

**„MATEMATICKÁ FYZIKA”**  
**Osnova bakalárskej (výberovej) prednášky na FMFI UK Bratislava**  
**doc.RNDr.Marián Fecko, PhD.**  
**(verzia z 26.11.2019)**

**Zmysel a cieľová skupina** výberovej prednášky:

Tento kurz (4h prednáška a 2h cvičenie týždenne) má študentom vyložiť základy analýzy na varietách (diferenciálnej geometrie) a Lieových grúp a ich reprezentácií. Sústredí sa pritom na **aspekty** a ilustratívne príklady, ktoré sú **relevantné pre fyzikov**. Svojou úrovňou a predbežnými požiadavkami je nastavený tak, aby bol zrozumiteľný každému **motivovanému** záujemcovi, ktorý má za sebou základné matematické prednášky (hlavne **lineárnu algebru** a bežnú analýzu). Keďže tie tu absolujú **všetci fyzici**, kurz **nie je** myslený **len pre teoretických fyzikov**. Jeho ambíciou je naučiť adeptov s preberaným materiálom **aj reálne pracovať** (počítať).

**1. týždeň:** Lineárna algebra tenzorov (multilineárna algebra)

Duálny priestor a duálna báza

Tensor typu  $\binom{r}{s}$ , jeho zložky (komponenty) a ich transformovanie pri zámene bázy

Tensorové operácie (lineárne kombinácie, tenzorový súčin, kontrakcie, (anti)symmetrizácie)

Metrický tenzor, dvíhanie a spúšťanie indexov

**2. týždeň:** Základné maticové Lieove grupy

Symetrie (automorfizmy) rôznych štruktúr a grupy (a príklady na ne)

Maticové Lieove grupy -  $GL(n, \mathbb{R})$ ,  $O(n)$ ,  $SO(n)$ ,  $SL(n)$ ,  $U(n)$ ,  $SU(n)$

Afinná grupa  $GA(n, \mathbb{R})$  a jej vloženie do maticovej grupy  $GL(n+1, \mathbb{R})$

Euklidovská a Poincarého grupa

Priamy súčin grúp

**3. týždeň:** Pojem variety

Čo je varieta, zobrazenia variet, opis hladkých plôch v  $\mathbb{R}^n$

Varieta zadaná implicitne (väzbami) a parametricky

Krivka a funkcia na  $M$  a ich súradnicové vyjadrenia

Pojem Lieovej grupy (skĺbenie pojmu grupa a varieta)

**4. týždeň:** Lieove algebry

Lieova algebra (ako taká, bez vzťahu k Lieovým grupám), príklady

Lieova algebra  $\mathcal{G}$  grupy  $G$

Maticové Lieove algebry  $gl(n, \mathbb{R})$ ,  $o(n)$ ,  $so(n)$ ,  $sl(n)$ ,  $u(n)$ ,  $su(n)$  (odvodenie z grúp, rozmery, bázy)

Priamy súčet Lieových algebier

Jednoperametrické podgrupy a exponenciálne zobrazenie  $\mathcal{G} \rightarrow G$ , explicitne pre  $SO(2)$ ,  $SO(3)$ ,  $U(1)$ ,  $SU(2)$

Odvodený homomorfizmus  $f' : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  Lieových algebier k homomorfizmu  $f : G \rightarrow H$  grúp

**5. týždeň:** Reprezentácie grúp a Lieových algebier

Reprezentácia  $\rho$  grupy  $G$  vo  $V$ , odvodená reprezentácia  $\rho'$  Lieovej algebry  $\mathcal{G}$  vo  $V$

Konjugácia, Ad-reprezentácia  $G$  a ad-reprezentácia  $\mathcal{G}$

Ireducibilné, reducibilné a úplne reducibilné reprezentácie

Splietajúci operátor dvoch reprezentácií a Schurove lemy

Invariantný skalárny súčin, Killingova-Cartanova forma a jej Ad-invariantnosť, poloprostá algebra

Tensorový súčin  $\rho_1 \otimes \rho_2$  a súčet  $\rho_1 \oplus \rho_2$  reprezentácií grupy

**6. týždeň:** Vektorové polia na variete

Dotykový (tangenciálny) priestor, vektory a vektorové polia, rôzne ekvivalentné definície

Súradnicová báza  $\partial_i$  v dotykovom priestore

Vektorové pole na  $M$  a jeho rozklad voči súradnicovej báze, transformácia komponent pri zámene súradníc  
Integrálne krivky vektorového poľa, rovnice pre ne, lokálny tok poľa  $V$

### 7. týždeň: Tenzorové polia na variete

Gradient  $df$  ako kovektorové pole, súradnicová báza  $dx^i$  pre kovektory duálna k báze  $\partial_i$  pre vektory  
Tenzorové pole typu  $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ , jeho zložky (komponenty) a ich transformovanie pri zámene súradníc  
Repérne a korepérne pole, repérne komponenty tenzorových polí

### 8. týždeň: Metrický tenzor na variete (Riemannove variety)

Ortogonalné súradnice a ortonormované (ko)repérne pole  
Metrický tenzor a kinetická energia v prváckej mechanike  
Funkcionál dĺžky krivky, geodetiky ako najkratšie čiary  
Gradient  $\nabla f$  ako vektorové pole  
Ortonormované repérne a korepérne polia

### 9. týždeň: Zobrazenia tenzorov indukované zobrazeniami variet

Diferenciál  $f_*$  zobrazenia  $f$ , jeho vlastnosti a komponentné vyjadrenie  
Pull-back  $f^*$  zobrazenia  $f$ , jeho vlastnosti komponentné vyjadrenie  
Indukovaný metrický tenzor  
Kinetická a potenciálna energia v lagranžovskej (= druháckej) mechanike

### 10. týždeň: Lieova derivácia

Lievovský prenos, Lieova derivácia a jej komponentné vyjadrenie  
Všeobecné vlastnosti Lieovej derivácie  
Exponenta Lieovej derivácie  
Komutátor  $[V, W]$  ako miera neuzavretia rovnobežníka z integrálnych kriviek  
Holonómne a neholonómne (ko)repérne polia

### 11. týždeň: Killingove rovnice

Zachovanie dĺžky kriviek a izometrie riemannovskej variety  
Killingove rovnice ako infinitezimálna verzia podmienky izometrie, ich komponentný zápis  
Killingove vektory pre  $E^n$ , translácie a rotácie (Euklidova grupa)  
Killingove vektory pre  $E^{r,s}$ , translácie, rotácie a hyperbolické rotácie (Poincarého grupa)  
Tenzorové polia (napr. metrika) s predpísanou symetriou  
Zachovanie uhlov a konformné transformácie, konformné Killingove vektory

### 12. týždeň: $G$ -priestor $M$ , reprezentácia na funkciách na ňom

Akcia grupy na množine (pravá a ľavá), orbita, stabilizátor,  $G$ -priestor, homogénny priestor; príklady  
Reprezentácia  $G$  v priestore funkcií na  $G$ -priestore a jej odvodená reprezentácia  
Regulárna reprezentácia (v priestore funkcií na  $G$ )  
Fundamentálne polia (generátory) akcie  $G$  na variete  $M$ , ich vlastnosti  
Fundamentálne polia pre rotácie a translácie v  $E^3$  a ich súvis s operátormi momentu hybnosti a hybnosti v kvantovej mechanike

### 13. týždeň: Homogénne priestory a nakrytia

Homogénny priestor  $G/H$  a jeho vzťah k „všeobecným“ homogénnym priestorom  
Sféra  $S^2$  (a všeobecnejšie  $S^n$ ) ako homogénny priestor (aké  $G$  a  $H$  v  $G/H$ , ...)  
Vzťah Lieových algebier a reprezentácií grúp, ak jedna grupa nakrýva druhú  
Nakrytie  $\pi : SU(2) \rightarrow SO(3)$ , topológia rotačnej grupy, neekvivalentné slučky  
Normálna podgrupa a  $G/H$  ako grupa; veta o homomorfizme