dot\gamma$ ku krivke $t \mapsto \gamma(t) \leftrightarrow (q^a(t), p_a(t), t)$ v rozšírenom fázovom priestore $M \times \mathbb{R}$ *vynuluje každú* z $2n$ 1-foriem α^a, β_a

$$i_{\dot\gamma}\alpha^a = 0 \qquad i_{\dot\gamma}\beta_a = 0$$

1-formy α^a a β_a sa teda použijú ako ohraničujúce formy istej distribúcie. Keďže sú *lineárne nezávislé*, je ich $2n$ a sme na $2n+1$ rozmernej variete, distribúcia je 1-rozmerná.

▼ Ak sme na variete $N \times \mathbb{R}$ so súradnicami $(x^1, \dots, x^n, t)$, tak ľubovoľná p-forma má tvar $dt \wedge a + b$, kde formy a, b už neobsahujú dt. Uvažujem 1-formy $\sigma^i = dx^i + f^i(x,t)dt$, $i = 1, \dots, n$. Ich súčin $\sigma^1 \wedge \dots \wedge \sigma^n$ je nejaká n-forma. Má teda určite tvar $dt \wedge \hat a + \hat b$. Veľmi ľahko sa zistí to $\hat b$ - vzniká totiž tak, že pri roznásobovaní zoberiem z každého σ^i člen dx^i - dostávam tak $\hat b = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Táto n-forma je nenulová a lineárne nezávislá na druhom člene vo všeobecnom rozklade, takže súčin $\sigma^1 \wedge \dots \wedge \sigma^n$ je *nenulový*. To ale znamená, že 1-formy σ^i sú lineárne *nezávislé*. ▲

V každom bode rozšíreného fázového priestoru tak existuje významný smer (1-rozmerný podpriestor v dotykovom priestore). Z konštrukcie tých 1-foriem vyplýva, že ísť týmto smerom znamená vyvíjať sa podľa Hamiltonových rovníc. Znamená to, že študovať riešenia Hamiltonových rovníc je vlastne „to isté" ako študovať distribúciu danú 1-formami α^a a β_a.

Teraz si uvedomíme, že vynulovať *každú* z 1-foriem α^a a β_a *zvlášť* a vynulovať *jednu jedinú* 2-formu $\beta_a \wedge \alpha^a$ je to isté:

$$i_W(\beta_a \wedge \alpha^a) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad i_W\beta_a = 0 = i_W\alpha^a \ , \ a = 1, \dots, n$$

To ale znamená, že *celá informácia* o uvažovanej distribúcii je kompaktne uložená aj v tej jedinej 2-forme $\beta_a \wedge \alpha^a$. No a ako tá úžasná 2-forma, na ktorej pleciach spočíva celá distribúcia, vlastne vyzerá? Takto:

$$\begin{aligned} \beta_a \wedge \alpha^a &= dp_a \wedge dq^a - dH \wedge dt \\ &= d(p_a dq^a - H dt) \equiv d(pdq - Hdt) \end{aligned}$$

Vidíme teda, že zo súčiastok, ktoré vzniknú prirodzene pri odbornej demontáži Hamiltonových rovníc sa dá jednoducho poskladať *exaktná* 2-*forma* $d(pdq - Hdt)$, ktorá hrá kľúčovú úlohu pre Hamiltonove rovnice. Ich geometrický zápis pomocou nej vyzerá

$$i_{\dot\gamma}(dp_a \wedge dq^a - dH \wedge dt) \ \equiv \ i_{\dot\gamma} d(pdq - Hdt) \ = \ 0 \tag{34}$$

Ak hamiltonián nezávisí explicitne od času, dá sa z tejto rovnice (pre krivku $t \mapsto \gamma(t) \leftrightarrow (q(t), p(t), t)$ na $M \times \mathbb{R}$) získať vyjadrenie (32) (kde to ale je pre krivku $t \mapsto \gamma(t) \leftrightarrow (q(t), p(t))$ už len na M).

Variačný princíp. Stručne spomenieme argument, z ktorého sa prakticky bez výpočtov dá nahliadnuť, že krivka, ktorá je riešením rovnice (34), zároveň extremalizuje účinok

$$S[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} (pdq - Hdt) \equiv \int_{t_1}^{t_2} \sigma$$

Nech $\gamma(t)$ je riešením rovnice (34) na intervale medzi t_1 a t_2. Vykonáme jej drobnú variáciu, $\gamma(t) \mapsto \gamma_\epsilon(t)$, ktorá nechá (zatiaľ) konce na mieste. Tým dostaneme dvojrozmerný úzky pásik Σ ohraničený pôvodnou a novou krivkou: $\partial\Sigma = \gamma - \gamma_\epsilon$. Uvažujme integrál 2-formy $d\sigma$ po tomto pásiku, $\int_\Sigma d\sigma$. Tento integrál sa podľa Stokesovej vety rovná rozdielu účinku po pôvodnej a varírovanej krivke, čiže práve variácii účinku (so znamienkom mínus). Zároveň je však (do prvého rádu) nulový: keď ho budeme v procese integrovania sekať na kúsky, tieto kúsky sa dajú natiahnúť na dvojicu vektorov $\dot\gamma$ (v smere pásika) a W (pole, ktorým sa realizuje variácia). Príspevok za taký kúsok ale je $d\sigma(\dot\gamma, W) = (i_{\dot\gamma} d\sigma)(W) = 0$, keďže podľa (34) je $i_{\dot\gamma} d\sigma = 0$.

Argument prejde aj pre variácie, ktoré koncami krivky hýbu, ale len tak, aby sme neprispeli do integrálu po hranici. Zo štruktúry formy σ (z člena $p_a dq^a$) vidno, že nemáme varírovať q^a, ale pokojne môžeme zmeniť p_a.

Príklady symplektických variet

- Kanonická symplektická štruktúra v „súradnicovom" $\mathbb{R}^{2n}$ a $\mathbb{C}^n$
- T^*M ako bežný fázový priestor v teoretickej mechanike
- Orbity koadjungovaného pôsobenia

V tejto prednáške opíšeme tri zdroje konkrétnych symplektických variet. Najjednoduchším príkladom sú párnorozmerné kartézske priestory $\mathbb{R}^{2n}$. V druhom príklade sa začína z ľubovoľnej variety M a kanonicky sa jej priradí (iná) varieta T^*M, na ktorej je automaticky symplektická forma. V treťom príklade je na vstupe Lieova grupa G (plus bod v duáli jej Lieovej algebry) a na výstupe istá párnorozmerná varieta, na ktorej je opäť zadarmo symplektická forma.

Kanonická symplektická štruktúra v $\mathbb{R}^{2n}$ a $\mathbb{C}^n$. To $\mathbb{R}^{2n}[q,p]$ je vlastne prípad, cez ktorý sa k tomu celému dostávajú fyzici - je to to, čo sa opísalo v (28). Ak zapíšeme kanonické páry x^a, p_a v komplexnom jazyku ako

$$z^a = x^a + ip_a \qquad \bar{z}^a = x^a - ip_a$$

tak dostávame

$$\omega = dp_a \wedge dq^a = (i/2) d\bar{z}^a \wedge dz^a \tag{35}$$

Vyjadrenie (35) platí (podľa Darbouxovej vety) na ľubovoľnej symplektickej variete *lokálne*, tu však platí *globálne* a navyše priamo v „definičných" súradniciach.

Bežný fázový priestor ako T^*M. Majme *konfiguračný priestor* nejakej sústavy s n stupňami voľnosti, t.j. hladkú varietu M s lokálnymi súradnicami x^a. Potom sa jej dá kanonicky priradiť istá varieta dvojnásobného rozmeru, ktorá sa označuje T^*M a hrá v mechanike úlohu *fázového* priestoru. Jej bodmi sú všetky možné *kovektory* vo všetkých možných bodoch pôvodnej variety M. Návod na výrobu „kanonického" atlasu na T^*M vyzerá takto: uvažujeme súradnicovú oblasť $\mathcal{O}[x^a]$. Kovektory v tejto oblasti sú čiastočne opísané hodnotami súradníc x^a (už vieme *kde* je daný kovektor, ale stále nevieme, *ktorý* to presne je). V $\mathcal{O}$ však máme k dispozícii aj súradnicovú bázu pre kovektory, takže uvažovaný kovektor $p \in T_x^*M$ môžeme jednoznačne rozložiť podľa nej, $p = p_a dx^a$. Čísla p_a už pridávajú presne to, čo doteraz chýbalo: $2n$ čísel x^a, p_a vzájomne jednoznačne kóduje všetky tie kovektory, ktoré žijú v bodoch oblasti $\mathcal{O}$. Tie, ktoré nežijú v $\mathcal{O}$, však nemusia smútiť - určite žijú v nejakej inej súradnicovej oblasti $\mathcal{O}'$ a tam sa dá zopakovať to isté. Ľahko sa preverí, že tak vznikne atlas na množine všetkých kovektorov na M, čiže vznikne T^*M už ako hladká varieta.

Takto konkrétne urobený atlas je veľmi dobre ušitý na mieru dôležitým veciam, ktoré sa na T^*M odohrávajú. Napríklad je zrejmé, že existuje prirodzené zobrazenie (kanonická projekcia) $\pi : T^*M \to M$, ktoré kovektoru p v bode x priradí samotný bod x. V týchto súradniciach to dáva $(x^a, p_a) \mapsto x^a$, čo je najjednoduchší možný („kanonický") tvar pre zobrazenie takého typu.

My sa teraz ale zameriame na kľúčový objekt na T^*M, kanonickú symplektickú formu. Vzniká vonkajšou deriváciou „hlbšieho" objektu, *kanonickej 1-formy* θ. Tá sa definuje takto: nech p je bod na T^*M a W je vektor v tomto bode. Potom

$$\langle \theta, W \rangle := \langle p, \pi_* W \rangle \tag{36}$$

Vektor W sa teda najprv sprojektuje do $x \equiv \pi(p) \in M$ a tam sa dosadí do 1-formy $p \in T_x^*M \equiv \pi^{-1}(x)$, ktorá zodpovedá bodu $p \in T^*M$. Ľahko sa overí, že takto (pobodovo) dostávame naozaj 1-formu na variete T^*M a že jej súradnicové vyjadrenie je

$$\theta = p_a dx^a$$

▼ Nech $W = A^a \frac{\partial}{\partial x^a} + B^a \frac{\partial}{\partial p_a}$, $\theta = C_a dx^a + D^a dp_a$. Potom

$$\pi_* W = A^a \frac{\partial}{\partial x^a} \ \Rightarrow\ \langle p, \pi_* W \rangle = \langle p_a dx^a, A^b \frac{\partial}{\partial x^b} \rangle = \ldots \overset{!}{=} \langle \theta, W \rangle$$

▲

Potom je zrejmé, že vonkajšou deriváciou z nej dostaneme (kanonickú exaktnú) *symplektickú* formu na T^*M,

$$\omega := d\theta = dp_a \wedge dx^a \tag{37}$$

Vidíme, že kanonické súradnice (x^a, p_a) sú pre ňu zároveň kanonické v zmysle Darbouxovej vety! (Jej nedegenerovanosť okamžite vidno z tohoto súradnicového vyjadrenia, pozri napr. (27)).

Orbity koadjungovaného pôsobenia. *Koadjungované pôsobenie* Ad_g^* Lieovej grupy G je kontragradientná (anti)reprezentácia k pridruženej reprezentácii Ad. Funguje teda v lineárnom priestore $\mathcal{G}^*$ duálnom k Lieovej algebre $\mathcal{G}$ grupy G a definuje sa predpisom

$$\langle \mathrm{Ad}_g^* X^*, Y \rangle := \langle X^*, \mathrm{Ad}_g Y \rangle \qquad\qquad X^* \in \mathcal{G}^*,\ Y \in \mathcal{G}$$

(Prvky z $\mathcal{G}$ označujeme $X, Y, \ldots$, prvky z $\mathcal{G}^*$ zasa $X^*, Y^*, \ldots$)

$\mathcal{G}^*$ je lineárny priestor a zároveň (samozrejme) varieta. Existujú preto na ňom lineárne funkcie, ktoré môžeme stotožniť s kovektormi na $\mathcal{G}^*$, t.j. s prvkami $\mathcal{G}$. Nech Φ_X je taká lineárna funkcia (daná prvkom $X \in \mathcal{G}$, takže $\Phi_X(Y^*) = \langle Y^*, X\rangle$). Jej pull-back pravým pôsobením $R_g \equiv \mathrm{Ad}\,^*_g$ je opäť lineárna funkcia; je pritom daná prvkom $\mathrm{Ad}\,_g X$:

$$R_g^* \Phi_X = \Phi_{\mathrm{Ad}\,_g X} \qquad\qquad R_g \equiv \mathrm{Ad}\,^*_g$$

▼ $\quad (R_g^*\Phi_X)(Y^*) = \Phi_X(\mathrm{Ad}\,^*_g Y^*) = \langle \mathrm{Ad}\,^*_g Y^*, X\rangle = \langle Y^*, \mathrm{Ad}\,_g X\rangle$ ▲

Infinitezimálnou verziou toho istého tvrdenia je rovnica

$$\xi_X \Phi_Y = \Phi_{[X,Y]} \tag{38}$$

kde ξ_X je generátor (fundamentálne pole) pôsobenia $R_g \equiv \mathrm{Ad}\,^*_g$, t.j. je definovaný vzťahom

$$\xi_X(Y^*)\Phi = \frac{d}{dt}\bigg|_0 \Phi(\mathrm{Ad}\,^*_{\exp tX} Y^*)$$

▼ $\quad$ Položiť $g = \exp tZ$, derivovať v nule a využiť $\mathrm{ad}\,_X Y = [X, Y]$ ▲

Uvažujme teraz *orbitu* $\mathcal{O}_{Z^*}$, generovanú bodom $Z^* \in \mathcal{G}^*$. Dotykový priestor *k orbite* v bode Z^* sa (ako vždy pre orbity) naťahuje na hodnoty fundamentálnych polí v tomto bode. Ak chceme preto definovať nejakú diferenciálnu formu *na orbite*, stačí určiť jej hodnotu na fundamentálnych poliach. Definujme v dotykovom priestore $T_{Z^*}\mathcal{O}_{Z^*}$ *k orbite* v bode Z^* 2-formu ω_{Z^*} vzťahom

$$\omega_{Z^*}(\xi_X, \xi_Y) := \langle Z^*, [X, Y]\rangle \equiv \Phi_{[X,Y]}(Z^*) \tag{39}$$

Takto dostávame pobodovo hladkú diferenciálnu 2-formu ω na variete $\mathcal{O}_{Z^*}$. Ukazuje sa, že to je *symplektická forma.*

▼ $\quad$ Uzavretosť: v ľubovoľnom bode na orbite platí

$$\begin{aligned}
d\omega(\xi_X, \xi_Y, \xi_Z) &= (\xi_X \omega(\xi_Y, \xi_Z) + \text{ cyklicky}) && \\
&\quad - (\omega([\xi_X, \xi_Y], \xi_Z) + \text{ cyklicky}) && \text{Cartanov vzorec} \\
&= (\xi_X \Phi_{[Y,Z]} + \text{ cyklicky}) && \\
&\quad - (\Phi_{[[X,Y],Z]}) + \text{ cyklicky}) && \text{definícia } \omega \\
&= 2\Phi_{[[X,Y],Z] + \text{ cyklicky}} && \text{podľa (38)} \\
&= 2\Phi_0 = 0 && \text{Jacobiho identita}
\end{aligned}$$

Nedegenerovanosť: platí $\omega_{Z^*}(\xi_X, \xi_Y) := \Phi_{[X,Y]}(Z^*) = \xi_X(Z^*)\Phi_Y$; ak je teda $\omega_{Z^*}(\xi_X, \xi_Y) = 0$ pre všetky ξ_Y, vektor $\xi_X(Z^*)$ dáva nulu pri pôsobení na všetky *lineárne* funkcie, ale potom aj na *všetky* funkcie, čiže vektor ξ_X v bode Z^* je *nulový.* ▲

Zistili sme teda, že orbita $\mathcal{O}_{Z^*} \subset \mathcal{G}^*$ daná ľubovoľným bodom $Z^* \in \mathcal{G}^*$ je symplektickou varietou. (Ak je orbita 0-rozmerná, t.j. len bod Z^*, tak ide o degenerovaný prípad a samozrejme žiadna symplektická varieta nevzniká.) Všimnime si ešte, že kombináciou (38) a (39) dostávame

$$i_{\xi_X}\omega = -d\Phi_X$$

čo znamená, že generátory symetrie sú tu *hamiltonovské* polia (a teda špeciálne aj to, že táto symplektická forma je *invariantná* voči pôsobeniu grupy). Ide o *homogénne symplektické* variety.

Ako to celé vyzerá napríklad pre grupu $G = SO(3)$? Vtedy je Lieova algebra $\mathcal{G} = so(3)$ trojrozmerná a dá sa predstaviť ako obyčajný trojrozmerný priestor, v ktorom žijeme. To isté platí samozrejme aj pre jej duál $\mathcal{G}^* = (so(3))^*$. Killingov-Cartanov metrický tenzor, ktorý je všeobecne daný vzťahom $K_{ij} = c^l_{ir}c^r_{jl}$, tu vychádza úmerný δ_{ij}. To znamená, že ak ho použijeme na zobrazenie $so(3) \to (so(3))^*$ (budeme ním „spúšťať index" na vektoroch z $so(3)$), formálne prehadzujeme čokoľvek z $so(3)$ do $(so(3))^*$, ale „v skutočnosti" sa nič nebude meniť. To umožňuje napríklad vyšetrovať namiesto orbít (voči Ad^*) v duáli Lieovej algebry $(so(3))^*$ orbity (voči Ad) v samotnej Lieovej algebre $so(3)$.

▼ Všeobecne ak h je Ad-invariantný metrický tenzor v $\mathcal{G}$, tak $\flat_h \circ \mathrm{Ad}_g = \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}} \circ \flat_h$ (čiže spúšťanie a zdvíhanie indexov týmto metrickým tenzorom prerába zároveň pôsobenie Ad na Ad^* a naopak). Vzhľadom na $K_{ij} \sim \delta_{ij}$ v $so(3)$ je $\flat_h$ technicky triviálne a preto $\mathrm{Ad}^* \sim \mathrm{Ad}$. ▲

No a ako vyzerajú orbity Ad pôsobenia v Lieovej algebre $so(3)$? Výpočet ukazuje, že samotné Ad pôsobenie sa tu realizuje ako *obyčajné rotácie* okolo počiatku. Potom je jasné, že orbity sú koncentrické sféry so stredom v počiatku.

▼ Ak všeobecný prvok zapíšeme v tvare $\boldsymbol{r}.\boldsymbol{l}$ (kde l_1, l_2, l_3 je vhodná báza v $so(3)$), tak $\mathrm{Ad}_A(\boldsymbol{r}.\boldsymbol{l}) = (A\boldsymbol{r}).\boldsymbol{l}$, čiže efektívne $\boldsymbol{r} \mapsto A\boldsymbol{r}$. ▲

No a už asi neprekvapí, že ako kanonické symplektické formy na týchto sférach vychádzajú obyčajné „okrúhle" (rotačne invariantné) 2-formy objemu.

Na *orbitách* koadjungovanej akcie v $\mathcal{G}^*$ sme našli kanonickú *symplektickú* štruktúru. Ukazuje sa, že v skutočnosti existuje *na celej* variete $\mathcal{G}^*$ kanonický Poissonov tenzor (teda aj *Poissonova zátvorka*, pozri (20)), je však degenerovaný a nedegenerované je len jeho *ohraničenie na orbity*. Poissonova zátvorka dvoch *lineárnych* funkcií na variete $\mathcal{G}^*$ sa definuje vzťahom

$$\{\Phi_Y, \Phi_Z\} := \Phi_{[Y,Z]} \equiv \xi_Y \Phi_Z$$

a ako vieme z (23), to ju už fixuje aj na *ľubovoľných* funkciách; konkrétne vychádza

$$\{x_i, x_j\} = c^k_{ij}x_k \qquad \{f, g\} = c^k_{ij}x_k(\partial^i f)(\partial^j g)$$

Symplektická redukcia 1

- Momentové zobrazenie
- Redukovaný fázový priestor
- Elementárny príklad: Pohyb v zvislom gravitačnom poli

Za symetrie sú zákony zachovania. Tie sa dajú využiť na zjednodušenie úlohy a zjednodušená úloha sa dá často dotiahnuť do konca. Symplektická redukcia formalizuje túto myšlienku. Poďme teda formalizovať.

Momentové zobrazenie. Nech (M, ω, R_g) je symplektická varieta, na ktorej je dané pravé pôsobenie R_g Lieovej grupy G, pričom toto pôsobenie zachováva symplektickú štruktúru:

$$R_g : M \to M \qquad\qquad R_g^*\, \omega = \omega$$

S každým takýmto pôsobením sa automaticky dostáva (pre každé $X \in \mathcal{G}$) do hry istá *uzavretá* forma, konkrétne 1-forma $\alpha_X \equiv i_{\xi_X}\omega$.
▼ Infinitezimálnou verziou podmienky $R_g^*\, \omega = \omega$ je rovnica $\mathcal{L}_{\xi_X}\omega = 0$. Cartanova identita ale dáva $0 = \mathcal{L}_{\xi_X}\omega = i_{\xi_X}d\omega + di_{\xi_X}\omega = d(i_{\xi_X}\omega)$. ▲

Ľahko sa overí, že forma α_X závisí od X lineárne a voči akcii R_g je „typu Ad" :

$$R_g^*\alpha_X = \alpha_{\mathrm{Ad}\,_g X} \quad \text{takže infinitezimálne} \quad \mathcal{L}_{\xi_X}\alpha_Y = \alpha_{[X,Y]} \tag{40}$$

Najdôležitejší je prípad, keď formy α_X sú v skutočnosti nielen uzavreté, ale aj exaktné, čiže keď existuje *globálny* potenciál $P_X \in \mathcal{F}(M)$, $\alpha_X = dP_X$. Vtedy sa pôsobenie volá *globálne hamiltonovské*, lebo pole ξ_X je vtedy hamiltonovské pole generované funkciou P_X

$$i_{\xi_X}\omega = -dP_X \quad \text{takže} \quad \xi_X = \zeta_{P_X} \quad \text{alebo tiež} \quad \xi_X f = \{P_X, f\} \tag{41}$$

Predpokladajme, že takýto potenciál existuje. Vzniká otázka, či sa vyššie spomínané vlastnosti prenášajú z 1-formy α_X aj na potenciál (funkciu) P_X. Jednoduchá analýza ukazuje, že linearita funkcie P_X voči $X \in \mathcal{G}$ sa (využitím vôle v potenciáli) dá vždy zabezpečiť. To umožňuje zakódovať ju do ekvivalentného objektu, do zobrazenia

$$P : M \to \mathcal{G}^* \qquad\qquad \langle P(x), X\rangle := P_X(x),\ x \in M$$

čo sa dá chápať aj ako funkcia na M s hodnotami v $\mathcal{G}^*$, t.j. $P \in \Omega^0(M, \mathcal{G}^*)$.

Trochu náročnejšia analýza odhalí, že s Ad-správaním potenciálu (t.j. so vzťahom $\mathcal{L}_{\xi_X} P_Y = P_{[X,Y]}$) je to zložitejšie a že sa nie vždy dá dosiahnuť. Zároveň sa pritom odhalí, že toto Ad-správanie úzko súvisí s platnosťou vzťahu

$$\{P_X, P_Y\} = P_{[X,Y]} \tag{42}$$

t.j. s faktom, že predpis $X \mapsto P_X$ je *homomorfizmus* Lieových algebier alebo tiež s *ekvivariantnosťou* zobrazenia P, t.j. s vlastnosťou

$$P \circ R_g = \mathrm{Ad}_g^* \circ P \tag{43}$$

▼ Infinitezimálna verzia (40) dáva po dosadení $\alpha_X = dP_X$ vzťah $d(\xi_X P_Y - P_{[X,Y]}) = 0$ a spolu s (41) potom aj $d(\{P_X, P_Y\} - P_{[X,Y]}) = 0$. Odtiaľ vidíme, že na pravej strane (42) sa môže všeobecne objaviť nejaká konštantná funkcia $\beta(X, Y)$, ktorá závisí od X, Y. Využitie vôle v potenciáli umožňuje touto konštantnou funkciou hýbať a niekedy sa dá odstrániť. Ale niekedy nie (sú za tým „kohomológie Lieových algebier"). ▲

Pre nás bude najzaujímavejší prípad, keď sa funkcia $\beta(X, Y)$ dá odstrániť, t.j. keď platia vzťahy (42) a (43). Zobrazenie $P : M \to \mathcal{G}^*$ sa vtedy volá *momentové zobrazenie*, jemu prislúchajúce zobrazenie $\tilde{P} : \mathcal{G} \to \mathcal{A}(M)$, $X \mapsto P_X$ je *komomentové zobrazenie* a samotné hamiltonovské pôsobenie R_g grupy G na (M, ω) sa vtedy volá *poissonovské* pôsobenie. (Takéto „slušné" pôsobenie vzniká napríklad *zdvihom ľubovoľného* pôsobenia z bázy do totálneho priestoru kodotykovej fibrácie (pozri (36)) alebo v prípade *koadjungovaných orbít*, ktoré sme spomínali v predchádzajúcej prednáške.)

Ak Lieova grupa G zachováva *aj hamiltonián*, $R_g^* H = H$ (ide teda o symetriu celej *hamiltonovskej sústavy* (M, ω, H)), tak funkcia P_X je pre každé $X \in \mathcal{G}$ *zachovávajúca sa veličina*. Máme teda toľko (nezávislých) zachovávajúcich sa veličín, koľko je rozmer grupy symetrie (= rozmer Lieovej algebry $\mathcal{G}$; ak E_i je báza $\mathcal{G}$, tak $P_X = X^i P_i$ a *všetky* funkcie $P_i = P_{E_i}$ sa zachovávajú).

Redukovaný fázový priestor. Často sa stane, že na prvý pohľad zložitá úloha sa výrazne zjednoduší prechodom do ťažiskovej sústavy. Je to preto, lebo vypadnú *nezaujímavé* stupne voľnosti spojené s pohybom ťažiska. To čo zostane má samozrejme menej stupňov voľnosti (keďže nejaké vypadli) a teda tento krok zmenšil (zredukoval) fázový priestor. Tento jednoduchý nápad je podstatou techniky redukcie fázového priestoru pomocou symetrie. Tu si opíšeme všeobecnú schému redukcie a zvyšok tejto a celú ďalšiu prednášku ju budeme už len ilustrovať na konkrétnych príkladoch.

Budeme predpokladať, že na $2n$-rozmernej symplektickej variete (M, ω) máme *voľné* a *poissonovské* pôsobenie R_g Lieovej grupy G. Zodpovedá jej teda ekvivariantné momentové zobrazenie $P : M \to \mathcal{G}^*$. Vieme, že ak by bola G aj symetriou hamiltoniánu, tak by sa zložky P_i momentového zobrazenia P

zachovávali, takže celá trajektória by ležala iba v *časti* celkového fázového priestoru M, a to tej, ktorú P zobrazuje do jedného bodu $p \in \mathcal{G}^*$. Fixujme preto bod $p \in \mathcal{G}^*$ a ako M_p označme jeho vzor

$$M_p := \{x \in M \mid P(x) = p\}$$

Je to podvarieta rozmeru $2n - \dim G$, ktorá je definovaná implicitne rovnicami

$$P_i(x) = p_i \equiv \text{ konšt.}, \quad i = 1, \dots, \dim G$$

Podvarieta M_p nie je invariantná voči pôsobeniu celej grupy G; ľahko sa overí, že

$$R_g M_p = M_{\mathrm{Ad}^*_g p}$$

Odtiaľ vidíme, že M_p je invariantná iba voči podgrupe $G_p \subset G$, stabilizátoru bodu p (voči pôsobeniu Ad^* na $\mathcal{G}^*$). Ohraničenie pôsobenia R_g na G_p už teda necháva M_p (ako množinu) na mieste

$$R_g M_p = M_p \qquad\qquad g \in G_p$$

Pôsobenie grupy G_p rozkladá varietu M_p na orbity $\mathcal{O}_x$. Keďže G_p pôsobí na M_p *voľne* (platilo to pre celú grupu G), tak všetky orbity sú ako variety rovnaké (difeomorfné). Ukazuje sa, že výsledným redukovaným fázovým priestorom je faktorvarieta $\hat{M}_p := M_p / G_p$ (priestor orbít). Nato aby sme to dokázali, potrebujeme na nej nájsť symplektickú formu. Dá sa k nej dopracovať nasledovne.

Pôvodná symplektická forma ω žije na M. Uvažujme jej *ohraničenie* $\omega|_{M_p}$ na podvarietu M_p. Označme ho $\tilde{\omega}$. Táto 2-forma má dve dôležité vlastnosti, ktoré z nej umožnia o chvíľu vyrobiť *symplektickú* formu $\hat{\omega}$ na $\hat{M}_p$. Po prvé, je G_p-invariantná, t.j.

$$R_g^* \tilde{\omega} = \tilde{\omega} \qquad g \in G_p$$

Okrem toho je navyše aj *horizontálna*, t.j. anuluje ju (čo i len jediný) „vertikálny" argument, kde pod vertikálnym vektorom chápeme vektor, ktorý sa dotýka orbity. Dá sa však ukázať (odporúčame si to premyslieť), že formy na M_p, ktoré sú horizontálne a súčasne G_p-invariantné, sú vo vzájomne jednoznačnom vzťahu s formami na $\hat{M}_p$. (Takéto formy na M_p sú pull-backom nejakej formy na $\hat{M}_p$ voči prirodzenej projekcii na faktorvarietu, $\pi : M_p \to \hat{M}_p$, $x \mapsto \hat{x} \equiv [x]$.)

To ale znamená, že na $\hat{M}_p$ žije jednoznačná 2-forma $\hat{\omega}$, ktorá zodpovedá forme $\tilde{\omega}$ na M_p. Práve táto 2-forma je hľadanou symplektickou formou. (Previerka, že to tak je, je užitočným cvičením ponechaným na čitateľa.)

Z pôvodnej symplektickej variety (M, ω) sa teda získala nová (menšia) symplektická varieta $(\hat{M}_p, \hat{\omega})$. Hovorí sa jej *redukovaná symplektická varieta* a v mechanickom kontexte tiež *redukovaný fázový priestor*. Povie sa tiež, že vznikla z (M, ω) *redukciou grupou* G.

A čo ak máme na začiatku celú hamiltonovskú sústavu a hamiltonián je tiež invariantný voči grupe G? Redukuje sa symetriou celá hamiltonovská sústava? Jednoducho sa nahliadne, *že áno*. Dá sa presvedčiť, že pôvodné hamiltonovské pole sa prirodzene projektuje na redukovaný fázový priestor a že je na ňom opäť hamiltonovským poľom, pričom jeho hamiltonián $\hat{H}$ je ohraničením pôvodného hamiltoniánu H na $\hat{M}_p$. Redukciou grupou G tak vzniká z pôvodnej hamiltonovskej sústavy (M, ω, H) *redukovaná hamiltonovská sústava* $(\hat{M}_p, \hat{\omega}, \hat{H})$, ktorá je menšia ako pôvodná.

Jednoduchý príklad: Pohyb v zvislom gravitačnom poli. Uvažujme ako hamiltonovskú sústavu obyčajný fázový priestor jedného hmotného bodu $T^*\mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{R}^6[\mathbf{r}, \mathbf{p}]$ so symplektickou formou $\omega = d\mathbf{p}. \wedge d\mathbf{r}$ a s hamiltoniánom $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m + mgz$. Ide teda o pohyb tohoto bodu v zvislom homogénnom gravitačnom poli. Intuitívne je zrejmé, že translácie vo vodorovných smeroch $(x, y, z) \mapsto (x + a_x, y + a_y, z)$ sú jej symetriou. Formálnym vyjadrením týchto pocitov je to, že *zdvih* translácií do fázového priestoru

$$(x, y, z, p_x, p_y, p_z) \mapsto (x + a_x, y + a_y, z, p_x, p_y, p_z)$$

zachováva symplektickú formu aj hamiltonián. Keďže toto pôsobenie Lieovej grupy $G = (\mathbb{R}^2, +)$ vo fázovom priestore je voľné, sú naplnené všetky zákonom predpísané podmienky na začatie redukčného konania.

Začína sa momentovým zobrazením. Pre $X = X^1E_1 + X^1E_1$ z Lieovej algebry dvojrozmernej translačnej grupy má fundamentálne pole tvar $\xi_X = X^1\partial_x + X^2\partial_y$, takže

$$i_{\xi_X}\omega = -(X^1dp_x + X^2dp_x) = -d(X^1p_x + X^2p_x) \equiv -dP_X$$

Momentové zobrazenie preto vyzerá

$$P : (x, y, z, p_x, p_y, p_z) \mapsto p_xE^1 + p_yE^2 \sim (p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2 \sim \mathcal{G}^*$$

Vzor bodu $(p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2 \sim \mathcal{G}^*$ sú všetky body (x, y, z, p_x, p_y, p_z) také, že p_x a p_y sú fixné, takže $M_p \sim \mathbb{R}^4[x, y, z, p_z]$. Translačná grupa je komutatívna, preto Ad aj Ad* pôsobí triválne a teda G_p je celá translačná grupa. Body na jej orbitách sú ekvivalentné v zmysle $(x, y, z, p_z) \sim (x+a_x, y+a_y, z, p_z)$; ak podľa tejto ekvivalencie faktorizujeme, dostaneme ako priestor orbít $\hat{M}_p \sim \mathbb{R}^2[z, p_z]$. (Projekcia $\pi : M_p \to \hat{M}_p$ tu vyzerá $(x, y, z, p_z) \mapsto (z, p_z)$.) Ohraničenie ω na $M_p \sim \mathbb{R}^4[x, y, z, p_z]$ je $\tilde{\omega} = dp_z \wedge dz$ a táto forma je pull-backom formy $\hat{\omega} = dp_z \wedge dz$ z $\hat{M}_p$. Napokon ohraničenie H vedie na $\hat{H}(z, p_z) = p_z^2/2m + mgz$ (plus aditívna konštanta, ktorú nepíšeme). Záver teda je, že redukovaná hamiltonovská sústava tu je $\mathbb{R}^2[z,p]$ so symplektickou formou $\hat{\omega} = dp \wedge dz$ a s hamiltoniánom $H(z,p) = p^2/2m + mgz$; ide teda o pohyb hmotného bodu v homogénnom gravitačnom poli, pri ktorom sa *ignorujú* (nezaujímavé = vodorovné) *stupne voľnosti* (x,y) a prežije len zaujímavá (= zvislá, jednorozmerná) časť úlohy.

Symplektická redukcia 2

- Pr.1: Problém dvoch telies - redukcia pomocou grupy translácií
- Pr.2: Pohyb v centrálnom poli - redukcia pomocou grupy rotácií
- Pr.3: Redukcia $\mathbb{C}^{n+1}$ na $\mathbb{C}P^n$ pomocou grupy $U(1)$

Problém dvoch telies a translácie. Uvažujeme pohyb dvoch hmotných bodov v E^3. Ich dynamika sa opisuje hamiltoniánom

$$H(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2) = \mathbf{p}_1^2/2m_1 + \mathbf{p}_2^2/2m_2 + U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$$

ktorý je funkciou vo *fázovom* priestore $\mathbb{R}^{12}[\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2] \equiv T^*\mathbb{R}^6$, kde $\mathbb{R}^6[\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2]$ je *konfiguračný* priestor sústavy. V tomto konfiguračnom priestore pôsobí (trojrozmerná) *translačná* grupa $\mathbb{R}^3[\mathbf{a}]$ štandardným predpisom

$$\hat{R}_\mathbf{a} : (\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) \mapsto (\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}, \mathbf{r}_2 + \mathbf{a})$$

Jej zdvih $R_\mathbf{a} := T^*\hat{R}_{-\mathbf{a}}$ na $T^*\mathbb{R}^6[\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2]$ vyzerá

$$R_\mathbf{a} : (\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2) \mapsto (\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}, \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$$

Ak prejdeme v konfiguračnom priestore namiesto $(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ k súradniciam ťažiska $\mathbf{R}$ a relatívnemu vektoru $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, dostaneme

$$\omega = d\mathbf{p}_1. \wedge d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{p}_2. \wedge d\mathbf{r}_2 = d\mathbf{P}. \wedge d\mathbf{R} + d\mathbf{p}. \wedge d\mathbf{r}$$

Pôsobenie $R_\mathbf{a}$ vo fázovom priestore v týchto súradniciach vyzerá

$$R_\mathbf{a} : (\mathbf{R},\mathbf{r},\mathbf{P},\mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{R} + \mathbf{a}, \mathbf{r}, \mathbf{P}, \mathbf{p})$$

Je *voľné* a symplektická forma ω je voči nemu invariantná. Hamiltonián vychádza

$$H(\mathbf{R},\mathbf{r},\mathbf{P},\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + U(|\mathbf{r}|) \qquad M \equiv m_1 + m_2 \quad \mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

a je zjavne *invariantný*. Môže sa preto začať redukcia.

Podobne ako v minulom príklade nahliadneme, že momentové zobrazenie sa dá napísať ako

$$P : (\mathbf{R}, \mathbf{r}, \mathbf{P}, \mathbf{p}) \mapsto \mathbf{P}$$

takže varieta M_p zo všeobecnej konštrukcie tu zodpovedá časti fázového priestoru s *fixnou* hodnotou *celkovej hybnosti ťažiska* $\mathbf{P}$; dá sa teda stotožniť s $\mathbb{R}^9[\mathbf{R}, \mathbf{r}, \mathbf{p}]$. Grupa G_p je tu (opäť) *celá* translačná grupa $\mathbb{R}^3[\mathbf{a}]$, takže výsledná varieta $\hat{M}_p$ sa dá stotožniť s $\mathbb{R}^6[\mathbf{r}, \mathbf{p}]$. Ohraničenie symplektickej formy ω na podvarietu M_p tu vyzerá $\tilde{\omega} = d\mathbf{p}. \wedge d\mathbf{r}$ (pozor, žije na $\mathbb{R}^9[\mathbf{R}, \mathbf{r}, \mathbf{p}]$). Táto 2-forma je naozaj horizontálna a $\mathbb{R}^3[\mathbf{a}]$-invariantná. Zápis „redukovanej" symplektickej formy $\hat{\omega}$ vyzerá rovnako ako pre $\tilde{\omega}$, ale $\hat{\omega}$ žije už len na $\mathbb{R}^6[\mathbf{r}, \mathbf{p}]$. *Translačná* symetria pôvodnej úlohy *o dvoch* telesách nás teda priviedla (symplektickou redukciou) k jednoduchšej úlohe *o jednom* (fiktívnom) telese. Redukovaným fázovým priestorom je už len $\mathbb{R}^6[\mathbf{r}, \mathbf{p}]$ (fázový priestor bodu s „polohovým vektorom" $\mathbf{r}$) so symplektickou formou $\hat{\omega} = d\mathbf{p}. \wedge d\mathbf{r}$. V tomto fázovom priestore generuje dynamiku hamiltonián

$$\hat{H} = \hat{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2\mu + U(r)$$

ktorý zodpovedá pohybu telesa v *centrálnom poli*. Vznikne z pôvodného hamiltoniánu $H(\mathbf{R}, \mathbf{r}, \mathbf{P}, \mathbf{p})$ takto: Najprv sa v ňom položí $\mathbf{P} =$ konšt. za ohraničenie na M_p. (Vzniknutá nepodstatná aditívna konštanta sa škrtne.) Výsledok nezávisí od $\mathbf{R}$ (vďaka invariantnosti) a preto prechod na $\hat{M}_p$ (zlikvidovanie $\mathbf{R}$) sa už formálne nijako neprejaví.

Pohyb v centrálnom poli a rotácie. Úloha o jednom telese v centrálnom poli, ktorá zostala, sa dá redukovať ďalej, lebo má ešte dodatočnú *rotačnú* symetriu.

Rotačná grupa štandardne pôsobí v konfiguračnom priestore $M = E^3$ jedného hmotného bodu, $\mathbf{r} \mapsto A\mathbf{r}$, $A \in SO(3)$. Ak l_j je báza Lieovej algebry $so(3)$, tak príslušné generátory ξ_X na M a ich zdvihy do *fázového priestoru* $T^*M[\mathbf{r}, \mathbf{p}]$ sú

$$\xi_{l_j} = -\epsilon_{jik} x_i \partial_k \qquad \tilde{\xi}_{l_j} = -\epsilon_{jik}\{x_i \frac{\partial}{\partial x_k} + p_i \frac{\partial}{\partial p_k}\}$$

Funkcie P_X vychádzajú

$$P_{l_j}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = -\epsilon_{jkl} x_k p_l \equiv -(\mathbf{r} \times \mathbf{p})_j \equiv -L_j$$

Pre momentové zobrazenie odtiaľ štandardne dostaneme

$$(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \mapsto -\mathbf{L}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \equiv -\mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

takže M_p je tu podvarieta $M_{\mathbf{L}} \subset \mathbb{R}^6[\mathbf{r}, \mathbf{p}]$ bodov s konštantnou hodnotou vektora *momentu hybnosti* $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{konšt}$. Skalárne násobenie vektormi $\mathbf{r}$ a $\mathbf{p}$ dáva $\mathbf{L}.\mathbf{r} = 0 = \mathbf{L}.\mathbf{p}$, takže ak vyberieme os z v smere $\mathbf{L}$, tak vektory $\mathbf{r}$ aj $\mathbf{p}$ budú „v rovine xy". V *polárnych* súradniciach v týchto rovinách teda máme zatiaľ súradnice $(r, \varphi, p_r, p_\varphi)$ (čo sú súradnice na $T^*\mathbb{R}^2[r, \varphi]$). Podmienka na fixovanie *dĺžky* vektora $\mathbf{L}$ dáva navyše $L_z = xp_y - yp_x = p_\varphi = L =$ konšt., takže ako $M_{\mathbf{L}}$ zostáva súradnicovo už len $\mathbb{R}^3(r, \varphi, p_r)$. Ako G_p fungujú rotácie, ktoré nemenia $\mathbf{L}$, t.j. rotácie len okolo osi z ($SO(2) \subset SO(3)$). Ekvivalencia na orbitách tohoto pôsobenia je $(r, \varphi, p_r) \sim (r, \varphi + a, p_r)$ takže faktorizácia dáva $\hat{M}_p \equiv \hat{M}_{\mathbf{L}} \cong \mathbb{R}^2(r, p_r)$. Symplektická forma v pôvodnom $\mathbb{R}^6$ bola $\omega = dp_r \wedge dr + dp_\vartheta \wedge d\vartheta + dp_\varphi \wedge d\varphi$. Jej ohraničenie na $M_{\mathbf{L}}$ je $\tilde{\omega} = dp_r \wedge dr$, čo je invariantné a horizontálne voči generátoru ∂_φ grupy $SO(2)$. Na $\hat{M}_{\mathbf{L}}$ je teda $\hat{\omega} = dp_r \wedge dr$. Ohraničenie hamiltoniánu vyzerá ($p_\vartheta \mapsto 0$, $p_\varphi \mapsto L \equiv$ konšt.)

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + U(r) \equiv \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{p_\vartheta^2}{2\mu r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{p_\varphi^2}{2\mu r^2} + U(r) \mapsto \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r)$$

Vyšlo teda, že symplektická redukcia rotačnou grupou dáva pre problém pohybu telesa v centrálnom poli $U(r)$ dynamiku „radiálneho" stupňa voľnosti r, t.j. dynamiku vo fázovom priestore so súradnicami (r, p_r), symplektickou formou $\hat{\omega} = dp_r \wedge dr$ a hamiltoniánom

$$\hat{H}(r, p_r) = \frac{p_r^2}{2\mu} + U_{ef}(r) \qquad U_{ef}(r) := U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$
$$\equiv \textit{efektívna potenciálna energia}$$

Redukcia $\mathbb{C}^{n+1}$ na $\mathbb{C}P^n$ a $U(1)$ symetria. Začína sa z $\mathbb{C}^{n+1}$ so súradnicami $(z^0, z^1, \ldots, z^n)$ a kanonickej symplektickej formy (pozri (35))

$$\begin{aligned} \omega &= (-i/2) d\bar{z}^a \wedge dz^a \\ &\equiv (-i/2)[d\bar{z}^0 \wedge dz^0 + d\bar{z}^k \wedge dz^k] \\ &= (-i/2)[d\bar{z}^0 \wedge dz^0 + d\bar{z}^1 \wedge dz^1 + \cdots + d\bar{z}^n \wedge dz^n] \end{aligned} \qquad (44)$$

Je zjavne invariantná voči prirodzenému pôsobeniu grupy $U(1)$ v $\mathbb{C}^{n+1}$

$$z^a \mapsto e^{it} z^a, \ \bar{z}^a \mapsto e^{-it} \bar{z}^a \qquad \Rightarrow \qquad \omega \mapsto \omega \qquad (45)$$

s generátorom

$$\xi_{E_1} = v = i(z\partial - \bar{z}\bar{\partial}) \equiv i(z^a \partial_a - \bar{z}^a \bar{\partial}_a)$$

▼ Toto je fundamentálne pole $\xi_{E_1} = v$, ktoré zodpovedá *bázovému* prvku $E_1 = i$ Lieovej algebry $\mathcal{G} = u(1)$. Pre všeobecný prvok $X = X^1 E_1 \in \mathcal{G}$ bude $\xi_X = X^1 \xi_{E_1} = X^1 v$. ▲

Na redukciu sa ešte zídu aj iné (lokálne) súradnice v $\mathbb{C}^{n+1}$, súradnice $(r, \varphi, w^k, \bar{w}^k)$, ktoré zavedieme takto: všeobecný bod z leží na sfére polomeru r, takže v oblasti, kde $z^0 \neq 0$, platí

$$r^2 = |z|^2 \equiv \bar{z}^a z^a = |z^0|^2 + |z^1|^2 + \cdots + |z^n|^2 = |z^0|^2(1 + \bar{w}w)$$

$$z^k = z^0 w^k, \quad \bar{w}w := \bar{w}^k w^k = |w^1|^2 + \cdots + |w^n|^2$$

To dáva pre z^0 a z^k parametrizáciu

$$z^0 = z^0(r, \varphi, w^k, \bar{w}^k) = re^{i\varphi}/(1 + \bar{w}w)^{1/2} \tag{46}$$

$$z^k = z^k(r, \varphi, w^k, \bar{w}^k) = re^{i\varphi}w^k/(1 + \bar{w}w)^{1/2} \tag{47}$$

Všimneme si, že pôsobenie (45) grupy $U(1)$ vyzerá v týchto súradniciach veľmi jednoducho

$$(r, \varphi, w^k, \bar{w}^k) \mapsto (r, \varphi + t, w^k, \bar{w}^k) \qquad \text{takže} \qquad v = \partial_\varphi$$

Ideme symplekticky redukovať. Podľa všeobecnej schémy vytvoríme 1-formu α_X a presvedčíme sa, že je exaktná:

$$\alpha_X = -i_{\xi_X}\omega = dP_X \qquad P_X(z, \bar{z}) = X^1 P_{E_1}(z, \bar{z}) = X^1(1/2)|z|^2$$

▼

$$\alpha_X = -i_{\xi_X}\omega = -iX^1(-i/2)i_{z^a\partial_a - \bar{z}^a\bar{\partial}_a}(d\bar{z}^b \wedge dz^b) = X^1(1/2)(\bar{z}^a dz^a + z^a d\bar{z}^a)$$
$$= X^1(1/2)d(\bar{z}^a z^a) \equiv X^1(1/2)d|z|^2$$

▲

Nesklamala - naozaj *je* exaktná. Pomocou jej potenciálu P_X môžeme teda zaviesť momentové zobrazenie

$$P : \mathbb{C}^{n+1}[z, \bar{z}] \to (u(1))^* \qquad P(z, \bar{z}) = P_1(z, \bar{z})E^1 = \frac{1}{2}|z|^2 E^1 \tag{48}$$

▼

$$\langle P(z, \bar{z}), X\rangle := P_X(z, \bar{z}) = X^1 P_{E_1}(z, \bar{z}) = X^1(1/2)|z|^2$$

▲

Teraz môžeme prikročiť k ďalšiemu kroku receptu: vyrobiť varietu M_p ako vzor fixného bodu p v $\mathcal{G}^* = (u(1))^*$. Pohľad na konkrétny tvar zobrazenia (48) ukazuje, že touto varietou je tu *sféra* (fixného) polomeru $R > 0$:

$$M = \mathbb{C}^{n+1} \qquad M_p = S_R^{2n+1} \equiv \{z \in \mathbb{C}^{n+1} |\ |z|^2 = R^2\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$$

Mimoriadne jednoducho sa táto sféra S_R^{2n+1} vyjadruje v súradniciach $(r, \varphi, w^k, \bar{w}^k)$; podmienka znie

$$S_R^{2n+1} \; : \; r = R \qquad \Rightarrow \qquad S_R^{2n+1}[\varphi, w^k, \bar{w}^k]$$

čiže na sfére prežijú už len súradnice $(\varphi, w^k, \bar{w}^k)$. Grupa G_p (zo všeobecného receptu), ktorá necháva na pokoji M_p, je tu *celá* grupa $G = U(1)$, lebo reprezentácia Ad^* pôsobí triviálne. Voči tejto grupe treba teraz $M_p \equiv S_R^{2n+1}$ *prefaktorizovať*, čím sa získa varieta $\hat{M}_p = \mathbb{C}P^n$. Ohraničenie pôsobenia grupy $G = U(1)$ na $M_p \equiv S_R^{2n+1}$ súradnicovo vyzerá

$$(\varphi, w^k, \bar{w}^k) \mapsto (\varphi + t, w^k, \bar{w}^k)$$

takže na faktorvariete $\hat{M}_p = \mathbb{C}P^n$, priestore orbít, zostanú už len súradnice $(w^k, \bar{w}^k)$

$$\hat{M}_p = \mathbb{C}P^n[w^k, \bar{w}^k]$$

To je dobre, lebo $(w^k, \bar{w}^k)$ sa štandardne používajú ako súradnice na $\mathbb{C}P^n$.

Práve na tejto variete má žiť výsledná („redukovaná") symplektická forma $\hat{\omega}$. Chceme získať jej súradnicové vyjadrenie. Podľa všeobecnej schémy treba najprv urobiť *ohraničenie* $\tilde{\omega}$ symplektickej formy ω na podvarietu $M_p = S_R^{2n+1}$. To by v súradniciach $(r, \varphi, w^k, \bar{w}^k)$ prakticky znamenalo položiť vo vyjadrení ω všade $r = R$, a teda $dr = 0$; súradnica r teda opúšťa scénu a ďalej zostanú už len súradnice $(\varphi, w^k, \bar{w}^k)$. Zo všeobecnej teórie sa ďalej vie, že táto forma $\tilde{\omega}$ je voči pôsobeniu $G_p = U(1)$ *invariantná* a navyše že je *horizontálna* (vynuluje sa po dosadení čo i len jediného argumentu typu ξ_X). Invariantnosť v súradniciach $(\varphi, w^k, \bar{w}^k)$ znamená, že jej komponenty neobsahujú premennú φ. Horizontalita sa prejaví tak, že tam nikde nebude figurovať bázová forma $d\varphi$. Spolu vidíme, že aj súradnica φ sa porúča, takže $\tilde{\omega}$ sa vyjadruje už len cez $(w^k, \bar{w}^k)$. Z explicitného súradnicového vyjadrenia prirodzenej projekcie

$$\text{všeobecne} \qquad \pi : M_p \to \hat{M}_p \tag{49}$$

$$\text{t.j. tu} \qquad \pi : S_R^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n \qquad\qquad z \mapsto [z] \tag{50}$$

$$\text{resp.} \;\; (\varphi, w^k, \bar{w}^k) \mapsto (w^k, \bar{w}^k) \tag{51}$$

vidno, že na $\hat{M}_p = \mathbb{C}P^n$ naozaj existuje forma $\hat{\omega}$ taká, že $\tilde{\omega} = \pi^* \hat{\omega}$ pričom formy $\tilde{\omega}$ a $\hat{\omega}$ majú *úplne rovnaké* súradnicové vyjadrenie. Takže ak vyrátame súradnicový tvar formy $\tilde{\omega}$, na získanie $\hat{\omega}$ už nebude čo počítať. Vyrátať súradnicový tvar formy $\tilde{\omega}$ nie je ťažké.

V princípe treba prepočítať diferenciály v (44) pomocou (46) a (47). Samozrejme, keďže diferenciály dr a $d\varphi$ v konečnom výraze nebudú, nemusíme ich brať vážne *ani tu* a môžeme ich pokojne *ignorovať* už v medzivýpočtoch. T.j. napríklad

$$dz^0(r,\varphi,w^k,\bar{w}^k) = d\{re^{i\varphi}/(1+\bar{w}w)^{1/2}\} = \cdots = z^0\left(\frac{dr}{r} + id\varphi - \frac{1}{2}\frac{d(\bar{w}w)}{1+\bar{w}w}\right)$$

ale stačí si z toho nechať

$$dz^0 = z^0\left(-\frac{1}{2}\frac{d(\bar{w}w)}{1+\bar{w}w}\right) \equiv z^0\beta \qquad \beta := -\frac{1}{2}\frac{\bar{w}^k dw^k + w^k d\bar{w}^k}{1+\bar{w}w}$$

Podobne vyjde (po vyškrtnutí zbytočných členov)

$$dz^k = z^0(dw^k + w^k\beta)$$

Teraz stačí tieto vyjadrenia dosadiť do (44) (a položiť $r = R$ v (46) a (47)) a vyjde

$$\tilde{\omega} = -\frac{i}{2}\, h_{\bar{k}j}\; d\bar{w}^k \wedge dw^j \qquad h_{\bar{k}j} = R^2\;\frac{(1+\bar{w}w)\delta^{kj} - w^k\bar{w}^j}{(1+\bar{w}w)^2}$$

▼

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega} &= (-i/2)[d\bar{z}^0 \wedge dz^0 + d\bar{z}^k \wedge dz^k] \\
&= (-i/2)|z^0|^2[\beta \wedge \beta + (d\bar{w}^k + \bar{w}^k\beta) \wedge (dw^k + w^k\beta)] \\
&= -\frac{i}{2}\frac{R^2}{1+\bar{w}w}[d\bar{w}^k \wedge dw^k + (w^k d\bar{w}^k - \bar{w}^k dw^k) \wedge \beta] \\
&= -\frac{i}{2}\frac{R^2}{1+\bar{w}w}\left[d\bar{w}^k \wedge dw^k - \frac{1}{2}(w^k d\bar{w}^k - \bar{w}^k dw^k) \wedge \frac{w^j d\bar{w}^j + \bar{w}^j dw^j}{1+\bar{w}w}\right] \\
&= -\frac{i}{2}\frac{R^2}{1+\bar{w}w}\left[d\bar{w}^k \wedge dw^k - \frac{w^k d\bar{w}^k \wedge \bar{w}^j dw^j}{1+\bar{w}w}\right] \\
&= R^2\left(-\frac{i}{2}\right)\frac{(1+\bar{w}w)\delta^{kl} - w^k\bar{w}^j}{(1+\bar{w}w)^2}\; d\bar{w}^k \wedge dw^j
\end{aligned}$$

▲

Zistili sme teda, že $\mathbb{C}P^n$ má prirodzenú symplektickú štruktúru, ktorá sa dá získať (napríklad) symplektickou redukciou z $\mathbb{C}^{n+1}$ pomocou symetrie $U(1)$. Ukazuje sa, že skutočnosť je ešte zaujímavejšia a bohatšia: $\mathbb{C}P^n$ je (podobne ako $\mathbb{C}^{n+1}$) dokonca *Kählerovou* varietou, [4] pričom kählerovská štruktúra je daná hermitovskou formou

$$\hat{h} = \hat{g} + i\hat{\omega} = \; h_{\bar{k}j}\; d\bar{w}^k \otimes dw^j \qquad h_{\bar{k}j} = R^2\;\frac{(1+\bar{w}w)\delta^{kj} - w^k\bar{w}^j}{(1+\bar{w}w)^2}$$

[4] O Kählerových varietách sa hovorí v iných prednáškach tejto Zimnej školy.